

А. О. Кореновський

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЙ ДІЙСНОЇ ЗМІННОЇ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені І. І. МЕЧНИКОВА
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФІЗИКИ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

А. О. Кореновський

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЙ ДІЙСНОЇ ЗМІННОЇ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

ОДЕСА
ОНУ
2023

УДК 517.518.15(075.8)

К663

Р е ц е н з е н т и:

М. О. Малаксіано, доктор технічних наук, доцент, завідувач кафедри технічної кібернетики й інформаційних технологій імені проф. Р. В. Мерктя Одеського національного морського університету;

В. М. Євтухов, доктор фізико-математических наук, професор, завідувач кафедри диференціальних рівнянь, геометрії та топології Одеського національного університету імені І. І. Мечникова.

Рекомендовано до друку науково-методичною радою

ОНУ імені І. І. Мечникова

Протокол № 6 від 22.12.2022 р.

Кореновський А. О.

К663 Диференціальні властивості функцій дійсної змінної : навчально-методичний посібник / А. О. Кореновський. – Одеса : Одеськ. нац. ун-т. ім. І. І. Мечникова, 2023. – 89 с.

ISBN 978-617-689-468-1

Даний посібник призначений для аспірантів та магістрів математичних факультетів університетів. По суті він є продовженням традиційного в університетській програмі курсу «Міра та інтеграл Лебега», що, в свою чергу, є складовою частиною теорії функцій дійсної змінної.

В курсі порушуються деякі питання, пов'язані з диференційовністю функції, яка задана на відрізку. Зокрема, вивчаються задачі відновлення функції за відомою її похідною, диференціювання інтеграла зі змінною верхньою межею, наводиться низка прикладів функцій, які мають «екзотичні» диференціальні властивості. На відміну від подібних питань, що розглядаються в курсі класичного математичного аналізу, тут використовується теорія міри та інтеграла Лебега. В багатьох випадках це дозволяє більш повно і точно описувати властивості, що вивчаються.

В перших трьох розділах посібника вивчаються диференціальні властивості монотонних функцій, функцій обмеженої варіації та абсолютно неперервних функцій. Наводиться досить велика кількість прикладів, що допомагають краще засвоїти матеріал. В четвертому розділі будується приклад неперервної, ніде недиференційовної функції і розглядаються властивості похідних чисел довільної функції.

УДК 517.518.15(075.8)

ISBN 978-617-689-468-1

© Кореновський А. О., 2023

© Одеський національний університет
імені І. І. Мечникова, 2023

Зміст

Вступ	4
Тема 1. Монотонні функції	9
Тема 2. Функції обмеженої варіації	32
Тема 3. Абсолютно неперервні функції	50
Тема 4. Недиференційовні функції	76
Література	86

ВСТУП

Почнемо з класичної задачі знаходження функції, якщо відома її похідна в кожній точці. А саме, нехай неперервна на відрізку $[a, b]$ функція f в кожній точці $x \in [a, b]$ має похідну $f'(x)$ (в точках $x = a$ та $x = b$ маються на увазі односторонні похідні). Питається, як, знаючи $f'(x)$, відновити саму функцію f ?

Методами класичного аналізу зовсім просто можна показати, що у випадку *неперервної* похідної f' єдиний розв'язок поставленої задачі надається наступною рівністю

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt, \quad a \leq x \leq b. \quad (1)$$

Більше того, рівність (1) залишається в силі, коли похідна f' *інтегровна за Ріманом* на $[a, b]$.

Але можливі випадки, коли навіть обмежена похідна неінтегровна за Ріманом. Наведемо такий приклад.

Приклад функції з обмеженою похідною, яка неінтегровна за Ріманом.

Для побудови цього прикладу нам знадобиться поняття *ніде не щільної* множини. *Ніде не щільною* на відрізку $[a, b]$ називається така множина $E \subset [a, b]$, що кожний інтервал $I \subset [a, b]$ містить в собі інтервал $J \subset I$, який не перетинається з E , тобто $J \cap E = \emptyset$. Така множина легко може бути побудована наступним чином. Розмістимо всі раціональні точки інтервала (a, b) в послідовність $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$. Тоді множина

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(r_k - \frac{b-a}{2^{k+2}}, r_k + \frac{b-a}{2^{k+2}} \right)$$

відкрита і її міра Лебега

$$mG \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2 \frac{b-a}{2^{k+2}} = \frac{b-a}{2}.$$

Множина $F = [a, b] \setminus G$, очевидно, ніде не щільна і має додатну міру, бо $mF \geq (b-a) - mG \geq \frac{b-a}{2}$. Зрозуміло також, що множина F замкнута.

Отже, нехай F – обмежена, замкнута, ніде не щільна множина додатної міри, $a = \inf F$, $b = \sup F$. Тоді, очевидно, $a, b \in F$, і, отже, множина $G = [a, b] \setminus F$ відкрита. За теоремою про структуру відкритої множини на дійсній прямій, множина G є об'єднанням не більше, ніж зчисленного набору інтервалів (a_n, b_n) , що не перетинаються і кінці яких не належать до G . Такі інтервали називають *складовими інтервалами* для множини G .

Задамо на $[a, b]$ функцію f наступною рівністю

$$f(x) = \begin{cases} (x - a_n)^2(x - b_n)^2 \sin \frac{1}{(b_n - a_n)(x - a_n)(x - b_n)}, \\ \quad a_n < x < b_n, \quad n = 1, 2, \dots, \\ 0, \quad x \in F. \end{cases}$$

Покажемо, що в кожній точці $x \in [a, b]$ існує похідна $f'(x)$ і вона є обмеженою на $[a, b]$ функцією.

Покажемо спочатку, що в точці $x_0 \in F$ похідна $f'(x_0) = 0$. Нехай $x \in [a, b]$, $x > x_0$. Якщо $x \in F$, то $f(x) = f(x_0) = 0$. Якщо ж $x \in (a_n, b_n)$, то $x_0 \leq a_n < x$, так що $x - x_0 \geq x - a_n$. Тоді

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq (x - a_n)(x - b_n)^2 \leq (x - x_0)(b - a)^2.$$

Звідси випливає, що права похідна $f'_+(x_0) = 0$. Аналогічно отримуємо, що і $f'_-(x_0) = 0$, так що існує $f'(x_0) = 0$.

Для $x \in (a_n, b_n)$ маємо

$$f'(x) = 2(x - a_n)(x - b_n)(2x - a_n - b_n) \sin \frac{1}{(b_n - a_n)(x - a_n)(x - b_n)} -$$

$$- \frac{2x - a_n - b_n}{b_n - a_n} \cos \frac{1}{(b_n - a_n)(x - a_n)(x - b_n)}.$$

Очевидно,

$$|f'(x)| \leq 2(b-a)(b-a)2(b-a) + 2 = 2(1 + 2(b-a)^3).$$

Отже, ми показали, що всюди на $[a, b]$ існує похідна $f'(x)$ і вона обмежена. Покажемо, що вона неінтегровна за Ріманом на $[a, b]$. Для цього скористаємося критерієм Лебега інтегровності функції за Ріманом. Згідно з цим критерієм, обмежена функція інтегровна за Ріманом на $[a, b]$ тоді, і лише тоді, коли множина її точок розриву має лебегову міру нуль. Ми ж покажемо, що в кожній точці множини F похідна розривна. Оскільки $mF > 0$, то звідси випливає, що f' неінтегровна за Ріманом на $[a, b]$.

Із виразу $f'(x)$ видно, що при $x \rightarrow a_n + 0$ похідна $f'(x)$ не має границі, а коливається між -1 та $+1$. Аналогічна ситуація має місце і при $x \rightarrow b_n - 0$. Нехай точка $x_0 \in F$. Оскільки множина F ніде не щільна, то в кожному околі точки x_0 знайдеться принаймні один із кінців складового інтервала (a_n, b_n) . Але у відповідному півоколі кінця цього складового інтервала є такі значення $f'(x)$, що як завгодно близькі як до $+1$, так і до -1 . Тому $f'(x)$ не має границі при $x \rightarrow x_0$.

Отже, наведений приклад показує, що інтеграл Рімана не в повній мірі розв'язує задачу відновлення функції за відомою її похідною. Більш сильним засобом для розв'язання цієї задачі є інтеграл Лебега. А саме, має місце наступна

Теорема. *Нехай функція f в кожній точці відрізка $[a, b]$ має похідну f' . Якщо ця похідна обмежена, то вона інтегровна за Лебегом на $[a, b]$ і*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt, \quad a \leq x \leq b. \quad (2)$$

ДОВЕДЕННЯ. Відзначимо, що з диференційовності f на $[a, b]$ випливає її неперервність на $[a, b]$. Для $x \in (b, b+1]$ довізначимо функцію f рівністю

$f(x) = f(b) + (x-b)f'_-(b)$. Тоді отримаємо неперервну на $[a, b+1]$ функцію, що має обмежену похідну. Для $x \in [a, b]$ і $n = 1, 2, \dots$ покладемо

$$\varphi_n(x) = n \left[f \left(x + \frac{1}{n} \right) - f(x) \right].$$

В кожній точці $x \in [a, b]$ справедлива рівність

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x).$$

Далі, кожна з функцій φ_n неперервна і, отже, вимірنا. Тому вимірна і функція f' як границя всюди збіжної послідовності вимірних функцій φ_n . Оскільки f' ще й обмежена на $[a, b]$, то вона інтегровна за Лебегом на $[a, b]$.

Для доведення рівності (2) відзначимо, що за формулою Лагранжа (скінченних приростів) маємо

$$\varphi_n(x) = n \left[f \left(x + \frac{1}{n} \right) - f(x) \right] = f' \left(x + \frac{\theta}{n} \right), \quad 0 < \theta < 1,$$

так що всі функції φ_n обмежені на $[a, b]$ одним і тим же числом при всіх $n = 1, 2, \dots$. Застосовуючи теорему Лебега про обмежену збіжність, отримаємо

$$\int_a^b f'(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx. \quad (3)$$

Скористаємось рівністю

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi_n(x) dx &= n \int_a^b f \left(x + \frac{1}{n} \right) dx - n \int_a^b f(x) dx = \\ &= n \int_{a+1/n}^{b+1/n} f(x) dx - n \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Відзначимо, що заміна змінної, яку ми провели, законна, бо функція під знаком інтеграла неперервна і інтеграл можна розуміти в сенсі Рімана.

Далі, маємо

$$\int_a^b \varphi_n(x) dx = n \int_b^{b+1/n} f(x) dx - n \int_a^{a+1/n} f(x) dx.$$

Застосовуючи до кожного з двох доданків справа теорему про середнє значення, отримаємо

$$\int_a^b \varphi_n(x) dx = f\left(b + \frac{\theta'_n}{n}\right) - f\left(a + \frac{\theta''_n}{n}\right), \quad 0 < \theta'_n, \theta''_n < 1.$$

Звідси, використовуючи неперервність функції f , знаходимо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx = f(b) - f(a).$$

Тому, в силу (3),

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx.$$

Якщо в доведенні цієї рівності замінити b на довільне $x \in [a, b]$, то отримаємо (2). $\square$

Тема 1. Монотонні функції

В цьому розділі будемо розглядати монотонні функції, які задані на скінченному відрізку. Такі функції, зрозуміло, обмежені. Крім того, достатньо розглядати лише неспадні функції. Будемо говорити в цьому випадку, що функція зростає. Якщо виникає необхідність говорити про строго зростаючу функцію, то будемо це відзначати спеціально.

Отже, нехай функція f зростає на відрізку $[a, b]$. В курсі аналізу доводиться, що для кожного $x_0 \in (a, b]$ існує ліва границя

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \sup_{a \leq x < x_0} f(x),$$

і в кожній точці $x_0 \in [a, b)$ існує права границя

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \inf_{x_0 < x \leq b} f(x).$$

Крім того, для $x_0 \in (a, b)$ справедлива нерівність $f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0)$, а також $f(a) \leq f(a + 0)$, $f(b) \geq f(b - 0)$. Далі, неперервність функції f в точці x_0 еквівалентна умові $f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0)$. Числа $f(x_0) - f(x_0 - 0)$ і $f(x_0 + 0) - f(x_0)$ називаються *лівим та правим стрибками* функції f в точці x_0 відповідно, а їх сума $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ – *стрибком* функції f в точці x_0 . В точках a та b розглядаються лише односторонні стрибки.

Лема. Нехай на відрізку $[a, b]$ задана зростаюча функція f . Тоді для будь-яких точок $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ справедлива нерівність

$$(f(a + 0) - f(a)) + \sum_{k=1}^n (f(x_k + 0) - f(x_k - 0)) + (f(b) - f(b - 0)) \leq f(b) - f(a). \quad (1.1)$$

ДОВЕДЕННЯ. Можемо припустити, що $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$. Позначимо $x_0 = a$, $x_{n+1} = b$ і зафіксуємо точки y_k так, що $x_k < y_k < x_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots, n$. Тоді, в силу монотонності f , отримаємо

$$\begin{aligned} f(x_k + 0) - f(x_k - 0) &\leq f(y_k) - f(y_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots, n, \\ f(a + 0) - f(a) &\leq f(y_0) - f(a), \quad f(b) - f(b - 0) \leq f(b) - f(y_n). \end{aligned}$$

Додаючи всі ці нерівності, отримуємо твердження леми. $\square$

Наслідок. Зростаюча на $[a, b]$ функція f може мати лише скінченне число таких точок розриву, в яких її стрибок більший, ніж задане додатне число σ .

Справді, якщо в точках розриву $x_1, \dots, x_n \in (a, b)$ стрибок функції f більший, ніж σ , то, в силу леми, $n\sigma \leq f(b) - f(a)$. Звідси випливає, що $n \leq \frac{1}{\sigma}(f(b) - f(a))$.

Теорема 1. Множина точок розриву зростаючої на відрізку $[a, b]$ функції f не більше, ніж зчисленна. Якщо $x_1, x_2, \dots$ – внутрішні точки розриву, то

$$\begin{aligned} (f(a + 0) - f(a)) + \sum_k (f(x_k + 0) - f(x_k - 0)) + (f(b) - f(b - 0)) &\leq \\ &\leq f(b) - f(a). \end{aligned} \quad (1.2)$$

ДОВЕДЕННЯ. Множина E_i точок розриву, в яких стрибок більше, ніж $\frac{1}{i}$, згідно з наслідком, може мати лише скінченну кількість елементів. Але множина E всіх точок розриву, очевидно, дорівнює $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, так що E не більше, ніж зчисленна.

Нерівність (1.2), зрозуміло, випливає з (1.1) граничним переходом. $\square$

Нехай функція f зростає на відрізку $[a, b]$ і точки $x_1, x_2, \dots$ – її точки розриву. Введемо функцію $s(x)$, поклавши $s(a) = 0$, а для $a < x \leq b$

покладемо

$$s(x) = (f(a+0) - f(a)) + \sum_{x_k < x} (f(x_k+0) - f(x_k-0)) + (f(x) - f(x-0)).$$

Ця функція називається *функцією стрибків* функції f . Функція стрибків, очевидно, зростаюча.

Теорема 2. *Різниця $\varphi = f - s$ зростаючої функції f та її функції стрибків s є зростаючою неперервною функцією.*

ДОВЕДЕННЯ. Для $a \leq x < y \leq b$ застосуємо нерівність (1.2) до відрізка $[x, y]$. Тоді отримаємо

$$s(y) - s(x) \leq f(y) - f(x). \quad (1.3)$$

Звідси випливає, що $\varphi(x) \leq \varphi(y)$, так що φ зростає.

Спрямувавши в (1.3) y до x , отримуємо

$$s(x+0) - s(x) \leq f(x+0) - f(x). \quad (1.4)$$

З іншого боку, з самого означення функції s випливає, що при $x < y$ буде $f(x+0) - f(x) \leq s(y) - s(x)$. Звідси, спрямовуючи y до x , отримуємо $f(x+0) - f(x) \leq s(x+0) - s(x)$. Ця нерівність разом з (1.4) дає $f(x+0) - f(x) = s(x+0) - s(x)$, або, що те ж саме, $\varphi(x+0) = \varphi(x)$. Аналогічно отримаємо, що $\varphi(x-0) = \varphi(x)$, так що функція φ неперервна. $\square$

Далі, як звичайно, для заданої на множині A функції f і підмножини $E \subset A$ через $f(E)$ позначається *образ* множини E . *Прообразом* множини $B \subset f(A)$ називається множина $\{x \in A : f(x) \in B\}$. Зрозуміло, що довільна множина $E \subset A$ міститься в прообразі $f(E)$, причому це включення може виявитись і строгим. Очевидно, що з умови $E_1 \subset E_2$ випливає, що $f(E_1) \subset f(E_2)$. Якщо $E = \bigcup_k E_k$, то $f(E) = \bigcup_k f(E_k)$. Якщо ж функція f встановлює *взаємно однозначне* відображення множини A на $f(A)$, то $f\left(\bigcap_k E_k\right) = \bigcap_k f(E_k)$. Зокрема, якщо $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, то і $f(E_1) \cap f(E_2) = \emptyset$.

Означення. Число λ , яке може дорівнювати $+\infty$ або $-\infty$, називається *похідним числом* функції f в точці x_0 , якщо існує така послідовність $\{h_k\}_{k=1}^\infty$, $h_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$), $h_k \neq 0$, що

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + h_k) - f(x_0)}{h_k} = \lambda.$$

Будемо позначати це так $\lambda = Df(x_0)$.

Якщо у функції f існує похідна в точці x_0 (яка може бути і нескінченною), то всі числа $Df(x_0) = f'(x_0)$. Навпаки, використовуючи означення границі за Гейне, переконуємося в тому, що якщо всі похідні числа функції f в точці x_0 дорівнюють λ (яке може бути і нескінченним), то існує і $f'(x_0) = \lambda$.

Отже, ми довели, що необхідною та достатньою умовою того, щоб функція f мала похідну в точці x_0 , є рівність всіх її похідних чисел $Df(x_0)$.

Добре відомо, що навіть неперервна функція f може не мати похідної в деяких точках. Але у *кожної* функції f , яка означена на множині E , існують похідні числа в кожній точці $x_0 \in E$, яка є граничною для E . Справді, якщо збіжна до нуля послідовність $h_k \neq 0$ така, що $x_0 + h_k \in E$, $k = 1, 2, \dots$, то послідовність $\{h_k^{-1}(f(x_0 + h_k) - f(x_0))\}_{k=1}^\infty$ має принаймні одну частинну границю (що може дорівнювати $+\infty$ або $-\infty$), яка і буде похідним числом функції f в точці x_0 .

Наприклад, легко перевірити, що у функції Діріхле $D(x)$ в кожній точці x_0 існують три, і лише три, похідних числа: $-\infty$, 0 , $+\infty$.

Очевидно також, що у зростаючої на відрізку $[a, b]$ функції f всі похідні числа невід'ємні в кожній точці.

Далі нам знадобиться одна з так званих лем про покриття. Леми такого сорту мають багато застосувань в різних питаннях теорії функцій. Спочатку дамо наступне

Означення. Нехай задані множина E і набір $M = \{I\}$ невироджених відрізків. Якщо для кожної точки $x \in E$ і будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться такий відрізок $I \in M$, що $x \in I$ і $mI < \varepsilon$, то говорять, що множина E *покрита* системою M в сенсі Віталі.

Лема Віталі про покриття. 1. Нехай обмежена множина E покрита в сенсі Віталі системою відрізків M . Тоді з системи M можна вилучити не більше, ніж зчислений набір відрізків I_k таких, що $I_k \cap I_i = \emptyset$ ($k \neq i$) і

$$m^* \left(E \setminus \left(\bigcup_k I_k \right) \right) = 0, \quad (1.5)$$

де символом m^* позначається, як звичайно, зовнішня міра Лебега.

ДОВЕДЕННЯ. Нехай Δ – інтервал, що містить в собі E (він існує, оскільки E обмежена). Якщо з системи M викинути всі відрізки, що не містяться цілком в Δ , то набір відрізків, що залишились, очевидно, також буде утворювати покриття множини E в сенсі Віталі. Тому, не обмежуючи загальності, одразу можемо вважати, що кожний відрізок з M міститься в Δ .

Візьмемо який-небудь відрізок $I_1 \in M$. Якщо $E \subset I_1$, то лема доведена. В протилежному випадку будемо за індукцією вилучати з M відрізки наступним чином. Якщо побудовані відрізки $I_1, \dots, I_n$, що попарно не перетинаються і такі, що $E \setminus \left(\bigcup_{k=1}^n I_k \right) \neq \emptyset$, то покладемо $F_n = \bigcup_{k=1}^n I_k$, $G_n = \Delta \setminus F_n$. Розглянемо всі ті відрізки з M , що цілком містяться в G_n . Оскільки $E \setminus \left(\bigcup_{k=1}^n I_k \right) \neq \emptyset$, то такі відрізки існують і, очевидно, їх довжини обмежені. Нехай d_n – точна верхня межа довжин цих відрізків ($d_n > 0$ оскільки всі відрізки в M не вироджені). Виберемо за I_{n+1} той з них, для якого

$$mI_{n+1} > \frac{1}{2}d_n.$$

Зрозуміло, що він не перетинається з жодним з відрізків $I_1, \dots, I_n$.

Такий процес приводить нас до скінченного, або зчисленого набору відрізків $\{I_k\}_k$, що попарно не перетинаються. Доведемо (1.5).

