УДК 330.4

А. Г. Янковой*

ФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ И МЕТОД ГЛАВНЫХ КОМПОНЕНТ В ИССЛЕДОВАНИЯХ ЛАТЕНТНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

1.1. Сущность и история развития факторного анализа

Фактор (от латинского слова *factor* — делающий, производящий) — причина, движущая сила какого-либо явления, процесса или одно из необходимых его условий. В контексте данной статьи под факторами будем понимать гипотетические непосредственно не измеряемые (латентные) показатели, в той или иной степени связанные с наблюдаемыми характеристиками — признаками-симптомами изучаемого явления. Последние выступают, таким образом, в роли внешних проявлений этих факторов.

Являются ли факторы действительными причинами наблюдаемой вариации и взаимосвязей признаков-симптомов или просто агрегированными теоретическими конструкциями, зависит от способа их включения в будущие модели структуры с латентными переменными, т.е., в конечном счёте, от их интерпретации.

Термин *"латентный"* в переводе с латинского языка означает скрытый, недоступный. Словосочетание "латентные показатели" используется для отражения сложных понятий, которые невозможно количественно измерить в метрической шкале. Такими, например, являются понятия качества продукции, степени конкретного заболевания человеческого организма, инвестиционной привлекательности объектов, уровня научно-технического прогресса на предприятии, интенсивности и производительной силы труда работников.

Вследствие различных объективных и субъективных обстоятельств не удаётся дать однозначную количественную характеристику указанным показателям и об их уровнях судят косвенно, с по-

*Доктор экономических наук, профессор кафедры экономики и управления экономико-правового факультета ОНУ им. И.И. Мечникова.

мощью градаций порядковой шкалы типа "лучше — хуже", "больше — меньше", "легче — тяжелее" и т.п.

Латентные показатели проявляются на поверхности явлений в виде множества переменных (признаков-симптомов), отражающих различные стороны сложных явлений и процессов. Именно технико-экономические показатели производства (фондовооружённость и энерговооружённость работников, степень автоматизации и механизации трудоёмких процессов, применение компьютерной техники и передовых технологий) позволяют судить о высоком или низком уровне научно-технического прогресса на предприятии.

Под моделями с латентными показателями понимают совокупность статистических моделей, которые конструируются с помощью математических методов и объясняют наблюдаемые данные их зависимостью от ненаблюдаемых (скрытых) характеристик объектов.

Можно указать следующие основные цели применения моделей с латентными показателями на практике:

1) понижение числа переменных, описывающих изучаемые объекты, т.е. сжатие размерности исходного признакового пространства;

2) косвенная количественная оценка латентных показателей;

3) классификация переменных, обычно сочетаемая с введением более общих вторичных переменных на основе агрегирования первичных признаков объектов;

4) создание или подтверждение структурной теории исследуемого массива информации, т.е. проведение поискового (эксплораторного) или подтверждающего (конфирматорного) структурного анализа;

5) преобразование исходных данных к более удобному для использования или интерпретации виду, например, ортогонализация переменных для последующего корреляционно-регрессионного анализа.

Факторный анализ — это совокупность математико-статистических методов и моделей, ориентированных на достижение перечисленных выше целей. Первоначально факторный анализ возник из стремления обнаружить скрытую основу нескольких явлений или свойств, встречающихся одновременно у множества изучаемых многомерных объектов.

Такое одновременное проявление нескольких свойств обычно

измеряется с помощью коэффициента парной корреляции r_{ij} переменных x_i и x_j [1, с. 21-27], численно представляющих реализацию эмпирических свойств **i** и **j**. Вычисленные коэффициенты парной корреляции, число которых в реальном исследовании обычно бывает больше двух (по количеству рассматриваемых свойств), записываются в виде корреляционной матрицы, содержащей всю информацию о взаимосвязях переменных с учётом влияния случайных причин, например, субъективных или природно-климатических.

Факторный анализ позволяет ответить на следующие вопросы: почему связаны между собой два или более свойств объектов, почему они коррелированы между собой? Ответы на указанные вопросы основаны на предположении о существовании чего-то общего, проявляющегося одновременно в наблюдаемых переменных.

Факторный анализ в широком смысле — это совокупность методов и моделей, ориентированных на выявление, конструирование, оценку, анализ и использование латентных показателей по информации об их внешних проявлениях. К ним относятся:

– метод главных компонент, предполагающий последовательное описание новыми искусственными переменными максимальной дисперсии признаков-симптомов;

– факторный анализ в узком понимании, охватывающий методы выявления, оценки и интерпретации латентных показателей, призванных объяснить корреляционные связи между признаками-симптомами;

– канонический факторный анализ, направленный на измерение корреляционных связей между двумя группами переменных и определение наиболее тесных зависимостей;

– методы многомерного шкалирования, формирующие факторное пространство исходя из информации о различии (сходстве) объектов в пространстве признаков-симптомов.

Применение компонентного и факторного анализа базируется на следующем теоретическом постулате: помимо наблюдаемых свойств объектов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ имеется, по крайней мере, еще один *скрытый общий фактор* **F**, определяющий вариацию измеряемых переменных. Корреляцию **F** с $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ следует считать первичной, а корреляцию наблюдаемых свойств объектов между собой — вторичной (рис. 1).

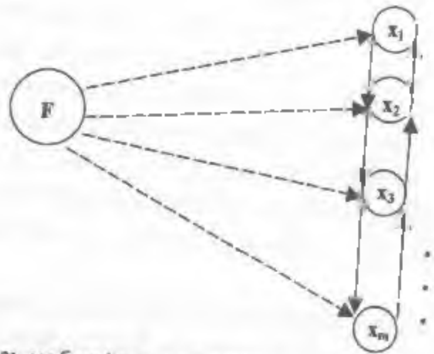

Рис. 1. Взаимосвязь наблюдаемых переменных между собой и с общим латентным фактором

Обсуждаемую ситуацию можно выразить следующим образом: переменные $x_1, x_2, \dots, x_m$ коррелированы между собой потому, что они находятся под влиянием общего скрытого фактора **F**. Но если свойства объектов $x_1, x_2, \dots, x_m$ непосредственно наблюдаемы и измеримы, то переменная **F** непосредственно не наблюдаема, не измерима и о ней можно судить лишь косвенно — по величине и взаимосвязям переменных $x_1, x_2, \dots, x_m$. Именно поэтому **F** называется латентным, т.е. скрытым показателем.

