

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра оптимального керування і економічної кібернетики

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

« Ігрове моделювання дуополій»

«Game simulation of duopolies»

Виконав: здобувач денної форми навчання

спеціальності 113 Прикладна математика
Освітня програма «Прикладна математика»

Довгань Олександр Олексійович

Керівник

докт. фіз-мат. наук, доц. Кічмаренко О.Д.

(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали,

підпис)

Рецензент

канд. фіз-мат. наук, доц. Страхов Є.М.

(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та

ініціали)

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ ____ від _____ р.

Завідувач кафедри

Захищено на засіданні ЕК № _____

протокол № ____ від _____ р.

Оцінка _____ / _____ / _____

(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)

Голова ЕК

(підпис)

(прізвище, ім'я)

(підпис)

(прізвище, ім'я)

ЗМІСТ

ВСТУП.....	2
РОЗДІЛ 1 БЕЗКОАЛІЦІЙНІ ІГРИ.....	3
РОЗДІЛ 2 МОДЕЛІ ДУОПОЛІЇ.....	13
2.1 Модель дуополії Курно.....	13
РОЗДІЛ 3 ДИФЕРЕНЦІЙОВАНІ ПРОДУКТИ В ДУОПОЛІЇ.....	16
РОЗДІЛ 4 МОЖЛИВІ ПЕРЕВАГИ ПЕРШОГО АБО ДРУГОГО ХОДУ.....	17
РОЗДІЛ 5 МОЖЛИВОСТІ ПЕРЕВАГИ ДРУГОГО ХОДУ. СТРАТЕГІЧНА ЧАСОВА СХЕМА.....	23
ВИСНОВКИ.....	29
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	30
ДОДАТОК А.....	32
ДОДАТОК Б.....	38

ВСТУП

Теорія ігор є розділом математики, предметом якого є прийняття оптимальних рішень в умовах конфлікту. Офіційною датою народження Теорії Ігор вважають 1944 рік, а саме дату публікації монографії Дж. Неймана та О. Моргенштерна "Теорія ігор і економічна поведінка". З того часу Теорія Ігор переживає бурхливий розвиток і відіграє важливу роль у сучасній економічній теорії.

Апарат теорії рівноваги та теорії ігор послужив основою для створення сучасних теорій міжнародної торгівлі, оподаткування, громадських благ, грошової економіки, теорії виробничих організацій, а також теорія ігор широко застосовується в політичних, соціальних, біологічних, військових та інших сферах людської діяльності.

Слід особливо підкреслити, що велику роль теорії ігор в економіці пояснює те, що вона надає мову для моделювання та техніку аналізу специфічної динамічної конкурентної взаємодії.

Метою даної роботи є вивчення теорії безкоаліційних ігор та їх застосування моделей дуополістичної конкуренції, відстежені процеси цінової конкуренції в них та визначено оптимальну поведінку фірми при виборі ролі лідера чи послідовника.

Лідер (фірма з низькими витратами) отримає високий прибуток лише у тому випадку, якщо витрати на одиницю продукції значно відрізнятимуться в порівнянні з фірмою послідовником. Однак фірма, що робить свій хід другою, може завершити період навіть з більшим прибутком, якщо втрати у величині витрат будуть невеликі. При цьому припустимо лінійність попиту, диференційованість продукції, а також асиметрію фірм.

РОЗДІЛ 1 БЕЗКОАЛІЦІЙНІ ІГРИ

Теорія безкоаліційних ігор - це спосіб моделювання та аналізу ситуацій, в яких гравці не можуть домовлятися (вступати в коаліції) оптимальне рішення кожного гравця залежить від його уявлень про гру опонентів. Найважливішим моментом в теорії є акцент на тому, що гравці передбачають гру своїх опонентів, використовуючи свої знання правил гри та базуючись на припущенні, що їхні опоненти раціональні і, отже, вони також намагаються передбачити гру своїх опонентів та максимізувати свої виграші.

Існують два способи задання гри: позиційна форма гри (представлена деревом гри) та нормальна або стратегічна форма задання гри.

Гра в нормальній формі - це трійка елементів:

$$\{I, S = \prod_i \{S_i\}_{i \in I}, u = (u_1, \dots, u_n)\}$$

де $I = \{1, \dots, n\}$ - множина гравців; S_i - множина стратегій, доступних гравцеві $i = 1, \dots, n$, $u_i: S_i = \prod_{i \in I} S \rightarrow R^1$ - функція виграшу гравця i , яка встановлюється відповідно до кожного набору стратегій $s = (s_1, \dots, s_n)$, також відомого як ситуація, виграш цього гравця. Розглянемо випадок, коли $I = \{1, 2\}$, і множини стратегій кожного з 2 гравців є скінченними. У цьому випадку гру можна зобразити за допомогою матриці:

$$\begin{array}{c}
 s_2^1 \quad \dots \quad s_2^{(K)} \\
 \begin{array}{c} s_1^1 \\ \vdots \\ s_1^{(M)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc} (a_{11}, b_{11}) & \dots & (a_{1K}, b_{1K}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (a_{M1}, b_{M1}) & \dots & (a_{MK}, b_{MK}) \end{array} \right)
 \end{array}$$

де S_1 – множина стратегій гравця 1, а S_2 – множина стратегій гравця 2. Цю саму гру можна також подати у вигляді двох матриць, елементами яких будуть представляти

$$a_{mk} = u_1(s_1^{(m)}, s_2^{(k)}) \quad \text{и} \quad b_{mk} = u_2(s_1^{(m)}, s_2^{(k)}) \quad k = 1, \dots, K, \quad m = 1, \dots, M$$

відповідно. Такі ігри називають *біматричними*. Під рішенням гри, двох чи більше гравців, ми будемо розуміти таку рівноважну ситуацію, в якій жоден учасник не може збільшити виграш, змінивши своє рішення в односторонньому порядку.

