Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра методів математичної фізики

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

«Плоска задача теорії пружності про напружений стан кругового диска»

«A plane problem of the elasticity theory for the stressed state of a circular disk»

Виконла: здобувачка денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика
Освітня програма «Прикладна математика»
Жук Світлана Сергіївна

Керівник: доктор фіз.-мат. наук, проф. Вайсфельд Н.Д. ____
Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доц. Процеров Ю.С.

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ ___ від _____ 2024 р.

Завідувач кафедри

_____ _____

Захищено на засіданні ЕК № _____

Протокол № ___ від _____ 2024 р.

Оцінка _____ / _____ / _____

Голова ЕК

_____ _____

Одеса — 2024 р.

ЗМІСТ

Вступ 3

Огляд літератури 4

1 Аналітичне розв'язання 6

1.1 Постановка задачі 6

1.2 Аналітичне розв'язання системи зі спрощеними крайовими умовами 7

1.2.1 Застосування перетворення Фур'є 7

1.2.2 Розв'язання однорідної системи 9

1.2.3 Пошук часних розв'язків 10

1.2.4 Пошук оригіналів і нормального напруження 12

1.3 Аналітичне розв'язання системи з ускладненими крайовими умовами 13

1.3.1 Зведення до нескінченної системи за допомгою методу ортогональних поліномів 17

2 Програмне моделювання 19

2.1 Моделювання і візуалізація результатів задачі зі спрощеними крайовими умовами 19

2.1.1 Візуалізація переміщень 19

2.1.2 Візуалізація нормального напруження 22

2.2 Моделювання і візуалізація результатів задачі з ускладненими крайовими умовами 24

2.2.1 Дослідження функції відставання 25

2.2.2 Візуалізація переміщення і нормального напруження 27

Висновки 32

Список літератури 33

ВСТУП

Актуальність даної роботи обумовлена значною цінністю результатів для інженерної галузі. Розрахунки, виконані в рамках цього дослідження, є важливими для проектування нових механічних компонентів та будівельних конструкцій. Вони також сприяють дослідженню нових матеріалів та вивченню впливу різних умов на деталі та компоненти.

Основна мета роботи полягає у знаходженні аналітичного розв'язання задачі про напружений стан кругового диска, його чисельному моделюванні та візуалізації. Додатково досліджується вплив різних параметрів на напружений стан диска.

Сучасні дослідження в галузі теорії пружності охоплюють аналіз напруженого стану різних конструкційних елементів. Зазвичай чисельні методи передбачають апроксимацію на етапі крайової задачі. У цій роботі використано аналітичний підхід без апроксимацій до моменту отримання формул або нескінченних систем рівнянь, після чого ці результати піддаються чисельному моделюванню.

Об'єктом дослідження є круглий диск під плоским навантаженням. Задача полягає у встановленні формул для обчислення переміщень і напружень. Перша частина роботи описує аналітичне розв'язання, друга - технічну реалізацію моделювання, візуалізацію та дослідження параметрів.

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Дослідження напруженого стану кругового диска є важливою складовою теорії пружності та пластичності, що має велике значення для інженерного проектування та аналізу механічних систем. У рамках цієї тематики розглядаються різні аспекти, пов'язані з розподілом напружень і деформацій у дисках під дією різних навантажень і умов.

Механіка суцільних середовищ і пластичні деформації в обертових дисках

Одна з ключових робіт у цій галузі стосується напружено-деформованого стану швидко обертового диска постійної товщини, розглянутого в рамках механіки суцільних середовищ. В роботі враховано, що матеріал диска є однорідним і має властивості еластичної та ідеально-пластичної деформації. У пластичній зоні напруження та пластичні деформації пов'язані законом, аналогічним до використаного в теорії деформаційної пластичності. Запропонований загальний алгоритм розв'язання дозволяє отримувати аналітичні вирази для різних функцій пластичності, зокрема для квадратичного критерію текучості Мізеса. Це дослідження вводить поняття зовнішніх та внутрішніх контрольних параметрів і визначає допустимі межі зовнішніх параметрів, що дозволяє використовувати отримані результати в попередньому інженерному проектуванні та чисельних програмах .

Напруження в сплющеному бразильському диску

Інше важливе дослідження присвячено альтернативній математичній моделі для визначення розподілу напружень у сплющеному бразильському диску. В цій роботі використано техніку комплексного потенціалу Мусхелішвілі, яка забезпечує аналітичне рішення для напружень у диску з численними малими отворами, що ділять його на три частини. Аналіз показує, що

сплющений диск має переваги щодо зменшення концентрації напружень у контактній області між диском і навантажувальною плитою порівняно з класичним неушкодженим бразильським диском. Було також виявлено, що для кращого наближення до експериментальної реальності тиск на плоскі краї сплющеного диска повинен бути нерівномірним. Розроблена чисельна модель вказує на правильний нерівномірний розподіл тиску, який слід застосувати, щоб плоскі краї залишалися плоскими після деформації .

Пружнопластичні перехідні напруження в обертовому диску з навантаженням на краях

Ще одне значуще дослідження розглядає пружнопластичні перехідні напруження в тонкому обертовому диску з навантаженням на краях. Використовуючи теорію переходу Сета, автори досліджували вплив кутової швидкості на напружений стан диска. Виявлено, що для диска без навантаження на краях потрібна вища кутова швидкість для досягнення початкової текучості, тоді як під впливом навантаження на краях ця швидкість зменшується. Для непружних матеріалів, таких як гума, потрібна вища кутова швидкість порівняно з пружними матеріалами, такими як свинець, мідь і сталь. Це дослідження також показало, що обертовий диск схильний до руйнування шляхом розколу поблизу включення в отворі .

Усі розглянуті дослідження підкреслюють складність та багатогранність проблеми визначення напруженого стану кругового диска. Вони демонструють різні підходи до аналізу та вирішення цієї проблеми, зокрема через аналітичні методи та чисельне моделювання. Результати цих досліджень мають значний потенціал для застосування в інженерній практиці, особливо в галузях, де важливе значення мають механічні властивості матеріалів під дією високих навантажень та швидкостей обертання.

РОЗДІЛ 1

АНАЛІТИЧНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ

1.1 Постановка задачі

Розглянемо круговий диск з радіусом R в циліндричній системі координат з центром в початку координат. Представимо його за допомогою системи рівнянь Ламе:

$$\begin{cases} \Delta U_r - \dfrac{U_r}{r^2} - \dfrac{2U_\varphi^\bullet}{r^2} + \mu_0 \theta_\mu^{'} + \dfrac{q_r}{G} = 0 \\ \Delta U_\varphi - \dfrac{U_\varphi}{r^2} + \dfrac{2U_r^\bullet}{r^2} + \dfrac{\mu_0}{r}\theta_\mu^\bullet + \dfrac{q_\varphi}{G} = 0 \\ \Delta U_z + \mu_0 \theta_\mu^{,} + \dfrac{q_r}{G} = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Де: $U^{'}$ - похідна по змінній r

$U^\bullet$ - похідна по змінній φ

$U^{,}$ - похідна по змінній z

G - модуль зсуву

γ - питома вага матеріалу

$q_r = \gamma cos\varphi$, $q_\varphi = \gamma sin\varphi$ - інтенсивності об'ємної сили відповідно у напрямках r і φ

μ - коефіцієнт Пуасона

$\mu_0 = \dfrac{1}{1-2\mu}$, $\mu_\bullet = \mu_0 + 1$, $\mu^{'} = \mu_0 + 2$

$\Delta U = \dfrac{(rU_r^{'})^{'}}{r} + \dfrac{U_r^{\bullet\bullet}}{r^2} + U^{,,}$ - оператор Лапласа

$\theta_\mu = \dfrac{(rU_r)^{'}}{r} + \dfrac{U_\varphi^\bullet}{r} + U_z^{,}$ - об'ємне розширення

За визначенням плоскої задачі, зазначимо: $U_z = 0$, $q_z = 0$.

Для зручності запису введемо такі позначення: $U = U_r$, $V = T_\varphi$

Знайдемо похідні об'ємного розширення:

$\theta'_{mu} = \frac{(rU')'}{r} - \frac{U}{r^2} + \frac{V^{\bullet'}}{r} - \frac{V^{\bullet\bullet}}{r}$

Підставимо знайдені вирази в систему та зведемо подібні. Отрмаємо:

$$\begin{cases} \Delta U - \frac{U}{r^2} - \frac{2V^\bullet}{r^2} + \mu_0\theta'_\mu + \frac{q_r}{G} = 0 \\ \Delta V - \frac{V}{r^2} + \frac{2U^\bullet}{r^2} + \frac{\mu_0}{r}\theta^\bullet_\mu + \frac{q_\varphi}{G} = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Спочтаку розв'яжемо задачу з такими крайовими умовами:

$$U(r,\varphi)|_{r=R} = 0, V'(r,\varphi])|_{r=R} - V(r,\varphi)|_{r=R} = 0 \tag{1.3}$$

Потім ускладнимо їх:

$$U(r,\varphi)|_{r=R} = \chi(r), V'(r,\varphi])|_{r=R} - V(r,\varphi)|_{r=R} = 0 \tag{1.4}$$

Необхідно знайти переміщення і нормальні напруження.

1.2 Аналітичне розв'язання системи зі спрощеними крайовими умовами

1.2.1 Застосування перетворення Фур'є

Застосуємо перетворення Фур'є за змінною φ, щоб перейти до одновимірної задачі. Скористаємось формулою:

$$U_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-in\varphi}U(r,\varphi)d\varphi \tag{1.5}$$

Всі компоненти рівняння, не пов'язані зі змінною φ виносяться за знак інтеграла, для інших застосовується інтегрування по частинах. Застосуємо дане перетворення до інших компонентів рівнянь, які містять змінні.