О величине подобных скрытых показателей судят с помощью их оценки на основе информации, полученной из корреляционной матрицы путём её обработки математико-статистическими методами на базе некоторой модели с латентными переменными. В работе [1] рассматривается модель с латентными переменными, построенная с использованием функций сходства (расстояния) между отдельными объектами и эталоном (антиэталоном).

Факторный анализ является одной из таких моделей, а латентная переменная **F** имеет здесь специальное название — *общий фактор*.

Истоки факторного анализа, как и других многомерных методов, восходят к работам английского учёного Ф. Гальтона (1822-1911). Предложенные им идеи и подходы к обработке и интерпретации данных послужили основой таких современных дисциплин, как антропометрия, дифференциальная психология, многомерный статистический анализ.

С 1890 года в статистических исследованиях Гальтона активное участие принимает крупный математик и философ К. Пирсон (1857-

1936), который в серии выдающихся работ конца XIX столетия математизировал и существенно развил статистические идеи Гальтона. Пирсон, работая с антропометрическими данными, в 1901 году предложил идею метода главных осей, который сейчас широко известен как метод главных компонент.

Факторный анализ своими корнями тесно связан с научными воззрениями в области психологии, биологии, физиологии, медицины. Ведущие учёные (психологи, математики, статистики) конца XIX — начала XX столетия активно обсуждали теорию существования общей одарённости и специфических способностей человека.

В то время начинает свою научную карьеру общепризнанный основоположник факторного анализа Ч. Спирмен (1863-1945). В 1903 году он защищает диссертацию по психологии и примыкает к статистической группе Оксфордского университета, разрабатывавшей тест интеллекта по проекту Гальтона для обследования способностей учеников английских школ.

Однако началом современного этапа в развитии факторного анализа принято считать статью Спирмена, опубликованную в 1904 году под названием “General intelligence objectively determined and measured”. В ней Спирмен доказывал, что все способности человека объясняются одним-единственным генеральным фактором. Выдвинутые в ней подходы послужили основой дискуссии, перераставшей иногда в жаркие споры в последующие десятилетия.

Спирмен исходил из того, что один генеральный фактор, обозначенный им буквой **G**, и один характерный фактор влияют на все интеллектуальные способности индивида. Он пытался проверить эту психологическую теорию с помощью своей математической модели. Корреляции между разными психологическими тестами, на основе которых контролировались интеллектуальные возможности индивида, Спирмен объяснял генеральным фактором **G** и для каждого теста выделял один дополнительный характерный фактор, отражающий специфические способности человека.

Указанная математическая теория через какое-то время, когда учёные начали работать с большими наборами психологических тестов, оказалась неудовлетворительной. Спирмен до конца своей жизни придерживался концепции одного генерального фактора и продолжал проводить повторные исследования с разными переменными.

В первые десятилетия XX века на развитие факторного анализа сильное влияние оказали работы С. Барта, К. Пирсона, Г. Томсона, Д. Гарнетта, К. Холзингера. Кроме того, что все они исходили из теории Спирмена, их также объединяло стремление доказать существование или, наоборот, отсутствие генерального фактора G.

После 1925 года в результате многочисленных экспериментов стало ясно, что теория Спирмена непригодна для всех наборов психологических тестов. Концепция одного генерального фактора оказалась неадекватной реальным наблюдениям в области психологии, и дальнейшее развитие данного направления привело, наконец, к так называемым бифакторному и многофакторному анализу.

В 30-е годы XX столетия центр факторных исследований постепенно перемещается из Европы в США. Крупные работы в это время были выполнены математиком Г. Хотеллингом, предложившим нынешнюю трактовку метода главных компонент.

Математики-психологи К. Холзингер, Л. Тэрстоун разработали методику многофакторного анализа. Холзингер в своей бифакторной модели пытался преодолеть недостатки, присущие концепции Спирмена. В свою модель, кроме генерального и характерного факторов, он включал также групповые факторы. Психологи Р. Кеттел, Г. Айзенк применили факторный анализ для создания психологической теории личности.

Тэрстоун не был первым, кто выделил несколько факторов из корреляционной матрицы, описывающей парные связи между наблюдаемыми переменными. Однако он внёс значительный вклад в развитие теории, указав, что минимально необходимое число факторов отвечает рангу корреляционной матрицы.

Использование Тэрстоуном матричной алгебры явилось переломным моментом в истории факторного анализа, позволившим по-новому трактовать основные его положения. Концепция простой структуры, предложенная Тэрстоуном, вызвала оживленные дискуссии, которые продолжались долгое время. Несмотря на существенный недостаток — отсутствие однозначности математического решения, создание многофакторной теории явилось значительным прогрессом по сравнению со всеми предыдущими этапами развития факторного анализа. Вслед за Тэрстоуном в последующие годы с помощью этого метода были проведены многочисленные исследования в области психологии.

В настоящее время факторный анализ в основном применяется в том виде, в котором он был обоснован и развит в работах Тэрстоуна. Многофакторный метод может быть достаточно успешно применим к любой корреляционной матрице. Его отличает универсальность, т.е. возможность выделять как единственный генеральный фактор, так и широкое использование множества групповых факторов.