Для довільного відрізка I і числа $\alpha > 0$ через αI будемо позначати відрізок з тим же центром, що і у I , а довжина якого в α раз більше, ніж у I . Позначимо $J_k = 5I_k$, $k = 1, 2, \dots$. Оскільки I_k не перетинаються і всі містяться в Δ , то $\sum_k mI_k \leq m\Delta$. Звідси випливає, що ряд $\sum_k mJ_k$ збігається. Тому для доведення (1.5) достатньо показати, що при будь-

якому n має місце включення

$$E \setminus \left(\bigcup_k I_k \right) \subset \bigcup_{k \geq n} J_k. \quad (1.6)$$

Нехай $x \in E \setminus \left(\bigcup_k I_k \right)$. Тоді $x \in G_n$ при кожному $n = 1, 2, \dots$, і, оскільки G_n відкрита, знайдеться відрізок $I \in M$ такий, що $x \in I \subset G_n$. Але один і той же відрізок I не може міститися одразу в усіх множинах G_n , $n = 1, 2, \dots$, тому що інакше ми б отримали, що $mI \leq d_n < 2mI_{n+1}$. Але це неможливо, оскільки із збіжності ряду $\sum_k mI_k$ випливає, що $mI_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Отже, при деяких k справедливо $I \not\subset G_k$, тобто $I \cap F_k \neq \emptyset$. Будемо вважати, що k – найменше з чисел, таких, що $I \cap F_k \neq \emptyset$. Оскільки $I \cap F_n = \emptyset$ і $F_1 \subset F_2 \subset \dots$, то $k > n$.

З означення k випливає, що $I \cap F_{k-1} = \emptyset$. Тому $I \subset G_{k-1}$, так що $mI \leq d_{k-1} < 2mI_k$, а якщо врахуємо, що $I \cap F_k \neq \emptyset$, то отримаємо, що $I \cap I_k \neq \emptyset$. Тепер з отриманих властивостей $I \cap I_k \neq \emptyset$ і $mI < 2mI_k$ випливає, що $I \subset J_k \equiv 5I_k$, і, тим паче, $I \subset \bigcup_{k \geq n} J_k$. Отже, $x \in \bigcup_{k \geq n} J_k$, звідки випливає (1.6) і лема доведена. $\square$

Інший варіант леми Віталі може бути сформульований наступним чином.

Лема Віталі про покриття. 2. *Нехай обмежена множина E покрита в сенсі Віталі системою відрізків M . Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ з системи M можна вилучити скінченний набір відрізків $\{I_k\}_{k=1}^s$, таких, що $I_k \cap I_i = \emptyset$ ($k \neq i$) і*

$$m^* \left(E \setminus \left(\bigcup_{k=1}^s I_k \right) \right) < \varepsilon.$$

ДОВЕДЕННЯ. Виберемо довільний інтервал $\Delta \supset E$ і викинемо з M всі відрізки, які не містяться цілком в Δ . Система M_0 відрізків, що залишились, очевидно, також утворює покриття множини E в сенсі Віталі. Застосуємо до системи M_0 попередню лему Віталі про покриття. В ре-

зультаті отримаємо не більше, ніж зчислений набір відрізків $\{I_k\}_{k=1,2,\dots}$, що попарно не перетинаються і таких, що $m^*\left(E \setminus \left(\bigcup_k I_k\right)\right) = 0$. Якщо цей набір складається із скінченного числа відрізків I_k , то наша лема доведена. Якщо ж множина всіх цих відрізків зчисленна, то, враховуючи, що вони попарно не перетинаються і всі містяться в Δ , отримаємо $\sum_{k=1}^{\infty} mI_k \leq m\Delta$. Задамо $\varepsilon > 0$ і, користуючись збіжністю ряду $\sum_{k=1}^{\infty} mI_k$, знайдемо таке s , що $\sum_{k=s+1}^{\infty} mI_k < \varepsilon$. Тоді з очевидного включення

$$E \setminus \left(\bigcup_{k=1}^s I_k\right) \subset \left(E \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right)\right) \cup \left(\bigcup_{k=s+1}^{\infty} I_k\right)$$

отримуємо

$$m^*\left(E \setminus \left(\bigcup_{k=1}^s I_k\right)\right) \leq m^*\left(\bigcup_{k=s+1}^{\infty} I_k\right) \leq \sum_{k=s+1}^{\infty} mI_k < \varepsilon,$$

що доводить нашу лему. $\square$

Тепер доведемо наступну лему.

Лема 1. Нехай функція f строго зростає на відрізку $[a, b]$ і число $p \in [0, +\infty)$. Якщо в кожній точці $x \in E \subset [a, b]$ існує принаймні одне похідне число $Df(x) \leq p$, то

$$m^*f(E) \leq p m^*E.$$

ДОВЕДЕННЯ. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і побудуємо відкриту множину $G \supset E$ таку, що $mG < m^*E + \varepsilon$. Далі, нехай $p_0 > p$. Для точки $x_0 \in E$ існує збіжна до нуля послідовність чисел $h_k \neq 0$, $k = 1, 2, \dots$, таких, що $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x_0+h_k)-f(x_0)}{h_k} = Df(x_0) \leq p$. Тоді при достатньо великих k відрізок $I_k(x_0)$ з кінцями x_0 і $x_0 + h_k$ цілком міститься в G і, крім того, $\frac{f(x_0+h_k)-f(x_0)}{h_k} < p_0$. Тому одразу можемо вважати, що ці дві властивості виконані при всіх k . Через $J_k(x_0)$ позначимо відрізок з кінцями $f(x_0)$ і $f(x_0 + h_k)$. Оскільки f зростає, то, очевидно, $f(I_k(x_0)) = J_k(x_0)$. Оскільки

довжини відрізків $mI_k(x_0) = |h_k|$ і $mJ_k(x_0) = |f(x_0 + h_k) - f(x_0)|$, то $mJ_k(x_0) < p_0 mI_k(x_0)$. Але з умови $h_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) випливає, що серед відрізків $J_k(x_0)$ є відрізки як завгодно малої довжини. Множина $f(E)$ складається з точок $f(x_0)$, де x_0 пробігає всю множину E . Отже, сукупність всіх відрізків $J_k(x)$, де x пробігає всю множину E , утворює покриття множини $f(E)$ в сенсі Віталі. Користуючись лемою Віталі, виберемо з цих відрізків не більше ніж зчислений набір відрізків $J_{k_i}(x_i)$, $i = 1, 2, \dots$, що попарно не перетинаються, такий, що

$$m \left(f(E) \setminus \left(\bigcup_i J_{k_i}(x_i) \right) \right) = 0.$$

Тоді отримаємо, що

$$m^* f(E) \leq \sum_i mJ_{k_i}(x_i) < p_0 \sum_i mI_{k_i}(x_i).$$

Покажемо, що і відрізки $I_{k_i}(x_i)$ попарно не перетинаються. Справді, якщо $x \in I_{k_i}(x_i) \cap I_{k_j}(x_j)$, то $f(x) \in J_{k_i}(x_i) \cap J_{k_j}(x_j)$, а це суперечить тому, що $J_{k_i}(x_i)$ не перетинаються.

Отже, оскільки відрізки $I_{k_i}(x_i)$ попарно не перетинаються, то

$$\sum_i mI_{k_i}(x_i) = m \left(\bigcup_i I_{k_i}(x_i) \right),$$

а враховуючи, що $\bigcup_i I_{k_i}(x_i) \subset G$, отримаємо

$$m^* f(E) < p_0 m \left(\bigcup_i I_{k_i}(x_i) \right) \leq p_0 mG < p_0 (m^* E + \varepsilon).$$

Оскільки $\varepsilon > 0$ довільне і $p_0 > p$ довільне, то звідси твердження леми випливає очевидним чином. $\square$

Зауваження. В умові леми ми припустили, що функція f строго зростає на $[a, b]$. Це необхідно для того, щоб відрізки $J_k(x)$ не вироджувались

в точки, як потрібно в лемі Віталі.

Лема 2. Нехай функція f строго зростає на відрізку $[a, b]$ і число $q \in [0, \infty)$. Якщо в кожній точці $x \in E \subset [a, b]$ існує принаймні одне похідне число $Df(x) \geq q$, то

$$m^* f(E) \geq q m^* E.$$

ДОВЕДЕННЯ. Якщо $q = 0$, то лема тривіальна. Нехай $q > 0$. Виберемо q_0 , $0 < q_0 < q$ і $\varepsilon > 0$. Далі, побудуємо відкриту множину $G \supset f(E)$ таку, що $mG < m^* f(E) + \varepsilon$.

Як і при доведенні попередньої лемі, для $x_0 \in E$ побудуємо послідовність чисел $h_k \neq 0$, таких, що

$$\frac{f(x_0 + h_k) - f(x_0)}{h_k} > q_0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

і відрізки $I_k(x_0)$, $J_k(x_0)$, для яких $mJ_k(x_0) > q_0 \cdot mI_k(x_0)$, $k = 1, 2, \dots$

Нехай S – множина тих точок $x \in E$, в яких функція f неперервна. Тоді множина $E \setminus S$ не більше, ніж зчисленна, і, отже, має міру нуль. Якщо $x_0 \in S$, то, в силу неперервності f в точці x_0 , всі відрізки $J_k(x_0)$ містяться в G , починаючи з деякого номера. Тому можемо вважати, що $J_k(x_0) \subset G$ для всіх $k = 1, 2, \dots$

Отже, множина S покрита відрізками $I_k(x)$ в сенсі Віталі. Користуючись лемою Віталі, виберемо з усіх цих відрізків не більше, ніж зчислений набір відрізків $I_{k_i}(x_i)$, які попарно не перетинаються, такий, що $m\left(S \setminus \left(\bigcup_i I_{k_i}(x_i)\right)\right) = 0$. Але тоді

$$m^* S \leq \sum_i mI_{k_i}(x_i) < \frac{1}{q_0} \sum_i mJ_{k_i}(x_i).$$

Відрізки $J_{k_i}(x_i)$, як і $I_{k_i}(x_i)$, також попарно не перетинаються в силу

строкої монотонності функції f . Отже

$$\sum_i mJ_{k_i}(x_i) = m \left(\bigcup_i J_{k_i}(x_i) \right) \leq mG < m^*f(E) + \varepsilon.$$

Таким чином, ми отримали, що

$$m^*S < \frac{1}{q_0} (m^*f(E) + \varepsilon).$$

Звідси, в силу довільності $\varepsilon > 0$ і $q_0 < q$ випливає, що

$$m^*f(E) \geq q m^*S,$$

а оскільки S відрізняється від E хіба що на множину міри нуль, то тим самим лема доведена. $\square$

Наслідок. *Нехай функція f зростає на відрізку $[a, b]$. Тоді множина точок $x \in [a, b]$, в яких принаймні б одне похідне число $Df(x) = +\infty$, має міру нуль.*

ДОВЕДЕННЯ. Нехай f строго зростає на $[a, b]$. Тоді, згідно з попередньою лемою, образ $f(E)$ множини $E = \{x \in [a, b] : \exists Df(x) = +\infty\}$ повинен мати як завгодно велику зовнішню міру, а це неможливо, бо $f(E) \subset [f(a), f(b)]$.

Якщо ж f зростає не строго, то розглянемо строго зростаючу функцію $g(x) = x + f(x)$. Зрозуміло, що у функцій f і g множини точок, в яких існують нескінченні похідні числа, співпадають, так що наслідок справедливий і в цьому випадку. $\square$

Лема 3. *Нехай функція f зростає на відрізку $[a, b]$ і числа $p < q$. Якщо в кожній точці множини $E_{p,q} \subset [a, b]$ існують два такі похідні числа $D_1f(x)$ і $D_2f(x)$, що*

$$D_1f(x) < p < q < D_2f(x),$$

$$\text{то } mE_{p,q} = 0.$$

ДОВЕДЕННЯ. Спочатку припустимо, що f строго зростає. Тоді, за лемами 1 і 2, $m^*f(E_{p,q}) \leq p \cdot m^*E_{p,q}$ і $m^*f(E_{p,q}) \geq q \cdot m^*E_{p,q}$, а тому $q \cdot m^*E_{p,q} \leq p \cdot m^*E_{p,q}$. Звідси випливає, що $m^*E_{p,q} = 0$.

Якщо ж f зростає не строго, то до строго зростаючої функції $g(x) = f(x) + x$ застосуємо вже доведену частину леми з заміною p і q на $p+1$ і $q+1$, відповідно. $\square$

За допомогою цієї леми ми легко зможемо довести наступну основну в цьому розділі теорему про похідну монотонної функції.

Теорема Лебега. *Нехай функція f зростає на відрізку $[a, b]$. Тоді для майже всіх $x \in [a, b]$ існує скінченна похідна $f'(x)$.*

ДОВЕДЕННЯ. Нехай множина $E \subset [a, b]$ складається з тих точок x , в яких не існує навіть нескінченної похідної $f'(x)$. Тоді в кожній точці $x_0 \in E$ існують два різних похідних числа $D_1f(x_0) < D_2f(x_0)$. Знайдемо такі раціональні p і q , що $D_1f(x_0) < p < q < D_2f(x_0)$. Якщо позначимо через $E_{p,q}$ множину всіх $x \in [a, b]$ таких, що в точці x існують два різних похідних числа, що задовольняють нерівність $D_1f(x) < p < q < D_2f(x)$, то, очевидно, отримаємо $E = \bigcup_{p,q} E_{p,q}$, де об'єднання береться по всім парам раціональних чисел p, q таким, що $p < q$. Згідно з лемою 3, кожна множина $E_{p,q}$ має міру нуль, а множина E представлена у вигляді зчисленого об'єднання таких множин $E_{p,q}$. Отже, множина E також має міру нуль.

Таким чином, майже всюди на $[a, b]$ існує похідна $f'(x)$. Згідно з наслідком з леми 2, дорівнювати $+\infty$ ця похідна також може хіба що на множині міри нуль. Тому скінченна похідна $f'(x)$ також існує для майже всіх $x \in [a, b]$. $\square$

В зв'язку з доведеною теоремою природним чином виникає наступне питання. Чи можна гарантувати, що множина точок, в яких монотонна функція не має скінченної похідної, ще бідніша, ніж множина міри нуль, наприклад, зчислення? Наступний приклад дає негативну відповідь на це запитання навіть для неперервної функції.

Приклад зростаючої неперервної функції, у якої похідна до-

рівнює $+\infty$ в кожній точці заданої множини міри нуль.

Нехай множина $E \subset [a, b]$ має міру нуль. Для кожного $k = 1, 2, \dots$ побудуємо відкриту обмежену множину $G_k \supset E$ таку, що $mG_k < 2^{-k}$. Покладемо $f_k(x) = m(G_k \cap [a, x])$. Тоді при кожному k функція f_k зростає, неперервна і $f_k(x) < 2^{-k}$, $a \leq x \leq b$. Отже, функція $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ невід'ємна, зростає на $[a, b]$ і, в силу рівномірної збіжності ряду, f неперервна на $[a, b]$.

Нехай $x_0 \in E$. Для зафіксованого k при достатньо малих $|h|$ відрізок з кінцями x_0 і $x_0 + h$ цілком міститься в G_k . Якщо $h > 0$, то

$$f_k(x_0 + h) = m\left(\left(G_k \cap [a, x_0]\right) \cup \left(G_k \cap (x_0, x_0 + h]\right)\right) = f_k(x_0) + h.$$

Аналогічно, для $h < 0$ маємо

$$f_k(x_0 + h) = m\left(\left(G_k \cap [a, x_0]\right) \setminus \left(G_k \cap [x_0 + h, x_0]\right)\right) = f_k(x_0) + h.$$

В кожному випадку отримуємо, що

$$\frac{f_k(x_0 + h) - f_k(x_0)}{h} = 1.$$

Звідси випливає, що для кожного натурального N існує таке $h_N > 0$, що для всіх h таких, що $|h| < h_N$ справедлива нерівність

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq \sum_{k=1}^N \frac{f_k(x_0 + h) - f_k(x_0)}{h} = N.$$

Оскільки N довільне, то це означає, що $f'(x_0) = +\infty$.

Отже, функція f задовольняє всі вимоги.

Повернемося до теореми Лебега. Згідно з цією теоремою, для монотонної на $[a, b]$ функції f майже в кожній точці $x \in [a, b]$ існує скінченна похідна $f'(x)$. Таким чином, майже всюди на $[a, b]$ означена функція f' і ми можемо ставити питання про властивості цієї функції.

Теорема 2. *Нехай функція f зростає на відрізку $[a, b]$. Тоді її похи-*

дна f' вимірна на $[a, b]$, сумовна і

$$\int_a^b f'(x)dx \leq f(b) - f(a). \quad (1.7)$$

ДОВЕДЕННЯ. Довизначимо функцію f на $(b, b+1]$ рівністю $f(x) = f(b)$ при $b < x \leq b+1$. Тоді в кожній точці $x \in [a, b]$, окрім, хіба що, точки b , де існує $f'(x)$, справедлива рівність

$$f'(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} k \left(f \left(x + \frac{1}{k} \right) - f(x) \right).$$

Функції $f(x + \frac{1}{k})$ і $f(x)$ зростаючі і тому вимірні. Отже, вимірні і f' як границя майже всюди збіжної послідовності вимірних функцій. Оскільки f' невід'ємна, то можемо говорити про її інтеграл Лебега $\int_a^b f'(x)dx$. За теоремою Фату,

$$\int_a^b f'(x)dx \leq \sup_k k \int_a^b \left(f \left(x + \frac{1}{k} \right) - f(x) \right) dx.$$

Але

$$\int_a^b f \left(x + \frac{1}{k} \right) dx = \int_{a+\frac{1}{k}}^{b+\frac{1}{k}} f(x)dx,$$

причому ця рівність може бути отримана шляхом застосування метода заміни змінної в інтегралі Рімана, оскільки функція f монотонна і, отже, інтегровна за Ріманом. Тому

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(f \left(x + \frac{1}{k} \right) - f(x) \right) dx &= \int_b^{b+\frac{1}{k}} f(x)dx - \int_a^{a+\frac{1}{k}} f(x)dx = \\ &= \frac{1}{k} f(b) - \int_a^{a+\frac{1}{k}} f(x)dx \leq \frac{1}{k} (f(b) - f(a)). \end{aligned}$$

Звідси випливає нерівність (1.7). $\square$

В вступі ми довели теорему про те, що у випадку *обмеженої* похідної f' , яка існує в *кожній* точці $x \in [a, b]$, нерівність (1.7) стає рівністю навіть без припущення монотонності. Наступний приклад показує, що, взагалі кажучи, нерівність (1.7) не можна замінити рівністю навіть якщо функцію f припускати неперервною.

Приклад зростаючої неперервної функції, у якої похідна майже всюди дорівнює нулю.

Згадаємо спочатку схему побудови *канторової множини*. Позначимо

$$G_1^{(1)} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad G_1^{(2)} = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right), \quad G_2^{(2)} = \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right),$$

$$G_1^{(3)} = \left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right), \quad G_2^{(3)} = \left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right), \quad G_3^{(3)} = \left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right), \quad G_4^{(3)} = \left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right)$$

і т.д. В k -й групі буде 2^{k-1} інтервалів.

Визначимо функцію $K(x)$, поклавши

$$K(x) = \frac{1}{2}, \quad x \in G_1^{(1)}, \quad K(x) = \frac{1}{4}, \quad x \in G_1^{(2)}, \quad K(x) = \frac{3}{4}, \quad x \in G_2^{(2)}.$$

В чотирьох інтервалах третьої групи функція $K(x)$ дорівнює послідовно $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$. На 2^{k-1} інтервалах k -ї групи покладемо $K(x)$ послідовно рівною $\frac{1}{2^k}, \frac{3}{2^k}, \dots, \frac{2^k-1}{2^k}$. Функція K задана на канторовій відкритій множині $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^{k-1}} G_i^{(k)}$, причому $mG = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^{k-1}} mG_i^{(k)} = 1$. Означимо функцію K на множині $F = [0, 1] \setminus G$. Покладемо $K(0) = 0, K(1) = 1$. Якщо ж $x_0 \in F$ и $0 < x < 1$, то покладемо $K(x_0) = \sup\{K(x) : x \in G, x < x_0\}$.

Отримали функцію K , яка визначена на $[0, 1]$. Ця функція, очевидно, зростаюча, якщо розглядати її лише на множині G . Далі, прийняте нами довизначення функції K на канторовій множині F не порушує монотонності, так що K зростає на $[0, 1]$. Легко також довести, що функція K неперервна. Справді, якщо б це було б не так, то в точці розриву x_0 , в силу монотонності, принаймні один з інтервалів $(f(x_0 - 0), f(x_0))$ або

$(f(x_0), f(x_0 + 0))$ був би вільним від значень функції. Але функція K набуває всіх значень, що мають вигляд $\{\frac{2i-1}{2^k}\}_{i=1,2,\dots,2^{k-1}}$, $k=1,2,\dots$, а множина цих значень всюди щільна на $[0, 1]$, так що в кожному інтервалі $(\alpha, \beta) \subset [0, 1]$ існують значення, які набуває функція на множині G .

Отже, $K(x)$ неперервна, зростаюча на $[0, 1]$ функція. Цю функцію іноді називають "канторовою драбиною".