Для доданків, які містять тільки константи, перетворення Фур'є буде вигядати наступним чином:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-i\varphi}\left(-\frac{rq_r}{\mu_\bullet G}\right)d\varphi = -\frac{r\gamma}{\mu_\bullet G}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-i\varphi}\cos\varphi d\varphi =$$

$$= \left[\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\right] = -\frac{r\gamma}{\mu_\bullet G}\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-i\varphi}e^{i\varphi}d\varphi + \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-i\varphi}e^{-i\varphi}d\varphi\right) =$$

$$\frac{r\gamma}{\mu G}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-i\varphi}e^{i\varphi}d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-i\varphi}e^{-i\varphi}d\varphi\right) = \frac{r\gamma}{\mu_\bullet G}\frac{\delta_{n,i}+\delta_{n,-i}}{2} \qquad (1.6)$$

Використаємо символ Кронекера і формулу Ейлера:

$\delta_{n,m} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\varphi}e^{-im\varphi}d\varphi$

Введемо такі позначення: $a_n^+ = \frac{\delta_{n,1}+\delta_{n,-1}}{2}$, $a_n^- = \frac{\delta_{n,1}-\delta_{n,-1}}{2}$

Зробимо заміну змінних $r = \rho R$, і отримаємо такий вид системи:

$$\begin{cases} (rU_n')' + \dfrac{\mu_0 in}{\mu_\bullet}V_n' - \dfrac{n^2+\mu_\bullet}{r\mu_\bullet}U_n - \dfrac{\mu' in}{\mu_\bullet r}U_n = -\dfrac{r\gamma}{\mu_\bullet G}a^+ \\ (rV_n')' + \mu_0 inU_n' - \dfrac{1+n^2\mu_\bullet}{r}V_n + \dfrac{\mu' in}{r}U_n = -\dfrac{r\gamma}{\mu_\bullet G}a^+ \end{cases} \qquad (1.7)$$

Крайові умови будуть приймати такий вид:

$U_n(\rho)|_{\rho=1} = 0$, $V_n'(\rho)|_{\rho=1} - V_n(\rho)|_{\rho=1} = 0$

Розв'язком даної неоднорізної системи буде сума загального розв'язку відповідної однорідної і часного неоднорідної.

1.2.2 Розв'язання однорідної системи

Знайдемо загальний розв'язок однорідної системи:

$$\begin{cases} (rU_n')' + \dfrac{\mu_0 in}{\mu_\bullet} V_n' - \dfrac{n^2 + \mu_\bullet}{r\mu_\bullet} U_n - \dfrac{\mu' in}{\mu_\bullet r} U_n = 0 \\ (rV_n')' + \mu_0 in U_n' - \dfrac{1 + n^2\mu_\bullet}{r} V_n + \dfrac{\mu' in}{r} U_n = 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

Перейдемо до матричного рівняння. Будемо шукати вектор

$$y(\rho) = \begin{pmatrix} U_n(\rho) \\ \\ V_n(\rho) \end{pmatrix}$$

. Представимо систему в наступному виді:

$$L(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rho \left(\begin{pmatrix} U_n' \\ \\ V_n' \end{pmatrix} \right)' + in\mu_0 \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\mu_\bullet} \\ \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_n' \\ \\ V_n' \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

$$-\frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{n^2}{\mu_\bullet} & \dfrac{in\mu'}{\mu_\bullet} \\ \\ -in\mu' & 1 + n^2\mu_\bullet \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_n \\ \\ V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

Зробимо перехід до матричного рівняння:

$$Y(\rho) = \begin{pmatrix} y_{11}(\rho) & y_{12}(\rho) \\ \\ y_{21}(\rho) & y_{22}(\rho) \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

Знайдемо невідомі коефіцієнти з граничних умов.

Будемо шукати матрицю за формулою: $Y(\rho) = \dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_C \rho^2 M^{-1}(s) ds$, де C - певний замкнений контур

Побудуємо матрицю $M^{-1}(s)$. З системи рівнянь отримаємо матрицю

$$M(s) = \begin{pmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s^2 \end{pmatrix} + in\mu_0 \begin{pmatrix} 0 & \frac{s}{\mu_\bullet} \\ s & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1+\frac{n^2}{\mu_\bullet} & in\frac{\mu'}{\mu_\bullet} \\ -\mu' in & 1+n^2\mu_\bullet \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} s^2 - 1 - \frac{n^2}{\mu_\bullet} & \frac{in}{\mu_\bullet(\mu_0 s - \mu')} \\ in(\mu_0 s + \mu') & s^2 - 1 - n^2\mu_\bullet \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

Знайдемо визначник даної матриці:

$detM(s) = 1 - 2n^2 - 2s^2 - 2n^2s^2 + s^4 + n^4 = 0$

Корені будуть мати вид: $s_1 = -n+1$, $s_2 = n-1$, $s_3 = -n-1$, $s_4 = n+1$

Обернена матриця буде мати вид:

$$M^{-1}(s) = \frac{\tilde{M}^{TP}}{\det M(s)} = \frac{\begin{pmatrix} s^2 - 1 - n^2\mu_\bullet & -\frac{in}{\mu_\bullet}(\mu_0 s - \mu') \\ -in(\mu_0 s + \mu') & s^2 - 1 - \frac{n^2}{\mu_\bullet} \end{pmatrix}}{\det M(s)} \tag{1.12}$$

1.2.3 Пошук часних розв'язків

Через специфічну частину правої частини рівняння, часні розв'язки існують тільки при $n = 1$, $n = -1$.

Знайдемо їх у вигляді степеневих функцій:

$$\begin{cases} U_n(\rho) = A_0(\rho^2 - 1) \\ V_n(\rho) = A_1(\rho^2 - 1) \end{cases} \tag{1.13}$$

Підставимо їх в систему рівнянь для трансформант, і отримаємо:

$$\begin{cases} U_{-1} = -\frac{1}{4}\frac{R^2\gamma(\rho^2-1)}{G\mu'} \\ V_{-1} = \frac{1}{4}\frac{R^2\gamma i(\rho^2-1)}{G\mu'} \end{cases} \tag{1.14}$$

$$\begin{cases} U_{1} = -\frac{1}{4}\frac{R^2\gamma(\rho^2-1)}{G\mu'} \\ V_{1} = -\frac{1}{4}\frac{R^2\gamma i(\rho^2-1)}{G\mu'} \end{cases} \tag{1.15}$$

Для знаходження коефіцієнтів матриці Y скористаємось теоремою про лишки $\int\limits_C f(z)dz = 2\pi i \sum\limits_{i=1}^{N} Res\,[f(z)]$ де N - кількість полюсів, $Res\,[f(z)]$ - лишок функції $f(z)$, полюса z.

Отримаємо матрицю $Y_{-1}^{\bullet}$наступного виду:

$$\begin{pmatrix} \frac{3\rho^2}{16} - \frac{1}{16}\rho^2\mu_\bullet + \frac{1}{4}ln(\rho)\mu_\bullet + \frac{1}{4}ln(\rho) & \frac{1}{16}\frac{i(-3\rho^2+\rho^2\mu_\bullet+4ln(\rho)-4\mu_\bullet+4+4ln(\rho)\mu_\bullet)}{\mu_\bullet} \\ \frac{1}{16}i(3\rho^2\mu_\bullet - \rho^2 - 4ln(\rho) - 4\mu_\bullet + 4 - 4ln(\rho)\mu_\bullet) & \frac{1}{16}\frac{3\rho^2\mu_\bullet-\rho^2+4ln(\rho)+4ln(\rho)\mu_\bullet}{\mu_\bullet} \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

І матрицю $Y_{1}^{\bullet}$:

$$\begin{pmatrix} \frac{3\rho^2}{16} - \frac{1}{16}\rho^2\mu_\bullet + \frac{1}{4}ln(\rho)\mu_\bullet + \frac{1}{4}ln(\rho) & \frac{1}{16}\frac{i(-3\rho^2+\rho^2\mu_\bullet+4ln(\rho)-4\mu_\bullet+4+4ln(\rho)\mu_\bullet)}{\mu_\bullet} \\ \frac{1}{16}i(3\rho^2\mu_\bullet - \rho^2 - 4ln(\rho) - 4\mu_\bullet + 4 - 4ln(\rho)\mu_\bullet) & \frac{1}{16}\frac{3\rho^2\mu_\bullet-\rho^2+4ln(\rho)+4ln(\rho)\mu_\bullet}{\mu_\bullet} \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

Таким чином отримаємо загальні розв'язки для трансформант:

$$\begin{cases} U'_{-1}(\rho) = y_{11}C_1 + y_{12}C_2 + U_{-1}(\rho) \\ V'_{-1}(\rho) = y_{21}C_1 + y_{22}C_2 + V_{-1}(\rho) \\ U'_{1}(\rho) = y_{11}C_1 + y_{12}C_2 + U_{1}(\rho) \\ V'_{1}(\rho) = y_{21}C_1 + y_{22}C_2 + V_{1}(\rho) \end{cases}$$

Підставимо граничні умови, і отримаємо:

$$\begin{cases} U'_{-1}(\rho) = -\dfrac{1}{8}\dfrac{R^2\gamma(\rho^2\mu_\bullet + 2\ln(\rho)\mu_\bullet - \mu_\bullet + 2\ln(\rho) - 3\rho^2 + 3)}{G\mu(\mu-3)} \\ V'_{-1}(\rho) = -\dfrac{1}{8}\dfrac{R^2\gamma i(-2\ln(\rho)\mu_\bullet + \rho^2\mu_\bullet - \mu_\bullet - 2\ln(\rho) + \rho^2 - 1)}{G\mu(\mu-3)} \end{cases} \tag{1.18}$$

$$\begin{cases} U'_{1}(\rho) = \dfrac{1}{8}\dfrac{R^2(\rho^2\mu_\bullet + 2ln(\rho)\mu_\bullet - \mu_\bullet + 2ln(\rho) - 3\rho^2) + 3}{G\mu(\mu-3)} \\ V'_{1}(\rho) = \dfrac{1}{8}\dfrac{R^2\gamma i(-2\ln(\rho)\mu_\bullet + \rho^2\mu_\bullet - \mu_\bullet - 2\ln(\rho) + \rho^2 - 1)}{G\mu(\mu-3)} \end{cases} \tag{1.19}$$

1.2.4 Пошук оригіналів і нормального напруження

Для знаходження цільових функцій застосуємо обернене перетворення Фур'є.