В огромном потоке публикаций выделялись роботы школы Дж. Гилфорда и Р. Кеттелла, которые занимались эмпирическим анализом индивидуальных особенностей и существенно расширили область практического применения факторного анализа. Наряду с этим в 30–40–е годы прошлого столетия продолжались усилия по совершенствованию теории и методики вычислений. П. Хорст в 1937 году высказал идею так называемого *группового метода факторного анализа*, теоретическое обоснование которого было дано Л. Гуттманом в 1944 году. Вслед за этим Холзингер и Терстоун предложили простые вычислительные процедуры группового метода для практических приложений.

Начиная с середины XX века и по настоящее время, на развитие факторного анализа сильное влияние оказывают математическая статистика и использование ЭВМ. Д. Лоули в 1940 году предложил оценивать факторные нагрузки методом максимального правдоподобия, а С. Рао в 1955 году описал так называемый *канонический факторный анализ.* Оба автора так же, как и другие специалисты в области математики, сосредоточили свои усилия на том, чтобы дать описание факторного анализа в терминах математической статистики и теории вероятностей.

Факторные решения, полученные на основе применения статистических методов и ЭВМ, до сих пор вызывают оживлённые дискуссии. Безусловно, статистический подход явился шагом вперёд в развитии данного направления многомерных методов анализа.

Вряд ли можно переоценить влияние использования ЭВМ в факторном анализе вследствие сложности и громоздкости многих практических задач, которые решаются в его рамках. Компьютерная техника позволила оперативно реализовать важнейшие алгоритмы факторного исследования, в том числе этапы выделения и конструирования новых искусственных переменных, а также процедуру вращения осей координат.

...ний, при этом речь идёт в первую очередь о существенном сокращении времени вычислений и об облегчении труда операторов. Это в свою очередь привело к появлению новых методов расчётов и новых вариантов постановки задач. Выполнение громоздких вычислений на компьютерах открыло возможность обрабатывать большие корреляционные матрицы, а также позволило применять методы Монте-Карло и множественного регрессионного моделирования в процедурах факторного анализа.

Теперь благодаря таким системам, как STATISTICA, открылся путь к новым технологиям статистической обработки данных, что максимально сокращает рутинные технические процедуры. Система STATISTICA и её модуль "Факторный анализ" (**Factor Analysis**) ориентированы на визуализацию исследуемой информации с помощью мощных графических средств, когда на пользователя ложатся только творческие операции принятия решений в процессе статистического анализа данных.

Современный этап развития факторного анализа характеризуется изучением многих частных проблем различных наук с помощью разнообразных моделей факторизации. Большую популярность получил в последнее время сравнительно новый раздел факторного анализа — подтверждающий (конфирматорный) анализ, позволяющий проверять различные гипотезы относительно взаимосвязей общих факторов, внутренней структуры изучаемого явления или процесса. Значительная робота в этом направлении проводится в США.

По-видимому, в настоящее время в развитии факторного анализа наступил такой этап, когда возникла необходимость доказывать его практическую ценность не только в психологии, но и в более широких сферах научного познания. В последние годы прикладные аспекты факторного анализа быстро расширяются. Если в начале своего становления и развития рассматриваемые методы были направлены исключительно на удовлетворение нужд психологии, то теперь становится всё более очевидной их многогранность и востребованность в других научных и практических областях.

Сегодня можно встретить сотни работ в сфере общественных наук (в экономике, социологии, политологии, размещении производительных сил), а также в естественнонаучных дисциплинах (в медицине, биологии, метеорологии, физической географии и многих других), где факторный анализ довольно успешно применяется [1], [2]. Накопленный опыт подтверждает ценность его как универсального инструмента научного познания.

Автор данной статьи довольно успешно применял методы факторного анализа в целях оценки латентных экономических показателей, в частности производительной силы и интенсивности труда в промышленности Украины.

1.2. Метод главных компонент

Хотя данный метод, впервые предложенный Пирсоном в начале XX века как частный случай метода главных осей, долгое время рассматривался некоторыми русскоязычными авторами в качестве самостоятельного направления многомерных статистических методов, в действительности он представляет собой одну из разновидностей факторного анализа. Именно так трактуется метод главных компонент или компонентный анализ всеми современными западными специалистами в данной области. В этой статье мы также придерживаемся второй точки зрения и будем обсуждать его в обшем контексте проблем факторного анализа.

Тем не менее, относительная простота и доступность в понимании математических аспектов метода главных компонент по сравнению с другими (специальными) направлениями факторного анализа являются веским дидактическим обоснованием целесообразности его рассмотрения в самом начале изложения материала данной главы, в соответствии с принципом "от простого к сложному".

Несмотря на то, что теоретические аспекты метода разработаны довольно давно, его широкое практическое применение сдерживалось наличием, по крайней мере, двух серьёзных проблем:

1) трудностями вычислительного характера;

2) сложностью интерпретации результатов.

Если первая проблема с появлением современной компьютерной техники в настоящее время полностью преодолена, то вторая по-прежнему остаётся главным препятствием на пути широкого применения метода главных компонент (впрочем, как и всего факторного анализа) в практических исследованиях.

Общие факторы, называемые в рамках данного метода главными компонентами, — это искусственные переменные, которые представляют собой линейные комбинации наблюдаемых признаков и используются для количественной оценки латентных показателей. Наряду с термином “наблюдаемый признак” в данной книге в качестве синонимов употребляются также выражения “признак-симптом”, “исходный признак”, “исходная переменная”, “симптом”.

Основная цель метода заключается в выявлении общих факторов (главных компонент), используемых в дальнейшем анализе в роли оценок латентных показателей, и объясняющих корреляционные связи между исходными симптомами изучаемых объектов. Главные компоненты отвечают следующим основным требованиям метода:

– линейно независимы (ортогональны);

– стандартизованы;

– первая главная компонента должна объяснять максимальную долю дисперсии исходных переменных, вторая главная компонента — максимальную долю дисперсии исходных переменных, оставшейся после первой компоненты, и т.д.