Разом з тим, якщо $x_0 \in G$, то, оскільки G є об'єднанням інтервалів, що попарно не перетинаються, і на кожному з яких функція K стала, то функція K стала в деякому околі точки x_0 . Тому $K'(x_0) = 0$. Оскільки $mG = 1$, то майже всюди на $[0, 1]$ похідна функції Кантора $K'(x) = 0$. Отже і

$$\int_0^1 K'(x)dx = 0 < 1 = K(1) - K(0),$$

так що в (1.7) не можна гарантувати рівність.

Може здатись, що існування монотонної, неперервної, відмінної від сталої функції Кантора $K(x)$, похідна якої $K'(x)$ майже всюди дорівнює нулю, виявилось можливим лише тому, що ми не вимагали строгої монотонності. Насправді це не так, що підтверджується наступним прикладом.

Приклад строго монотонної неперервної функції, похідна у якої майже всюди дорівнює нулю.

Задамо число $t \in (0, 1)$. Покладемо $f_0(x) = x$, $0 \leq x \leq 1$. Нехай визначена функція $f_k(x)$, неперервна та лінійна на кожному інтервалі виду $(\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k})$, $i = 0, 1, \dots, 2^k - 1$. Функцію $f_{k+1}(x)$ ми задамо так, щоб вона дорівнювала $f_k(x)$ в точках $i \cdot 2^{-k}$, $i = 0, 1, 2, \dots, 2^k$, в середніх точках інтервалів лінійності функції f_k для $i = 0, \dots, 2^k - 1$ покладемо

$$f_{k+1}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{i}{2^k} + \frac{i+1}{2^k}\right)\right) = \frac{1-t}{2}f_k\left(\frac{i}{2^k}\right) + \frac{1+t}{2}f_k\left(\frac{i+1}{2^k}\right),$$

а в інтервалах $(\frac{i}{2^k}, \frac{1}{2}(\frac{i}{2^k} + \frac{i+1}{2^k}))$ і $(\frac{1}{2}(\frac{i}{2^k} + \frac{i+1}{2^k}), \frac{i+1}{2^k})$ будемо вважати функцію f_{k+1} лінійною.

Означені таким чином функції f_k , очевидно, зростають і

$$0 \leq f_k(x) \leq f_{k+1}(x) \leq 1.$$

Отже, послідовність $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ має границю $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ в кожній точці $x \in [0, 1]$. Доведемо, що f строго зростає, неперервна і $f'(x) = 0$ для майже всіх $x \in [0, 1]$.

Задамо довільне $x \in [0, 1]$, що не співпадає з точками $\frac{i}{2^k}$ (множина таких точок зчислення і тому має міру нуль). Побудуємо послідовність вкладених інтервалів (α_k, β_k) , де $\alpha_k = \frac{i}{2^k}$, $\beta_k = \frac{i+1}{2^k}$, які містять в собі точку x . Тоді будемо мати одну з двох ситуацій

$$1. \alpha_{k+1} = \alpha_k, \beta_{k+1} = \frac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k), f_{k+1}(\alpha_{k+1}) = f_k(\alpha_k),$$

$$f_{k+1}(\beta_{k+1}) = \frac{1-t}{2}f_k(\alpha_k) + \frac{1+t}{2}f_k(\beta_k),$$

тобто

$$f_{k+1}(\beta_{k+1}) - f_{k+1}(\alpha_{k+1}) = \frac{1+t}{2}(f_k(\beta_k) - f_k(\alpha_k)),$$

або

$$2. \alpha_{k+1} = \frac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k), \beta_{k+1} = \beta_k, f_{k+1}(\beta_{k+1}) = f_k(\beta_k),$$

$$f_{k+1}(\alpha_{k+1}) = \frac{1-t}{2}f_k(\alpha_k) + \frac{1+t}{2}f_k(\beta_k),$$

тобто

$$f_{k+1}(\beta_{k+1}) - f_{k+1}(\alpha_{k+1}) = \frac{1-t}{2}(f_k(\beta_k) - f_k(\alpha_k)).$$

Оскільки в усіх точках виду $x = \frac{i}{2^k}$, $i = 0, 1, \dots, 2^k$, $k = 0, 1, \dots$ всі значення $f_n(x)$ сталі, починаючи з номеру k , то і їх границя

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f_k(x), \quad x = \frac{i}{2^k}.$$

Таким чином, об'єднуючи розглянуті вище дві ситуації, будемо мати

$$f(\beta_{k+1}) - f(\alpha_{k+1}) = \frac{1 + \varepsilon_k t}{2}(f(\beta_k) - f(\alpha_k)),$$

де ε_k набуває значень $+1$ або -1 . Враховуючи, що $f(\beta_0) = 1$, $f(\alpha_0) = 0$, звідси отримуємо

$$f(\beta_k) - f(\alpha_k) = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{1 + \varepsilon_i t}{2}, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

Звідси випливає, що $f(\beta_k) - f(\alpha_k) > 0$ і $f(\beta_k) - f(\alpha_k) \leq (\frac{1+t}{2})^k$, так що функція f неперервна і строго зростає. Далі, в тих точках x , де існує похідна $f'(x)$, вона дорівнює границі виразу

$$\frac{f(\beta_k) - f(\alpha_k)}{\beta_k - \alpha_k} = \prod_{i=0}^{k-1} (1 + \varepsilon_i t)$$

при $k \rightarrow \infty$. Але нескінченний добуток збігається до числа, що не дорівнює нулю тоді та лише тоді, коли границя загального співмножника дорівнює одиниці, що в нашому випадку не має місця. Отже, відношення $\frac{f(\beta_k) - f(\alpha_k)}{\beta_k - \alpha_k}$ при $k \rightarrow \infty$ або не має границі, або прямує до $+\infty$, чи до нуля. Оскільки, в силу теореми Лебега, у функції f майже всюди на $[0, 1]$ існує скінченна похідна f' , то $f'(x) = 0$ для майже всіх $x \in [0, 1]$.

Зауваження. При доведенні рівності $f'(x) = 0$ для майже всіх $x \in [0, 1]$ ми використали наступне твердження.

Твердження 1. *Якщо функція f в точці x_0 має похідну $f'(x_0)$, то існує*

$$\lim_{h_1 \rightarrow 0+, h_2 \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + h_1) - f(x_0 - h_2)}{h_1 + h_2} = f'(x_0).$$

ДОВЕДЕННЯ. Справді, маємо $f(x_0 + h_1) = f'(x_0)h_1 + \alpha(h_1)$, $f(x_0 - h_2) = -f'(x_0)h_2 + \beta(h_2)$, де $\alpha(h_1) = o(h_1)$ ($h_1 \rightarrow 0$), $\beta(h_2) = o(h_2)$ ($h_2 \rightarrow 0$). Тоді

$$\frac{f(x_0 + h_1) - f(x_0 - h_2)}{h_1 + h_2} = f'(x_0) + \frac{\alpha(h_1) + \beta(h_2)}{h_1 + h_2}.$$

Покажемо, що другий доданок справа прямує до нуля якщо $h_1 \rightarrow 0+$,

$h_2 \rightarrow 0 +$. Справді, оскільки $h_1 > 0$, $h_2 > 0$, то

$$\left| \frac{\alpha(h_1)}{h_1 + h_2} \right| \leq \frac{|\alpha(h_1)|}{h_1} \rightarrow 0, \quad h_1 \rightarrow 0 +.$$

Аналогічно отримуємо, що $\frac{\beta(h_2)}{h_1 + h_2} \rightarrow 0$ при $h_1 \rightarrow 0+$, $h_2 \rightarrow 0 +$. Звідси випливає наше твердження. $\square$

Відзначимо, що в даному твердженні умови $h_1 > 0$, $h_2 > 0$ не можна відкинути. Покажемо це на наступному прикладі.

Приклад диференційовної в кожній точці функції f , для якої вираз $\frac{f(x_0+h_1)-f(x_0+h_2)}{h_1-h_2}$ не має границі при $h_1 \rightarrow 0$, $h_2 \rightarrow 0$ ($h_1 \neq h_2$).

Покладемо $f(0) = 0$, $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$. Тоді, очевидно, існує $f'(x)$ для всіх $x \in [0, 1]$. З іншого боку, для послідовності чисел $h_k = \frac{1}{\pi k}$, $k = 1, 2, \dots$, маємо $h_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ і

$$\frac{f(h_{k+1}) - f(h_k)}{h_{k+1} - h_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

В той же час, для послідовностей $h_k^{(1)} = \frac{1}{2\pi k + \frac{\pi}{2}}$ і $h_k^{(2)} = \frac{1}{2\pi k + \frac{3\pi}{2}}$, $k = 1, 2, \dots$, маємо

$$\begin{aligned} \frac{f(h_k^{(1)}) - f(h_k^{(2)})}{h_k^{(1)} - h_k^{(2)}} &= \frac{(h_k^{(1)})^2 + (h_k^{(2)})^2}{h_k^{(1)} - h_k^{(2)}} = \frac{\frac{1}{(2\pi k + \frac{\pi}{2})^2} + \frac{1}{(2\pi k + \frac{3\pi}{2})^2}}{\frac{1}{2\pi k + \frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2\pi k + \frac{3\pi}{2}}} = \\ &= \frac{(2\pi k + \frac{\pi}{2})(2\pi k + \frac{3\pi}{2})[(2\pi k + \frac{3\pi}{2})^2 + (2\pi k + \frac{\pi}{2})^2]}{\pi(2\pi k + \frac{\pi}{2})^2(2\pi k + \frac{3\pi}{2})^2} = \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{(2\pi k + \frac{3\pi}{2})^2 + (2\pi k + \frac{\pi}{2})^2}{(2\pi k + \frac{\pi}{2})(2\pi k + \frac{3\pi}{2})}. \end{aligned}$$

Звідси видно, що

$$\frac{f(h_k^{(1)}) - f(h_k^{(2)})}{h_k^{(1)} - h_k^{(2)}} \rightarrow \frac{1}{\pi}, \quad k \rightarrow \infty.$$

Порівнюючи це з попереднім, отримуємо, що вираз

$$\frac{f(h_1) - f(h_2)}{h_1 - h_2}$$

не має границі коли h_1 і h_2 незалежно прямують до нуля і $h_1 \neq h_2$.

Розглянемо тепер деякі наслідки, що випливають з теореми Лебега про диференційовність монотонної функції.

Теорема Фубіні (про почленне диференціювання ряду з монотонними доданками). *Нехай задана послідовність $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ зростаючих на відріzkі $[a, b]$ функцій, така, що ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f(x)$$

збігається для всіх $x \in [a, b]$. Тоді для майже всіх $x \in [a, b]$ справедлива рівність

$$\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x) = f'(x), \quad (1.8)$$

тобто ряд з монотонними доданками майже всюди допускає почленне диференціювання.

ДОВЕДЕННЯ. Можемо припустити, що $f_k(a) = 0$, $k = 1, 2, \dots$ Позначимо $F_s(x) = \sum_{k=1}^s f_k(x)$. Тоді $F_s(x) \rightarrow f(x)$, $s \rightarrow \infty$. Оскільки кожна функція f_k , будучи зростаючою, має похідну майже всюди на $[a, b]$, то множина $E_0 \subset [a, b]$ точок, в яких не існує скінченної похідної принаймні у однієї з функцій f_k , або у функції f , має міру нуль, оскільки вона є об'єднанням зчисленного набору множин міри нуль. Для $x \notin E_0$ маємо

$$F'_s(x) \leq F'_{s+1}(x) \leq f'(x),$$

тобто ряд в лівій частині (1.8) збігається для майже всіх $x \in [a, b]$. Далі, оскільки $F'_s(x)$ збігається до своєї границі зростаючи, то для доведення (1.8), тобто $F'_s(x) - f'(x) \rightarrow 0$, $s \rightarrow \infty$, достатньо перевірити її для

якої-небудь підпослідовності номерів $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$. Цю підпослідовність ми підберемо так, щоб була виконана нерівність $f(b) - F_{s_i}(b) < 2^{-i}$, $i = 1, 2, \dots$. Тоді з нерівності

$$f(x) - F_{s_i}(x) \leq f(b) - F_{s_i}(b), \quad i = 1, 2, \dots, \quad a \leq x \leq b$$

випливає, що збігається ряд $\sum_{i=1}^{\infty} (f(x) - F_{s_i}(x))$ для всіх $x \in [a, b]$. Але доданки цього ряду $R_i(x) = \sum_{k=s_i+1}^{\infty} f_k(x)$ — зростаючі функції, так що, застосовуючи міркування, які наведені на початку доведення нашої теореми, отримуємо, що для майже всіх $x \in [a, b]$ збігається ряд із похідних $\sum_{i=1}^{\infty} (f'(x) - F'_{s_i}(x))$. Із збіжності цього ряду випливає, що його доданки прямують до нуля, а це означає, що $F'_{s_i}(x) \rightarrow f'(x)$ для майже всіх $x \in [a, b]$.

□

Одним з важливих наслідків теореми Фубіні є наступна теорема Лебега про точки щільності лінійних множин. Спочатку сформулюємо означення точки щільності.

Означення. Нехай задана множина $E \subset \mathbb{R}$. Точка $x \in \mathbb{R}$ називається *точкою щільності* множини E , якщо

$$\lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0, h_1, h_2 > 0} \frac{m^*(E \cap (x - h_1, x + h_2))}{h_1 + h_2} = 1,$$

де, як і раніше, символом m^* позначена зовнішня міра Лебега.

Теорема Лебега (про точки щільності). *Майже всі точки довільної множини $E \subset \mathbb{R}$ є її точками щільності.*

ДОВЕДЕННЯ. Нехай $E \subset [a, b]$. Означимо функцію

$$f(x) = m^*(E \cap [a, x]), \quad a \leq x \leq b.$$

Якщо ми доведемо, що для майже всіх $x \in E$ справедливо $f'(x) = 1$, то, з урахуванням твердження 1, отримаємо доведення нашої теореми. Можемо вважати, що $E \subset (a, b)$. Користуючись означенням зовнішньої

міри, побудуємо послідовність відкритих множин $G_k \supset E$, $k = 1, 2, \dots$, таких, що $(a, b) \supset G_1 \supset G_2 \supset \dots$ і $mG_k - m^*E < 2^{-k}$. Означимо функцію $f_k(x) = m(G_k \cap [a, x])$. Функції f_k зростають на $[a, b]$ і, очевидно, $f'_k(x) = 1$ для всіх $x \in G_k$. Розглянемо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (f_k(x) - f(x))$, $a \leq x \leq b$. Для $a \leq x < y \leq b$ маємо

$$\begin{aligned} (f_k(y) - f(y)) - (f_k(x) - f(x)) &= (f_k(y) - f_k(x)) - (f(y) - f(x)) = \\ &= m(G_k \cap (x, y)) - m^*(E \cap (x, y)) \geq 0, \\ f_k(x) - f(x) &\leq f_k(b) - f(b) = mG_k - m^*E < 2^{-k}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Тому наш ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (f_k(x) - f(x))$ збігається на $[a, b]$. За теоремою Фубіні, для майже всіх $x \in [a, b]$ збігається і ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (f'_k(x) - f'(x))$, а це означає, що майже всюди на $[a, b]$ маємо $f'_k(x) \rightarrow f'(x)$. Але $x \in G_k$, $k = 1, 2, \dots$ для кожного $x \in E$. Як вже відзначалось, для $x \in G_k$ справедливо $f'_k(x) = 1$. Отже, для $x \in E$ маємо $f'_k(x) = 1$, $k = 1, 2, \dots$. Тому $f'(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f'_k(x) = 1$ для майже всіх $x \in E$. $\square$

З поняттям точки щільності тісно пов'язане одне узагальнення поняття неперервності функції.

Означення. Нехай функція f задана на відрізку $[a, b]$ і точка $x_0 \in [a, b]$. Якщо існує така вимірна множина $E \subset [a, b]$, яка має точку x_0 своєю точкою щільності, що $f(x)$ неперервна в точці x_0 вздовж множини E , то говорять, що функція f *апроксимативно неперервна* в точці x_0 . В точці $x_0 = a$, кажучи про щільність, ми маємо на увазі праву щільність множини E , тобто рівність $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{m^*(E \cap [a, a+h])}{h} = 1$. Аналогічно, кажучи про точку $x_0 = b$, ми маємо на увазі ліву щільність.

Нагадаємо, що функція f називається неперервною в точці x_0 *вздовж множини E* , якщо для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке δ , що для всіх $x \in E$, які задовольняють умову $|x - x_0| < \delta$, справедлива нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Зрозуміло, що кожна точка неперервності функції є також точкою її апроксимативної неперервності. Обернене твердження хибне. Наприклад, функція Діріхле, як відомо, не має точок неперервності. Але кожна ірраціональна точка x_0 є точкою її апроксимативної неперервності, бо в якості множини E можна вибрати множину всіх ірраціональних точок. Зрозуміло, що x_0 – точка щільності множини E і функція Діріхле неперервна в точці x_0 вздовж E .

Отже, функція Діріхле апроксимативно неперервна майже в кожній точці. Цей факт є проявленням наступного загального результату.

Теорема Данжуа. *Якщо функція f вимірна і майже всюди скінченна на відрізку $[a, b]$, то вона апроксимативно неперервна майже в усіх точках цього відрізка.*

ДОВЕДЕННЯ. Задамо додатне ε і, користуючись теоремою Лузіна про S -властивість, знайдемо таку неперервну на $[a, b]$ функцію φ , що $mE(f \neq \varphi) < \varepsilon$.

Нехай A – множина тих точок щільності множини $E(f = \varphi)$, що належать цій множині $E(f = \varphi)$. За теоремою Лебега, $mA = mE(f = \varphi) > b - a - \varepsilon$.

Якщо $x_0 \in A$, то $f(x)$, очевидно, апроксимативно неперервна в цій точці x_0 , бо в якості множини E , що фігурує в означенні апроксимативної неперервності, можна взяти $E(f = \varphi)$. Тому множина H всіх точок апроксимативної неперервності функції f має внутрішню міру $m_*H \geq mA > b - a - \varepsilon$. В силу довільності ε , звідси випливає, що $m_*H \geq b - a$. Але $H \subset [a, b]$, так що $m^*H \leq b - a$.

Отже, $b - a \leq m_*H \leq m^*H \leq b - a$, так що H вимірна і $mH = b - a$.

□

Контрольні питання до теми 1. Монотонні функції.

1. Стрибки монотонної функції. Теорема про множину точок розриву монотонної функції.
2. Функція стрибків. Розвинення монотонної функції в суму функції стрибків та неперервну складові.
3. Лема Віталі про покриття (два варіанти).
4. Леми про похідні числа монотонної функції. Теорема Лебега.
5. Приклад монотонної функції, яка не має похідної на заданій множині міри нуль.
6. Оцінка інтеграла від похідної монотонної функції.
7. Приклади зростаючої та строго зростаючої неперервних функцій, похідна яких дорівнює нулю майже всюди.
8. Теорема Фубіні про почленне диференціювання ряду з монотонними доданками.
9. Точки щільності. Теорема Лебега про точки щільності.
10. Апроксимативна неперервність. Теорема Данжуа.

Тема 2. Функції обмеженої варіації

В цьому розділі ми ознайомимось з класом функцій, що тісно пов'язані з монотонними функціями.

Означення. Нехай на відрізку $[a, b]$ задана скінченна функція f . Задамо на $[a, b]$ скінченний набір точок $\{x_k\}_{k=0}^s$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{s-1} < x_s = b$ і розглянемо суму $V = \sum_{k=1}^s |f(x_k) - f(x_{k-1})|$. Точну верхню межу множини усіх можливих таких сум V називають *повною варіацією* (або просто *варіацією*) функції f на відрізку $[a, b]$ і позначають $\overset{b}{V}_a(f)$. Якщо повна варіація функції f скінченна на відрізку $[a, b]$, то говорять, що функція f має *обмежену варіацію* на $[a, b]$.

Якщо функція f монотонна на $[a, b]$, то вона має обмежену варіацію на $[a, b]$. Справді, для зростаючої на $[a, b]$ функції f і будь-якого набору точок $\{x_k\}_{k=0}^s$ маємо

$$V = \sum_{k=1}^s |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^s (f(x_k) - f(x_{k-1})) = f(b) - f(a).$$

Звідси випливає, що $\overset{b}{V}_a(f) = f(b) - f(a)$. Для спадної функції f аналогічно отримуємо $\overset{b}{V}_a(f) = f(a) - f(b)$.

Прикладом неперервної функції з необмеженою варіацією може бути функція $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $0 < x \leq \frac{2}{\pi}$, $f(0) = 0$. Справді, поклавши $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi(s-1)}, \dots, x_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi(s-k)}, \dots, x_s = \frac{1}{\frac{\pi}{2}}$, отримаємо

$$V = \sum_{k=1}^s |f(x_k) - f(x_{k-1})| =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^s \left| \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi(s-k)} \sin \left(\frac{\pi}{2} + \pi(s-k) \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi(s-k+1)} \sin \left(\frac{\pi}{2} + \pi(s-k+1) \right) \right| = \\
&= \sum_{k=2}^s \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi(s-k)} + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi(s-k+1)} \right) + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi(s-1)} \geq \\
&\geq \sum_{k=1}^{s-1} \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi k} \rightarrow \infty, \quad s \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

так що $\sup_{\{x_k\}} V = +\infty$.