Враховуючи всі параметри, можемо представити функції переміщень у виді:

$$\begin{cases} U(\rho,\varphi) = e^{-i\varphi}U'_{-1}(\rho) + e^{i\varphi}U'_1(\rho) \\ V(\rho,\varphi) = e^{-i\varphi}V'_{-1}(\rho) + e^{i\varphi}V'_1(\rho) \end{cases}$$

Підставивши знайдені коефіцієнти, отримаємо:

$$\begin{cases} U(\rho,\varphi) = 2U_1(\rho)\cos\varphi \\ V(\rho,\varphi) = 2iV_1(\rho)\sin\varphi \end{cases}$$

Для знаходження нормального напруження підставимо отримані результати у формули, враховуючи заміну: $\rho = \dfrac{r}{R}$

З врахуванням граничних умов отримєамо:

$$\sigma_\rho(\rho,\varphi)\Big|_{\rho=1} = \frac{-R\gamma\cos\varphi}{4\mu - 1}$$

1.3 Аналітичне розв'язання системи з ускладненими крайовими умовами

В даній задачі крайові умови мають вид:

$$U_r(r,\varphi)|_{r=R} = \chi(r),\ V'(r,\varphi)|_{r=R} - V(r,\varphi)|_{r=R} = 0.$$

Система з трансформантами співпадає з отриманою для задачі зі спрощеними крайовими умовами, але загальний розв'язок відрізняється. Для різних n різні полюса можуть мати різні знаки, таким чином загальний розв'язок розбивається на 5 окремих доданків таким чином:

При $n \in [-\infty, -2]$

$$\begin{cases} U_n(\rho) = \frac{1}{4}\frac{(\rho^{-1-n}n^2(1-\mu_\bullet)+\rho^{1-n}n^2(\mu_\bullet-1)+2\rho^{-1-n}n\mu_\bullet+2\rho^{1-n}(n\mu_\bullet+2))\chi_n}{n\mu_\bullet+1} \\ V_n(\rho) = -\frac{1}{4}i\frac{(-\rho^{-1-n}n^2(\mu_\bullet-1)+\rho^{1-n}n^2(\mu_\bullet-1)+2\rho^{-1-n}n\mu_\bullet-2\rho^{1-n}(n+2\mu_\bullet))\chi_n}{n\mu_\bullet+1} \end{cases}$$

При $n = -1$

$$\begin{cases} U_{-1}(\rho) = -\frac{1}{8}[-2\rho^2 G\chi_{-1}\mu^2 + 20\ln\rho G\chi_{-1}\mu^2 - 6G\chi_{-1}\mu^2 - R^2\gamma\mu + 24G\chi_{-1}\mu + \\ +8\ln\rho G\chi_{-1}\mu + 2\ln\rho\mu R^2\gamma + \rho^2\mu R^2\gamma + 18\rho^2 G\chi_{-1} - 18G\chi_{-1} + 3R^2\gamma - \\ -12\ln\rho G\chi_{-1} + 2\ln\rho R^2\gamma - 3\rho^2 R^2\gamma]/[G\mu(\mu-3)] \\ V_{-1}(\rho) = -\frac{1}{8}i[6\rho^2 G\chi_{-1}\mu^2 - 20\ln\rho G\chi_{-1}\mu^2 - 14G\chi_{-1}\mu^2 - R^2\gamma\mu + 8G\chi_{-1}\mu - \\ -8\ln\rho G\chi_{-1}\mu + 16\rho^2 G\chi_{-1}\mu - 2\ln\rho\mu R^2\gamma + \rho^2\mu R^2\gamma - 6\rho^2 G\chi_{-1} + 6G\chi_{-1} - \\ -R^2\gamma + 12\ln\rho G\chi_{-1} - 2\ln\rho R^2\gamma + \rho^2 R^2\gamma]/[G\mu(\mu-3)] \end{cases}$$

При $n = 0$

$$\begin{cases} U_0(\rho) = \rho\chi_0 \\ V_0(\rho) = 0 \end{cases}$$

При $n = 1$

$$\begin{cases} U_1(\rho) = -\frac{1}{8}\big[-2\rho^2 G\chi_1\mu^2 + 20\ln\rho G\chi_1\mu^2 - 6G\chi_1\mu^2 - R^2\gamma\mu + 24G\chi_1\mu + \\ +8\ln\rho G\chi_1\mu + 2\ln\rho\mu R^2\gamma + \rho^2\mu R^2\gamma + 18\rho^2 G\chi_1 - 18G\chi_1 + 3R^2\gamma - \\ -12\ln\rho G\chi_1 + 2\ln\rho R^2\gamma - 3\rho^2 R^2\gamma\big]/[G\mu(\mu-3)] \\ V_1(\rho) = \frac{1}{8}i\big[6\rho^2 G\chi_1\mu^2 - 20\ln\rho G\chi_1\mu^2 - 14G\chi_1\mu^2 - R^2\gamma\mu + 8G\chi_1\mu - \\ -8\ln\rho G\chi_1\mu + 16\rho^2 G\chi_1\mu - 2\ln\rho\mu R^2\gamma + \rho^2\mu R^2\gamma - 6\rho^2 G\chi_1 + 6G\chi_1 - \\ -R^2\gamma + 12\ln\rho G\chi_1 - 2\ln\rho R^2\gamma + \rho^2 R^2\gamma\big]/[G\mu(\mu-3)] \end{cases}$$

При n є [2,∞]

$$\begin{cases} U_n(\rho = \frac{1}{4}\frac{\left(-\rho^{2+n}n^2\mu_0 + \rho^{2+n}n^2 + \rho^n n^2\mu_0 - \rho^n n^2 + 2\rho^{2+n}n\mu_0 + 2\rho^n n\mu_0 - 4\rho^{2+n}\right)\chi_n}{\rho(n\mu_0 - 1)} \\ V_n(\rho = \frac{1}{4}i\frac{\left(-\rho^{2+n}n^2\mu_0 + \rho^{2+n}n^2 + \rho^n n^2\mu_0 - \rho^n n^2 + 2\rho^{2+n}n\mu_0 + 2\rho^n n\mu_0 - 4\rho^{2+n}\right)\chi_n}{\rho(n\mu_0 - 1)} \end{cases}$$

В свою чергу шукані функції переміщень будть виражатись таким чином:

$$\begin{cases} U(\rho,\varphi) = \sum\limits_{n=-\infty}^{-2} U_n(\rho)e^{in\varphi} + U_{-1}(\rho)e^{-i\varphi} + U_0(\rho) + U_1(\rho)e^{i\varphi} + \sum\limits_{n=2}^{\infty} U_n(\rho)e^{in\varphi} \\ V(\rho,\varphi) = \sum\limits_{n=-\infty}^{-2} V_n(\rho)e^{in\varphi} + V_{-1}(\rho)e^{-i\varphi} + V_0(\rho) + V_1(\rho)e^{i\varphi} + \sum\limits_{n=2}^{\infty} V_n(\rho)e^{in\varphi} \end{cases}$$

Для знаходження аналітичного розв'язку даної задачі необхідно знайти функцію відставання $\chi(\varphi)$, використовуючи умову $\sigma(1,\varphi) = 0$.

Розв'яжемо рівняння:

$$(1-\mu)[U'(1,\varphi)] + \mu[U(1,\varphi) + V^{\bullet}(1,\varphi)] = 0 \tag{1.20}$$

Отримєамо такі умови:

$$U'(1,\varphi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 + n^2\mu_{\bullet} - 2 - 2n}{n_{\mu_{\bullet}-1}}\chi_n cos(n\varphi) - \tag{1.21}$$

$$- \left[\frac{4\mu_\bullet^2 + 2\mu_\bullet + 6}{(\mu_\bullet - 3)\mu_\bullet} \chi_1 + \frac{R^2\gamma(\mu_\bullet - 1)}{G\mu_\bullet(\mu_\bullet - 3)} \right] \cos(\varphi) + \chi_0$$

$$U(1,\varphi) = 2\sum_{n=2}^{\infty} \chi_n cos(n\varphi) + 2\chi_1 cos(\varphi)\chi_0 \tag{1.22}$$

$$V^\bullet(1,\varphi) = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(2\mu_\bullet + n\mu_\bullet - n)}{n\mu_\bullet - 1} \chi_n cos(n\varphi) + 2\chi_1 cos(\varphi) \tag{1.23}$$

Підставимо знайдені параметри:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \chi_n \cos(n\varphi) = \frac{2n^2\mu_\bullet - 2\mu_\bullet - n\mu_\bullet + 2 - n^2}{(\mu_\bullet - 1)(n\mu_\bullet - 1)} - \tag{1.24}$$

$$-\chi_1 cos(\varphi) \frac{11\mu_\bullet - 9}{(\mu_\bullet - 3)(\mu_\bullet - 1)} - \frac{R^2\gamma}{2(\mu_\bullet - 3)G} cos(\varphi) + \chi_0 = 0$$