Отсюда вытекает фундаментальная идея метода — выделение таких искусственных переменных, которые описывали бы максимальную долю вариации исходных признаков-симптомов или корреляционные связи между ними. При этом число главных компонент может быть существенно меньше числа наблюдаемых признаков.

Кажущийся на первый взгляд дуализм (описание с помощью главных компонент вариации симптомов или корреляций между ними) объясняется довольно просто: если исходной изучаемой матрицей выступает матрица дисперсий-ковариаций, то говорят о вариации наблюдаемых признаков, а если — корреляционная матрица, то говорят о взаимосвязях между ними. В случае стандартизации переменных указанные матрицы совпадают, и каждое из приведенных выше утверждений становится справедливым.

Для записи математической модели метода главных компонент введём следующие обозначения:

i — номер исследуемого объекта ($i = 1, 2, \ldots, n$);

k — номер наблюдаемого признака ($k = 1, 2, \ldots, m$);

L — номер главной компоненты ($L = 1, 2, \ldots, m$);

x_{ki} — значение **k**-го наблюдаемого признака у **i**-го объекта;

z_{ki} — значение **k**-го стандартизованного признака у **i**-го объекта;

F_{Li} — значение **L**–й главной компоненты у **i**-го объекта;

a_{kL} — коэффициент парной корреляции между **k**-м наблюдаемым признаком и **L**–й главной компонентой (факторная нагрузка).

Тогда основное уравнение метода имеет вид:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{AF}\,, \tag{1}$$

где **Z** — матрица стандартизованных значений наблюдаемых признаков размера $m \times n$;

A — матрица факторных нагрузок размера $m \times m$;

F — матрица главных компонент размера $m \times n$.

Матричное уравнение (1) можно рассматривать как некоторое линейное преобразование переменных $F_1, F_2, \ldots, F_m$ в переменные $z_1, z_2, \ldots, z_m$. Если матрица факторных нагрузок **A** полного ранга, т.е. невырожденная, то матрица главных компонент **F** определяется из уравнения (1) следующим образом:

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Z}\,. \tag{2}$$

Матричное уравнение (2) рассматривается как обратное линейное преобразование переменных $z_1, z_2, \ldots, z_m$ в переменные $F_1, F_2, \ldots, F_m$, которое позволяет непосредственно количественно оценить исследуемые латентные признаки. Основная проблема метода, следовательно, сводится к нахождению матрицы факторных нагрузок **A** и ее обращению.

В уравнениях (1), (2) матрицы **A** и **F** неизвестны, известна лишь матрица **Z**. Очевидно, что без дополнительных ограничений данные уравнения имеют бесконечное множество решений. Введение этих ограничений составляет основную посылку всех методов факторного анализа и в том числе метода главных компонент. Рассмотрим указанные ограничения подробнее применительно к обсуждаемому методу.

Как было показано в работе [1, с. 25-26], для матрицы коэффициентов парной корреляции между исходными признаками справедливо выражение

$$\mathbf{r} = \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}/n\,, \tag{3}$$

где $\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}$ — матрица, транспонированная по отношению к матрице стандартизованных признаков.

Для модели (1) соотношение (3) приобретает следующий вид:

$$\mathbf{r} = \mathbf{Z}\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}/n\,. \tag{4}$$

Подставляя (1) в (4), получаем

$$\mathbf{r} = \mathbf{Z}\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}/n = \mathbf{AF}(\mathbf{AF})^{\mathrm{T}}/n = \mathbf{AFF}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}/n = \mathbf{A}(\mathbf{FF}^{\mathrm{T}}/n)\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\,. \tag{5}$$

Теперь по аналогии с формулой (4) можно утверждать, что выражение

$$FF^T/n = r_F \tag{6}$$

является корреляционной матрицей, отражающей связи между самими главными компонентами. Отсюда формула (5) принимает вид

$$r = Ar_FA^T. \tag{7}$$

Принимая во внимание главное требование метода о некоррелированности главных компонент ($r_F = I$, где I — единичная матрица размера $m'm$), окончательно имеем:

$$r = AA^T. \tag{8}$$

Л. Тэрстоун, впервые получивший соотношения (7), (8) в 1931 году, назвал их фундаментальной теоремой факторного анализа.

Фундаментальная теорема утверждает, что матрица r коэффициентов парной корреляции между исходными переменными может быть воспроизведена с помощью искомой матрицы факторных нагрузок A и матрицы корреляций между самими общими факторами r_F.

Следовательно, для метода главных компонент выражение (8) представляет собой дополнительное ограничение, позволяющее отыскать единственное решение уравнений (1) и (2). В частности, из (8) вытекает, что ранг матрицы A должен быть равным рангу корреляционной матрицы r.

Как было отмечено выше, элементы матрицы A представляют собой обычные коэффициенты парной корреляции между главными компонентами и исходными признаками, т.е. $a_{kL} = r_{kL}$, следовательно, $-1 = a_{kL} = 1$.

Если значение факторной нагрузки a_{kL} по абсолютной величине близко к единице ($|a_{kL}| = 0.7$), то связь между k-м признаком и L–й главной компонентой считается тесной. В этой ситуации говорят, что k-й признак "нагружает" L–ю главную компоненту, т.е. придаёт ей определённый качественный смысл. В противном случае, когда $|a_{kL}| \approx 0$, k-й признак не связан с L–й главной компонентой.

Система уравнений компонентной модели (1) для m наблюдаемых переменных называется *факторным отображением*. Например, при $m = 3$ факторное отображение, полученное из уравнения (1.1), имеет следующий вид:

$$\begin{cases} z_1 = a_{11}F_1 + a_{12}F_2 + a_{13}F_3 \\ z_2 = a_{21}F_1 + a_{22}F_2 + a_{23}F_3 \\ z_3 = a_{31}F_1 + a_{32}F_2 + a_{33}F_3 \end{cases}. \tag{9}$$

Здесь матрицы Z и F рассматриваются как векторы-столбцы, т.е. происходит абстрагирование от значений отдельных объектов (по индексу i).