Змішана стратегія σ_i - це ймовірнісний розподіл на множині чистих стратегій S_i . Ми будемо позначати простір змішаних стратегій i -го гравця через Σ_i , а $\sigma_i(s_i)$ – ймовірність того, що обирається стратегія s_i .

Означення 1: Якщо S_i - скінчена множина чистих стратегій гравця i , то *змішана стратегія* $\sigma_i: S_i \rightarrow [0,1]$ встановлює ймовірність $\sigma_i(s_i) \geq 0$ для кожної чистої стратегії $s_i \in S_i$, що вона буде обрана, при цьому

$$\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1$$

Виграш гравця i , що відповідає набору стратегій σ , є

$$u_i(\sigma) = \sum_{s \in S} \left(\prod_{j=1}^n \sigma_j(s_j) \right) u_i(s)$$

Означення 2: Змішаним розширенням гри $\Gamma = \{I, \{S_i\}, \{u_i\}\}$ називається гра $\bar{\Gamma} = \{I, S = \prod_i \{S_i\}, \sum, u\}$, де $\sum = \prod_{i \in I} \sum_i$ - це простір змішаних стратегій, а $u(\sigma)$, де $\sigma \in \sum$, визначається вищенаведеною рівністю.

Рівновага за Нешем.

Означення 3: Набір стратегій $s = (s_1, \dots, s_n)$ утворює рівновагу за Нешем (або ситуація $s = (s_1, \dots, s_n)$ є рівноважною за Нешем) в грі $\Gamma = \{I, \{S_i\}, \{u_i\}\}$, якщо для будь-якого $i = 1, \dots, n$

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i}) \forall s'_i \in S_i$$

Отже, якщо гравець вирішує відхилитися від обраної ним стратегії при фіксованому виборі інших гравців, то це лише погіршить його положення.

У ситуації рівноваги за Нешем (далі - р.Н.), обрана кожним гравцем стратегія є найкращою відповіддю на стратегії, обраними суперниками.

Приклад. Розглянемо гру двох гравців

	z	u	m
P	(6.4)	(2.5)	(4.6)
H	(4.2)	(6.6)	(2.5)
I	(4.6)	(3.8)	(6.4)

Рівновагу за Нешем. утворить стратегії (H, u).

Приклад. Гравці 1 і 2 торгуються щодо того, як поділити один долар. Обидва гравці одночасно називають частки, які вони хотіли б мати, S_1 і S_2 , де $0 \leq S_1, S_2 \leq 1$. Якщо $S_1 + S_2 \leq 1$, то гравці отримують названі частки, якщо $S_1 + S_2 > 1$, то обидва гравці нічого не отримують. Тут ситуації рівноважні за Нешем розташуються на головній діагоналі матриці виграшів.

Однак рівноваги за Нешем в чистих стратегіях може і не існувати взагалі.

Приклад. "Орлянка"

Два гравці одночасно і незалежно обирають або решку, або орла. Якщо їхні вибори різні, то перший гравець платить другому 1 одиницю,

$$\begin{array}{c} 0 \\ p \end{array} \quad \begin{array}{cc} 0 & p \\ \left(\begin{array}{cc} (1, -1) & (-1, 1) \\ (-1, 1) & (1, -1) \end{array} \right) \end{array}$$

В цій грі немає рівноваги за Нешем в чистих стратегіях, оскільки в кожній ситуації одному з гравців вигідно відхилитися від обраної стратегії. Однак пара змішаних стратегій $\sigma_1=(1/2;1/2)$ та $\sigma_2=(1/2;1/2)$, де кожен з гравців грає своїми чистими стратегіями з рівними ймовірностями, утворює рівновагу за Нешем в змішаних стратегіях.

Означення 4. Ситуація (набір змішаних стратегій) $\sigma=(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ є рівновагою за Нешем в грі як в означенні 2, якщо для будь-якого $i = 1, \dots, n$

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) \quad \forall \quad \sigma'_i \in \Sigma_i.$$

Джон Неш показав, що якщо дозволити змішані стратегії, то для всіх кінцевих ігор з будь-якою кількістю гравців існує принаймні одна рівновага Неша.

Теорема. (Критерій рівноваги Неша в змішаних стратегіях.)

Нехай $S_i^+ \subset S_i$ стратегії, які гравець i вибирає з додатковою ймовірністю в ситуації $\sigma=(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$. Ситуація $\sigma \in \text{p.Н.}$ в змішаному розширенні $\bar{\Gamma}$ гри Γ тоді і лише тоді, коли для всіх $i=1, \dots, n$

$$(1) \quad u_i(s_i, \sigma_{-i}) = u_i(s'_i, \sigma_{-i}) \quad \forall \quad s_i, s'_i \in S_i^+$$

$$(2) \quad u_i(s_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(s'_i, \sigma_{-i}) \quad \forall \quad s_i \in S_i^+, s'_i \notin S_i^+$$

Доведення.

Необхідність. Якщо б одна з цих умов не виконувалася для певного i , то ми знайшли б дві стратегії $s_i \in S_i^+$ і $s'_i \in S_i^+ : u_i(s'_i, \sigma_{-i}) > u_i(s_i, \sigma_{-i})$, то це не р.Н.

Достатність. Припустимо тепер, що (1) та (2) виконані, але σ – не є р.Н. Тоді існує гравець i та стратегія σ'_i такі, що

$$u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) > u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}).$$

Але якщо це так, то існує чиста стратегія s'_i , яка грається з позитивною ймовірністю при σ'_i і для якої $u_i(s'_i, \sigma_{-i}) > u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$. Так як $u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = u_i(s_i, \sigma_{-i})$ для будь якої стратегії $s_i \in S_i^+$, це суперечить (1) і (2).