Розкладемо вираз $\dfrac{2n^2\mu_\bullet - 2\mu_\bullet - n\mu_\bullet + 2 - n^2}{(\mu_\bullet - 1)(n\mu_\bullet - 1)}$ на доданки:

$$\frac{2n^2\mu_\bullet - 2\mu_\bullet - n\mu_\bullet + 2 - n^2}{(\mu_\bullet - 1)(n\mu_\bullet - 1)} = n\frac{2\mu_\bullet - 1}{\mu_\bullet(\mu_\bullet - 1)} - \frac{\mu_\bullet - 1}{\mu_\bullet^2} - \tag{1.25}$$

$$-\frac{1}{n}\frac{2\mu_\bullet^2 + \mu_\bullet - 1}{\mu_\bullet^2} - \frac{1}{n}\frac{2\mu_\bullet^2 + \mu_\bullet - 1}{n\mu_\bullet^2 - \mu_\bullet^3}$$

Розглянемо кожен доданок, підставляючи в дане рівняння:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \chi_n cos(n\varphi) n \frac{2\mu_\bullet - 1}{\mu_\bullet(\mu_\bullet - 1)} = -\frac{2\mu_\bullet - 1}{\mu_\bullet(\mu_\bullet - 1)} \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \bullet$$

$$\bullet \left(\int_{-a_0}^{a_0} \chi(\psi) \ln \frac{1}{|\varphi - \psi|} d\psi + \int_{-a_0}^{a_0} \chi(\psi) \ln \frac{1}{\frac{\sin\frac{|\varphi-\psi|}{2}}{\frac{|\varphi-\psi|}{2}}} d\psi - \int_{-a_0}^{a_0} \chi_n \cos|\varphi - \psi| d\psi \right) \tag{1.26}$$

$$-\sum_{n=2}^{\infty}\chi_n cos(n\varphi)\frac{\mu_\bullet-1}{\mu_\bullet^2}=-\frac{\mu_\bullet-1}{\mu_\bullet^2}\frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_0^{a_0}\chi(\varphi)d\psi+\int\limits_{-a_0}^{a_0}\chi(\varphi)\cos|\varphi-\psi|d\psi\right) \tag{1.27}$$

$$-\sum_{n=2}^{\infty}\chi_n cos(n\varphi)\frac{1}{n}\frac{2\mu_\bullet^2+\mu_\bullet-1}{\mu_\bullet^2}=-\frac{2\mu_\bullet^2+\mu_\bullet-1}{\mu_\bullet^2}\frac{1}{2\pi}\bullet$$

$$\bullet\left(\int\limits_{-a_0}^{a_0}\chi(\psi)\ln\frac{1}{|\varphi-\psi|}d\psi+\int\limits_{-a_0}^{a_0}\chi(\psi)\ln\frac{1}{\frac{\sin\frac{|\varphi-\psi|}{2}}{\frac{|\varphi-\psi|}{2}}}d\psi-\int\limits_{-a_0}^{a_0}\chi_n\cos|\varphi-\psi|d\psi\right) \tag{1.28}$$

$$-\sum_{n=2}^{\infty}\chi_n cos(n\varphi)\frac{1}{n}\frac{2\mu_\bullet^2+\mu_\bullet-1}{n\mu_\bullet^4-\mu_\bullet^3}=$$

$$=-\frac{2\mu_\bullet^2+\mu_\bullet-1}{\mu_\bullet^3(\mu_\bullet-1)}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-a_0}^{a_0}\chi(\psi)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{n\mu_\bullet-1}cos(n|\varphi-\psi|)\right)d\psi+$$

$$+\frac{2\mu_\bullet^2+\mu_\bullet-1}{\mu_\bullet^3(\mu_\bullet-1)}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-a_0}^{a_0}\chi(\psi)cos(|\varphi-\psi|)d\psi \tag{1.29}$$

$$-\chi_1\cos(\varphi)\frac{11\mu_\bullet-9}{(\mu_\bullet-3)(\mu_\bullet-1)}=\frac{11\mu_\bullet-9}{(\mu_\bullet-3)(\mu_\bullet-1)}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-a_0}^{a_0}\chi(\psi)\cos(|\varphi-\psi|)d\psi \tag{1.30}$$

$$\chi_0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-a_0}^{a_0}\chi(\psi)d\psi \tag{1.31}$$

Виконавши деякі алгебраічні перетворення, отримаємо інтегрально-диффференційне рівння такого виду:

$$\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\int\limits_{-a_0}^{a_0}\chi(\psi)ln\frac{1}{|\varphi-\psi|}d\psi+\int\limits_{-a_0}^{a_0}\chi(\psi)R(\varphi-\psi)d\psi=F(\varphi) \tag{1.32}$$

Де функції $R(\varphi-\psi)$ і $F(\varphi)$ обчислюються таким чином:

$$F(\varphi)=\frac{R^2\gamma}{2(\mu_\bullet-3)G}cos(\varphi) \tag{1.33}$$

$R(\varphi-\psi)$ утворюється як сума доданків з попредньо розглянутого розкладу, що не містять диференціалів.

Зробимо таку заміну $\varphi^*=a_0\varphi$, $\psi^*=a_0\psi$ для того щоб отримати межі інтегрування від -1 до 1.

Далі розв'яжемо отримане рівняння

$$\frac{\partial^2}{\partial\varphi^{*2}}\int\limits_{-1}^{1}\chi(\psi^*)ln\frac{1}{|\varphi^*-\psi^*|}d\psi^*+\int\limits_{-1}^{1}\chi(a_0\psi^*)R(\varphi^*-\psi^*)d\psi^*=F(\varphi^*) \tag{1.34}$$

методом ортогональних поліномів.

1.3.1 Зведення до нескінченної системи за допомгою методу ортогональних поліномів

Скористаємось поліномами Чебишева 2-го роду

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\cos^2\theta}\,\varphi(\theta)\,U_n(\theta)\,d\theta=\frac{\pi}{2}\delta_{0,n}$$

Використаємо таке спектральне співвідношення:

$x(a,\varphi)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x_n\sqrt{1-\cos^2\varphi}\,U_n(\varphi)$

Представимо функцію як ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty}x_n\sqrt{1-\cos^2\theta}\,U_n(\theta)\ln\left(\frac{1}{\varphi-\theta}\right)d\theta+\sum_{n=0}^{\infty}x_n\,K(\varphi-\theta)\sqrt{1-\cos^2\theta}\,U_n(\theta)d\theta=F(\varphi$$

Застосуємо спектральне співвідношення:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-\cos^2\theta}\, U_n(\theta) \ln\left(\frac{1}{\varphi-\theta}\right) d\varphi = -\pi(n+1)U_n(\varphi), \quad |n| \le S,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty} [x_n(n+1)U_n(\varphi)] + \sum_{n=0}^{\infty} x_n\, K(\varphi-\theta)\, V_1 - \cos^2\varphi\, U_n(\varphi) d\varphi = F(\varphi)$$

Домножимо на *формула* і проінтегруємо. Розділимо на *формула* і перейдемо до нескінченної системи рівнянь

$$x_n + \sum_{n=0}^{\infty} x_n \frac{R_n}{F} = \frac{F}{F_n}\frac{\pi}{2}\frac{n}{n+1} - \frac{\pi}{2}\frac{n+1}{n}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Де

$$R_n = \int_{-1}^{1} \sqrt{V_1 - \cos^2\theta}\, U_n(\varphi)\, K(\varphi-\theta)\, U_n(\theta) d\varphi d\theta,$$

$$F_n = \int_{-1}^{1} \sqrt{V_1 - \cos^2\theta}\, U_n(\varphi)\, F(\varphi) d\varphi$$

$U_n(\cos\theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$

a_0 - параметр відставання, визначається при чисельному моделюванні. Далі для розв'язання задачі необхідно чисельно розв'язати нескінченну систему рівнянь і підставити отримані результати в цільові функції.

РОЗДІЛ 2

ПРОГРАМНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

2.1 Моделювання і візуалізація результатів задачі зі спрощеними крайовими умовами

Запрограмуємо обчислення знайдених в першій главі функцій переміщень і напружень. Для цього скористаємось інструментами програмування Python. Для виконання обчислень і візуалізації скористаємось такими бібліотеками:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import quad
from scipy.integrate import fixed_quad
from scipy.special import eval_chebyu
import scipy.misc
import numdifftools as nd
```

Запрограмуємо обчелення деяких допоміжних функцій:

```
def mu0(mu):
  return 1+1/(1-2*mu)
def mu1(mu):
  return 2+1/(1-2*mu)

def U1(ro, mu, G, gama, R):
    return -1/4*R**2*gama*(ro-1)/(G*mu1(mu))

def V1(rho, mu, G, gama, R):
    return -1j / 4 * R**2 * gama * (rho - 1) / (G * mu1(mu))
```

2.1.1 Візуалізація переміщень

Запрограмуємо обчислення функцій переміщення:

```
def u(ro, phi,mu,G,gama,R):
  return 2*U1(ro,mu,G,gama,R)*np.cos(phi)
```

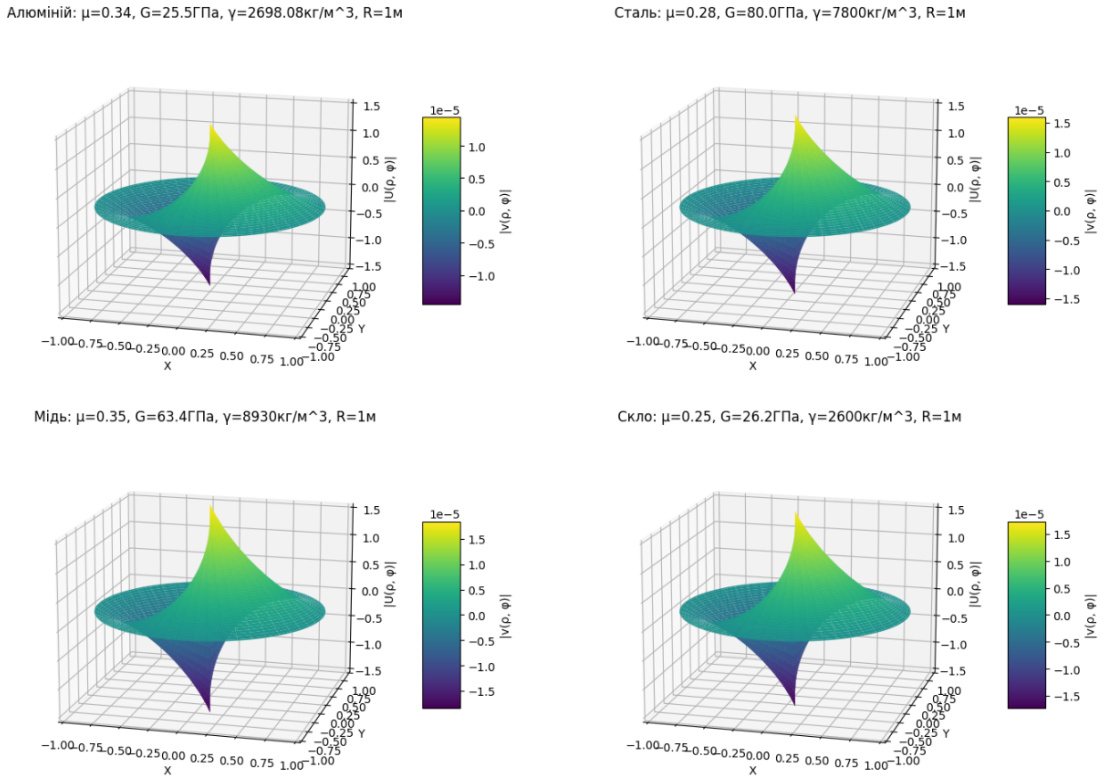
```
3
4  def v(rho, phi, mu, G, gama, R):
5      return 2j * V1(rho, mu, G, gama, R) * np.sin(phi)
```

Запрограмуємо побудову трьовимірного графіку в циліндрічній системі координат. Підставимо параметри, що відповідають значенням для різних матеріалів. *джерело*

```
1  material_parameters = {
2      "Aluminum": (0.34, 25.5e6, 2698.08),
3      "Steel": (0.28, 80e6, 7800),
4      "Copper": (0.35, 63.4e6, 8930),
5      "Glass": (0.25, 26.2e6, 2600)
6  }
7
8  def visualize_U(mu, G, gama, R, material):
9      rho = np.linspace(0.0, 1, 100)
10     phi = np.linspace(0, 2 * np.pi, 100)
11
12     rho_grid, phi_grid = np.meshgrid(rho, phi)
13     v_grid = v(rho_grid, phi_grid, mu, G, gama, R) + u(rho_grid
       , phi_grid, mu, G, gama, R)
14
15     v_abs = np.real(v_grid)
16     x_grid = rho_grid * np.cos(phi_grid)
17     y_grid = rho_grid * np.sin(phi_grid)
18
19     return x_grid, y_grid, v_abs, material, mu, G, gama, R
20
21 def visualize_multiple_U(material_parameters, R):
22     plt.ion()
23
24     fig, axs = plt.subplots(2, 2, subplot_kw={'projection': '3d
       '}, figsize=(15, 10))
25     axs = axs.flatten()
26
27     x_limits = (-1, 1)
28     y_limits = (-1, 1)
29     z_limits = (-1.5e-5, 1.5e-5)
30
31     for ax, (material_name, params) in zip(axs,
       material_parameters.items()):
```

```
        mu, G, gama = params
        x_grid, y_grid, v_abs, material, mu, G, gama, R = visualize_U(mu, G, gama, R, material_name)

        surface = ax.plot_surface(x_grid, y_grid, v_abs, cmap='viridis')
        fig.colorbar(surface, ax=ax, shrink=0.5, aspect=5, label='|v(  ,  )|')

        ax.set_xlim(x_limits)
        ax.set_ylim(y_limits)
        ax.set_zlim(z_limits)

        ax.set_xlabel('X')
        ax.set_ylabel('Y')
        ax.set_zlabel('|U(rho, phi)|')
        ax.set_title(f'{material}: mu={mu}, G={G/1e6}      , gama={gama}    /  ^3, R={R}  ')

        ax.view_init(elev=15, azim=-75)

    plt.tight_layout()
    plt.show()

visualize_multiple_U(material_parameters,1)
```

І отримаємо такі результати для функції переміщення:



Можна побачити, що характер результатів схожий для різних матеріалів, але трохи відрізняються пікові значення, що свідчить про різну сприятливість до деформацій різних матеріалів.

2.1.2 Візуалізація нормального напруження

Реалізуємо обчислення потрібних функцій. І запрограмуємо трьовимірну візуалізацію нормального напруження у циліндричній системі координат:

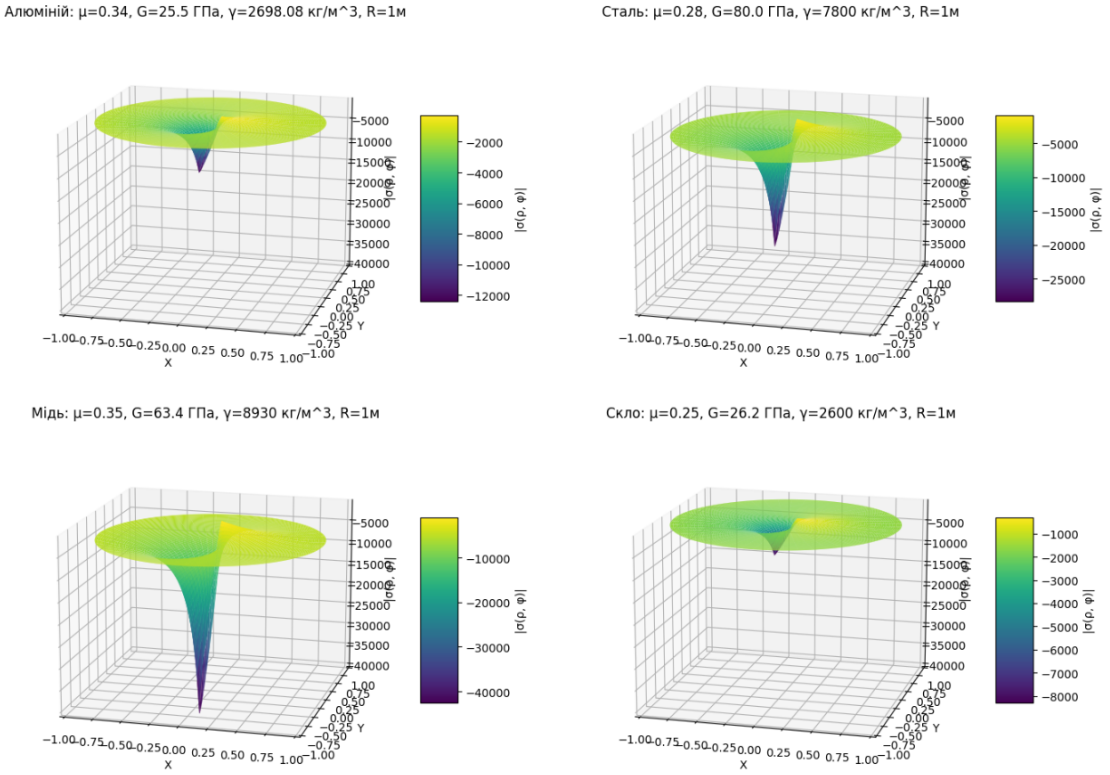
```
def dU1(rho, mu, G, gama, R):
  return -1/2*R**2*gama*rho/G/mu1(mu)

def dU(rho, phi, mu, G, gama, R):
  return 2*dU1(rho, mu, G, gama, R)*np.cos(rho)

def dV(rho, phi, mu, G, gama, R):
  return 2j*V1(rho, mu, G, gama, R)*np.cos(rho)

def sigma(rho, phi, mu, G, gama, R):
  return ( 2*G*mu0(mu)/R*((1-mu)*dU(rho, phi, mu, G, gama, R)
  +mu/rho*(u(rho, phi, mu, G, gama, R)+dV(rho, phi, mu, G, gama
   , R))) )
```

Підставимо значення параметрів для різних матеріалів:

```
def visualize_sigma_3d(mu, G, gama, R, material):

    rho = np.linspace(0.1, 1, 100)
    phi = np.linspace(0, 2 * np.pi, 100)
    rho, phi = np.meshgrid(rho, phi)

    sigma_values = sigma(rho, phi, mu, G, gama, R)