Факторное отображение типа (9) значительно упрощается, если не будут учитываться факторные нагрузки, несущественно отличающиеся от нуля. В таблице 1 показана схема упрощённого факторного отображения.

Каждому признаку-симптому в соответствии с приведенной схемой свойственна своя факторная структура (строки таблицы 1). Число факторных нагрузок, для которых выполняется условие $|a_{kL}| = 0.7$, определяет *сложность* данного признака. Так, первый исходный признак рассматриваемой схемы имеет сложность 3, второй — 2, третий — 1.

Таблица 1

Схема факторного отображения (крестиками помечены высокие по абсолютной величине факторные нагрузки)

Признаки-симптомы	Главные компоненты		
	F1	F2	F3
Z1	×	×	×
Z2	×	×	
Z3	×		

В разрезе столбцов таблицы 1 указанный подход позволяет классифицировать главные компоненты следующим образом. Компонента называется *генеральной*, если она тесно связана со всеми без исключения исходными признаками. Компонента называется *групповой*, если она тесно связана с более, чем одним признаком-симптомом. Например, в таблице первая главная компонента F_1 является генеральной, а F_2 — групповой.

Рассмотрим дисперсию k-го стандартизованного признака-симптома:

$$s^1_k = У(z_{ki} - \bar{z}_k)^2/n = Уz_{ki}^{\,1}/n = 1. \tag{10}$$

С учётом факторного отображения (9) формула (10) представляется так:

$$s^2_k = \Sigma z_{kj}^2/n = a^2_{k1}\Sigma F^2_{1j}/n + a^2_{k2}\Sigma F^2_{2j}/n + \ldots + a^2_{km}\Sigma F^2_{mj}/n +$$
$$+ 2(a_{k1}a_{k2}\Sigma F_{1j}F_{2j} + a_{k1}a_{k3}\Sigma F_{1j}F_{3j} + \ldots) = 1 . \qquad (11)$$

Поскольку все главные компоненты стандартизованы и некоррелированы (ортогональны), то все суммы вида $\Sigma F^2_{Lj}/n$ равны 1, а все суммы в скобках равны 0. Поэтому, окончательно имеем:

$$s^2_k = a^2_{k1} + a^2_{k2} + \ldots + a_{km}^2 = 1 . \qquad (12)$$

Следовательно, сумма квадратов факторных нагрузок любого стандартизованного признака в рамках модели метода главных компонент равна единице. Слева и справа в разложении (12) записана полная дисперсия **k**-го стандартизованного признака-симптома, а в середине — доли полной дисперсии, объясняемые отдельными главными компонентами.

Просуммируем соотношение (12) по всем **k** признакам:

$$\sum_{k=1}^{m} s^2_k = \sum_{k=1}^{m} a^2_{k1} + \sum_{k=1}^{m} a_{k2}^2 + \ldots + \sum_{k=1}^{m} a_{km}^2 = m . \qquad (13)$$

Формула (13) показывает, что общая дисперсия всех стандартизованных переменных, равная **m**, может быть разложена на доли, обусловленные влиянием каждой главной компоненты. Например, абсолютный вклад первой главной компоненты V_1 в объяснение вариации всех признаков-симптомов составляет $\sum_{k=1}^{m} a^2_{k1}$. В общем виде, для **L**-й главной компоненты этот вклад вычисляется по формуле:

$$V_L = \sum_{k=1}^{m} a^2_{kL} . \qquad (14)$$

Соотношения (13), (14) показывают, что сумма абсолютных вкладов всех главных компонент в объяснение вариации всех стандартизованных признаков равняется их общей дисперсии. В самом деле, суммируя (14) по **L**, получаем:

$$\sum_{L=1}^{m} V_L = \sum_{L=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} a^2_{kL} = m . \qquad (15)$$

Формулы (13) — (15) позволяют выявить роль каждой главной компоненты в объяснении вариации исходных признаков, определить их важность для последующего анализа.

Доказано, что если число исходных признаков **m**, то и число главных компонент, которые позволяет выделить метод, тоже **m**. Однако в практических задачах обычно нет необходимости использовать все **m** компонент. Достаточно ограничиться рассмотрением **p** ($p << m$) первых главных компонент, которые объясняют подавляющую долю вариации исходных переменных. Последние **m – p** главных компонент обычно исключаются из дальнейшего анализа как несущественные, не несущие информацию о вариации признаков.

Как показывает опыт реальных социально-экономических исследований, сжатие размера исходного признакового пространства в результате применения метода главных компонент достигает примерно 3–4-х раз.

1.3. Важнейшие этапы метода главных компонент

В любом исследовании латентных показателей процедура компонентного анализа многомерных объектов состоит из следующих основных этапов (рис. 2).

Начальным и одновременно самым важным этапом процедуры, предопределяющим правильность и интерпретируемость конечных результатов, является формирование матрицы исходных данных о симптомах изучаемых латентных свойств объектов. Она строится на базе соответствующей качественной теории, например, экономической и должна включать по возможности все важнейшие наблюдаемые проявления исследуемых внутренних свойств объектов.

Такая исходная информация о всех значениях переменных по всем объектам должна представляться в виде матрицы **X** размера **m·n**. Строки этой матрицы соответствуют отдельным признакам, а столбцы — отдельным объектам. Очевидно, что объекты (векторы-столбцы) можно рассматривать как точки некоторого признакового пространства.

$$X = \begin{pmatrix} x_{11}\, x_{12} \ldots x_{1n} \\ x_{21}\, x_{22} \ldots x_{2n} \\ \ldots \\ x_{m1}\, x_{m2} \ldots x_{mn} \end{pmatrix} . \qquad (16)$$

Матрица исходных признаков (16) является транспонированной по отношению к соответствующим исходным матрицам таксономического, кластерного и дискриминантного анализа.