Приклад. Сімейна сварка

Дружина і чоловік незалежно вирішують, куди піти - на балет (Б) чи на футбол (Ф). Якщо вони підуть разом на футбол, чоловік отримає більше задоволення, ніж дружина; якщо вони підуть разом на балет, то навпаки. Зрештою, якщо вони опиняться в різних місцях, вони не отримають жодного задоволення. Розглядана ситуація моделюється наступною грою.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{c} \text{Б} \quad \text{Ф} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Б} \\ \text{Ф} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Очевидно, що ситуації (Ф;Ф) та (Б;Б) є рівновагами Неша в чистих стратегіях. Знайдемо рівновагу Неша в змішаних стратегіях. Припустимо, що в такій рівновазі гравець 1 (чоловік) грає змішаною стратегією $(p; 1-p)$, а дружина грає $(q; 1-q)$, при цьому $0 < p, q < 1$.

Тоді, враховуючи зроблені припущення, отримаємо, що дружина, граючи "Ф", отримує $1 \cdot p + 0 \cdot (1-p)$, а граючи "Б", отримує $0 \cdot p + 2 \cdot (1-p)$. Отже, $2(1-p) = p$. Звідси $3p = 2$, і отже, $p = 2/3$. Аналогічно отримуємо, що $2q + 0(1-q) = 0 \cdot q + (1-q) \cdot 1$, отже, $q = 1/3$. Таким чином, в змішаному рівновазі чоловік грає "Ф" з ймовірністю $2/3$, а дружина грає "Ф" з ймовірністю $1/3$.

Варто зауважити, що згідно з припущенням, зробленим у критерії, у гравців в цьому прикладі немає припущень щодо ймовірностей, які вони приписують своїм стратегіям. Ці ймовірності визначають "рівноважний розгляд": необхідність зробити іншого гравця байдужим відносно його стратегій.

Означення 5: Пара змішаних стратегій $\sigma_1 = (p^*; 1-p^*)$ і $\sigma_2 = (q^*; 1-q^*)$ є рівновагою Неша, якщо змішана стратегія σ_i^* одного гравця є кращою відповіддю на змішану стратегію σ_j^* іншого гравця, тобто виконуються наступні нерівності:

$$u_1(\sigma_1; \sigma_2^*) \leq u_1(\sigma_1^*; \sigma_2^*)$$

для будь-якого σ_1 , і

$$u_2(\sigma_1^*; \sigma_2) \leq u_2(\sigma_1^*; \sigma_2^*)$$

для довільного σ_2 .

Приклад: Знайдемо рівновагу в змішаних стратегіях в наступній грі

	L	R
T	(2,1)	(0,2)
B	(1,2)	(3,0)

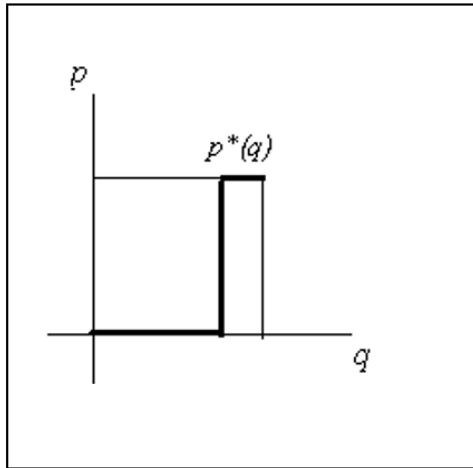
Розглянемо можливі змішані стратегії першого гравця. Позначимо $(p; 1-p)$ змішану стратегію гравця 1, де він грає "Т" з ймовірністю p . Для кожного значення q ми можемо обчислити значення $p = p^*(q)$, такі, що $(p; 1-p)$ будуть кращою відповіддю гравця 1 на $(q; 1-q)$ гравця 2. Очікуваний виграш гравця 1 від гри $(p; 1-p)$, коли гравець 2 грає $(q; 1-q)$, буде:

$$2 \cdot p \cdot q + 0 \cdot p(1-q) + 1 \cdot (1-p)q + 3 \cdot (1-p) \cdot (1-q) = 2p \cdot q + q - p \cdot q + 3 - 3p - 3q + 3 \cdot p \cdot q = 4 \cdot pq - 2q - 3p + 3 = p(4q-3) + (3-2q)$$

Якщо $q < 3/4$, то $p=1$, тобто "Т" буде кращою відповіддю (серед усіх стратегій, чи то чистих, чи змішаних), аналогічно,

Якщо $q > 3/4$, то $p=0$, "В".

Якщо $q=3/4$, то очікуваний виграш гравця 1 не залежить від його стратегії, тобто йому байдуже обрати одну з чистих стратегій чи будь-яку змішану стратегію $(p; 1-p)$.



Маємо, що при $q=3/4$ стратегія $(p; 1-p)$ є оптимальною у відповідь на змішану стратегію $(q; 1-q)$ для будь-якого $0 \leq p \leq 1$.

Подібні розсуди проведемо і для виграшу другого гравця.

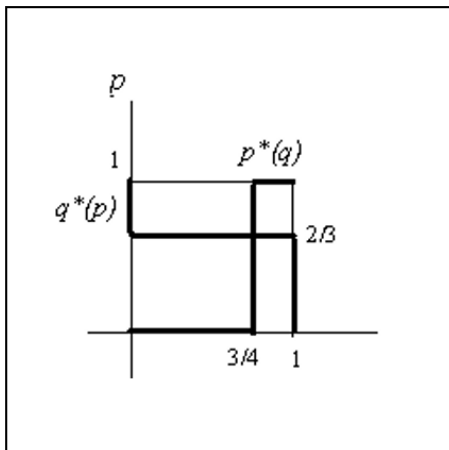
$$1 \cdot p \cdot q + 2 \cdot (1-p)q + 2 \cdot p(1-q) + 0 \cdot (1-q) \cdot (1-p) = qr + 2q - 2pq + 2p - 2pq = (2-3p) \cdot q + 2 \cdot p$$

якщо $p < 2/3$ то $q=1$

якщо $p > 2/3$ то $q=0$

якщо $p=2/3$ то q – довільне

Отримуємо графік:



Даний малюнок показує, що рівновага Неша в цій грі виникає, коли гравець 1 розгортає змішану стратегію $(3/4; 1/4)$, а гравець 2 розгортає $(2/3; 1/3)$.