    X = rho * np.cos(phi)
    Y = rho * np.sin(phi)

    return X, Y, sigma_values, material, mu, G, gama, R

def visualize_multiple_sigma(material_parameters, R):
    plt.ion()

    fig, axs = plt.subplots(2, 2, subplot_kw={'projection': '3d'}, figsize=(15, 10))
    axs = axs.flatten()

    x_limits = (-1, 1)
    y_limits = (-1, 1)
    z_limits = (-40000, -1000)

    for ax, (material_name, params) in zip(axs, material_parameters.items()):
        mu, G, gama = params
        X, Y, sigma_values, material, mu, G, gama, R = visualize_sigma_3d(mu, G, gama, R, material_name)

        surface = ax.plot_surface(X, Y, sigma_values, cmap='viridis')
        fig.colorbar(surface, ax=ax, shrink=0.5, aspect=5, label='|  (  ,  )|')

        ax.set_xlim(x_limits)
        ax.set_ylim(y_limits)
        ax.set_zlim(z_limits)

        ax.set_xlabel('X')
```

```
        ax.set_ylabel('Y')
        ax.set_zlabel('|sigma(rho, phi)|')
        ax.set_title(f'{material}: mu={mu}, G={G/1e6}       ,
  gama={gama}     /  ^3, R={R}  ')

        ax.view_init(elev=15, azim=-75)

    plt.tight_layout()
    plt.show()

visualize_multiple_sigma(material_parameters, 1)
```

Отримаємо такі резуьтати:



Можна спостерігати схожість характеру функцій, але значну різницю пікових значень для різних матеріалів.

2.2 Моделювання і візуалізація результатів задачі з ускладненими крайовими умовами

Для отримання формул для обчислення переміщення і напруження необхідно застосувати метод ортогональних поліномів, за допомогою якого

можна звести задачу до нескінченної системи рівнянь. В першій главі роботи представлений опис даного зведення. Після цього нескінченна система обчислюється чисельними методами.

Для обчислення даної системи необіхдно визначити функції $R(\rho,\varphi)$ і $F(\varphi)$. Дані функції виражаються з рівняння, описаного в першій главі. При технічній реалізації функція $R(\rho,\varphi)$ розбивається на частини для оптимізації обчислень. У функції підставляються параметри, після чого виконується обчислення інтгралів і підстановка їх значень в цикл обчислення скінченної системи, яка є апроксимацією нескінченної. Кількість ітерацій циклу визначає параметр апроксимації.

Після цього знайдені значення підставляються у ряд для обчислення функції відствання. Треба зазначити, що a_0 в даному випадку є параметром функції відставання і може приймати значення, що відповідають дійсним значенням для $\sqrt{1-a_0\varphi}$ з урахуванням того, що φ має належати інтервалу $[-1;1]$.

У з'явзку зі схожістю результатів для різних матеріалів, а також тривалості розрахунків, необхідних для розв'язання системи та виконанні інших обчислень, в даній роботі представлені результати тільки для одного матеріалу. Але було проведено дослідження впливу за цільові функції та функцію відставання параметру a_0.

Повна реалізація опсаних обчислень представлена в додатку А.

2.2.1 Дослідження функції відставання

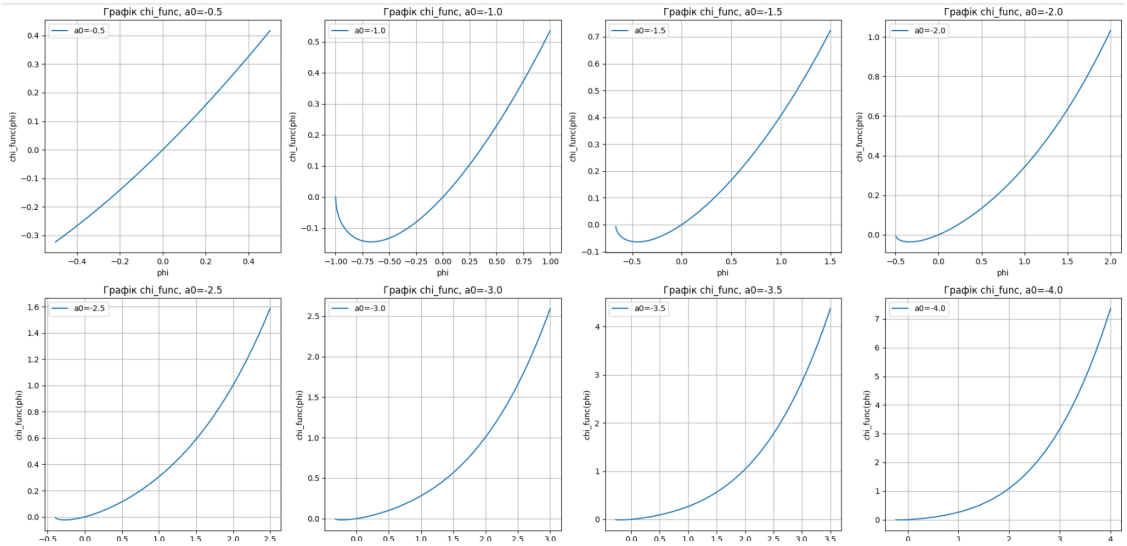
Підставимо різні значення параметру a_0 і візуалізуємо за допомгою графіків функцію $\chi(\varphi)$.

Код для обчислення даної функції:

```
def chi_func(phi,a0,chi_vect):
  result = 0
  iterator = 1
  for chi_i in chi_vect:
    result += chi_i*(1-a0*phi)**0.5*U(iterator,a0*phi)
    iterator+=1
  result /=a0**2
```

```
    return result

def plot_multiple_chi_funcs(a0_list, chi_vect):
    num_plots = len(a0_list)
    num_rows = (num_plots + 3) // 4

    fig, axes = plt.subplots(num_rows, 4, figsize=(20, 5 * num_rows))
    axes = axes.flatten()

    for idx, a0 in enumerate(a0_list):
        phi_values = np.linspace(-a0, a0, 400)
        chi_values = [chi_func(phi, a0, chi_vect) for phi in phi_values]

        axes[idx].plot(phi_values, chi_values, label=f'a0={a0}')
        axes[idx].set_title(f'              chi_func, a0={a0}')
        axes[idx].set_xlabel('phi')
        axes[idx].set_ylabel('chi_func(phi)')
        axes[idx].legend()
        axes[idx].grid(True)

    for ax in axes[num_plots:]:
        fig.delaxes(ax)

    plt.tight_layout()
    plt.show()