1.Формирование матрицы **X** исходных признаков-симптомов латентного

2.Стандартизация признаков (построение матрицы **Z**)

3.Расчёт корреляционной матрицы **r** исходных переменных

4.Нахождение матрицы факторных нагрузок **A**

5.Выделение, измерение и интерпретация главных компонент

Рис. 2. Блок-схема метода главных компонент

Очевидно, что наблюдаемые симптомы латентных показателей, включённые в матрицу **X**, неоднородны, имеют различный порядок и неодинаковые единицы измерения, т.к. описывают разные внутренние свойства изучаемых объектов. Поэтому второй этап метода главных компонент заключается в стандартизации исходных признаков и приведении данных к одному и тому же порядку.

Поскольку данная стадия предварительной обработки информации так же, как и этап построение матрицы коэффициентов парной корреляции **r** между наблюдаемыми переменными, однотипны в любом многомерном статистическом исследовании и подробно обсуждаются в работе [1, с. 11-30], то здесь мы на них останавливаться не будем.

Обратим внимание на то, что матрица **r** размера $m \times m$ является действительной симметричной матрицей с единицами на главной диагонали.

Четвёртый этап метода является основополагающим с точки зрения принципиальной возможности реализации расчёта главных компонент. В самом деле, определив матрицу факторных нагрузок **A**, не представляет большого труда найти из матричного уравнения (2) матрицу **F**.

Данный этап строится с учётом следующих математических положений: любая действительная симметричная матрица (в частности корреляционная матрица **r**) допускает так называемую спектральную декомпозицию

$$\mathbf{r} = \mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^{T}, \qquad (17)$$

где Λ — диагональная матрица размера $m \times m$ характеристических корней λ_L матрицы **r**;

V — матрица размера $m'm$ нормализованных характеристических векторов матрицы **r**, соответствующих характеристическим корням λ_L.

Матрица **V** является ортогональной и для неё выполняются соотношения $\mathbf{V}^{T}\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{V}^{T} = \mathbf{I}$.

С учётом фундаментальной теоремы факторного анализа, и, в частности разложения (8), формула (17) преобразуется к следующему виду:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{T} = \mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^{T}. \qquad (18)$$

Отсюда матрица факторных нагрузок **A** находится так:

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\Lambda^{1/2}. \qquad (19)$$

Принимая во внимание определение степени квадратной симметричной матрицы, методом подстановки легко убедиться, что выражение (19) действительно является решением матричного уравнения (18).

Из соотношения (19) векторы-столбцы матрицы **A** определяются так:

$$\mathbf{a}_L = \mathbf{v}_L(l_L)^{1/2}, \qquad (20)$$

где l_L — **L**-й характеристический корень матрицы **r**;

$\mathbf{v}_L$ — **L**-й нормализованный характеристический вектор матрицы **r**, соответствующий характеристическому корню l_L.

Для нахождения характеристических корней и соответствующих им характеристических векторов матрицы **r** необходимо сформировать матрицу

$$(\mathbf{r} - \lambda\mathbf{I}) \qquad (21)$$

и решить матричное уравнение

$$\det(\mathbf{r} - \lambda\mathbf{I}) = 0, \qquad (22)$$

которое называется характеристическим.

Характеристическое уравнение представляет собой однородное уравнение степени **m** относительно l:

$$\det(\mathbf{r} - \lambda \mathbf{I}) = (-1)^m \lambda^m + (-1)^{m-1} g_1 \lambda^{m-1} + \ldots + g_m = 0\,, \qquad (23)$$

где $g_1 = \mathrm{tr}\,(\mathbf{r}) = \mathbf{m}$ — след корреляционной матрицы **r**;

$g_m = \det(\mathbf{r})$ — определитель корреляционной матрицы **r**.

Уравнение (23) имеет **m** действительных, не обязательно разных корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, которые называются характеристическими. Последние обладают следующими свойствами:

$$\lambda_k \geq 0\,,$$

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k = \mathrm{tr}\,(\mathbf{r}) = \mathbf{m} = g_m\,, \qquad (24)$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_m = \det(\mathbf{r}) = g_m\,,$$

т.е. все характеристические корни корреляционной матрицы неотрицательны, их сумма равняется следу матрицы **r**, а их произведение — определителю матрицы **r**.

Известно, что характеристические векторы матрицы **r** вследствие вырожденности матрицы (21) находятся с точностью до постоянного множителя с. Однако благодаря требованию их нормализованности (норма v_L должна равняться единице) указанная неопределённость устраняется. Это означает, что нормирующий множитель с принимается равным $1/(\sum_{k=1}^{m} v_{Lk}^2)^{1/2}$.

С учётом данного соображения выражение (20) для вычисления факторных нагрузок принимает следующий окончательный вид:

$$a_{kL} = v_{kL}(\lambda_L / \sum_{k=1}^{m} v_{Lk}^2)^{1/2}\,. \qquad (25)$$

Рассчитав по формуле (25) значения факторных нагрузок a_{kL}, образуют из них квадратную матрицу **A** размера m*m, которая играет фундаментальную роль как в методе главных компонент, так и во всём факторном анализе:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1m} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2m} \\ \ldots \\ a_{m1}\, a_{m2} \ldots a_{mm} \end{pmatrix}. \qquad (26)$$

Как было показано выше, она фигурирует в основной модели метода главных компонент (1), а также в матричном уравнении (2), позволяющем определить значения выделенных главных компонент для отдельных объектов.

Рассмотрим важнейшие свойства матрицы **A**, касающиеся её строк и столбцов.

Из разложения (8) вытекают следующие соотношения для строк:

1. Сумма квадратов элементов **k**-й строки матрицы **A** равняется 1, что согласуется с формулой (12).