Важливо відзначити, що цей приклад ілюструє, що не випадково, якщо один із гравців дотримується своєї рівноважної стратегії, то другому гравцеві при цьому абсолютно байдуже, як грати. Це випливає з властивості, яку було доведено раніше в загальному випадку.

$$u_1(s_1, \sigma_2^*) = u_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$$

$$u_1(\sigma_1^*, s_2) = u_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$$

для всіх s_i , які входять в рівноважну ситуацію з ненульовими ймовірностями. Для тих s_i' , які входять в рівноважну ситуацію з нульовою ймовірністю, справедливі нерівності:

$$u_1(s_i', \sigma_2^*) \leq u_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$$

$$u_1(\sigma_1^*, s_i') \leq u_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$$

Обидві пари вищезазначених формул надають ефективний метод визначення рівноважних ситуацій у довільних біматричних іграх розміром 2 x 2.

Очікуваний виграш гравця 1 від розігрування $\sigma_1 = (p, 1-p)$, коли гравець 2 розіграє $\sigma_2 = (q, 1-q)$:

$$u_1(\sigma_1, \sigma_2) = p(a_{11}q + (1-q)a_{21}) + (1-p)a_{22}$$

$$u_1(\sigma_1, \sigma_2) - u_1(s_1, \sigma_2) = (a_{12} - a_{22} + q(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}))p$$

Присвоєно позначення:

Краща відповідь гравця 1 на довільну стратегію σ_2 гравця 2 може бути отримана з умови невід'ємності:

$$u_1(\sigma_1, \sigma_2) - u_1(s_1, \sigma_2) \geq 0$$

$$u_1(\sigma_1, \sigma_2) - u_1(s_2, \sigma_2) \geq 0$$

Запишемо їх з урахуванням введених позначень:

$$(p-1)(Cq-\alpha) \geq 0 \quad (1)$$

$$p(Cq-\alpha) \geq 0$$

Аналогічні міркування можна застосувати і для знаходження найкращої відповіді гравця 2. Очікуваний виграш гравця 2 від гри $\sigma_2 = (q, 1-q)$, коли гравець 1 грає $\sigma_1 = (p, 1-p)$:

$$u_2(\sigma_1, \sigma_2) = q(b_{11}p + (1-p)b_{21}) + (1-q)(b_{12}p + (1-p)b_{22}) = b_{22} + (b_{21} - b_{22})p + (b_{21} - b_{22} + p(b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}))q$$

З умов невід'ємності:

$$u_2(\sigma_1, \sigma_2) - u_2(\sigma_1, s_1) \geq 0$$

$$u_2(\sigma_1, \sigma_2) - u_2(\sigma_2, s_2) \geq 0$$

Позначивши $D=b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}$, $\beta=b_{22} - b_{21}$, ми отримуємо аналогічні нерівності для знаходження кращої відповіді гравця 2 на довільну стратегію $\sigma = (p; 1-p)$ гравця 1:

$$(q-1)(Dp - \beta) \geq 0 \quad (2)$$

$$q(Dp - \beta) \geq 0$$

Тоді, щоб пара $\sigma_1 = (p, 1-p)$, $\sigma_2 = (q, 1-q)$ визначала рівноважну ситуацію, необхідно і достатньо одночасне виконання системи нерівностей (1) и (2), а також $0 \leq p, q \leq 1$.

Розглянемо кращі відповіді кожного гравця, які залежать від того, як устроєні матриці виграшів гравця 1 і гравця 2. Почнемо з нерівностей (1). Можливі три випадки:

$$1) p=1, Cq \geq \alpha;$$

$$2) 0 < p < 1, Cq = \alpha;$$

$$3) p=0, Cq \leq \alpha$$

У свою чергу, залежно від співвідношень між C та α можливі наступні випадки та відповідні найкращі відповіді гравця 1 у кожному з них.

РОЗДІЛ 2 МОДЕЛІ ДУОПОЛІЇ

Розглянемо кілька моделей дуополістичної Конкуренції, простежимо процес цінової конкуренції в ній, а також визначимо вид оптимальної поведінки

2.1 Модель дуополії Курно

Припустимо, дві фірми $i=1,2$ виробляють однорідний продукт і q_1, q_2 -об'єми виробництва цього продукту. Нехай крива галузевого попиту представлена лінійною функцією:

$$P(Q) = a - b Q, \text{ де } Q = q_1 + q_2 \quad (P(Q)=a-bQ, \text{ при } Q < a/b \text{ і } P(Q)=0 \text{ при } Q \geq a/b)$$

Функції витрат $C_i(q_i) = TC(q_i) = cq_i$ ($c < a$) (немає фіксованих витрат і граничні витрати постійні $MC=AC=c$)

Фірми вибирають q_i одночасно незалежно. Тут два гравці, стратегії $S_i = [0; +\infty)$. Фірми максимізують свої прибутки:

$$\Pi_i(q_i, q_j) = q_i (P(q_i + q_j) - c) = q_i [a - (q_i + q_j) - c]$$

Якщо пара (q_1^*, q_2^*) - р.н., то q_i^* вирішує задачу

$$\max \Pi_i(q_i, q_j^*)$$

Покладемо $q_j^* < a-c$, тоді необхідна умова максимізації прибутку кожного дуополіста при заданому (незмінному) випуску іншого задовольняє умови:

$$\partial \Pi_1 / \partial q_1 = 0$$

$$\partial \Pi_2 / \partial q_2 = 0$$

Звідси

$$q_1^* = ((a - c) / 2b) - q_2 / 2 = 2 / 2 \cdot q_2^* + (a - c) / 2b$$

$$q_2^* = ((a - c) / 2b) - q_1 / 2 = 2 / 2 \cdot q_1^* + (a - c) / 2b$$

звідси

$$q_1^* = q_2^* = (a - c) / 3b$$

Зауважимо, що монопольний випуск був би $(a - c) / 2b$.