Легко бачити, що кожна функція f обмеженої варіації є обмеженою. Справді, для $a \leq x \leq b$ маємо

$$|f(x) - f(a)| + |f(x) - f(b)| \leq V_a^b(f).$$

Звідси, використовуючи нерівності

$$|f(x) - f(a)| \geq |f(x)| - |f(a)|, \quad |f(x) - f(b)| \geq |f(x)| - |f(b)|,$$

отримаємо

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2} \left(|f(a)| + |f(b)| + V_a^b(f) \right), \quad a \leq x \leq b.$$

Теорема (арифметичні властивості функцій обмеженої варіації). Сума, різниця та добуток двох функцій f та g обмеженої варіації є функціями обмеженої варіації. Якщо, крім того, $|g(x)| \geq \sigma > 0$, $x \in [a, b]$, то і частка f/g є функцією обмеженої варіації.

ДОВЕДЕННЯ. Для чисел $a = x_0 < x_1 < \dots < x_s = b$ і функції $h = f + g$ маємо

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^s |h(x_k) - h(x_{k-1})| &\leq \sum_{k=1}^s |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sum_{k=1}^s |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq \\
&\leq V_a^b(f) + V_a^b(g).
\end{aligned}$$

Звідси випливає, що h має обмежену варіацію. Для різниці доведення аналогічне.

Для функції $\varphi = f \cdot g$ позначимо

$$A = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|, \quad B = \sup_{x \in [a, b]} |g(x)|.$$

Тоді отримаємо

$$\begin{aligned} |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})| &= |f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})| \leq \\ &\leq |f(x_k)| |g(x_k) - g(x_{k-1})| + |g(x_{k-1})| |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq \\ &\leq A |g(x_k) - g(x_{k-1})| + B |f(x_k) - f(x_{k-1})|, \quad k = 1, 2, \dots, s. \end{aligned}$$

Додаючи всі ці нерівності, як і вище, знаходимо

$$\overset{b}{V}_a(\varphi) \leq A \overset{b}{V}_a(g) + B \overset{b}{V}_a(f).$$

Для $\psi = f/g$, використовуючи умову $|g(x)| \geq \sigma > 0$, $x \in [a, b]$, маємо

$$\begin{aligned} |\psi(x_k) - \psi(x_{k-1})| &= \left| \frac{f(x_k)}{g(x_k)} - \frac{f(x_{k-1})}{g(x_{k-1})} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\sigma^2} |f(x_k)g(x_{k-1}) - f(x_{k-1})g(x_k)| \leq \\ &\leq \frac{1}{\sigma^2} \{ |f(x_k)| |g(x_k) - g(x_{k-1})| + |g(x_k)| |f(x_k) - f(x_{k-1})| \}. \end{aligned}$$

Звідси одразу випливає, що

$$\overset{b}{V}_a(\psi) \leq \frac{A}{\sigma^2} \overset{b}{V}_a(g) + \frac{B}{\sigma^2} \overset{b}{V}_a(f). \quad \square$$

Наступна теорема показує, що повна варіація є адитивною функцією відрізка.

Теорема (про адитивність варіації). *Нехай на відрізку $[a, b]$ задана*

скінченна функція f і точка $c \in [a, b]$. Тоді

$$\overset{b}{V}_a(f) = \overset{c}{V}_a(f) + \overset{b}{V}_c(f).$$

ДОВЕДЕННЯ. Розглянемо точки $a = x'_0 < x'_1 < \dots < x'_{s'} = c$ і $c = x''_0 < x''_1 < \dots < x''_{s''} = b$. Об'єднання цих наборів $\{x_k\} = \{x'_k\} \cup \{x''_k\}$ утворює розбиття відрізка $[a, b]$. Тоді з нерівності

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{s'} |f(x'_k) - f(x'_{k-1})| + \sum_{k=1}^{s''} |f(x''_k) - f(x''_{k-1})| &= \\ &= \sum_{k=1}^{s'+s''+1} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq \overset{b}{V}_a(f) \end{aligned}$$

одразу випливає, що

$$\overset{c}{V}_a(f) + \overset{b}{V}_c(f) \leq \overset{b}{V}_a(f).$$

З іншого боку, розіб'ємо $[a, b]$ точками $a = y_0 < y_1 < \dots < y_s = b$, причому це розбиття виберемо так, щоб точка c входила в число точок розбиття. Якщо $y_m = c$, то

$$\begin{aligned} V &= \sum_{k=1}^s |f(y_k) - f(y_{k-1})| = \\ &= \sum_{k=1}^m |f(y_k) - f(y_{k-1})| + \sum_{k=m+1}^s |f(y_k) - f(y_{k-1})| \leq \overset{c}{V}_a(f) + \overset{b}{V}_c(f). \end{aligned}$$

Отже, нерівність $V \leq \overset{c}{V}_a(f) + \overset{b}{V}_c(f)$ доведена нами для сум V таких, що точка c входить в число точок розбиття. Але якщо врахувати, що додавання нових точок розбиття не зменшує суму V , то отримаємо, що така нерівність справедлива для кожної суми V . Тому

$$\overset{b}{V}_a(f) \leq \overset{c}{V}_a(f) + \overset{b}{V}_c(f).$$

Порівнюючи це з отриманою вище протилежною нерівністю, отриму-

ємо твердження теореми. $\square$

Наслідок 1. Якщо функція f має обмежену варіацію на $[a, b]$, то вона має обмежену варіацію на кожному з відрізків $[a, c]$ і $[c, b]$.

Справедливе і обернене твердження.

Наслідок 2. Якщо відрізок $[a, b]$ розбити на скінченне число відрізків, на кожному з яких функція монотонна, то ця функція має обмежену варіацію на всьому відрізку $[a, b]$.

Наступна теорема дає необхідну та достатню умову обмеженості варіації.

Теорема (критерій обмеженості варіації). Для того, щоб функція f мала обмежену варіацію, необхідно та достатньо, щоб вона могла бути представлена у вигляді різниці двох зростаючих функцій.

ДОВЕДЕННЯ. Справді, раніше ми вже відзначали, що монотонна на $[a, b]$ функція має обмежену варіацію. Але з теореми про арифметичні властивості функцій обмеженої варіації одразу отримуємо, що і різниця зростаючих функцій має обмежену варіацію.

Доведемо необхідність. Розглянемо невизначену варіацію

$$v(x) = \overset{x}{V}(f), \quad a < x \leq b, \quad v(a) = 0.$$

В силу попередньої теореми, функція $v(x)$ зростає. Покладемо $w(x) = v(x) - f(x)$, $a \leq x \leq b$, і доведемо, що функція w також зростає на $[a, b]$. Нехай $a \leq x < y \leq b$. Тоді, в силу попередньої теореми,

$$w(y) = v(y) - f(y) = v(x) + \overset{y}{V}_x(f) - f(y),$$

так що

$$w(y) - w(x) = \overset{y}{V}_x(f) - (f(y) - f(x)).$$

Але з означення варіації зрозуміло, що $\overset{y}{V}_x(f) \geq |f(y) - f(x)|$. Тому права частина в останній нерівності невід'ємна, а це і означає, що $w(y) \geq w(x)$.

Залишається переписати рівність $w = v - f$ у вигляді $f = v - w$ і отримаємо потрібне представлення. $\square$

Наслідок 1. Якщо функція f має обмежену варіацію на відрізку $[a, b]$, то майже в кожній точці $x \in [a, b]$ існує скінченна похідна $f'(x)$ і ця похідна сумовна на $[a, b]$.

Наслідок 2. Множина точок розриву функції обмеженої варіації не більше, ніж зчисленна. В кожній точці $x \in (a, b)$ існують односторонні границі $f(x_0 + 0)$ і $f(x_0 - 0)$, а також існують $f(a + 0)$ і $f(b - 0)$.

Зауваження. При доведенні теореми нами була відзначена нерівність $v(y) - v(x) = \overset{y}{\underset{x}{V}}(f) \geq |f(y) - f(x)|$, $a \leq x < y \leq b$. Звідси легко отримати ще одне представлення функції обмеженої варіації f у вигляді різниці $f = P - N$ двох зростаючих функцій $P = (v + f)/2$ і $N = (v - f)/2$. Справді, монотонність функцій P і N одразу випливає з нерівностей

$$\begin{aligned} P(y) - P(x) &= \frac{1}{2}(v(y) + f(y)) - \frac{1}{2}(v(x) + f(x)) = \\ &= \frac{1}{2}[(v(y) - v(x)) + (f(y) - f(x))] \geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(y) - N(x) &= \frac{1}{2}(v(y) - f(y)) - \frac{1}{2}(v(x) - f(x)) = \\ &= \frac{1}{2}[(v(y) - v(x)) - (f(y) - f(x))] \geq 0. \end{aligned}$$

Функції P і N називаються відповідно *позитивною і негативною варіаціями* функції f .

Тепер дослідимо залежність між структурними властивостями функції обмеженої варіації f та її невизначеної варіації v .

Теорема 1. Якщо на відрізку $[a, b]$ функція обмеженої варіації f неперервна в точці $x_0 \in [a, b]$, то її невизначена варіація v також неперервна в точці x_0 .

ДОВЕДЕННЯ. Нехай $x_0 < b$. Доведемо, що $v(x_0 + 0) = v(x_0)$, тобто неперервність справа функції v . Задамо $\varepsilon > 0$ і побудуємо точки $x_0 <$

$x_1 < \dots < x_s = b$, так, щоб була виконана нерівність

$$V = \sum_{k=1}^s |f(x_k) - f(x_{k-1})| > \overset{b}{V}_{x_0}(f) - \varepsilon. \quad (2.1)$$

Оскільки від додавання нових точок сума V не зменшується, то, враховуючи неперервність функції f в точці x_0 , можемо вважати, що точка x_1 розміщена настільки близько до x_0 , що $|f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon$.

В цьому випадку з (2.1) випливає, що

$$\overset{b}{V}_{x_0}(f) < \varepsilon + \sum_{k=1}^s |f(x_k) - f(x_{k-1})| < 2\varepsilon + \sum_{k=2}^s |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq 2\varepsilon + \overset{b}{V}_{x_1}(f).$$

Звідси та з теореми про адитивність варіації випливає, що $\overset{x_1}{V}_{x_0}(f) < 2\varepsilon$, тобто $v(x_1) - v(x_0) < 2\varepsilon$. Оскільки функція v зростаюча, то маємо $v(x_0 + 0) - v(x_0) < 2\varepsilon$, а отже, в силу довільності ε , $v(x_0 + 0) = v(x_0)$.

Рівність $v(x_0 - 0) = v(x_0)$ для $a < x_0 \leq b$ встановлюється аналогічним чином. $\square$

Наслідок. Якщо функція обмеженої варіації f неперервна на $[a, b]$, то вона може бути представлена у вигляді різниці двох неперервних зростаючих на $[a, b]$ функцій.

Справді, в силу доведеної теореми, з неперервності f випливає неперервність v , а звідси та з критерія обмеженості варіації отримуємо, що зростаюча функція $w = v - f$ також неперервна.

Інше доведення цього наслідку отримаємо, якщо скористаємось тим, що з неперервності f , за доведеною теоремою, випливає неперервність невизначених позитивної P та негативної N варіацій функції f .

Вище, в наслідку 1 з критерія обмеженості варіації, було відзначено, що у функції обмеженої варіації f майже всюди існує скінченна похідна f' . Далі, невизначена варіація v функції f , будучи зростаючою функцією, в силу теореми Лебега, також має майже всюди скінченну похідну v' . Наступна теорема встановлює зв'язок між цими двома похідними.

Теорема 2. Нехай задана на відрізку $[a, b]$ функція обмеженої варіації f і нехай v – її невизначена варіація. Тоді майже всюди на $[a, b]$ справедлива рівність $v'(x) = |f'(x)|$.

ДОВЕДЕННЯ. Для натурального k задамо розбиття $a = x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < \dots < x_{s_k}^{(k)} = b$ відрізка $[a, b]$ так, щоб була виконана нерівність

$$V - \sum_{i=1}^{s_k} \left| f(x_i^{(k)}) - f(x_{i-1}^{(k)}) \right| < 2^{-k},$$

де $V = \overset{b}{V}_a(f) = v(b)$. Зробивши це для всіх $k = 1, 2, \dots$, отримаємо послідовність розбиттів $\{x_i^{(k)}\}_{i=1}^{s_k}$, $k = 1, 2, \dots$. Означимо тепер послідовність функцій f_k наступним чином. Покладемо $f_k(a) = 0$. Далі, якщо $f(x_i^{(k)}) - f(x_{i-1}^{(k)}) \geq 0$, то покладемо $f_k(x) = f(x) + c_i^{(k)}$, $x \in [x_{i-1}^{(k)}, x_i^{(k)}]$, а у випадку $f(x_i^{(k)}) - f(x_{i-1}^{(k)}) < 0$ покладемо $f_k(x) = -f(x) + c_i^{(k)}$, $x \in [x_{i-1}^{(k)}, x_i^{(k)}]$. При цьому числа $c_i^{(k)}$ підбираємо так, щоб в точках ділення $x_i^{(k)}$ значення $f_k(x_i^{(k)})$ були визначені однозначно.

Доведемо, що функція $v - f_k$ зростає на $[a, b]$. Для цього достатньо показати, що при $a \leq x < y \leq b$ справедлива нерівність

$$v(y) - v(x) \geq f_k(y) - f_k(x). \quad (2.2)$$

Якщо x та y належать до одного інтервала $(x_{i-1}^{(k)}, x_i^{(k)})$, то ця нерівність випливає з наступної

$$v(y) - v(x) \geq |f(y) - f(x)| = |f_k(y) - f_k(x)|.$$

Якщо ж $x \leq x_i^{(k)} < x_{i+1}^{(k)} < \dots < x_r^{(k)} \leq y$, то додаючи нерівності

$$v(x_i^{(k)}) - v(x) \geq \left| f(x_i^{(k)}) - f(x) \right| = \left| f_k(x_i^{(k)}) - f(x) \right|,$$

$$\begin{aligned} v(x_{i+j}^{(k)}) - v(x_{i+j-1}^{(k)}) &\geq \left| f(x_{i+j}^{(k)}) - f(x_{i+j-1}^{(k)}) \right| = \\ &= \left| f_k(x_{i+j}^{(k)}) - f_k(x_{i+j-1}^{(k)}) \right|, \quad j = 1, 2, \dots, r - i, \end{aligned}$$

$$v(y) - v(x_r^{(k)}) \geq \left| f(y) - f(x_r^{(k)}) \right| = \left| f_k(y) - f_k(x_r^{(k)}) \right|,$$

отримуємо

$$\begin{aligned} v(y) - v(x) &\geq \\ &\geq \left| f_k(x_i^{(k)}) - f_k(x) \right| + \sum_{j=1}^{r-i} \left| f_k(x_{i+j}^{(k)}) - f_k(x_{i+j-1}^{(k)}) \right| + \left| f_k(y) - f_k(x_r^{(k)}) \right| \geq \\ &\geq |f_k(y) - f_k(x)|. \end{aligned}$$

Таким чином, нерівність (2) виконана. З іншого боку, за побудовою функції f_k , маємо

$$f_k(x_i^{(k)}) - f_k(x_{i-1}^{(k)}) = \left| f(x_i^{(k)}) - f(x_{i-1}^{(k)}) \right|$$

і, отже,

$$v(b) - f_k(b) = v(b) - \sum_{i=1}^{s_k-1} \left[f_k(x_i^{(k)}) - f_k(x_{i-1}^{(k)}) \right] < 2^{-k}.$$

Тому доданки ряду $\sum_{k=1}^{\infty} (v(x) - f_k(x))$ з монотонних функцій задовольняють нерівність

$$v(x) - f_k(x) \leq v(b) - f_k(b) < 2^{-k}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

і тому цей ряд збігається. Застосовуючи до нього теорему Фубіні про почленне диференціювання ряду з монотонними доданками, отримуємо, що майже всюди на $[a, b]$ збігається ряд із похідних. Звідси випливає, що $v'(x) - f'_k(x) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, для майже всіх $x \in [a, b]$. Але, за визначенням функцій f_k , майже всюди на $[a, b]$ буде $f'_k(x) = \pm f'(x)$. Оскільки $v'(x) \geq 0$ тому, що функція v зростає, то отримуємо, що $v'(x) = |f'(x)|$ для майже всіх $x \in [a, b]$. $\square$

Наступна теорема встановлює зв'язок між точками розриву функції обмеженої варіації та її невизначеної варіації.

Теорема 3. *Функція обмеженої варіації f та її невизначена варіація v мають одні й ті ж самі точки розриву. В точках розриву лівий та правий стрибки функцій f та v співпадають з точністю до знака, тобто в усіх точках $x \in [a, b]$*

$$v(x) - v(x - 0) = |f(x) - f(x - 0)|, \quad v(x + 0) - v(x) = |f(x + 0) - f(x)|.$$

ДОВЕДЕННЯ. Будемо застосовувати позначення, що були започатковані при доведенні попередньої теореми. Для $a \leq x < y \leq b$ маємо

$$\begin{aligned} |(v(y) - v(x)) - (f_k(y) - f_k(x))| &\leq |v(y) - f_k(y)| + |v(x) - f_k(x)| \leq \\ &\leq 2|v(b) - f_k(b)| < 2^{1-k}. \end{aligned}$$

Спрямовуючи в цій нерівності y до x , отримаємо

$$|(v(x + 0) - v(x)) - (f_k(x + 0) - f_k(x))| < 2^{1-k},$$

так що $f_k(x + 0) - f_k(x) \rightarrow v(x + 0) - v(x)$, $k \rightarrow \infty$. Але, очевидно, з точністю до знака правий стрибок функції f_k дорівнює правому стрибкові функції f . Тому, враховуючи ще, що для зростаючої функції v справедлива нерівність $v(x + 0) - v(x) \geq 0$, отримаємо

$$|f(x + 0) - f(x)| = v(x + 0) - v(x).$$

Для лівих стрибків твердження доводиться аналогічно. $\square$

В попередньому розділі ми започаткували поняття функції стрибків для зростаючої функції. Там же було показано (теорема 2), що різниця між зростаючою функцією та її функцією стрибків є зростаючою неперервною функцією. За допомогою цього твердження ми отримаємо аналогічний результат для функції з обмеженою варіацією. Для цього нам треба узагальнити поняття функції стрибків для функції обмеженої варіації.

Означення. Нехай функція f має обмежену варіацію на відрізку $[a, b]$ і нехай точки $x_1, x_2, \dots$ – її точки розриву. Як і раніше для зростаючої функції, *функцією стрибків* для функції f називається функція

$$s(x) = (f(a+0) - f(a)) + \sum_{x_k < x} (f(x_k + 0) - f(x_k - 0)) + (f(x) - f(x - 0)),$$

де $a < x \leq b$, і $s(a) = 0$.

Теорема 4. *Кожну функцію обмеженої варіації можна представити у вигляді суми її функції стрибків та неперервної функції, кожна з яких має обмежену варіацію.*

ДОВЕДЕННЯ. Нехай $x_1, x_2, \dots$ – точки розриву функції f . Згідно з теоремою 3, ці ж точки будуть точками розриву невизначеної варіації v функції f . Як було показано в критерії обмеженості варіації, функція $w = v - f$ зростає на $[a, b]$. Застосовуючи теореми 1 і 3, бачимо, що у функції w немає інших точок розриву, окрім, хіба що, точок $x_1, x_2, \dots$. Розглянемо функції стрибків для зростаючих функцій v і w

$$s_v(x) = (v(a+0) - v(a)) + \sum_{x_k < x} (v(x_k + 0) - v(x_k - 0)) + (v(x) - v(x - 0)),$$

$$s_w(x) = (w(a+0) - w(a)) + \sum_{x_k < x} (w(x_k + 0) - w(x_k - 0)) + (w(x) - w(x - 0)),$$

$a < x \leq b$, $s_v(a) = s_w(a) = 0$. Згідно з теоремою 2 з попереднього розділу, різниці $v - s_v$ і $w - s_w$ є зростаючими неперервними функціями. З рівності $f = v - w$ випливає

$$f = (v - s_v) - (w - s_w) + (s_v - s_w),$$

де функція $\varphi \equiv (v - s_v) - (w - s_w)$ неперервна як різниця двох неперервних і має обмежену варіацію як різниця двох зростаючих функцій. Далі, з очевидної рівності $s = s_v - s_w$ випливає, що функція стрибків s також має обмежену варіацію як різниця двох зростаючих на $[a, b]$ функцій. Таким чином, ми отримали потрібне представлення $f = \varphi + s$. $\square$

Різниця $\varphi = f - s$, де s – функція стрибків функції f , називається *неперервною складовою* функції f . Оскільки функція φ має обмежену варіацію, то в неї майже всюди існує похідна φ' . Наступна теорема показує, що похідна функції обмеженої варіації майже всюди дорівнює похідній її неперервної складової.

Теорема 5. *Нехай функція f має обмежену варіацію на $[a, b]$ і φ – її неперервна складова. Тоді для майже всіх $x \in [a, b]$ справедлива рівність $f'(x) = \varphi'(x)$.*

ДОВЕДЕННЯ. В силу рівності $f = \varphi + s$ достатньо показати, що функція стрибків s майже всюди має похідну $s'(x) = 0$. Як було показано при доведенні попередньої теореми, функція стрибків s може бути представлена у вигляді різниці двох зростаючих функцій стрибків. Тому рівність $s'(x) = 0$ для майже всіх x достатньо показати у випадку, коли $s(x)$ зростає.