2. Сумма произведений элементов **k**-й и **s**-й строк матрицы **A** равняется коэффициенту парной корреляции r_{ks} между **k**-м и **s**-м исходными признаками.

Далее распишем матрицу $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ с учётом уравнения (19) и свойств ортогональной матрицы **V**:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = (\mathbf{V}\Lambda^{1/2})^T\mathbf{V}\Lambda^{1/2} = \Lambda^{1/2}\mathbf{V}^T\mathbf{V}\Lambda^{1/2} = \Lambda^{1/2}\mathbf{I}\Lambda^{1/2} = \Lambda\,. \qquad (27)$$

Из представления (27) вытекают следующие соотношения для столбцов:

3. Сумма квадратов элементов **L**-го столбца матрицы **A** равняется соответствующему данному вектору характеристическому корню, т.е.

$$\sum_{k=1}^{m} a^2_{kL} = \lambda_L\,. \qquad (28)$$

4. Сумма произведений элементов **L**-го и **s**-го столбцов матрицы **A** равняется 0.

На последней стадии метода осуществляется выделение, измерение и интерпретация главных компонент. Обсудим в начале, какие компоненты из **m** найденных целесообразно выделять, т.е. оставлять для последующего статистического анализа. С этой целью рассмотрим левую часть (28). Согласно формуле (14) можно записать:

$$V_L = \lambda_L\,. \qquad (29)$$

Выражение (29) определяет абсолютный вклад **L**-й главной компоненты V_L в объяснение общей вариации исходных признаков. Следовательно, величина характеристических корней матрицы r ($\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$) как раз и определяет важность каждой главной компоненты $F_1, F_2, \ldots, F_m$. Причём, исходя из требований метода, они ранжируются следующим образом:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_m , \qquad (30)$$

т.е. первая главная компонента объясняет максимальную долю дисперсии исходных переменных, вторая главная компонента — максимальную долю дисперсии исходных переменных, оставшейся после первой компоненты, и т.д.

Относительный вклад каждой главной компоненты в объяснение общей вариации исходных признаков исчисляется по формуле:

$$\mathbf{d}_L = 100(\lambda_L/\mathbf{m}) \qquad (31)$$

и измеряется в процентах. Здесь величина **m**, согласно соотношению (15), выражает общую дисперсию всех стандартизованных признаков-симптомов.

Опыт исследований с применением аппарата факторного анализа показывает, что целесообразно выделять **p** первых главных компонент, для которых $\mathbf{d}_L \geq 10\%$. Поскольку $\sum_{L=1}^{m} \lambda_L = \mathbf{m}$, то это означает, что в дальнейшем анализе обычно оставляют только те главные компоненты, характеристические корни которых удовлетворяют требованию $\lambda_L \geq 0{,}1\mathbf{m}$.

Кроме того, очевидно, выполняется следующее соотношение:

$$\sum_{L=1}^{m} \mathbf{d}_L = 100\% . \qquad (32)$$

Поэтому все **m** главных компонент описывают всю вариацию исходных признаков-симптомов. Однако нет смысла использовать все главные компоненты для дальнейшего анализа, т.к. последние искусственные переменные обычно объясняют малую долю общей дисперсии ($\mathbf{d}_k << 10\%$). Очевидно, что кумулятивная величина $\sum_{L=1}^{p} \mathbf{d}_L$ показывает, сколько процентов вариации исходных признаков-симптомов описывают **p** первых главных компонент. А величина $(100 - \sum_{L=1}^{p} \mathbf{d}_L)$ характеризует потери информации при отбрасывании **m — p** последних главных компонент.

Измерение выделенных главных компонент заключается в расчёте их значений для каждого объекта изучаемой статистической совокупности в соответствии с матричной формулой (2). Подставляя

в (2) выражение матрицы факторных нагрузок $\mathbf{A} = (\mathbf{A}^T)^{-1}\Lambda$ из (27), получаем следующую расчётную формулу, которая позволяет количественно оценить исследуемые латентные показатели:

$$\mathbf{F} = \Lambda^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Z} . \qquad (33)$$

Значение **L**-й главной компоненты для **i**-го объекта в соответствии с выражением (33) находится так:

$$\mathbf{F}_{Li} = \sum_{k=1}^{m} (\mathbf{a}_{kL}/\lambda_L)\mathbf{z}_{ki} . \qquad (34)$$

Самым сложным и ответственным моментом последнего этапа является содержательная интерпретация выделенных и измеренных главных компонент. Не одно из многочисленных исследований в различных областях науки и практики терпело сокрушительное фиаско из-за невозможности дать ясное качественное истолкование сконструированным искусственным переменным. Указанная стадия метода главных компонент является неформальной и в значительной мере зависит от знаний и опыта самого исследователя. А это, в свою очередь, определяет успех проведения всей многомерной статистической процедуры.

Интерпретация главных компонент (как и общих факторов в целом) базируется на изучении их структуры с помощью матрицы факторных нагрузок **A**. При этом особое внимание обращается на высокие по абсолютной величине значения факторных нагрузок $\mathbf{a}_{kL}$ ($|\mathbf{a}_{kL}| \geq 0{,}7$) в разрезе столбцов матрицы **A**. Указанные существенные значения $\mathbf{a}_{kL}$ определяют исходные признаки-симптомы, "нагружающие" содержательным смыслом выделенные главные компоненты.

Если для **L**-й главной компоненты определённые таким образом исходные признаки-симптомы можно объединить по смыслу и обозначить единым содержательным термином, то, очевидно, что он может быть присвоен данной искусственной переменной с вытекающей отсюда качественной интерпретацией. Например, если оказалось, что при проведении компонентного анализа технико-экономических показателей промышленных предприятий первая главная компонента тесно коррелирует с такими признаками, как величина основных производственных фондов, объём выпускаемой продукции, численность работающих, то последние можно объединить одним понятием — "размер предприятия" и присвоить его переменной $\mathbf{F}_1$.