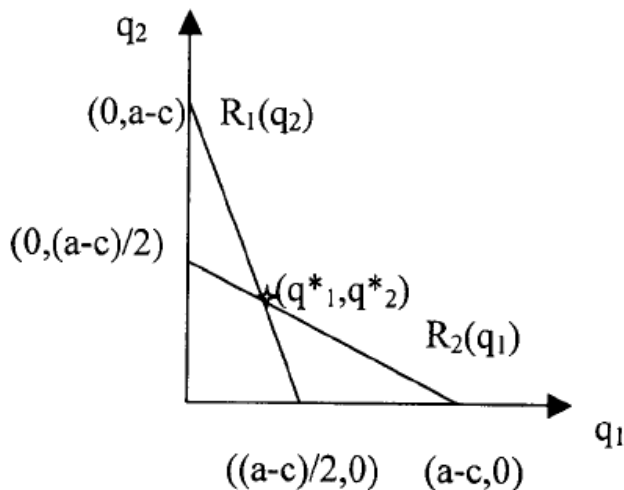
При дослідженні дуополії по Курно важливу роль відіграють функції найкращих відповідей (кривих реагування) – це функції виду

$$R_2(q_1) = -1/2 q_1 + (a - c) / 2b$$

$$R_1(q_2) = -1/2 q_2 + (a - c) / 2b$$

Таким чином $R_i(q_j)$ - це обсяг випуску i -ї фірми, що максимізує її прибуток, за умови, що j -я фірма виробляє q_j .

Зобразимо криві реагування:



Точка перетину кривих реагування визначає рівновагу Курно тобто рівновагу по Нешу в Дуополії Курно.

2.2 Дуополія за Бертраном (або парадокс Бертрана)

Розглянемо ситуацію, як і в дуополії по Курно, коли дві фірми виробляють однорідний продукт, але тепер припустимо, що фірми одночасно і незалежно оголошують ціну на свою продукцію. Тобто. на відміну від моделі Курно, як стратегічна змінна виступає ціна, а не обсяг випуску. Функція попиту кожної фірм має вид:

$$D_i(p_i, p_j) = \begin{cases} D(p_i), & \text{якщо } p_i < p_j \\ D(p_i)/2, & \text{якщо } p_i = p_j \\ 0, & \text{якщо } p_i > p_j \end{cases}$$

Фірма, що призначила найнижчу ціну, отримає весь попит, якщо ціни збігаються, то фірми ділять попит рівномірно між собою.

Припустимо, що (p_1^*, p_2^*) утворюють р.Н.. тоді, очевидно, що $p_i^* \geq c$, оскільки ціни не можуть бути нижчими від граничних витрат; у разі рівності цін граничним витратам підприємство отримає нульовий прибуток. Парадокс Бертрана полягає в тому, що жодна з цін p_i^* не може перевищувати значення c .

Дійсно, припустимо для визначеності $p_i^* > c$, тоді якщо $p_j^* > p_i^* > c$ тоді фірма 2 в кращому з результатів стикається тільки з половиною попиту, призначивши ціну $p_2' = p_1^* - \varepsilon$, для досить малого $\varepsilon > 0$. Аналогічно може відповісти і перша фірма, призначивши ціну $p_2^* - \varepsilon$. Таким чином, у рівновазі за Бертраном (або в рівновазі за Нешем у дуополії за Бертраном) $p_1^* = p_2^* = c$ і фірми отримують нульовий прибуток.

Цієї парадоксальної ситуації можна уникнути, змінивши деякі обмеження моделі. Наприклад, ввести обмеження потужності фірм або припустити диференційованість продукції, а також зняти умову одноразовості цієї гри.

РОЗДІЛ 3 ДИФЕРЕНЦІЙОВАНІ ПРОДУКТИ В ДУОПОЛІЇ

Далі розглянемо питання рівноваги та кілька пропозицій щодо можливості переваги вибору стратегії лідера або послідовника складнішої моделі дуополії Бертрана з диференційованими товарами та різними рівнями граничних витрат. Нехай фірми 1 і фірма 2 вибирають ціни p_1 і p_2 одночасно незалежно. Попит, з яким стикається фірма i , $D_i(p_j, p_i) = a - p_i + b p_j$, де $b > 0$ відображає ступінь заміності i -го продукту j -м. Граничні витрати в обох фірм дорівнюють ($c < a$). Простір стратегій $S_i = [0, +\infty)$: фірми вибирають свої ціни. Тоді прибуток i -ї фірми визначається у такий спосіб:

$$\Pi_i(p_i, p_j) = D_i(p_i, p_j)(p_i - c) = (a - p_i + b p_j)(p_i - c)$$

Пара (p_1^*, p_2^*) утворює рівновагу по Нешу, якщо для будь-якого i , p_i^* є рішенням задачі :

$$\max_{p_i} (p_i^*, p_j^*) = \max_{p_i} (a - p_i + b p_j^*)(p_i - c)$$

$$0 \leq p_i < \infty \quad 0 \leq p_j < \infty$$

Розв'язання задачі для i -ї фірми має вигляд:

$$p_i^* = \frac{1}{2} * (a + b p_j^* + c)$$

тобто отримуємо:

$$p_1^* = \frac{1}{2} * (a + b p_2^* + c) \text{ и } p_2^* = \frac{1}{2} * (a + b p_1^* + c)$$

$$p_1^* = p_2^* = [a(2+b) + bc + 2c] / [4 - b^2]$$

$$p_i^* = (a+c)/(2-b).$$

Припустимо, фірма i , оголошуючи ціну p_i , стикається з попитом $D_i(p_1, p_2)$, i має лінійну функцію витрат виробництва, а граничні витрати рівними c_i , $i = 1, 2$, (тобто граничні витрати у фірм 1 і 2 ми вважаємо різними) і функція доходу має вигляд:

$$\Pi_i(p_1, p_2) = (p_i - c_i) * D_i(p_1, p_2). \quad (1)$$

Розглянемо три різні ігри цінового змагання:

Гру G , в якій ходи робляться одночасно; та дві гри з послідовними ходами та повною інформацією – G_1 та G_2 . Чиста стратегія для фірми i у грі G полягає в тому, щоб вибрати елемент його цінової множини $P_i = [c_i, \bar{p}_i]$ де використання верхньої межі може бути підкріплене фактами в багатьох випадках, наприклад, таким як обмеженість доходу. У грі G_i , фірма i (лідер) робить хід першою, обираючи чисту стратегію $p_i \in P_i$, а інша фірма (послідовник) робить свій хід після спостереження p_i , обираючи свою чисту стратегію $\lambda(p_i)$, де $\lambda(\cdot)$ -функція кращої відповіді з множини стратегій P_j (розширення множини P_i). Введемо для кожної з цих ігор поняття рівноваги. Пара (p_1^*, p_2^*) утворює рівновагу Нешу (або Бертрану) у грі G , якщо для всіх $p_1 \in P_1, p_2 \in P_2$.

$$\Pi_2(p_1^*, p_2^*) \geq \Pi_2(p_1, p_2^*) \text{ и } \Pi_1(p_1^*, p_2^*) \geq \Pi_1(p_1^*, p_2)$$

Для ігор G_1 і G_2 , рівновагою будемо називати повну рівновагу по Штакельбергу (SPE або повну рівновагу під-гри), означену у такий спосіб: пара $(p_1^*, \lambda^*(\cdot))$ утворює SPE у грі G_1 якщо для всіх $p_1 \in P_1, p_2 \in P_2$ виконується:

$$\Pi_2(p_1, \lambda^*(p_1)) \geq \Pi_2(p_1, p_2) \text{ и } \Pi_1(p_1^*, \lambda^*(p_1)) \geq \Pi_1(p_1, \lambda^*(p_1))$$

Іншими словами, SPE передбачає накладення наступних обмежень на поведінку гравців: гравець, який робить свій хід другим, повинен використовувати стратегію, що полягає в (однозначному) виборі з множини кращих відповідей, зазвичай визначається як

$$r_2 = \operatorname{argmax} \{ \Pi_2(p_1, p_2) : p_2 \in P_2 \}$$

Гравець, який здійснює хід першим, повинен обирати ціну, яка максимізує його доходи, враховуючи очікування раціональної реакції (відповідно до стратегії $\lambda^*(\cdot)$) суперника.

Далі зробимо кілька припущень:

A(1) Функція попиту $D_i(p_1, p_2)$ двічі неперервно диференційована і приймає додатні значення, а також виконуються нерівності:

$$\partial D_i(p_1, p_2) / \partial p_i < 0 \text{ и } \partial D_i(p_1, p_2) / \partial p_j > 0$$

для усіх $(p_1, p_2) \in P_1 \times P_2$.

Перша нерівність означає, що крива кожного з попитів має негативний нахил за власною ціною (тобто обернено пропорційну залежність), а друге означає, що товари є субститутами (попит збільшується пропорційно ціні на інший товар).

РОЗДІЛ 4 МОЖЛИВІ ПЕРЕВАГИ ПЕРШОГО АБО ДРУГОГО ХОДУ.

Gal-Or (1985) [1] показав, що у разі симетричних фірм, існує перевага другого ходу (першого ходу) для обох гравців, коли кожна функція прибутку є строго увігнутою щодо власних дій і строго зростаючою (зменшується) щодо дій конкурента, і крива реакції має позитивний (негативний нахил). Dowrick (1986) [2] розширив цей результат для асиметричної дуополії.

Означення 6: (перевага першого та другого ходу для асиметричних ігор). Будемо говорити, що фірма i має перевагу першого (другого) ходу, якщо її рівноважний виграш у G_i (G_j) більший, ніж у G_j (G_i).

Слід зазначити, що в той час, як гра G може мати, взагалі кажучи, не єдину рівновагу Бертрана-Неша, в іграх G_1 і G_2 SPE буде єдиною. Множинна SPE, скажімо, для гри G_1 , може виникнути внаслідок двох різних причин. Перша: із заданою стратегією послідовника λ^* , виграш лідера $\Pi_1(p_1, \lambda^*(\cdot))$ може мати більше ніж один $\arg\max$. Ця ситуація є в загальному випадку усувною (див. Amir 1999) [3]).

Друге можливе джерело порушення єдиності SPE у тому, що за вибором лідером p_1^* , функція реакції $r_2(\cdot)$ може бути багатозначною. Amir (1999) [3] показав, що у разі існування єдине SPE, $(p_1^*, \bar{r}_2(\cdot))$, де $\bar{r}_2 \in \max$ з усіх r_2 , тому факту, що товари є субститутами чи, що те ж саме, прибуток збільшується із ціною конкурента. Зважаючи на ці аргументи, ми надалі приймаємо єдинність SPE в іграх G_1 і G_2 , але не в G .