Для точок розриву $x_1, x_2, \dots$ функції s покладемо

$$u_k = s(x_k) - s(x_k - 0) \geq 0, \quad v_k = s(x_k + 0) - s(x_k) \geq 0$$

(якщо $x_k = a$, то вважаємо, що $u_k = 0$, а для $v_k = b$ покладемо $v_k = 0$). Тоді зрозуміло, що функція стрибків може бути представлена у вигляді

$$s(x) = \sum_k s_k(x),$$

де

$$s_k(x) = \begin{cases} 0, & x < x_k, \\ u_k, & x = x_k, \\ u_k + v_k, & x > x_k. \end{cases}$$

Оскільки функції s_k зростають і $s'_k(x) = 0$ при $x \neq x_k$, і ряд $\sum_k s_k(x)$ збігається до $s(x)$, то, за теоремою Фубіні про почленне диференціювання ряду з монотонними доданками, $s'(x) = \sum_k s'_k(x) = 0$ для майже всіх $x \in [a, b]$. $\square$

Нехай на відрізку $[a, b]$ задана функція обмеженої варіації f . Розіб'ємо $[a, b]$ на частини точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_s = b$ і позначимо, як звичайно, $\lambda = \max_{1 \leq k \leq s} (x_k - x_{k-1})$. Складемо суму

$$V = \sum_{k=1}^s |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

Нагадаємо, що повною варіацією функції f називається точна верхня межа сум V . Поставимо наступне питання: чи існує границя сум V при прямуванні до нуля діаметра розбиття λ ?

Негативну відповідь на це запитання дає наступний приклад. Нехай $f(x) = |\operatorname{sign} x|$, $-1 \leq x \leq 1$. Тоді при будь-якому способі розбиття, для якого точка $x = 0$ є точкою ділення, маємо $V = 2$. Якщо ж точка $x = 0$ не є точкою ділення, то $V = 0$, так що $\lim_{\lambda \rightarrow 0} V$ не існує.

Зовсім іншими будуть обставини у випадку, коли функція обмеженої варіації f неперервна на $[a, b]$. А саме, справедлива

Теорема 6. *Якщо функція f неперервна на відрізку $[a, b]$, то*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} V = V_a^b(f),$$

де не виключається також випадок $V_a^b(f) = +\infty$.

ДОВЕДЕННЯ. Задамо довільне $A < V_a^b(f)$ і знайдемо таку суму V^* , що $V^* > A$. Нехай ця сума відповідає наступному розбиттю $a = x_0^* < x_1^* < \dots < x_m^* = b$. Тепер, користуючись рівномірною неперервністю функції f на відрізку $[a, b]$, знайдемо таке $\delta > 0$, що для будь-яких $x', x'' \in [a, b]$, що задовольняють умову $|x' - x''| < \delta$, справедлива нерівність

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{V^* - A}{4m}.$$

Покажемо, що для будь-якого розбиття, у якого $\lambda < \delta$, виконана нерівність $V > A$.

Справді, нехай задане довільне розбиття $a = x_0 < x_1 < \dots < x_s = b$,

у якого $\lambda < \delta$, і відповідна йому сума V . Складемо нове розбиття, додаючи до точок $\{x_k\}_{k=0}^s$ точки $\{x_i^*\}_{i=0}^m$, і нахай йому відповідає сума V_0 . Оскільки від додавання нових точок до розбиття відповідні розбиттям суми не зменшуються, то $V_0 \geq V^*$.

З іншого боку, якщо на відрізку $[x_{k-1}, x_k]$ добавлена нова точка x_i^* , то для отриманої суми $V_0^{(i)}$ будемо мати

$$\begin{aligned} V_0^{(i)} - V &= |f(x_k) - f(x_i^*)| + |f(x_i^*) - f(x_{k-1})| - |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq \\ &\leq 2 \sup_{x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]} |f(x') - f(x'')| \leq 2 \frac{V^* - A}{4m}. \end{aligned}$$

Оскільки V_0 отримана з V шляхом $(m-1)$ -кратного послідовного додавання до точок $\{x_k\}_{k=1}^s$ точок x_i^* , $i = 1, \dots, m-1$, то маємо

$$\begin{aligned} V_0 - V &\equiv V_0^{(m-1)} - V = \left(V_0^{(m-1)} - V_0^{(m-2)}\right) + \dots + \left(V_0^{(1)} - V\right) \leq \\ &\leq 2(m-1) \frac{V^* - A}{4m} < \frac{V^* - A}{2}. \end{aligned}$$

Звідси, враховуючи, що $V_0 \geq V^*$, отримуємо

$$V > V_0 - \frac{V^* - A}{2} \geq \frac{V^* + A}{2} > A.$$

Отже, при $\lambda < \delta$ маємо $V > A$. З іншого боку, очевидно, $V < \overset{b}{V}_a(f)$.

Звідси вже одразу випливає, що $\lim_{\lambda \rightarrow 0} V = \overset{b}{V}_a(f)$. $\square$

Розглянемо тепер аналогічне питання для сум виду $\Omega = \sum_{k=1}^s \omega_k$, де $\omega_k = \sup_{x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]} |f(x') - f(x'')|$ — коливання функції f на відрізку $[x_{k-1}, x_k]$. Якщо в розглянутому вище прикладі розбиття містить точку $x = 0$, то, очевидно, $\Omega = 2$; в протилежному випадку $\Omega = 1$, так що $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \Omega$, взагалі кажучи, не існує.

Теорема 7. Якщо функція f неперервна на відрізку $[a, b]$, то

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \Omega = V_a^b(f),$$

де не виключається також випадок $V_a^b(f) = +\infty$.

ДОВЕДЕННЯ. Якщо суми Ω і V відповідають одному й тому ж розбиттю, то, очевидно, $\Omega \geq V$.

Задамо $\varepsilon > 0$ і знайдемо таке δ , що для будь-якого розбиття $\{x_k\}_{k=0}^s$ з $\lambda < \delta$ справедлива $V > V_a^b(f) - \varepsilon$. Але тоді буде мати місце також і нерівність $\Omega > V_a^b(f) - \varepsilon$.

З іншого боку, нехай сума Ω відповідає якому-небудь розбиттю $\{x_k\}_{k=0}^s$. Додавимо до цього розбиття точки, в яких функція f набуває значень $\min_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$ і $\max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$. Тоді для отриманої суми V' , очевидно, буде мати місце нерівність $\Omega \leq V'$. Таким чином

$$\Omega \leq V' \leq V_a^b(f).$$

Із сказаного вище випливає, що $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \Omega = V_a^b(f)$. $\square$

На завершення наведемо одне цікаве застосування теореми 7.

Нехай функція f неперервна на відрізку $[a, b]$. Позначимо

$$m = \min_{x \in [a, b]} f(x), \quad M = \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

Для $y \in [m, M]$ розглянемо функцію $N(y)$, яка дорівнює числу коренів рівняння $f(x) = y$. Якщо множина таких коренів нескінченна, то покладемо $N(y) = +\infty$. Функція $N(y)$ називається *індикатрисою Банаха*.

Теорема Банаха. Індикатриса Банаха вимірна і

$$\int_m^M N(y) dy = V_a^b(f).$$

ДОВЕДЕННЯ. Розіб'ємо $[a, b]$ на 2^s рівних частин і покладемо

$$d_1 = \left[a, a + \frac{b-a}{2^s} \right], \quad d_k = \left(a + (k-1)\frac{b-a}{2^s}, a + k\frac{b-a}{2^s} \right], \quad k = 2, 3, \dots, 2^s.$$

Далі, визначимо функцію $L_k(y)$, $k = 1, 2, \dots, 2^s$, поклавши її рівною 1, якщо рівняння $f(x) = y$ має принаймні один корінь на проміжку d_k , і $L_k(y) = 0$, якщо в d_k немає таких коренів. Якщо $m_k = \inf_{x \in d_k} f(x)$, $M_k = \sup_{x \in d_k} f(x)$, то $L_k(y) = 1$ при $y \in (m_k, M_k)$ і $L_k(y) = 0$ при $y \in [m, M] \setminus [m_k, M_k]$, так що функція $L_k(y)$ має не більше двох точок розриву на $[m, M]$ і, отже, вимірна. Крім того,

$$\int_m^M L_k(y) dy = M_k - m_k = \omega_k,$$

де ω_k – коливання функції f на замиканні проміжка d_k .

Розглянемо функцію $N_s(y) = L_1(y) + L_2(y) + \dots + L_{2^s}(y)$, що дорівнює кількості тих проміжків d_k , в яких є принаймні по одному кореню рівняння $f(x) = y$. Очевидно, $N_s(y)$ – вимірна функція і

$$\int_m^M N_s(y) dy = \sum_{k=1}^{2^s} \omega_k,$$

так що, за теоремою 7,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_m^M N_s(y) dy = \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^s} \omega_k = V_a^b(f).$$

Оскільки при переході від s до $s+1$ кожний попередній проміжок ділиться на два нових, то $N_1(y) \leq N_2(y) \leq \dots$ для будь-якого $y \in [m, M]$. Звідси випливає, що існує (скінченна або нескінченна) границя

$$\lim_{s \rightarrow \infty} N_s(y) = N^*(y).$$

Функція $N^*(y)$ вимірна як границя послідовності вимірних функцій $N_s(y)$. Застосовуючи до послідовності $N_s(y)$ теорему Леві про монотонну збіжність, отримаємо

$$\int_m^M N^*(y) dy = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_m^M N_s(y) dy = V_a^b(f).$$

Доведення теореми буде завершене, якщо ми покажемо, що $N^*(y) = N(y)$ для кожного $y \in [m, M]$.

Насамперед, зрозуміло, що $N_s(y) \leq N(y)$, $s = 1, 2, \dots$, звідки випливає, що $N^*(y) \leq N(y)$.

З іншого боку, якщо $N(y)$ скінченне, то покладемо $q = N(y)$, а при $N(y) = +\infty$ за q виберемо будь-яке натуральне число. Тоді можна вказати q різних коренів $x_1, x_2, \dots, x_q$ рівняння $f(x) = y$. Якщо s настільки велике, що $\frac{b-a}{2^s} < \min_{i \neq k} |x_k - x_i|$, то всі q коренів x_k попадуть в різні проміжки d_k , так що при такому s отримаємо, що $N_s(y) \geq q$, звідки, тим паче, $N^*(y) \geq q$.

Отже, з нерівностей $N^*(y) \geq q$ і $N^*(y) \leq q$ випливає, що у випадку, коли $q = N(y) < \infty$, маємо $N^*(y) = q = N(y)$. Якщо ж $N(y) = +\infty$, то з нерівності $N^*(y) \geq q$, що справедлива для будь-якого натурального q , отримуємо, що $N^*(y) = +\infty$. Таким чином, в кожному випадку маємо $N^*(y) = N(y)$ і теорема доведена. $\square$

Контрольні питання до теми 2. Функції обмеженої варіації.

1. Означення функції обмеженої варіації. Приклади.
2. Арифметичні властивості функцій обмеженої варіації.
3. Адитивність варіації. Наслідки.
4. Критерій обмеженості варіації. Наслідки.
5. Невизначена варіація функції. Теорема про неперервність невизначеної варіації. Наслідок.
6. Теорема про похідну невизначеної варіації.
7. Теорема про точки розриву невизначеної варіації.
8. Функція стрибків для функції обмеженої варіації. Розвинення функції обмеженої варіації в суму функції стрибків та неперервну функцію.
9. Теорема про співпадання похідних функції обмеженої варіації та її невизначеної варіації.
10. Обчислення варіації неперервної функції за допомогою границь (дві теореми).
11. Індикатриса Банаха. Теорема Банаха.

Тема 3. Абсолютно неперервні функції

В цьому розділі ми розглянемо клас абсолютно неперервних функцій, більш вузький порівняно з класом функцій обмеженої варіації.

Означення. Скінченна на відрізку $[a, b]$ функція f називається *абсолютно неперервною*, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$ що для кожної скінченної системи інтервалів $(a_k, b_k) \subset [a, b]$, $k = 1, 2, \dots, s$, що попарно не перетинаються і задовольняють умову $\sum_{k=1}^s (b_k - a_k) < \delta$, має місце нерівність $\left| \sum_{k=1}^s (f(b_k) - f(a_k)) \right| < \varepsilon$.

Зрозуміло, що з абсолютної неперервності випливає рівномірна неперервність і, отже, неперервність. Щоб в цьому переконатись, достатньо в означенні абсолютної неперервності взяти $s = 1$. Обернене твердження хибне. Підтверджуючі приклади ми наведемо нижче, коли дослідимо властивості абсолютно неперервних функцій.

В даному означенні абсолютної неперервності замість нерівності

$$\left| \sum_{k=1}^s (f(b_k) - f(a_k)) \right| < \varepsilon$$

можна було б вимагати виконання сильнішої нерівності

$$\sum_{k=1}^s |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Справді, нехай для $\varepsilon > 0$ число δ таке, що з умови $\sum_{k=1}^s (b_k - a_k) < \delta$ випливає нерівність $\left| \sum_{k=1}^s (f(b_k) - f(a_k)) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Розіб'ємо цю систему інтервалів на дві підсистеми, відносячи до першої ті інтервали (a_k, b_k) , для яких

$f(b_k) - f(a_k) \geq 0$, а інтервали, що залишились – до другої підсистеми. Позначаючи через $\sum_k^1$ суму по тим k , для яких інтервали (a_k, b_k) відносяться до першої підсистеми, а через $\sum_k^2$ – до другої підсистеми, отримаємо

$$\sum_k^1 |f(b_k) - f(a_k)| = \left| \sum_k^1 (f(b_k) - f(a_k)) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

і

$$\sum_k^2 |(f(b_k) - f(a_k))| = \left| \sum_k^2 (f(b_k) - f(a_k)) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тому і

$$\sum_{k=1}^s |f(b_k) - f(a_k)| = \sum_k^1 |f(b_k) - f(a_k)| + \sum_k^2 |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Далі, оскільки в сумі $\sum_{k=1}^s |f(b_k) - f(a_k)|$ всі доданки невід'ємні і їх кількість s довільна, то еквівалентне означення абсолютної неперервності може бути сформульоване наступним чином.

Означення. Скінченна на відрізку $[a, b]$ функція f називається *абсолютно неперервною*, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що для будь-якої скінченної або зчисленної системи інтервалів $(a_k, b_k) \subset [a, b]$, $k = 1, 2, \dots$, що попарно не перетинаються, для яких $\sum_k (b_k - a_k) < \delta$, справедлива нерівність $\sum_k |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$.

Ще одне еквівалентне означення абсолютної неперервності можна надати в термінах коливань. Справді, якщо $\alpha_k \in [a_k, b_k]$ таке, що

$$f(\alpha_k) = m_k = \inf_{x \in [a_k, b_k]} f(x)$$

і $\beta_k \in [a_k, b_k]$ таке, що

$$f(\beta_k) = M_k = \sup_{x \in [a_k, b_k]} f(x),$$

то з умови $\sum_k (b_k - a_k) < \delta$ випливає, що й сума довжин інтервалів з кінцями α_k і β_k також менша, ніж δ .

Але тоді і $\sum_k |f(\beta_k) - f(\alpha_k)| = \sum_k (M_k - m_k) = \sum_k \omega_k < \varepsilon$, де, як звичайно, $\omega_k = M_k - m_k$ — коливання функції f на інтервалі (a_k, b_k) .

Покажемо, що якщо в даному означенні абсолютної неперервності відкинути вимогу $(a_k, b_k) \cap (a_i, b_i) = \emptyset$ ($i \neq k$), то отримане означення не буде еквівалентним попередньому.

Приклад. Нехай $f(x) = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$. Задамо $\varepsilon > 0$ і покладемо $\delta = \varepsilon^2/4$. Нехай інтервали $(a_k, b_k) \subset [0, 1]$, $k = 1, 2, \dots$, попарно не перетинаються і $\sum_k (b_k - a_k) < \delta$. Тоді, позначаючи через $\sum_k^1$ суму по тим k , для яких $b_k \geq \delta$, а через $\sum_k^2$ суму по тим k , для яких $b_k < \delta$, отримаємо

$$\begin{aligned} \sum_k^1 |f(b_k) - f(a_k)| &= \sum_k^1 (\sqrt{b_k} - \sqrt{a_k}) = \sum_k^1 \frac{b_k - a_k}{\sqrt{b_k} + \sqrt{a_k}} \leq \\ &\leq \sum_k^1 \frac{b_k - a_k}{\sqrt{b_k}} \leq \frac{1}{\sqrt{\delta}} \sum_k^1 (b_k - a_k) \leq \frac{1}{\sqrt{\delta}} \sum_k (b_k - a_k) < \frac{1}{\sqrt{\delta}} \delta = \sqrt{\delta} = \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Далі, оскільки інтервали (a_k, b_k) попарно не перетинаються, то

$$\sum_k^2 |f(b_k) - f(a_k)| = \sum_k^2 (\sqrt{b_k} - \sqrt{a_k}) < \sqrt{\delta} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} \sum_k |f(b_k) - f(a_k)| &= \\ &= \sum_k^1 |f(b_k) - f(a_k)| + \sum_k^2 |f(b_k) - f(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

так що функція f абсолютно неперервна.

З іншого боку, для інтервалів $(a_k, b_k) = (0, 1/k^2)$, $k = 1, 2, \dots$, маємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

і

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f(b_k) - f(a_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

Звідси випливає, що умова малості суми $\sum_k (b_k - a_k)$ не гарантує, що й сума $\sum_k (f(b_k) - f(a_k))$ буде малою.

Покажемо, що арифметичні операції зберігають властивість абсолютної неперервності.

Теорема (про арифметичні властивості абсолютно неперервних функцій). *Якщо функції f і g абсолютно неперервні, то їх сума, різниця і добуток є абсолютно неперервними. Якщо, крім того, $g(x) \neq 0$, $x \in [a, b]$, то абсолютно неперервна і частка f/g .*

ДОВЕДЕННЯ. Абсолютна неперервність суми та різниці одразу випливає з нерівності

$$|(f(b_k) \pm g(b_k)) - (f(a_k) \pm g(a_k))| \leq |f(b_k) - f(a_k)| + |g(b_k) - g(a_k)|.$$

Далі, оскільки з абсолютної неперервності випливає неперервність, а отже і обмеженість на $[a, b]$, то існують скінченні

$$A = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|, \quad B = \sup_{x \in [a, b]} |g(x)|.$$

Тоді з нерівності

$$\begin{aligned} |f(b_k)g(b_k) - f(a_k)g(a_k)| &\leq \\ &|f(b_k)| |g(b_k) - g(a_k)| + |g(a_k)| |f(b_k) - f(a_k)| \leq \\ &\leq A |g(b_k) - g(a_k)| + B |f(b_k) - f(a_k)| \end{aligned}$$

впливає абсолютна неперервність добутку. Наостанок, якщо $g(x) \neq 0$, $x \in [a, b]$, то, за відомою теоремою аналізу, існує таке $\sigma > 0$, що $|g(x)| \geq \sigma$ для всіх $x \in [a, b]$. Тому

$$\left| \frac{1}{g(b_k)} - \frac{1}{g(a_k)} \right| \leq \frac{1}{\sigma^2} |g(b_k) - g(a_k)|.$$

Звідси впливає абсолютна неперервність функції $1/g$, а отже і функції $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$. $\square$

Теорема 1. *Якщо функція f абсолютно неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона має обмежену варіацію на цьому відрізку.*

ДОВЕДЕННЯ. Користуючись абсолютною неперервністю, знайдемо таке $\delta > 0$, що для будь-якої системи інтервалів $(a_k, b_k) \subset [a, b]$, $k = 1, \dots, s$, що попарно не перетинаються, справедлива нерівність

$$\sum_{k=1}^s |f(b_k) - f(a_k)| < 1.$$

Далі, знайдемо таке N , що $\frac{b-a}{N} < \delta$ і розділимо $[a, b]$ на N рівних за довжиною інтервалів точками $a = c_0 < c_2 < \dots < c_N = b$. Тоді при будь-якому розбитті відрізка $[c_{k-1}, c_k]$ на частини сума абсолютних приростів функції на цих частинах буде меншою, ніж 1, оскільки сума довжин цих частин дорівнює $c_k - c_{k-1} < \delta$. Звідси впливає, що $\bigvee_{c_{k-1}}^{c_k} (f) \leq 1$. Але тоді

$$\bigvee_a^b (f) = \sum_{k=1}^N \bigvee_{c_{k-1}}^{c_k} (f) \leq N, \text{ тобто функція } f \text{ має обмежену варіацію. } \square$$

Зауваження. З цієї теореми вже впливає, що існують неперервні, але не абсолютно неперервні функції. Такою буде кожна неперервна функція, яка має необмежену варіацію, наприклад, розглянута нами в попередньому розділі функція $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $0 < x \leq \frac{2}{\pi}$, $f(0) = 0$.

Наслідок. *Якщо функція f абсолютно неперервна на $[a, b]$, то майже в кожній точці $x \in [a, b]$ вона має скінченну похідну $f'(x)$, яка є сумовною функцією.*

При вивченні властивостей монотонних функцій ми побудували при-

клади зростаючих (і навіть строго) функцій, у яких похідна майже всюди дорівнює нулю. Для абсолютно неперервних функцій така ситуація неможлива.