Однако следует иметь в виду, что в реальных социально-экономических и других исследованиях довольно часто встречаются ситуации, когда одну и ту же главную компоненту "нагружают" разные по смыслу исходные признаки-симптомы, которые невозможно объединить единым качественным содержанием. В этом случае интерпретация построенных искусственных переменных сильно затруднена, а их практическая ценность сводится к нулю.

Если всё же удалось качественно истолковать выделенные главные компоненты F_1, F_2, ..., F_p, то возникает вопрос: где и как они могут быть использованы? Ответ на него вытекает из свойств самих главных компонент.

Во-первых, исходное описание совокупности изучаемых объектов с помощью **m** признаков может быть успешно заменено более компактным описанием этой же совокупности на основе **p** новых искусственных переменных ($p << m$). При этом, как уже отмечалось, сжатие исходного признакового пространства достигает 3–4 раз без существенной потери информации.

Во-вторых, в силу ортогональности главных компонент они могут использоваться в качестве факторов (регрессоров) для проведения последующего множественного корреляционно-регрессионного анализа различных социально-экономических и других сторон изучаемых объектов. Такой анализ особенно ценен со статистической точки зрения благодаря полному отсутствию мультиколлинеарности в среде моделирования.

В-третьих, измеренные главные компоненты могут служить количественными оценками исследуемых латентных показателей. Полученные стандартизованные переменные образуют базу для ранжирования и группировки объектов по величине скрытых общих факторов, определяющих вариацию и корреляционные связи наблюдаемых признаков-симптомов. Так, с помощью измеренных главных компонент можно выделить группы лидеров, середняков и аутсайдеров по размеру соответствующего латентного показателя.

В простейшем случае, когда рассматривается только два исходных признака x_1 и x_2, всю процедуру компонентного анализа можно изобразить графически (рис. 3).

На рис. 3 исследуемые многомерные объекты представлены в виде точек корреляционного поля (эллипса) в системе координат $X_1 0 X_2$. Стандартизация исходных переменных (второй этап метода

главных компонент) заключается в переносе начала координат в центр корреляционного эллипса (центрирование) и некотором его сжатии или растяжении (нормирование).

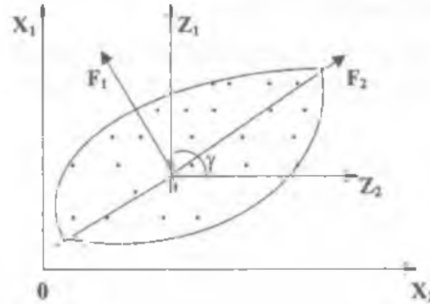

Рис. 3. Геометрическая интерпретация метода главных компонент при $m = 2$

Обратное линейное преобразование стандартизованных признаков-симптомов в главные компоненты (третий и четвёртый этапы процедуры) сводятся к повороту координатных осей $Z_1 0 Z_2$ на такой угол g, при котором новая координатная ось $0F_1$, соответствующая первой главной компоненте, будет сориентирована по первой главной оси эллипса. А новая координатная ось $0F_2$, соответствующая второй главной компоненте, будет сориентирована по второй главной оси эллипса.

Очевидно, что максимальный разброс точек, измеряемый общей дисперсией исходных признаков, наблюдается именно по первой главной оси эллипса, а минимальный — по второй главной оси эллипса в соответствии с требованием l_1 i l_2. Сами оси $0F_1$, $0F_2$, т.е. главные компоненты F_1, F_2 взаимно перпендикулярны и их измерение (пятый этап метода) представляет собой выражение координат всех точек (объектов) в новой системе $F_1 0 F_2$.

В заключение отметим, что практическую реализацию методов факторного анализа и, в частности метода главных компонент, очень удобно осуществлять с помощью системы программ STATISTICA, описание которой с подробными иллюстративными примерами можно найти в работе [2].

УДК 334.72(477)

Н. М. Столбуненко*

УДОСКОНАЛЕННЯ ПІДПРИЄМНИЦЬКОЇ ДІЯЛЬНОСТІ ЯК УМОВА СТАЛОГО РОЗВИТКУ ЕКОНОМІКИ УКРАЇНИ

В умовах ринкової трансформації вітчизняної економіки, радикальних змін у відносинах власності й інституціональних основах державності загалом, розвиток підприємництва набирає особливого значення, але у вітчизняній економічній науці проблеми теорії підприємництва розроблені вкрай недостатньо. Отже, необхідно вивчення природи сучасного підприємництва як фактора виробництва, формування підприємницького конкурентного середовища, в розвитку економіки України.

На процес формування, розвитку та стабілізації різних форм підприємництва впливає велика кількість різноманітних факторів, які можна класифікувати за сферою та характером впливу. Об'єктивні фактори, оточуючі організацію в суспільстві, створюють зовнішнє середовище. Зовнішнє оточення впливає на діяльність суб'єктів господарювання через політико-правове соціально-культурне, технологічне, економічне, екологічне, міжнародне середовище. У свій час воно поділяється на базові та доповнюючі. В якості базових виступають: наявність законів, наявність основних компонентів для організації підприємницької діяльності (кошти, приміщення, обладнання, сировина, матеріали та ін.), співвідношення фіскальної та економічної функцій податків, загальна економічна стабільність у державі тощо. В якості доповнюючих: наявність державної підтримки МБ, інфраструктура, яка сприяє розвитку малих підприємств, процедура регістрації підприємничих структур тощо [5, с. 98].

У той же час зовнішнє середовище включає **фактори прямої та посередньої дії.** До прямих відносяться: постачальники (матеріалів, капіталів, трудових ресурсів), закони і законодавчі органи, напрямок і механізми ділової діяльності організації, споживачі, власни-

* Кандидат економічних наук, доцент кафедри економіки і управління економіко-правового факультету ОНУ ім. І. І. Мечникова.