Накладемо таку умову для функції попиту:

A(2) $D_i(p_1, p_2)$ - строгий log-супермодуляр [див. додаток B] на $P_1 \times P_2$, $i=1, 2$. Це припущення передбачає, що

$$V_{D_i} @ \frac{\partial^2 \log D_i(p_1, p_2)}{\partial p_1 \partial p_2} = D_i(p_1, p_2) \frac{\partial^2 D_i(p_1, p_2)}{\partial p_1 \partial p_2} - \frac{\partial D_i(p_1, p_2)}{\partial p_i} \frac{\partial D_i(p_1, p_2)}{\partial p_j} \geq 0$$

Головне застосування A(2) полягає в тому, що воно призводить до реакційних відповідей, які не зменшуються (у тому сенсі, що кожен вибір є незменшуваним), але не повинні бути однозначними або безперервними. (A2) має дуже привабливу та точну інтерпретацію: цінова еластичність попиту фірми і збільшується з ціною конкурента, Milgrom та Roberts (1990) [4]. Це дуже інтуїтивна і загальна умова, хоча ясно, що не універсальна. Воно виконується якщо

$\partial^2 D_i(p_1, p_2) / \partial p_1 \partial p_2 \geq 0$, тобто якщо більш висока ціна конкурентної фірми не знижує реакційності попиту фірми до змін своєї ціни.

Лема 1 [5]. (Доведення див. у Додатку А)

Нехай мають місце припущення A(1) і A(2), тоді, принаймні одна з фірм матиме перевагу другого ходу.

Інший результат, пов'язаний з дослідженням таких же трьох ігор, з'явився в літературі, з накладенням додаткових умов крім (A1) та (A2): див. Dowrick (1986) та Hamilton and Slutsky (1990). Вони показали, що кожна з фірм обирає будь-яку з ігор G, але самі ігри G_1 і G_2 між собою не порівнюють. Іншими словами, вони отримали, що кожна з фірм вважає за краще бути гравцем Штакельберга (чи то лідером чи послідовником), ніж грати одночасно.

Наступний результат отримано для випадку, коли реакційна відповідь обох фірм має низхідний нахил. Накладемо додаткову умову на функцію попиту:

A(3) $D_i(p_1, p_2)$ є строгим log-сабмодуляр на $P_1 \times P_2$, $i=1, 2$. Це припущення передбачає, що

$$V_{D_i} = D_i(p_1, p_2) \frac{\partial^2 D_i(p_1, p_2)}{\partial p_1 \partial p_2} - \frac{\partial D_i(p_1, p_2)}{\partial p_i} \frac{\partial D_i(p_1, p_2)}{\partial p_j} \leq 0$$

Умова A (3) має таку інтерпретацію: цінова еластичність попиту фірми і зменшується із ціною конкурента. Суть застосування A (3) у тому, що реакційна відповідь незростаюча.

Лема 2 [5]. (Доведення див. у Додатку А)

Нехай мають місце припущення $A(1)$ та $A(3)$ тоді, кожна фірма матиме перевагу першого ходу.

З останньої леми випливає, що при спадному нахилі кривої кращих відповідей цінове змагання характеризується тією ж часовою перевагою, що й кількісне: обидві фірми віддають перевагу стратегії лідера, стратегії послідовника.

Наступне твердження описує змішаний випадок, коли одна з фірм (наприклад 2) має $\log$ -супермодулярну функцію попиту, а отже, позитивний нахил реакційної кривої. А фірма 1 має $\log$ -сабмодулярну функцію попиту і негативний нахил реакційної кривої. Умова квазівігнутості вводиться тільки для гарантії існування рівноваги Неша (Бертрана).

Лема 3 [5].

Нехай справедливе припущення $(A1)$ та функція доходу кожної з фірм квазівігнута за своєю ціною. D_1 - строгий $\log$ -сабмодуляр, а D_2 - строгий $\log$ -супермодуляр. Тоді фірма 1 має перевагу першого ходу.

(Доведення див. у Додатку А)

Для фірми 2, за цих умов перевагу черговості ходу визначити однозначно неможливо.

Говорячи про цінове змагання, найлогічніше припустити, що перевагою буде користуватися гравець, який здійснює свій хід другим. Насправді можливість «перебити» ціну конкурента часто виглядає дуже привабливо. У разі однорідних товарів, пропозиція меншої ціни дозволяє фірмі заволодіти всім ринком, таким чином, надаючи надзвичайну перевагу. У випадку диференційованих товарів та ідентичних фірм, перевага другого ходу завжди краща, коли ціни є стратегічними компліментами (а саме фірма має більший стимул збільшувати свої ціни, коли інша фірма збільшує свої).

Отже, основна ідея у тому, що з переваги другого ходу необхідно, щоб ціни були стратегічними комплементарями, навіть за умови припущення симетрії фірм.

Припускаючи ціни стратегічно комплементарними, природно виникає питання, чи збережеться перевага другого ходу за високого ступеня асиметрії фірм і за диференційованої продукції.

Крім окремого інтересу, дослідження цього питання дає апарат необхідний щодо проблеми стратегічної часової схеми для цінової гри.

РОЗДІЛ 5 МОЖЛИВОСТІ ПЕРЕВАГИ ДРУГОГО ХОДУ. СТРАТЕГІЧНА ЧАСОВА СХЕМА.

Нехай симетрична лінійна система попиту задана

$$D_i(p_1, p_2) = \max \{a - p_i + bp_j, 0\}, \quad 0 < b < 1, \quad (4)$$

з доходом фірми і заданим (3). Крім того, ми вважаємо, що $c_1 > c_2$.