a0_list = [-0.5, -1.0, -1.5, -2.0, -2.5, -3.0, -3.5, -4.0]
plot_multiple_chi_funcs(a0_list, chi)
```

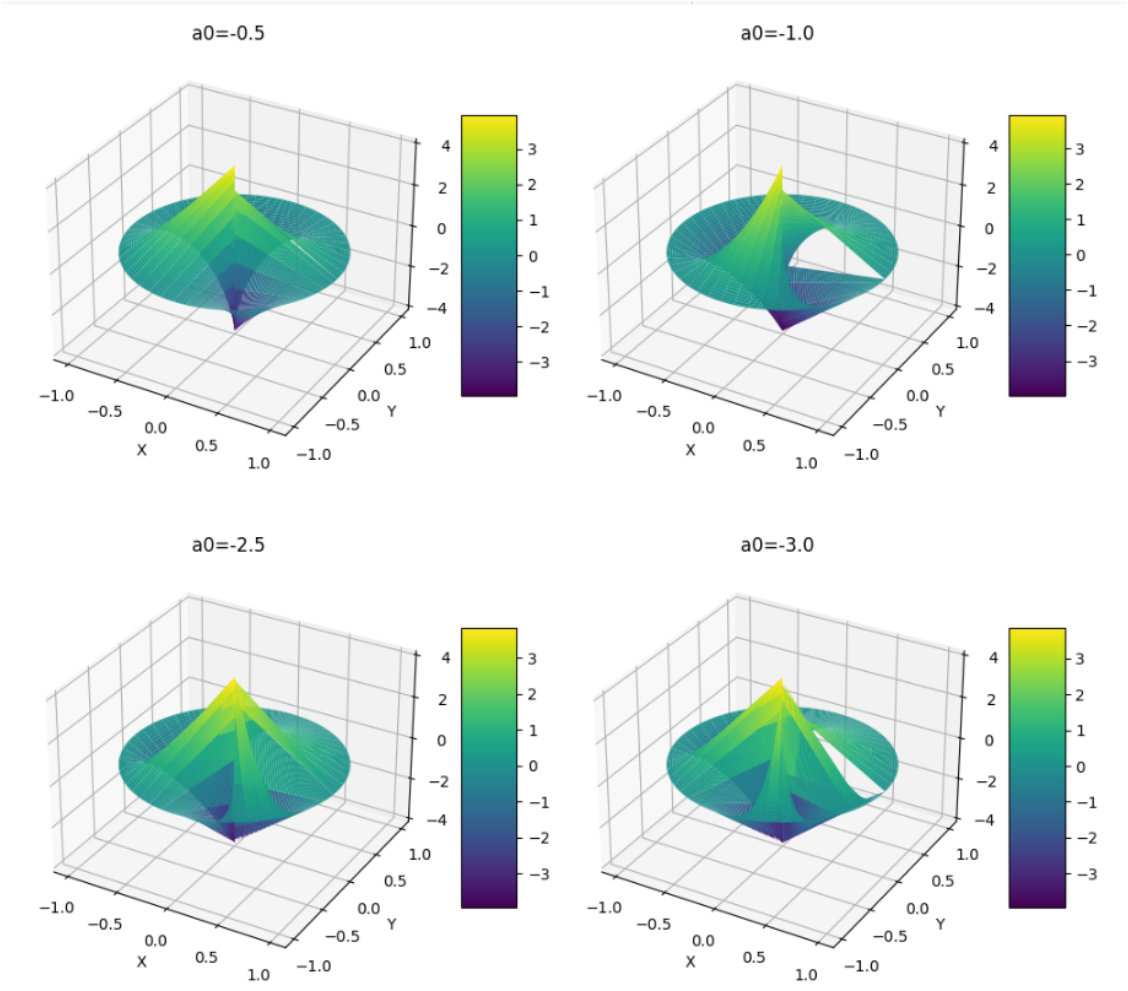
Результат роботи програми:

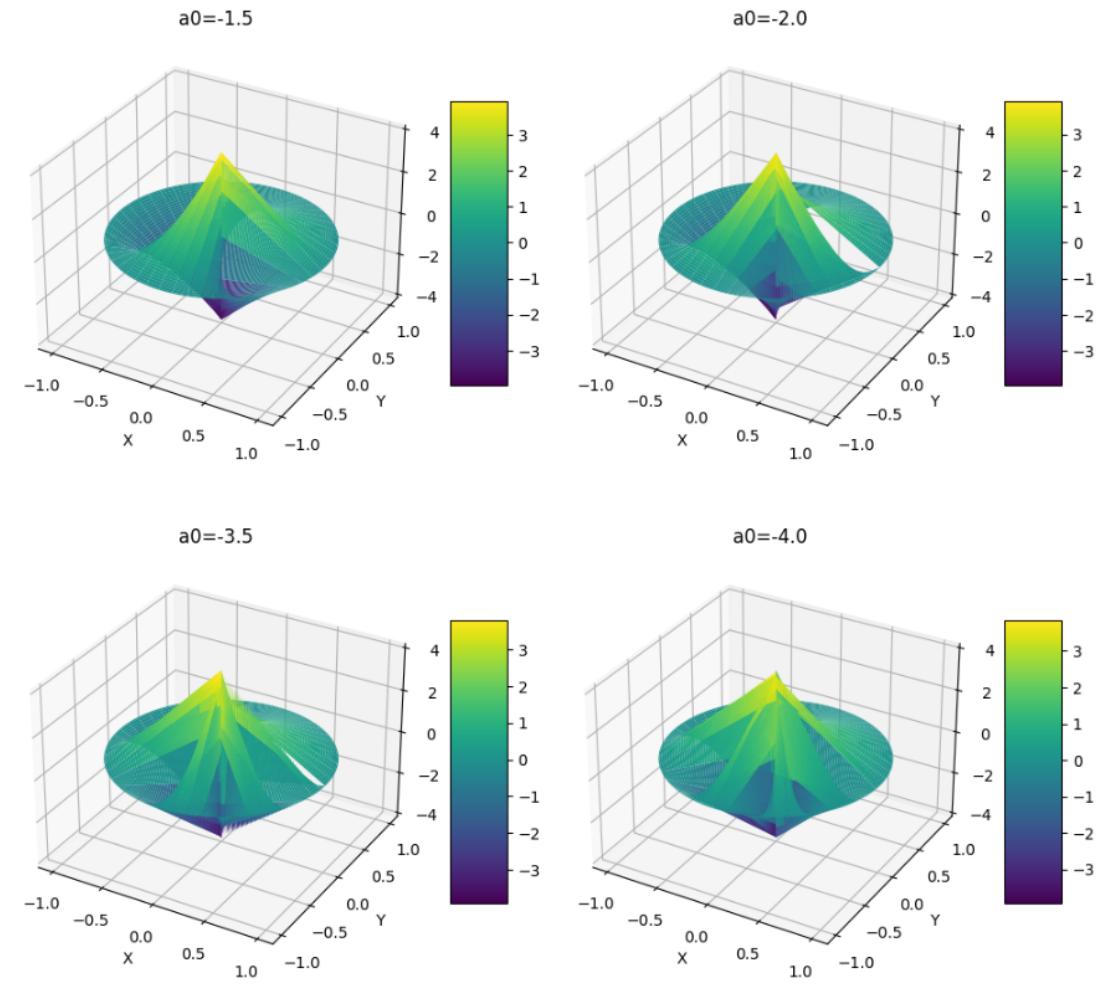


2.2.2 Візуалізація переміщення і нормального напруження

На основі представлених в теоретичній частині формул проведемо обчилсення функцій переміщення і нормального напруження, після чого побудуємо трьовимірні графіки для їх візуалізації. Код розрахунків і технічної реалізації побудови представлено в додатку Б.

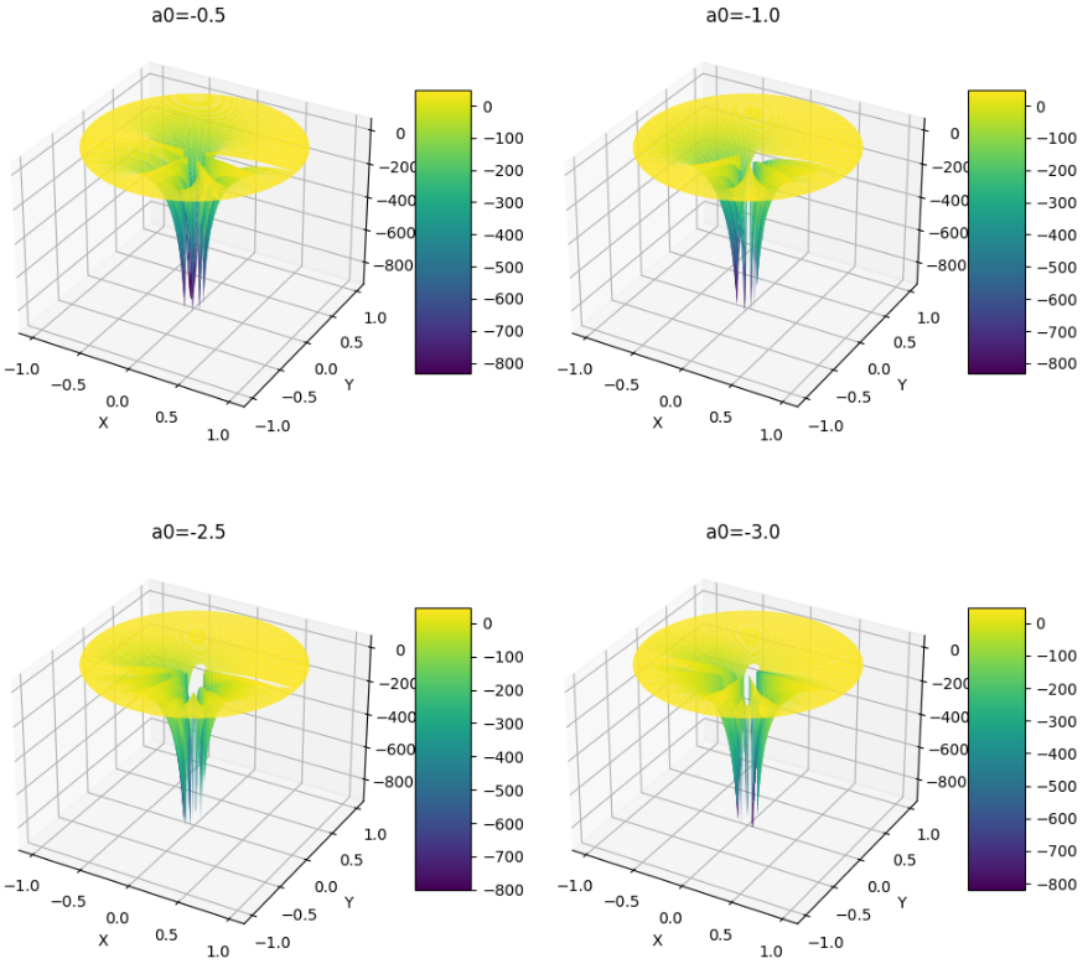
Дослідимо вплив параметру a_0 на форму отриманих поверхонь. Результати для функції переміщення можна побачити на зображеннях нижче:

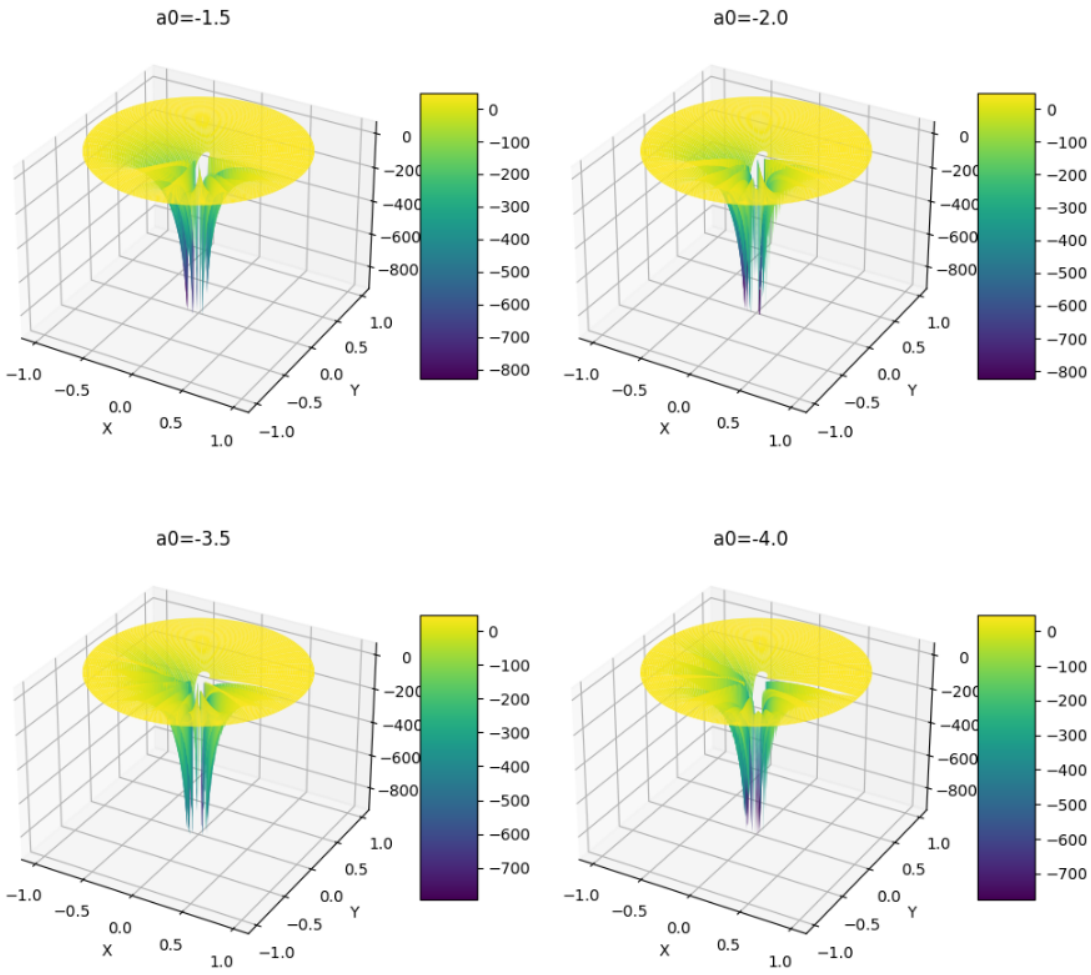

a0=-0.5
a0=-1.0
a0=-2.5
a0=-3.0
X
Y



Можна спостерігати певне викривлення поверхні, яке буде більш явним зі збільшенням функції відставання.

Для нормального напруження отримаємо такі результати:


a0=-0.5
a0=-1.0
a0=-2.5
a0=-3.0
X
Y
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
0
−100
−200
−300
−400
−500
−600
−700
−800



Можна зробити висновок, що для різних значень параметрів a_0 результати функцій нормального напруження схожі, спостерігаєма різниця в межах похибки апроксимації.

ВИСНОВКИ

У цій роботі було проведено всебічне дослідження напруженого стану кругового диска з використанням аналітичних методів та чисельного моделювання для різних крайових умов і матеріалів. Основні висновки можна підсумувати наступним чином.

Були отримані аналітичні рішення задачі про напружений стан кругового диска для двох різних крайових умов. Це дозволило глибше зрозуміти вплив різних граничних умов на розподіл напружень у диску. Аналітичні розв'язки виявилися ефективними для опису поведінки диска в різних сценаріях навантаження.

Проведене чисельне моделювання підтвердило аналітичні результати та дозволило візуалізувати напружено-деформований стан диска під дією різних навантажень. Чисельне моделювання забезпечило точніший аналіз та врахування складних факторів, що впливають на напружений стан диска. Візуалізація результатів допомогла краще зрозуміти розподіл напружень і деформацій у диску, зокрема для різних матеріалів, таких як сталь, мідь, свинець та гума.

Отримані результати мають значний потенціал для застосування в інженерії та будівництві. Знання про напружено-деформований стан кругових дисків може бути використане для оптимізації конструкцій, підвищення їхньої надійності та довговічності. Зокрема, це важливо для проектування елементів машин, роторів, коліс та інших компонентів, що зазнають високих навантажень та швидкостей обертання. Результати дослідження можуть бути також корисними для розробки нових матеріалів та інженерних рішень, спрямованих на поліпшення експлуатаційних характеристик конструкцій.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Попов Г. Я., Реут В. В., Моісеєв М. Г., Вайсфельд Н. Д. Рівняння математичної фізики. Метод ортогональних многочленів /Одеса, 2010
2. Попов Г. Я., Реут В. В., Вайсфельд Н. Д. Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень / Одеса, 1999
3. Швець В. Т. Математичні методи та моделі /Одеса, 2016
4. Вайсфельд Н. Д., Реут В. В. Рівняння математичної фізики /Одеса, 2018
5. Wu Qiong Stresses in a circular disc containing a radial crack /China, 1990
6. Christos F. Markides, Stavros K. Kourkoulis Mathematical formulation of an analytic approach to the stress field in a flattened Brazilian disc / 2020
7. Dr Pankaj Thakur EFFECT OF STRESSES IN A THIN ROTATING DISK WITH EDGE LOAD FOR DIFFERENT MATERIALS / Journal for Technology of Plasticity, September 2013
8. Ahlfors, Lars. Complex Analysis /1979
9. K. Feng, Z.-C. Shi, Mathematical Theory of Elastic Structures / New York, 1981
10. Evans, L., Partial Differential Equations /1998
11. Gercek, H. Poisson's ratio values for rocks /January 2007
12. Р. А. Шмиг, В. М. Боярчук, І. М. Добрянський, В. М. Барабаш. Термінологічний словник-довідник з будівництва та архітектури / Львів, 2010.
13. Guinan, M; Steinberg. Pressure and temperature derivatives of the isotropic polycrystalline shear modulus for 65 elements / 1974

ДОДАТОК А