Теорема 2. *Якщо похідна $f'(x)$ абсолютно неперервної функції f дорівнює нулю для майже всіх $x \in [a, b]$, то функція f тотожна стала на $[a, b]$.*

ДОВЕДЕННЯ. Нехай E – множина всіх таких точок $x \in [a, b]$, в яких $f'(x) = 0$. Задамо $\varepsilon > 0$. Тоді для будь-якого $x \in E$ при достатньо малих $h > 0$ буде $\frac{|f(x+h)-f(x)|}{h} < \varepsilon$. Розглянемо сукупність усіх таких відрізків $[x, x+h]$ з такими h . Вона утворює покриття множини E в сенсі Віталі. Тому можна вибрати скінченну кількість відрізків $d_k = [x_k, x_k + h_k] \subset (a, b)$, $k = 1, \dots, s$, що попарно не перетинаються і таких, що зовнішня міра $m^* \left(E \setminus \left(\bigcup_{k=1}^s d_k \right) \right) < \delta$, де $\delta > 0$ наперед задане. Можемо також вважати, що $x_{k-1} < x_k$, $k = 2, \dots, s$. Розглянемо ті проміжки $[a, x_1)$, $(x_1 + h_1, x_2)$, $\dots$, $(x_{s-1} + h_{s-1}, x_s)$, $(x_s + h_s, b]$, що залишились після вилучення з відрізка $[a, b]$ всіх відрізків d_k , $k = 1, \dots, s$. З нерівності

$$b - a = mE \leq \sum_{k=1}^s m d_k + m^* \left(E \setminus \left(\bigcup_{k=1}^s d_k \right) \right) < \sum_{k=1}^s m d_k + \delta$$

отримаємо

$$\sum_{k=1}^s m d_k > b - a - \delta,$$

і тому сума довжин вказаних проміжків

$$[a, x_1), (x_1 + h_1, x_2), \dots, (x_{s-1} + h_{s-1}, x_s), (x_s + h_s, b]$$

менша, ніж δ .

Але функція f абсолютно неперервна. Тому δ можна вважати вибраним спочатку настільки малим, що сума приростів функції f на цих про-

міжках менша, ніж ε :

$$\left| (f(x_1) - f(a)) + \sum_{k=1}^{s-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k + h_k)) + (f(b) - f(x_s + h_s)) \right| < \varepsilon. \quad (3.1)$$

З іншого боку, за самим визначенням відрізків d_k , справедлива нерівність $|f(x_k + h_k) - f(x_k)| < \varepsilon h_k$. Враховуючи, що $\sum_{k=1}^s h_k = \sum_{k=1}^s m d_k \leq b - a$, отримаємо

$$\left| \sum_{k=1}^s (f(x_k + h_k) - f(x_k)) \right| < \varepsilon(b - a).$$

Звідси та з (3.1) випливає, що $|f(b) - f(a)| \leq \varepsilon(1 + b - a)$, і, оскільки ε довільне, то $f(b) = f(a)$.

Якщо ці міркування провести для відрізка $[a, x]$ замість $[a, b]$, де $a < x \leq b$, то отримаємо, що $f(x) = f(a)$, $a < x \leq b$, тобто функція f тотожно стала на $[a, b]$. $\square$

Наслідок. Якщо дві абсолютно неперервні функції f і g такі, що $f'(x) = g'(x)$ для майже всіх $x \in [a, b]$, то різниця $f - g$ тотожно стала на $[a, b]$.

Справді, майже всюди на $[a, b]$ буде $(f - g)' = 0$.

Нехай функція f сумовна на відрізку $[a, b]$. Розглянемо її інтеграл Лебега зі змінною верхньою межею $\int_a^x f(t)dt \equiv F(x)$. Сукупність функцій виду $\Phi(x) = F(x) + C$, де C – стала, називається *невизначеним інтегралом Лебега* функції f .

Зауваження. В самому означенні невизначеного інтеграла Лебега функції f ми не вимагаємо тої умови, щоб похідна невизначеного інтеграла Лебега в якому-небудь сенсі дорівнювала функції f , як це робиться в класичному аналізі для невизначеного інтеграла Рімана. Таке означення дається за аналогією з відомою властивістю *неперервної* функції f : *інтеграл зі змінною верхньою межею від неперервної функції f є однією з первісних цієї функції f , причому для неперервної функції f інтеграл можна розуміти у сенсі Рімана.*

Отже, нехай Φ – невизначений інтеграл Лебега сумовної функції f . Тоді зрозуміло, що для будь-яких $a \leq x < y \leq b$ справедлива рівність

$$\Phi(y) - \Phi(x) = \int_x^y f(t)dt.$$

За допомогою цієї рівності легко отримати наступну теорему.

Теорема 3. *Невизначений інтеграл Φ є абсолютно неперервною функцією.*

ДОВЕДЕННЯ. Для сумовної на $[a, b]$ функції f має місце абсолютна неперервність інтеграла Лебега. Це означає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що для кожної вимірної множини $e \subset [a, b]$, міри $m_e < \delta$, справедлива $\left| \int_e f(t)dt \right| < \varepsilon$. Зокрема, якщо сума довжин скінченної системи інтервалів $(a_k, b_k) \subset [a, b]$, $k = 1, \dots, s$, що попарно не перетинаються, менша, ніж δ , то $\left| \sum_{k=1}^s \int_{a_k}^{b_k} f(t)dt \right| < \varepsilon$. Але, як відзначено нами, $\int_{a_k}^{b_k} f(t)dt = \Phi(b_k) - \Phi(a_k)$, так що $\left| \sum_{k=1}^s (\Phi(b_k) - \Phi(a_k)) \right| < \varepsilon$, тобто функція Φ абсолютно неперервна. $\square$

З цієї теореми одразу випливає, що функція Φ майже всюди на $[a, b]$ має скінченну похідну і ця похідна сумовна. Насправді справедливе і більш сильніше твердження.

Теорема 4. *Похідна невизначеного інтеграла майже всюди дорівнює підінтегральній функції, тобто для будь-якої сумовної на $[a, b]$ функції f для майже всіх $x \in [a, b]$ справедлива рівність*

$$\left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x).$$

ДОВЕДЕННЯ. Нехай $p < q$ два дійсних числа. Позначимо через $E_{p,q}$ множину тих точок $x \in [a, b]$, де існує $\Phi'(x)$ і справедлива нерівність $\Phi'(x) > q > p > f(x)$. Оскільки похідна будь-якої функції вимірна, то

вимірною і $E_{p,q} = E(\Phi' > q) \cap E(f < p) \setminus e_0$, де e_0 – множина тих $x \in [a, b]$, в яких Φ' не існує, $me_0 = 0$. Доведемо, що $mE_{p,q} = 0$. Для цього задамо довільне $\varepsilon > 0$ і, користуючись абсолютною неперервністю інтеграла Лебега, знайдемо таке $\delta > 0$, що з нерівності $me < \delta$ випливає $\left| \int_e f(t) dt \right| < \varepsilon$. Можемо вважати, що точки a і b не входять до $E_{p,q}$ і $\delta < \varepsilon$. Побудуємо таку відкриту множину $G \subset [a, b]$, що $G \supset E_{p,q}$ і $mG < mE_{p,q} + \delta$. Якщо $x \in E_{p,q}$, то при всіх достатньо малих $h > 0$ буде $\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} > q$. Для всіх таких h сукупність відрізків виду $[x, x+h]$ утворює покриття множини $E_{p,q}$ в сенсі Віталі, причому ми одразу можемо вважати, що всі відрізки $[x, x+h] \subset G$. Тому існує зчислений набір відрізків $[x_1, x_1 + h_1], [x_2, x_2 + h_2], \dots$, що попарно не перетинаються, і таких, що $m(E_{p,q} \setminus S) = 0$, де $S = \bigcup_k [x_k, x_k + h_k]$. В силу побудови відрізків $[x, x+h]$ та з означення функції Φ маємо

$$\frac{1}{h_k} \int_{x_k}^{x_k + h_k} f(t) dt > q.$$

Тому

$$\int_S f(t) dt > q mS.$$

Покажемо, що $mS = mE_{p,q} + \theta\varepsilon$, де $0 \leq \theta \leq 1$. Справді, з рівностей

$$S = (S \cap E_{p,q}) \cup (S \setminus E_{p,q}), \quad (S \cap E_{p,q}) \cap (S \setminus E_{p,q}) = \emptyset,$$

$$E_{p,q} = (S \cap E_{p,q}) \cup (E_{p,q} \setminus S), \quad m(E_{p,q} \setminus S) = 0$$

випливає, що

$$\begin{aligned} mS &= m(S \cap E_{p,q}) + m(S \setminus E_{p,q}) = \\ &= (m(S \cap E_{p,q}) + m(E_{p,q} \setminus S)) + m(S \setminus E_{p,q}) = mE_{p,q} + m(S \setminus E_{p,q}). \end{aligned}$$

Але $S \subset G$ і $E_{p,q} \subset G$, так що $S \setminus E_{p,q} \subset G \setminus E_{p,q}$ і тому

$$m(S \setminus E_{p,q}) \leq m(G \setminus E_{p,q}) = mG - mE_{p,q} < \delta \leq \varepsilon,$$

тобто $m(S \setminus E_{p,q}) = \theta\varepsilon$, де $0 \leq \theta \leq 1$.

Таким чином, $mS = mE_{p,q} + \theta\varepsilon$, де $0 \leq \theta \leq 1$, а отже і

$$\int_S f(t)dt > q(mE_{p,q} + \theta\varepsilon),$$

де $0 \leq \theta \leq 1$.

З іншого боку, $S \subset G$, і тому $S \setminus E_{p,q} \subset G \setminus E_{p,q}$, так що

$$m(S \setminus E_{p,q}) \leq m(G \setminus E_{p,q}) < \delta.$$

Отже,

$$\left| \int_{S \setminus E_{p,q}} f(t)dt \right| < \varepsilon.$$

Звідси, враховуючи, що $m(E_{p,q} \setminus S) = 0$, тобто $\int_{E_{p,q}} f(t)dt = \int_{S \cap E_{p,q}} f(t)dt$, отримаємо

$$\int_S f(t)dt < \int_{E_{p,q}} f(t)dt + \varepsilon.$$

Але на множині $E_{p,q}$ маємо $f(t) < p$, так що

$$\int_{E_{p,q}} f(t)dt \leq p mE_{p,q}.$$

Тому

$$\int_S f(t)dt < p mE_{p,q} + \varepsilon.$$

Але вище ми показали, що

$$\int_S f(t)dt > q (mE_{p,q} + \theta\varepsilon).$$

Отже, отримали

$$q (mE_{p,q} + \theta\varepsilon) < p mE_{p,q} + \varepsilon.$$

Оскільки $\varepsilon > 0$ довільне, то звідси випливає, що

$$q mE_{p,q} \leq p mE_{p,q}.$$

Але $q > p$, так що це можливо лише у випадку $mE_{p,q} = 0$.

Нехай тепер E – множина тих точок $x \in [a, b]$, в яких функція Φ диференційовна і $\Phi'(x) > f(x)$. Тоді $E = \bigcup_{p,q} E_{p,q}$, де об'єднання береться за всіма парами раціональних чисел p, q таким, що $p < q$. Оскільки множина всіх таких пар зчисленна і $mE_{p,q} = 0$, то і $mE = 0$.

Таким чином, отримали, що $\Phi'(x) \leq f(x)$ майже всюди на $[a, b]$.

Покладемо тепер $g(x) = -f(x)$, $\Gamma(x) = \int_a^x g(t)dt$. Тоді зрозуміло, що $\Gamma(x) = -\Phi(x)$, так що функції Γ і Φ мають похідні в одних і тих же точках $x \in [a, b]$. Застосовуючи вже доведену частину теореми до функцій g і Γ , отримаємо, що для майже всіх $x \in [a, b]$ справедлива нерівність $\Gamma'(x) \leq g(x)$, або, що те ж саме, $-\Phi'(x) \leq -f(x)$, тобто $\Phi'(x) \geq f(x)$. Порівнюючи це з отриманою вище протилежною нерівністю, знаходимо, що майже всюди на $[a, b]$ буде мати місце рівність $\Phi'(x) = f(x)$, що і треба було довести. $\square$

Теорема 5. Абсолютно неперервна функція є невизначеним інтегралом від своєї похідної, тобто якщо функція f абсолютно неперервна на відрізку $[a, b]$, то

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt, \quad a \leq x \leq b.$$

ДОВЕДЕННЯ. Вище вже було відзначено, що похідна f' абсолютно неперервної функції f сумовна. Визначимо функцію $F(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$, $a \leq x \leq b$. За теоремою 3, ця функція також абсолютно неперервна і, за теоремою 4, для майже всіх $x \in [a, b]$ маємо $F'(x) = f(x)$. Але тоді, за наслідком з теореми 2, різниця $F(x) - f(x)$ тотожно стала на $[a, b]$. Оскільки, очевидно, $F(a) - f(a) = 0$, то $F(x) = f(x)$ для всіх $x \in [a, b]$. $\square$

З теорем 3 і 5 випливає, що для того, щоб функція Φ була невизначеним інтегралом Лебега від деякої сумовної функції, необхідно і достатньо, щоб Φ була абсолютно неперервною функцією. Справді, необхідність цього твердження доведена в теоремі 3, а достатність – в теоремі 5.

Повернемось до теореми 4, згідно з якою похідна інтеграла зі змінною верхньою межею майже всюди дорівнює підінтегральній функції. Це твердження можна посилити. Для цього введемо наступне поняття.

Означення. Нехай в точці x значення $f(x)$ сумовної функції f скінченне. Якщо

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt = 0,$$

то точка x називається *точкою Лебега* функції f .

З нерівності

$$\left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt - f(x) \right| \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt$$

одразу випливає, що в точці Лебега середнє інтегральне значення

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$$

функції f прямує до значення $f(x)$ при прямуванні до нуля довжини відрізка, по якому обчислюються ці середні.

Наприклад, кожна точка неперервності $x \in [a, b]$ сумовної на $[a, b]$ фун-

кції f є її точкою Лебега. Справді, задамо $\varepsilon > 0$ і, користуючись неперервністю функції f в точці x , знайдемо $\delta > 0$, таке, що при всіх t , які задовольняють умову $|t - x| < \delta$, справедлива нерівність $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$. Але тоді при $|h| < \delta$ будемо мати

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt \leq \varepsilon,$$

так що x – точка Лебега функції f .

Наступні дві теореми в сукупності містять теорему 4 як окремий випадок.

Теорема 6. *Якщо x – точка Лебега функції f , то в цій точці невизначений інтеграл $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ має похідну $\Phi'(x) = f(x)$.*

ДОВЕДЕННЯ. Маємо

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} - f(x) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt - f(x) \right| = \\ &= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt \right| \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt. \end{aligned}$$

З цієї нерівності випливає твердження теореми. $\square$

Відзначимо, що обернене до теореми 6 твердження хибне. Побудуємо приклад, який це підтверджує.

Приклад функції, у якої невизначений інтеграл Лебега має похідну в деякій точці, яка дорівнює значенню функції в цій точці, але сама ця точка не є точкою Лебега.

Покладемо $f(0) = 0$. Позначимо $x_k = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right) = \frac{2k+1}{2k(k+1)}$ і для $x \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right]$ покладемо $f(x) = 1$, при $\frac{1}{k+1} < x \leq x_k$ і $f(x) = -1$, при $x_k < x \leq \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \dots$. Тоді $\int_{1/(k+1)}^{1/k} f(t)dt = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Зрозуміло, що

$x = 0$ не є точкою Лебега функції f , бо для $h > 0$ маємо

$$\frac{1}{h} \int_0^h |f(t) - f(0)| dt = \frac{1}{h} \int_0^h |f(t) - 0| dt = \frac{1}{h} \int_0^h 1 dt = 1,$$

так що $\frac{1}{h} \int_0^h |f(t) - f(0)| dt$ не прямує до нуля при $h \rightarrow 0$.

З іншого боку, покажемо, що функція $\Phi(x) = \int_0^x f(t) dt$ має похідну справа в точці $x = 0$ і ця похідна дорівнює $0 = f(0)$. Легко переконатись в тому, що $\Phi(x_k) = \frac{1}{2k(k+1)}$, $\Phi(\frac{1}{k}) = 0$, а між точками $\frac{1}{k}$, x_k і $\frac{1}{k+1}$, x_k функція $\Phi(x)$ лінійна. Задамо $h > 0$ і знайдемо таке k , що $\frac{1}{k+1} < h \leq \frac{1}{k}$. Тоді, враховуючи, що $0 \leq \Phi(h) \leq \frac{1}{2k(k+1)}$, отримуємо

$$\left| \frac{\Phi(h) - \Phi(0)}{h} \right| = \frac{1}{h} \Phi(h) \leq (k+1) \frac{1}{2k(k+1)} = \frac{1}{2k}.$$

Оскільки при $h \rightarrow 0+$ маємо $k \rightarrow \infty$, то звідси випливає, що існує $\Phi'(0) = 0 = f(0)$.

Теорема 7. Якщо функція f сумовна на відрізку $[a, b]$, то майже кожна точка $x \in [a, b]$ є точкою Лебега функції f .

ДОВЕДЕННЯ. Задамо раціональне число r і введемо до розгляду функцію $\varphi(t) = |f(t) - r|$. Ця функція φ також сумовна на $[a, b]$ і, за теоремою 4, для майже всіх $x \in [a, b]$ справедлива рівність

$$\left(\int_a^x \varphi(t) dt \right)' = \varphi(x).$$

Цю рівність можна переписати так

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - r| dt = |f(x) - r|. \quad (3.2)$$

Відзначимо, що ми можемо одразу гарантувати виконання такої рів-

ності майже всюди при $r = f(x)$. А саме, для функції $\varphi_x(t) = |f(t) - f(x)|$ ми також отримаємо, що похідна її невизначеного інтеграла Лебега майже всюди дорівнює підінтегральній функції, але у нас немає гарантії, що така рівність буде мати місце в конкретній точці x .

Позначимо через $E(r)$ множину тих точок $x \in [a, b]$, в яких не виконана (3.2). Тоді $mE(r) = 0$. Занумеруємо всі раціональні числа $r_1, r_2, \dots$ і позначимо

$$E = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E(r_k) \right) \cup E(|f| = \infty).$$

Тоді $mE = 0$ і для доведення нашої теореми достатньо показати, що кожна точка $x \in [a, b] \setminus E$ є точкою Лебега функції f .

Нехай $x_0 \in [a, b] \setminus E$. Задамо $\varepsilon > 0$ і знайдемо таке раціональне r_k , що $|f(x_0) - r_k| < \varepsilon/3$. Тоді з нерівності

$$||f(t) - r_k| - |f(t) - f(x_0)|| \leq |f(x_0) - r_k| < \frac{\varepsilon}{3}$$

випливає

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - r_k| dt - \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt \right| = \\ & = \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} (|f(t) - r_k| - |f(t) - f(x_0)|) dt \right| \leq \\ & \leq \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} ||f(t) - r_k| - |f(t) - f(x_0)|| dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3.3) \end{aligned}$$

Але оскільки $x_0 \notin E$, то для нашого ε знайдеться таке δ , що при $|h| < \delta$ справедлива

$$\left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - r_k| dt - |f(x_0) - r_k| \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

тобто, з урахуванням того, що $|f(x_0) - r_k| < \frac{\varepsilon}{3}$,

$$\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - r_k| dt < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Звідси та з (3.3) випливає, що

$$\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt < \varepsilon$$

і теорема доведена. $\square$

Доведена вище теорема 3 стверджує, що невизначений інтеграл Лебега є абсолютно неперервною функцією. В той же час, за теоремою 1, абсолютно неперервна функція має обмежену варіацію. Наступна теорема дозволяє знайти цю повну варіацію.

Теорема 8. *Нехай функція f сумовна на відрізку $[a, b]$ і її невизначений інтеграл Лебега $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Тоді*

$$V_a^b(F) = \int_a^b |f(t)| dt.$$

Іншими словами, повна варіація абсолютно неперервної функції дорівнює інтегралу від модуля її похідної.

ДОВЕДЕННЯ. Якщо $a = x_0 < x_1 < \dots < x_s = b$ є деяке розбиття відрізка $[a, b]$ на частини, то

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^s |F(x_k) - F(x_{k-1})| &= \sum_{k=1}^s \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^s \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t)| dt = \int_a^b |f(t)| dt, \end{aligned}$$

так що

$$V_a^b(F) \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Для доведення протилежної нерівності позначимо

$$E = [a, b], \quad P = E(f \geq 0), \quad N = E(f < 0).$$

Тоді

$$\int_a^b |f(t)| dt = \int_P f(t) dt - \int_N f(t) dt.$$

Нехай $\varepsilon > 0$. Користуючись абсолютною неперервністю інтеграла Лебега, знайдемо таке $\delta > 0$, що для будь-якої вимірної множини $e \subset [a, b]$ міри $me < \delta$ справедлива нерівність $\int_e |f(t)| dt < \varepsilon$.

Виберемо замкнуті множини $F_P \subset P$ і $F_N \subset N$ такі, що $mF_P > mP - \delta$ і $mF_N > mN - \delta$. Тоді

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(t)| dt &= \int_{F_P} f(t) dt + \int_{P \setminus F_P} f(t) dt - \left(\int_{F_N} f(t) dt + \int_{N \setminus F_N} f(t) dt \right) < \\ &< \int_{F_P} f(t) dt - \int_{F_N} f(t) dt + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Скористаємось тепер властивістю роздільності, яка полягає в тому, що навколо будь-яких двох замкнутих обмежених множин, що не перетинаються, можна описати відкриті множини, які також не перетинаються. Знайдемо відкриті множини $G'_P \supset F_P$ і $G'_N \supset F_N$ такі, що $G'_P \cap G'_N = \emptyset$. Можемо вважати, що $G'_P \subset (a, b)$ і $G'_N \subset (a, b)$. Далі, знайдемо такі відкриті обмежені множини $G''_P \supset F_P$ і $G''_N \supset F_N$, що $mG''_P < mF_P + \delta$ і $mG''_N < mF_N + \delta$. Позначимо $G_P = G'_P \cap G''_P$ і $G_N = G'_N \cap G''_N$. Тоді зрозуміло, що $G_P \subset (a, b)$, $G_P \supset F_P$, $m(G_P \setminus F_P) < \delta$, $G_N \subset (a, b)$, $G_N \supset F_N$.

F_N , $m(G_N \setminus F_N) < \delta$, $G_P \cap G_N = \emptyset$ і G_P , G_N – відкриті множини. Тому

$$\int_a^b |f(t)| dt < \int_{G_P} f(t) dt - \int_{G_N} f(t) dt + 4\varepsilon.$$

Множина G_P є об'єднанням набору не більше, ніж зчисленного набору своїх складових інтервалів. Тому можна вибрати скінченне число цих інтервалів, таких, що для їх об'єднання B_P справедлива $m(G_P \setminus B_P) < \delta$. Тоді буде $\int_{G_P} f(t) dt - \int_{B_P} f(t) dt < \varepsilon$. Нехай $B_P = \bigcup_{k=1}^s (\lambda_k, \mu_k)$. Тоді

$$\int_{B_P} f(t) dt = \sum_{k=1}^s \int_{\lambda_k}^{\mu_k} f(t) dt = \sum_{k=1}^s [F(\mu_k) - F(\lambda_k)].$$

Отже,

$$\int_{G_P} f(t) dt < \sum_{k=1}^s [F(\mu_k) - F(\lambda_k)] + \varepsilon.$$

Аналогічним чином виберемо скінченний набір $\{(\alpha_k, \beta_k)\}_{k=1}^m$ з усіх складових інтервалів множини G_N так, щоб була виконана нерівність

$$\int_{G_N} f(t) dt > \sum_{k=1}^m [F(\beta_k) - F(\alpha_k)] - \varepsilon.$$

З усього сказаного вище випливає, що

$$\int_a^b |f(t)| dt < \sum_{k=1}^s [F(\mu_k) - F(\lambda_k)] - \sum_{k=1}^m [F(\beta_k) - F(\alpha_k)] + 6\varepsilon,$$

звідки, тим паче,

$$\int_a^b |f(t)| dt < \sum_{k=1}^s |F(\mu_k) - F(\lambda_k)| + \sum_{k=1}^m |F(\beta_k) - F(\lambda_k)| + 6\varepsilon.$$

Але інтервали (λ_k, μ_k) і (α_k, β_k) не перетинаються, так що в останній нерівності права частина не більша за $\int_a^b (F) + 6\varepsilon$. В силу довільності ε , отримуємо

$$\int_a^b |f(t)| dt \leq \int_a^b (F)$$

і тим самим завершується доведення теореми. $\square$

Нехай функція f неперервна на відрізку $[a, b]$ і має на цьому відрізку обмежену варіацію. Тоді її похідна f' існує майже всюди на $[a, b]$ і сумовна. Покладемо $\varphi(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$, $r(x) = f(x) - \varphi(x)$, $a \leq x \leq b$. Тоді отримаємо $f = \varphi + r$, де функція φ абсолютно неперервна, оскільки вона є невизначеним інтегралом Лебега сумовної функції f' . Далі, функція φ майже всюди на $[a, b]$ має похідну $\varphi' = f'$. Тому функція r неперервна на $[a, b]$ як різниця двох неперервних функцій і для майже всіх $x \in [a, b]$ справедлива рівність $r'(x) = f'(x) - \varphi'(x) = 0$. Якщо додатково припустити, що функція f абсолютно неперервна, то з рівності майже всюди $\varphi' = f'$, і з $f(a) = \varphi(a)$ отримуємо, що $\varphi(x) = f(x)$, $a \leq x \leq b$, тобто $r(x) \equiv 0$, $a \leq x \leq b$. Якщо ж не припускати абсолютної неперервності функції f , то все сказане вище може мати місце і у випадку, коли функція r не дорівнює тотожно нулю.

Означення. Неперервна функція з обмеженою варіацією, яка не дорівнює тотожній сталій, і похідна у якої майже всюди дорівнює нулю, називається *сингулярною* функцією.

Зрозуміло, що сингулярна функція не може бути абсолютно неперервною, бо, в протилежному випадку, за теоремою 2, вона була б тотожно сталою. Приклад зростаючої (і навіть строго зростаючої) сингулярної функції побудований нами в розділі "Монотонні функції" (функція Кантора а також наступний за ним приклад).

Вище ми показали, що кожна неперервна функція f може бути представлена у вигляді $f = \varphi + r$, де функція φ абсолютно неперервна, $\varphi(a) = f(a)$, а r – сингулярна або тотожний нуль. Покажемо, що таке представ-

лення єдине. Справді, якщо існують два таких представлення $f = \varphi + r = \varphi_1 + r_1$, то ми мали б $\varphi - \varphi_1 = r_1 - r$, тобто у абсолютно неперервної функції було б $(\varphi - \varphi_1)'(x) = r_1'(x) - r'(x) = 0$ для майже всіх $x \in [a, b]$ і $(\varphi - \varphi_1)(a) = 0$. Це означає, що $\varphi(x) = \varphi_1(x)$, $a \leq x \leq b$. Звідси також випливає, що $r(x) = r_1(x)$, $a \leq x \leq b$.

Теорема 9. *Якщо функція f зростає, то її абсолютно неперервна та сингулярна компоненти також зростають.*

ДОВЕДЕННЯ. Зрозуміло, що $f'(x) \geq 0$ майже всюди на $[a, b]$, тобто в тих точках x , де ця похідна існує. Звідси випливає, що абсолютно неперервна компонента $\varphi(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$ також зростає на $[a, b]$. Далі, в розділі "Монотонні функції" ми довели, що для монотонної функції f справедлива нерівність $\int_x^y f'(t)dt \leq f(y) - f(x)$, $a \leq x < y \leq b$. Звідси випливає, що $\varphi(y) - \varphi(x) \leq f(y) - f(x)$, або, що те ж саме, $r(x) \leq r(y)$.

□

Наслідок. *Для того, щоб зростаюча неперервна функція f була абсолютно неперервною на $[a, b]$, необхідно та достатньо, щоб була виконана рівність*

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a). \quad (3.4)$$

ДОВЕДЕННЯ. Необхідність отримаємо миттєво, якщо перепишемо умову (3.4) у вигляді $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(x)dx$. Ця рівність, очевидно, виконана, оскільки справа ми маємо значення абсолютно неперервної компоненти φ функції f в точці b , а рівність $f(b) = \varphi(b)$ випливає з єдиності розвинування неперервної функції f на абсолютно неперервну та сингулярну компоненти. Остання в нашому випадку є тотожним нулем для абсолютно неперервної функції f .

Доведемо достатність. Припустимо, що f не є абсолютно неперервною. Тоді для її абсолютно неперервної і сингулярної компонент φ і r

справедлива рівність $f(b) - f(a) = \varphi(b) - \varphi(a) + r(b) - r(a)$, тобто

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx + r(b) - r(a).$$

Але функція r зростає в силу попередньої теореми і не є тотожною сталою. Тому $r(b) > r(a)$, а це означає, що не виконана умова (3.4). $\square$

В попередньому розділі ми показали, що кожна функція обмеженої варіації може бути представлена у вигляді суми своєї функції стрибків та неперервної функції обмеженої варіації. Далі, вище ми показали також, що неперервна функція може бути представлена у вигляді суми абсолютно неперервної та сингулярної компонент. Таким чином, ми отримуємо, що будь-яка функція обмеженої варіації може бути представленою у вигляді суми абсолютно неперервної функції, сингулярної функції та функції стрибків. При цьому деякі з доданків можуть обертатись в тотожний нуль.

Повернемося до останнього наслідку. Замінімо в рівності (3.4) число b на довільне x і перепишемо її у вигляді

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt, \quad a \leq x \leq b. \quad (3.5)$$

При доведенні наслідку в частині необхідності ми не використовували монотонність функції f . Це означає, що з абсолютної неперервності функції f випливає рівність (3.5). Зараз ми хочемо дослідити умови на похідну, які гарантують виконання (3.5). Природно припускати, що похідна f' існує майже всюди на $[a, b]$ і сумовна. Але цих припущень, очевидно, недостатньо для справедливості (3.5), як покаже, наприклад, функція Кантора, навіть у випадку зростаючої неперервної функції f .

З іншого боку, у вступі ми показали, що рівність (3.5) справедлива за умовою, що похідна $f'(x)$ існує в кожній точці x і обмежена. Наступна теорема істотно посилює цей результат. А саме, вона показує, що умову

обмеженості похідної можна замінити більш слабкою умовою сумовності. Перед тим, як формулювати цю теорему, доведемо дві допоміжні леми.

Лема 1. *Нехай на $[a, b]$ задана функція f , скінченна в кожній точці. Якщо в кожній точці $x \in [a, b]$ всі похідні числа $Df(x)$ невід'ємні, то f зростає на $[a, b]$.*

ДОВЕДЕННЯ. Візьмемо $\varepsilon > 0$ і покладемо $F(x) = f(x) + \varepsilon x$. Припустимо, що $F(b) < F(a)$. Нехай $c = \frac{a+b}{2}$. Тоді принаймні одна з різниць $F(b) - F(c)$ або $F(c) - F(a)$ від'ємна. Нехай $[a_1, b_1]$ – той з відрізків $[a, c]$ і $[c, b]$, для якого $F(b_1) - F(a_1) < 0$. Знову розділимо відрізок $[a_1, b_1]$ навпіл точкою $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ і т.д.

Продовжуючи цей процес, отримаємо послідовність вкладених один в один відрізків $\{[a_k, b_k]\}_{k=1}^{\infty}$, довжини яких прямують до нуля і таких, що $F(b_k) < F(a_k)$. За лемою Кантора про вкладені відрізки, існує точка $x_0 \in [a_k, b_k]$, $k = 1, 2, \dots$. Тоді при кожному $k = 1, 2, \dots$ одна з різниць $F(b_k) - F(x_0)$ або $F(x_0) - F(a_k)$ від'ємна. Покладемо $h_k = b_k - x_0$, якщо $F(b_k) - F(x_0) < 0$, і $h_k = a_k - x_0$, якщо $F(x_0) - F(a_k) < 0$ (якщо обидва числа $F(b_k) - F(x_0)$ і $F(x_0) - F(a_k)$ від'ємні, то за h_k виберемо будь-яке з чисел $b_k - x_0$ або $a_k - x_0$). При такому виборі, очевидно,

$$\Delta_k \equiv \frac{F(x_0 + h_k) - F(x_0)}{h_k} < 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Виберемо тепер підпослідовність $\{\Delta_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$, що має границю (яка може дорівнювати $-\infty$). Ми отримуємо, що функція F буде мати цю границю своїм похідним числом і, зрозуміло, це похідне число буде $DF(x_0) \leq 0$. Але це неможливо, бо $DF(x_0) = Df(x_0) + \varepsilon > 0$.

Ми отримали, що нерівність $F(b) < F(a)$ неможлива. Отже $F(b) \geq F(a)$, тобто $f(b) + \varepsilon b \geq f(a) + \varepsilon a$, або $f(b) - f(a) \geq -\varepsilon(b - a)$. Звідси, в силу довільності ε , випливає, що $f(b) \geq f(a)$.

Заміняючи в нашому доведенні a і b довільними x і y , $a \leq x < y \leq b$, отримаємо $f(x) \leq f(y)$. $\square$

Лема 2. *Нехай функція f скінченна в кожній точці відрізка $[a, b]$. Якщо майже всюди на $[a, b]$ всі похідні числа $Df(x)$ невід'ємні і в жодній*

точці з $[a, b]$ ніяке з похідних чисел не обертається в $-\infty$, то функція f зростає на $[a, b]$.

ДОВЕДЕННЯ. Позначимо через E множину міри нуль тих точок, в яких принаймні б одне з похідних чисел $Df(x)$ від'ємне. Побудуємо неперервну, зростаючу на $[a, b]$ функцію φ таку, що в усіх точках x множини E буде $\varphi'(x) = +\infty$. Приклад такої функції нами був побудований в розділі "Монотонні функції" одразу після доведення теореми Лебега про диференціювання монотонної функції.

Покладемо $F(x) = f(x) + \varepsilon\varphi(x)$, де $\varepsilon > 0$ задане. Покажемо, що в кожній точці $x \in [a, b]$ всі похідні числа $DF(x)$ невід'ємні. Справді, із зростання функції φ випливає, що

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \varepsilon \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \geq \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

так що для $x \notin E$ всі похідні числа $DF(x)$ невід'ємні. Якщо ж $x \in E$, то для будь-якої послідовності $\{h_k\}_{k=1}^\infty$, $h_k \rightarrow 0$, $h_k \neq 0$, відношення $\frac{f(x+h_k) - f(x)}{h_k}$ обмежене знизу (бо, в протилежному випадку, в точці x існувало б похідне число $Df(x)$, що дорівнює $-\infty$). Крім того, $\varphi'(x) = +\infty$, так що в точці $x \in E$ існує $F'(x) = +\infty$. Отже, всі похідні числа функції F невід'ємні. Тому, за лемою 1, функція F зростає, тобто з $a \leq x < y \leq b$ випливає $F(x) \leq F(y)$, або, що те ж саме, $f(x) + \varepsilon\varphi(x) \leq f(y) + \varepsilon\varphi(y)$. Спрямовуючи ε до нуля, звідси знаходимо $f(x) \leq f(y)$. $\square$

Теорема 10. Якщо похідна $f'(x)$ існує всюди, скінченна в кожній точці $x \in [a, b]$ і сумовна на $[a, b]$, то

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt.$$

ДОВЕДЕННЯ. Розглянемо послідовність функцій $\varphi_k(x) = \min(f'(x), k)$, $k = 1, 2, \dots$. З нерівності $|\varphi_k(x)| \leq |f'(x)|$ випливає, що функції φ_k сумов-

ні. Покладемо

$$F_k(x) = f(x) - \int_a^x \varphi_k(t) dt, \quad a \leq x \leq b, \quad k = 1, 2, \dots,$$

і покажемо, що функції F_k зростають на $[a, b]$. Для цього відзначимо, що $F'_k(x) = f'(x) - \varphi'_k(x) \geq 0$ для майже всіх $x \in [a, b]$. Це означає, що множина тих точок x , в яких принаймні б одне похідне число функції F_k від'ємне, має міру нуль. З іншого боку, з нерівності $\varphi_k(x) \leq k$ випливає, що $\frac{1}{h} \int_x^{x+h} \varphi_k(t) dt \leq k$, і, отже,

$$\frac{F_k(x+h) - F_k(x)}{h} \geq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - k.$$

Звідси зрозуміло, що жодне з похідних чисел функції F_k не може обернутися в $-\infty$. Тому, за лемою 2, функція F_k зростає на $[a, b]$, а отже $F_k(b) \geq F_k(a)$. Остання нерівність означає, що $f(b) - f(a) \geq \int_a^b \varphi_k(x) dx$.

Але, очевидно, $f'(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x)$ і, як було відзначено вище,

$$|\varphi_k(x)| \leq |f'(x)|.$$

Звідси, за теоремою Лебега про мажоровану збіжність,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_k(x) dx = \int_a^b f'(x) dx,$$

так що $f(b) - f(a) \geq \int_a^b f'(x) dx$.

Застосуємо тепер ті ж міркування до функції $-f$. Тоді отримаємо, що

$$f(b) - f(a) \leq \int_a^b f'(x) dx.$$

Звідси та з попередньої нерівності випливає $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx$.

Якщо тепер в доведеній рівності замінити b на довільне $x \in [a, b]$, то отримаємо твердження теореми. $\square$

Приклад. Нехай $f(x) = x^{3/2} \sin \frac{1}{x}$, $0 < x \leq 1$, $f(0) = 0$. Ця функція в кожній точці $x \in [0, 1]$ має похідну $f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2} \sin \frac{1}{x} - x^{-1/2} \cos \frac{1}{x}$, $0 < x \leq 1$, $f'(0) = 0$, і ця похідна сумовна, оскільки $|f'(x)| \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$. Отже, функція f задовольняє всім вимогам теореми 10. Але легко переконатись в тому, що похідна f' необмежена на $[0, 1]$, так що теорема про відновлення функції за її відомою похідною, що доведена нами у вступі, до цієї функції не може бути застосована.

Разом з тим, і теорема 10 не вирішує повністю питання про відновлення функції за її відомою похідною, навіть якщо остання існує і скінченна в кожній точці, бо похідна може виявитись несумовною. Щоб це підтвердити, наведемо приклад.

Приклад. Нехай $f(x) = x^2 \cos \frac{\pi}{x^2}$, $0 < x \leq 1$, $f(0) = 0$. Зрозуміло, що похідна $f'(x)$ існує в кожній точці $x \in [0, 1]$, але вона несумовна. Справді, для $0 < \alpha < \beta \leq 1$ похідна $f'(x)$ неперервна на $[\alpha, \beta]$ і, отже,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)dx = \beta^2 \cos \frac{\pi}{\beta^2} - \alpha^2 \cos \frac{\pi}{\alpha^2}.$$

Зокрема, для $\alpha_k = \sqrt{\frac{2}{4k+1}}$, $\beta_k = \frac{1}{\sqrt{2k}}$ буде $\int_{\alpha_k}^{\beta_k} f'(x)dx = \frac{1}{2k}$. Оскільки відрізки $[\alpha_k, \beta_k]$ не перетинаються, то

$$\int_0^1 |f'(x)| dx \geq \int_{\bigcup_{k=1}^{\infty} [\alpha_k, \beta_k]} |f'(x)| dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} |f'(x)| dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = +\infty,$$

так що $f'(x)$ несумовна на $[0, 1]$.

Отже, операція інтегрування за Лебегом вирішує питання відновлення функції за її відомою похідною в більш загальному випадку, ніж інтегру-

вання за Ріманом, але все ж таки не цілком. Повне вирішення питання дає процес інтегрування Данжуа – Перрона. Інтеграл Данжуа – Перрона більш загальний, ніж інтеграл Лебега. Вивчення цього інтеграла не входить в рамки нашого курсу.

Контрольні питання до теми 3. Абсолютно неперервні функції.

1. Різні означення абсолютно неперервної функції та їх еквівалентність. Приклади.
2. Арифметичні властивості абсолютно неперервних функцій.
3. Зв'язок абсолютної неперервності з обмеженістю варіації. Наслідок.
4. Теорема про сталість абсолютно неперервної функції.
5. Невизначений інтеграл Лебега. Абсолютна неперервність невизначеного інтеграла Лебега.
6. Теорема про похідну невизначеного інтеграла Лебега.
7. Абсолютно неперервна функція як невизначений інтеграл Лебега від своєї похідної.
8. Точки Лебега. Диференційовність невизначеного інтеграла Лебега в точці Лебега. Приклад функції, у якій невизначений інтеграл Лебега має похідну в точці, що не є точкою Лебега.
9. Теорема про точки Лебега сумовної функції.
10. Варіація невизначеного інтеграла Лебега.
11. Сингулярна функція. Розвинення неперервної функції на абсолютно неперервну та сингулярну компоненти.
12. Теорема про абсолютно неперервну та сингулярну компоненти монотонної функції. Наслідок.
13. Умови монотонності функції в термінах похідних чисел.
14. Теорема про відновлення функції за її сумовною похідною.
15. Приклад функції з несумовною похідною.

Тема 4. Недиференційовні функції

З класичного курсу аналізу добре відомі приклади неперервних функцій, які не мають похідної в деяких окремих точках. Але виникає природне запитання: чи може неперервна функція бути недиференційовною в кожній точці? Перший приклад такої функції був побудований Вейєрштрассом (опублікований Дю Буа Реймоном в 1875 р.). Цей приклад наводиться в підручнику Г. М. Фіхтенгольца "Курс дифференціального та інтегрального числення". Ми розглянемо інший приклад, що належить Ван дер Вардену (1930 р.).

Приклад неперервної ніді недиференційовної функції.

Позначимо через $\{x\}$ відстань від x до найближчого цілого числа і розглянемо функцію

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^n x\}}{10^n}. \quad (4.1)$$

Доданки цього ряду невід'ємні, неперервні і мажоруються доданками збіжного числового ряду $\sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n}$. Тому ряд (4.1) збігається рівномірно і його сума $f(x)$ є функцією неперервною. Покажемо, що в кожній точці функція $f(x)$ не має похідної, тобто що відношення $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ не має границі при $h \rightarrow 0$.