```
def K1(x,y,mu):
  return (mu-1)/mu**2*(1+np.cos(abs(y-x)))

def K2(x,y,mu,epsilon=1e-10):
  delta = abs(y - x)
  if delta < epsilon:
      delta = epsilon  # Avoid division by zero
  return (2 * mu**2 + mu - 1) / mu**3 * (
        np.log(0.5 * delta / np.sin(0.5 * delta)) +
        np.cos(delta) )

def K3(x,y,mu,n=5):
  sum = 0
  for i in range(1,n+1):
    sum += 1/i*1/(i*mu-1)*np.cos(i*abs(y-x))
  return (2*mu**2+mu-1)/(mu**3*(mu-1))*(sum + np.cos(abs(y-x)))

def U(n,x):
  return eval_chebyu(n,x)
def F_func(x, mu, R, G, gama):
  return -mu*(mu-1)/(2*mu-1)*R*gama*np.pi/(G*(mu-3))*np.cos(x)

def K4(x,y,mu):
  return (11*mu-9)/((mu-3)*(mu-1))*np.cos(abs(y-x))

def K(x,y,mu):
  return mu*(mu-1)/(2*mu-1)*(K1(x,y,mu)+K2(x,y,mu)+K3(x,y,mu)+
   K4(x,y,mu)+1)


def inner_integrand_R(phi, psi, m, n, mu):
  return np.sqrt(1-phi**2)*np.sqrt(1-psi**2)*U(n,phi)*U(m,psi)*
   K(phi,psi, mu)
def inner_integral_R(psi, m, n, mu):
  result, _ = quad(inner_integrand_R, -1, 1, args=(psi,m,n,mu))
  return result
def R_nm(n,m, mu):
  result, _ = quad(inner_integral_R, -1, 1, args=(m,n, mu))
  return result
```

```
38
39 def inner_integrand_F(phi,n, mu, R, G, gama):
40   return (1-phi**2)**0.5*U(n,phi)*F_func(phi, mu, R, G, gama)
41 def F_n(n, mu, R, G, gama):
42   result, _ = quad(inner_integrand_F, -1, 1, args=(n, mu, R, G,
       gama))
43   return result
44
45
46 poisson = 0.34
47 mu = 1 + 1/(1-2*poisson)
48 R = 10
49 G = 25.5
50 gama = 2.69808
51 n = 5
52 m = 5
53 M = np.zeros((m, n))
54 for i in range(0, m):
55   for j in range(0, n):
56     if j == i:
57       M[i][j] = 1 + R_nm(j,i,mu)/(-np.pi**2/2*(i+1))
58     else:
59       M[i][j] = R_nm(j,i,mu)/(-np.pi**2/2*(i+1))
60 F = np.zeros(m)
61 for i in range(0, m):
62   F[i] = F_n(i, mu, R, G, gama)/(-np.pi**2/2*(i+1))
63
64
65 M_prev = M[:n-1, :m-1]
66 F_prev = F[:m-1]
67 M_prev
68
69
70 chi_prev = np.linalg.solve(M_prev, F_prev)
71 chi = np.linalg.solve(M, F)
72 print(chi_prev)
73 print(chi)
```

ДОДАТОК Б

```
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

def mu0(mu):
  return 1+1/(1-2*mu)
def mu1(mu):
  return 2+1/(1-2*mu)

def U1(ro, mu, G, gama, R):
    return -1/4*R**2*gama*(ro-1)/(G*mu1(mu))

def V1(rho, mu, G, gama, R):
    return -1j / 4 * R**2 * gama * (rho - 1) / (G * mu1(mu))

def u(ro, phi,mu,G,gama,R,a0,chi_vect):
  return 2*U1(ro,mu,G,gama,R)*np.cos(chi_func(phi,a0,chi_vect))

def v(rho, phi, mu, G, gama, R,a0,chi_vect):
    return 2j * V1(rho, mu, G, gama, R) * np.sin(chi_func(phi,
   a0,chi_vect))

def visualize_U(mu, G, gama, R, material, a0, chi_vect, ax):
    rho = np.linspace(0.0, 1, 100)
    phi = np.linspace(0, 2 * np.pi, 100)

    rho_grid, phi_grid = np.meshgrid(rho, phi)
    v_grid = v(rho_grid, phi_grid, mu, G, gama, R, a0, chi_vect
   ) + u(rho_grid, phi_grid, mu, G, gama, R, a0, chi_vect)

    v_abs = np.real(v_grid)

    x_grid = rho_grid * np.cos(phi_grid)
    y_grid = rho_grid * np.sin(phi_grid)

    surface = ax.plot_surface(x_grid, y_grid, v_abs, cmap='
   viridis')
    ax.set_xlabel('X')
    ax.set_ylabel('Y')
    ax.set_zlabel('|U(  ,  )|')
    ax.set_title(f'a0={a0}')
```

```
    return surface

def plot_multiple_visualizations(poisson, G, gama, R, material, a0_list, chi_vect):
    mu = 1 + 1 / (1 - 2 * poisson)
    num_plots = len(a0_list)
    num_rows = (num_plots + 3) // 4  #


    fig, axes = plt.subplots(num_rows, 4, figsize=(20, 5 * num_rows), subplot_kw={'projection': '3d'})
    axes = axes.flatten()

    for idx, a0 in enumerate(a0_list):
        surface = visualize_U(mu, G, gama, R, material, a0, chi_vect, axes[idx])
        fig.colorbar(surface, ax=axes[idx], shrink=0.5, aspect=5)

    for ax in axes[num_plots:]:
        fig.delaxes(ax)

    plt.tight_layout()
    plt.show()


a0_list = [-0.5, -1.0, -1.5, -2.0, -2.5, -3.0, -3.5, -4.0]
plot_multiple_visualizations(poisson, G, gama, R, "
                  ", a0_list, chi)
```