Зрозуміло, що в силу періодичності f достатньо розглянути ті значення x , для яких $0 \leq x < 1$. Представимо x у вигляді $x = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$, де $a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$, причому, якщо десятковий дріб скінченний, то будемо доповнювати його нулями. Тоді $10^n x = a_1 \dots a_n, a_{n+1} a_{n+2} \dots$ і $\{10^n x\} = 0, a_{n+1} a_{n+2} \dots$, якщо $0, a_{n+1} a_{n+2} \dots \leq \frac{1}{2}$ і $\{10^n x\} = 1 - 0, a_{n+1} a_{n+2} \dots$, якщо $0, a_{n+1} a_{n+2} \dots > \frac{1}{2}$.

Побудуємо тепер таку послідовність чисел h_m , $h_m \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$), для

якої вираз

$$\frac{f(x + h_m) - f(x)}{h_m} \quad (4.2)$$

не має границі при $m \rightarrow \infty$. Це і буде означати, що функція f в точці x не має похідної.

Покладемо $h_m = -10^{-m}$, якщо a_m дорівнює 4 або 9, і $h_m = 10^{-m}$ в усіх останніх випадках. Тоді відношення (4.2) має наступний вигляд

$$\begin{aligned} \frac{f(x + h_m) - f(x)}{h_m} &= \frac{1}{h_m} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^n(x + h_m)\}}{10^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^n x\}}{10^n} \right] = \\ &= \pm 10^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^n(x \pm 10^{-m})\} - \{10^n x\}}{10^n}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

При $n \geq m$ чисельники дробів в правій частині (4.3) дорівнюють нулю. Якщо ж $n < m$, то

$$\begin{aligned} \{10^n(x \pm 10^{-m})\} - \{10^n x\} &= \\ &= 0, a_{n+1} \dots a_{m-1} a'_m a_{m+1} \dots - 0, a_{n+1} \dots a_{m-1} a_m a_{m+1} \dots, \end{aligned}$$

якщо $0, a_{n+1} \dots \leq \frac{1}{2}$ і

$$\begin{aligned} \{10^n(x \pm 10^{-m})\} - \{10^n x\} &= \\ &= 1 - 0, a_{n+1} \dots a_{m-1} a'_m a_{m+1} \dots - (1 - 0, a_{n+1} \dots a_{m-1} a_m a_{m+1} \dots), \end{aligned}$$

у випадку, коли $0, a_{n+1} \dots > \frac{1}{2}$, де a'_m відрізняється від a_m на 1. Таким чином, доданки різниці $\{10^n(x \pm 10^{-m})\} - \{10^n x\}$ відрізняються один від одного тим, що в $(m - n)$ -ому десятковому розряді відповідні цифри відрізняються на 1. Тому $\{10^n(x \pm 10^{-m})\} - \{10^n x\}$ дорівнює $\pm 10^{n-m}$, і права частина (4.3) має вигляд

$$\pm 10^m \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\pm 10^{n-m}}{10^n} = \pm \sum_{n=0}^{m-1} (\pm 1).$$

Отже, відношення $\frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}$ набуває цілі (додатні, від'ємні або нульові) значення, які мають ту ж саму парність, що й число m . Зрозуміло, що така послідовність не може мати границі, бо цілочисельна послідовність може збігатись лише в тому випадку, коли всі її елементи сталі, починаючи з деякого номера.

Розглянемо тепер питання про те, якими можуть бути похідні числа Df довільної функції f . Для цього введемо поняття верхніх та нижніх похідних чисел.

Означення. Правим верхнім похідним числом функції f в точці x_0 називається

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \equiv \overline{D}_R f(x_0).$$

Правим нижнім похідним числом називається

$$\liminf_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \equiv \underline{D}_R f(x_0).$$

Аналогічно означаються ліві верхнє і нижнє похідні числа відповідно

$$\overline{D}_L f(x_0) \equiv \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h},$$

$$\underline{D}_L f(x_0) \equiv \liminf_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h}.$$

Далі похідними числами ми будемо називати верхнє або нижнє, праве або ліве похідні числа. Інші похідні числа ми розглядати не будемо. Два похідних числа ми будемо називати *суміжними*, якщо вони обидва праві або обидва ліві. Два похідних числа називаються *протилежними*, якщо вони не суміжні і одне з них верхнє, а друге – нижнє.

Зрозуміло, що похідні числа задовольняють нерівності

$$-\infty \leq \underline{D}_L f(x_0) \leq \overline{D}_L f(x_0) \leq +\infty, \quad -\infty \leq \underline{D}_R f(x_0) \leq \overline{D}_R f(x_0) \leq +\infty,$$

а рівність $\underline{D}_L f(x_0) = \overline{D}_L f(x_0) = \underline{D}_R f(x_0) = \overline{D}_R f(x_0)$ необхідна та доста-

тня для того, щоб функція f мала похідну $f'(x_0)$, яка може дорівнювати $+\infty$ або $-\infty$. При цьому $f'(x_0)$ дорівнює спільному значенню усіх чотирьох похідних чисел функції f в точці x_0 .

Неважко побудувати

Приклад неперервної функції, у якій похідні числа в заданій точці наперед задані. Справді, нехай задані числа $-\infty \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq +\infty$, $-\infty \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq +\infty$. Спочатку побудуємо неперервну на $[0, 1]$ функцію f_{β_1, β_2} , у якій $\underline{D}_R f(0) = \beta_1$, $\overline{D}_R f(0) = \beta_2$. Покладемо $f(0) = 0$. Якщо β_1 і β_2 скінченні, то функцію $f_{\beta_1, \beta_2}(x)$, $0 < x \leq 1$, визначимо рівністю

$$f_{\beta_1, \beta_2}(x) = \frac{\beta_2 - \beta_1}{2} x \sin \frac{1}{x} + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} x.$$

Для нескінченних β_1 і β_2 покладемо

$$f_{+\infty, +\infty}(x) = \sqrt{x}, \quad f_{-\infty, +\infty}(x) = \sqrt{x} \sin \frac{1}{x}, \quad f_{-\infty, -\infty}(x) = -\sqrt{x}.$$

Якщо $-\infty < \beta_1 < \beta_2 = +\infty$, то $f_{\beta_1, +\infty}(x) = \beta_1 x + \sqrt{x} (1 + \sin \frac{1}{x})$, а для $-\infty = \beta_1 < \beta_2 < +\infty$ покладемо $f_{-\infty, \beta_1}(x) = \beta_2 x + \sqrt{x} (-1 + \sin \frac{1}{x})$. Зрозуміло, що в будь-якому випадку $\underline{D}_R f_{\beta_1, \beta_2}(0) = \beta_1$, $\overline{D}_R f_{\beta_1, \beta_2}(0) = \beta_2$.

Визначимо тепер функцію

$$f_{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2}(x) = \begin{cases} f_{\beta_1, \beta_2}(x), & x \geq 0, \\ f_{-\alpha_2, -\alpha_1}(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Тоді легко бачити, що функція $f_{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2}$ неперервна і має наступні похідні числа

$$\underline{D}_L f_{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2}(0) = \alpha_1, \quad \overline{D}_L f_{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2}(0) = \alpha_2,$$

$$\underline{D}_R f_{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2}(0) = \beta_1, \quad \overline{D}_R f_{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2}(0) = \beta_2.$$

Наведений приклад показує, що навіть у неперервної функції в окремих точках похідні числа можуть бути абсолютно довільними. Але ми побачимо, що така ситуація неможлива одразу в усіх точках. А саме, нижче

буде показано, що у довільної функції майже в усіх точках або існує скінченна похідна, або принаймні одне з похідних чисел нескінченне. Перед тим, як формулювати остаточне твердження, доведемо декілька допоміжних тверджень. Для простоти будемо розглядати функції, які визначені на інтервалі (a, b) .

Основна лема. *Нехай функція f скінченна на інтервалі (a, b) . Тоді майже всюди на множині E таких точок $\xi \in (a, b)$, для яких при всіх $\eta \in (a, \xi)$ виконана нерівність $f(\xi) > f(\eta)$, має місце рівність*

$$\underline{D}_L f(x) = \overline{D}_R f(x), \quad (4.4)$$

причому обидві частини рівності (4.4) скінченні.

ДОВЕДЕННЯ. Отже, $E = \{x \in (a, b) : \forall \xi \in (a, x) \quad f(x) > f(\xi)\}$. З означення множини E одразу випливає, що звуження $f|_E$ функції f на E є зростаючою функцією. Позначимо через $\alpha = \inf E$. Означимо на (a, b) зростаючу функцію g , яка співпадає з f в точках множини E . Це можна зробити наступним чином. Якщо $\alpha > a$, то покладемо $g(x) = \inf\{f(\xi) : \xi \in E\}$, $a < x < \alpha$. Для $x > \alpha$ покладемо $g(x) = \sup\{f(\xi) : \xi \in E \cap (a, x]\}$. Зрозуміло, що функція g має вказані властивості.

Оскільки функція g зростає, то для майже всіх $x \in (a, b)$ існує $g'(x)$. Виключимо з множини E ті точки x , в яких не існує $g'(x)$. Множина всіх таких виключених точок має міру нуль.

Далі, вище ми показали, що майже кожна точка довільної множини є її точкою щільності. Тому, виключаючи з множини E також ще й ті точки, що не є її точками щільності, ми отримаємо множину $E_0 \subset E$ таку, що $m(E \setminus E_0) = 0$.

Лема, таким чином, буде доведена, якщо ми покажемо, що в кожній точці $x \in E_0$ справедлива (4.4).

Зафіксуємо $x_0 \in E_0$. Оскільки x_0 – точка щільності множини E , а на множині E функції f та g співпадають і існує $g'(x_0)$, то існує також і

$$f'_E(x_0) = \lim_{\xi \rightarrow x_0, \xi \in E} \frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0}.$$

Маємо

$$\begin{aligned}\underline{D}_L f(x_0) &= \liminf_{x \rightarrow x_0, x < x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \\ &\leq \lim_{\xi \rightarrow x_0, \xi \in E, \xi < x_0} \frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} = f'_E(x_0), \\ \overline{D}_R f(x_0) &= \limsup_{x \rightarrow x_0, x > x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq \\ &\geq \lim_{\xi \rightarrow x_0, \xi \in E, \xi > x_0} \frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} = f'_E(x_0).\end{aligned}$$

З іншого боку, якщо $x < x_0$ і $x_0 - x$ достатньо мале, то при $x \in E$ відношення $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ мало відрізняється від $f'_E(x_0)$. Якщо ж $x \notin E$, то знайдемо точку $\xi \in E$ таку, що $x < \xi < x_0$ і $\xi - x$ мале порівняно з $x_0 - x$, тобто $\frac{\xi - x}{x_0 - x}$ мале. З визначення множини E випливає, що $f(\xi) > f(x)$, а отже і $f(\xi) - f(x_0) \geq f(x) - f(x_0)$. Розділивши цю нерівність на $x - x_0 < 0$, отримуємо

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq \frac{f(\xi) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0 + (x - \xi)}.$$

Вираз справа мало відрізняється від $\frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0}$, який, в свою чергу, мало відрізняється від $f'_E(x_0)$. Тому і

$$\underline{D}_L f(x_0) = \liminf_{x \rightarrow x_0, x < x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq f'_E(x_0).$$

Аналогічно, розглядаючи точки $x > x_0$, ми отримаємо нерівність

$$\overline{D}_R f(x_0) \leq f'_E(x_0).$$

Порівнюючи ці дві нерівності з отриманими вище протилежними нерівностями, будемо мати

$$\underline{D}_L f(x_0) = f'_E(x_0) = \overline{D}_R f(x_0),$$

і тим самим лема доведена. $\square$

Наслідок 1. Нехай функція f скінченна на інтервалі (a, b) . Тоді майже всюди на множині E тих точок $x \in (a, b)$, в яких $\underline{D}_L f(x) > -\infty$, справедлива рівність

$$\underline{D}_L f(x) = \overline{D}_R f(x), \quad (4.5)$$

причому обидві частини рівності (4.5) скінченні.

ДОВЕДЕННЯ. Для раціональних $r \in (a, b)$ і натурального k через $E_{r,k}$ позначимо множину таких $x \in (r, b)$, що для всіх $\xi \in (r, x)$ справедлива нерівність $\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} > -k$. Нехай $\{r_s\}_{s=1}^{\infty}$ – послідовність всіх раціональних чисел з інтервалу (a, b) . Доведемо спочатку, що справедлива рівність $E = \bigcup_{s=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{r_s, k}$.

Нехай $x \in E_{r_s, k}$. Це означає, що для всіх $\xi \in (r_s, x)$ справедлива нерівність

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} > -k.$$

Звідси випливає, що і

$$\liminf_{\xi \rightarrow x, \xi < x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = \underline{D}_L f(x) \geq -k,$$

тобто $x \in E$. Навпаки, для $x \in E$ знайдеться таке k , що $\underline{D}_L f(x) > -k$. Тому знайдеться таке $r_s < x$, що для всіх $\xi \in (r_s, x)$ справедлива нерівність $\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} > -k$, тобто $x \in E_{r_s, k}$.

Отже, в силу доведеної рівності $E = \bigcup_{s=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{r_s, k}$, наслідок буде доведеним, якщо ми покажемо, що рівність (4.5) справедлива майже всюди на множині $E_{r,k}$ при кожному $r \in \mathbb{Q} \cap (a, b)$ і $k \in \mathbb{N}$. Далі, рівність (4.5) рівносильна тому, що $\underline{D}_L f_k(x) = \overline{D}_R f_k(x)$, де $f_k(x) = f(x) + kx$, а для $x \in E_{r,k}$ будемо мати

$$\frac{f_k(\xi) - f_k(x)}{\xi - x} = \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} + k > -k + k = 0, \quad r < \xi < x,$$

або, що те ж саме, $f_k(\xi) < f_k(x)$, $r < \xi < x$. Іншими словами, множина $E_{r,k}$ складається з тих точок $x > r$, що для всіх $\xi \in (r, x)$ справедлива нерівність $f_k(\xi) < f_k(x)$. Це означає, що множина $E_{r,k}$ є тою множиною E ,

що фігурує в умові основної леми для функції f_k , що задана на (r, b) замість f на (a, b) . Тому, з основної леми, застосованої до функції f_k на (r, b) , отримуємо, що $\underline{D}_L f_k(x) = \overline{D}_R f_k(x)$ для майже всіх $x \in E_{r,k}$ і тим самим завершується доведення наслідку. $\square$

Наслідок 2. *Нехай функція f скінченна на інтервалі (a, b) . Тоді майже всюди на множині E_1 тих точок $x \in (a, b)$, в яких $\overline{D}_L f(x) < +\infty$, справедливе співвідношення*

$$\overline{D}_L f(x) = \underline{D}_R f(x), \quad (4.6)$$

причому обидві частини рівності (4.6) скінченні.

ДОВЕДЕННЯ. Достатньо зазначити, що справедливі наступні рівності

$$\underline{D}_L(-f(x)) = -\overline{D}_L f(x), \quad \overline{D}_R(-f(x)) = -\underline{D}_R f(x).$$

Тому (4.6) отримуємо з (4.5) застосуванням останньої до функції $-f$. $\square$

Наслідок 3. *Нехай функція f скінченна на інтервалі (a, b) . Тоді майже всюди на множині E_2 тих точок $x \in (a, b)$, в яких $-\infty < \underline{D}_L f(x) \leq \overline{D}_L f(x) < +\infty$, функція f має скінченну похідну.*

ДОВЕДЕННЯ. Зрозуміло, що $E_2 = E \cap E_1$, де множини E і E_1 визначені в формулюваннях наслідків 1 і 2 відповідно. Використовуючи наслідки 1 і 2, для майже всіх $x \in E_2$ отримаємо

$$-\infty < \underline{D}_L f(x) \leq \overline{D}_L f(x) = \underline{D}_R f(x) \leq \overline{D}_R f(x) = \underline{D}_L f(x) \leq \overline{D}_L f(x) < +\infty,$$

так що всі похідні числа функції f скінченні і однакові. Це означає, що функція f диференційовна в точці x . $\square$

Легко бачити, що для функції $g(x) = f(-x)$ справедливі наступні співвідношення

$$\underline{D}_L g(x) = -\overline{D}_R f(-x), \quad \overline{D}_L g(x) = -\underline{D}_R f(-x),$$

а для функції $h(x) = -f(-x)$

$$\underline{D}_L h(x) = \underline{D}_R f(-x), \quad \overline{D}_L h(x) = \overline{D}_R f(-x).$$

Враховуючи це, легко отримати наступні твердження.

Наслідок 1'. *Нехай функція f скінченна на інтервалі (a, b) . Тоді майже всюди на множині E_3 тих точок $x \in (a, b)$, в яких $\underline{D}_R f(x) > -\infty$, справедливе співвідношення*

$$\underline{D}_R f(x) = \overline{D}_L f(x), \quad (4.7)$$

де обидві частини в (4.7) скінченні.

Наслідок 2'. *Нехай функція f скінченна на інтервалі (a, b) . Тоді майже всюди на множині E_4 тих точок $x \in (a, b)$, в яких $\overline{D}_R f(x) < +\infty$, справедлива рівність*

$$\overline{D}_R f(x) = \underline{D}_L f(x), \quad (4.8)$$

де обидві частини в (4.8) скінченні.

Розглянемо множину $((a, b) \setminus E) \cap E_4$. За наслідком 2', майже всюди на E_4 , а отже і на нашій множині справедлива (4.8), в якій обидві частини скінченні. Отже співвідношення $\underline{D}_L f(x) = -\infty$ і $-\infty \leq \overline{D}_R f(x) < +\infty$ одночасно можуть виконуватись лише на множині міри нуль.

Аналогічним чином отримуємо, що співвідношення $\overline{D}_L f(x) = +\infty$ і $-\infty < \underline{D}_R f(x) \leq +\infty$ одночасно можуть виконуватись лише на множині міри нуль. Тому на множині додатної міри одночасно можуть виконуватись лише такі співвідношення:

$$\underline{D}_L f(x) = -\infty, \quad \overline{D}_R f(x) = +\infty \quad \text{або} \quad \overline{D}_L f(x) = +\infty, \quad \underline{D}_R f(x) = -\infty.$$

Порівнюючи це з наслідком 3, отримуємо наступну теорему.

Теорема Данжуа – Юнг – Сакса. *Нехай функція f скінченна на інтервалі (a, b) . Тоді в усіх точках $x \in (a, b)$ за виключенням, хіба що,*

множини міри нуль, може здійснюватися лише одна з двох наступних можливостей:

- а) два протилежних похідних числа обидва скінченні і однакові;
- б) з пари протилежних похідних чисел верхнє похідне число дорівнює $+\infty$, а нижнє дорівнює $-\infty$.

З цієї теореми, зокрема, випливає

Наслідок 4. *Майже всюди на (a, b) два суміжних похідних числа або обидва скінченні і однакові, або принаймні одне з них нескінченне.*

З теореми Данжуа – Юнг – Сакса одразу випливає теорема Лебега про диференціювання монотонної функції. Справді, оскільки у зростаючої функції f не може бути від’ємних похідних чисел, то майже всюди на (a, b) залишається можливим лише твердження а) теореми Данжуа – Юнг – Сакса. Це означає, що для майже всіх $x \in (a, b)$ справедливі рівності $\underline{D}_R f(x) = \overline{D}_L f(x)$, $\overline{D}_R f(x) = \underline{D}_L f(x)$. Звідси отримуємо

$$-\infty < \underline{D}_L f(x) \leq \overline{D}_L f(x) = \underline{D}_R f(x) \leq \overline{D}_R f(x) = \underline{D}_L f(x) < +\infty,$$

так що всі похідні числа однакові і f має скінченну похідну в точці x .

Контрольні питання до теми 4. Недиференційовні функції.

1. Приклад Ван дер Вардена неперервної, ніде недиференційовної функції.
2. Односторонні похідні числа функції. Приклад функції з заданими односторонніми похідними числами в точці.
3. Леми про співпадання протилежних похідних чисел.
4. Теорема Данжуа – Юнг – Сакса. Наслідок для монотонної функції.

ЛІТЕРАТУРА

1. R. L. Wheeden, A. Zygmund. *Measure and Integral. An Introduction to Real Analysis*. Marcel Dekker, Inc., New York, Basel. 1977.

2. И. П. Натансон. *Теория функций вещественной переменной*. М., Наука, 1974.

3. Frigyes Riesz, Bela Sz.-Nagy. *Functional analysis*. Dover Publications. 1990.

Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь. *Лекции по функциональному анализу*. М., Мир, 1979.

4. E. C. Titchmarsh. *The Theory of functions*. Oxford Univ. Press. Second Edition. 1939.

Е. Титчмарш. *Теория функций*. М., Наука. 1980.

5. B. R. Gelbaum, J. M. H. Olmsted. *Counterexamples in Analysis*. Holden-Day, San Francisco, London, Amsterdam. 1964.

Б. Гелбаум, Дж. Олмстед. *Контрпримеры в анализе*. М., Мир, 1967.

Навчальне видання

Кореновський Анатолій Олександрович

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ
ФУНКЦІЙ ДІЙСНОЇ ЗМІННОЇ**

Навчально-методичний посібник

В авторській редакції

Підп. до друку 13.02.2023. Формат 60×84/16.

Ум.-друк. арк. 5,11. Наклад 15 прим.

Зам. № 2556.

Видавець і виготовлювач

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4215 від 22.11.2011 р.

65082, м. Одеса, вул. Єлісаветинська, 12, Україна

Тел.: (048) 723 28 39, e-mail: druk@onu.edu.ua