Щоб гарантувати існування рішень для всіх трьох ігор, необхідне наступне припущення щодо попиту та витрат. Воно гарантує, що обсяги виробництва будуть позитивними, і ціни будуть вищими за граничні витрати в єдиній рівновазі кожної з ігор:

(В) Функція попиту (2) задовольняє умови: $a > M_1$ де

$$M_1 \triangleq \frac{c_1(2-b^2) - bc_2}{2+b}$$

Лема 4 [5]. (Доведення див. у Додатку А)

Нехай справедлива пропозиція (В) та функції попиту та витрат лінійні, єдина рівновага Бертрана-Неша для гри G задано рівністю

$(i, j = 1, 2; i \neq j) :$

$$p_i^N = \frac{a(2+b) + bc_j + 2c_i}{4-b^2} \quad (5)$$

Ціни та доходи рівноважні за Штакельбергом у грі G_i задані:

$$\begin{aligned} p_i^L &= \frac{a(2+b) + bc_j}{2(2-b^2)} + \frac{c_i}{2} \\ p_j^F &= \frac{(4-b^2)(a+c_j) + 2ab}{4(2-b^2)} + \frac{c_i b}{4} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\Pi_j^F = \frac{[a(4+2b-b^2) + b(2-b^2)c_i + (3b^2-4)c_j]^2}{16(2-b^2)^2}$$

$$\Pi_i^L = \frac{[a(4+2b-b^2) + b(2-b^2)c_i + (3b^2-4)c_j]^2}{16(2-b^2)^2} \quad (7)$$

(верхні індекси L і F позначають лідера та послідовника, а індекси i, j гри G_i, G_j відповідно).

Ми отримуємо характеристику можливостей допустимості переваг другого ходу термінах рівня попиту чи витрат. Далі покажемо, що вона справедлива для фірми з високими витратами, і простягається на фірму з малими витратами, і тоді коли витрати близькі. Нехай:

$$M_2 @ \frac{(2-b^2)c_1 - (2b^2 + b - 2)c_2 + \sqrt{2(2-b^2)(1+b)(c_1 - c_2)}}{4 + 3b} \quad (8)$$

M₂ єдине допустиме значення а, в якому фірма 2 байдужа до стратегій лідера чи послідовника, тобто.

$$a = M_2 \Leftrightarrow \Pi_2^L = \Pi_2^F$$

Наступна лема порівнює SPE виграші двох рівневих ігор G₁ та G₂.

Лема 5 [5]. (Доведення див. у Додатку А)

Нехай функції попиту та витрат лінійні, і справедливе припущення (В),

(1) фірма 1 (з високими витратами) матиме перевагу другого ходу

$$\Pi_1^F \geq \Pi_1^L, \forall a.$$

(2) фірма 2 (з невисокими витратами) матиме перевагу першого ходу ($\Pi_2^L \geq \Pi_2^F$) при $a \in [M_1; M_2]$, але при $a \in [M_2; \infty)$, користуватиметься перевагою другого ходу ($\Pi_2^F \geq \Pi_2^L$).

Понад те, можливість переваги першого ходу фірми 2, M₂-M₁, збільшується із різницею витрат (c₁-c₂). M₁ та M₂ задані припущенням (В) та (8) відповідно.

Це встановлює, що припущення про те, що перевага другого ходу завжди існує в конкуренції Бертрана, взагалі хибно. Воно не виконується глобально (тобто

для всіх допустимих значень параметрів) навіть у найзагальнішій специфікації: лінійного попиту та постійних витратах.

Стратегічна часова схема

Проблема стратегічного вибору часу для лінійної дуополії Бертрана досліджується відповідно до розширеної гри із затримкою Hamilton and Slutsky (1990). Розширена гра визначається наступним чином: на першій або перед ігровій стадії до "основної гри" (як основна гра мають на увазі три різні ігри: G , G_1 і G_2 , визначені раніше), гравці одночасно, і не залежно один від одного, вирішують робити свій хід раніше чи пізніше у "основній гри". Надалі гравці слідує зробленому вибору. Після завершення передігрової стадії вибір часу зроблений кожним гравцем оголошується.

Друга стадія або безпосередньо "основна гра" розігрується згідно з прийнятими гравцями рішень: з одночасною черговістю ходів, якщо обидва гравці вирішують робити хід в один і той же час (раніше або пізніше), або в іншому випадку з послідовною грою з повною інформацією (з послідовністю ходів) оголошеної гравцями). Таким чином, повна рівновага Штакельберга цієї розширеної гри викликає стратегічну узгодженість ходів у "базовій гри". Зважаючи на єдиність рівноваги в кожній з під-ігор розширеної гри (яка задана іграми G , G_1 і G_2), повна рівновага Штакельберга розширеної гри знаходиться в одній відповідності з рівновагою гри розмірності 2×2

		Фірма 2	
		L	E
Фірма 1	Φі	Π_1^L, Π_2^F	Π_1^N, Π_2^N
	рма 1	Π_1^N, Π_2^N	Π_1^F, Π_2^L

де E і L означають дії "зробити хід раніше" і "зробити хід пізніше" відповідно.

З припущень 1-3 ми знаємо, що виконуються такі нерівності:

$$\Pi_1^L \geq \Pi_1^N, \Pi_1^F \geq \Pi_1^N; \quad \Pi_2^L \geq \Pi_2^N, \Pi_2^F \geq \Pi_2^N. \text{Отже, ми маємо дві рівноваги}$$

Неша у чистих стратегіях у розширеній грі: (E, L) з виграшем (Π_1^L, Π_2^F) та (L, E) з виграшем (Π_1^L, Π_2^F) . Це стандартна координаційна гра з двома рівноважними ситуаціями у чистих стратегіях та однією рівновагою у змішаних стратегіях.

Розглянемо проблему вибору рівноважної ситуації, в чистих стратегіях використовуючи критерії оптимальності ризиків. Рівноважна ситуація (E, L) домінує ситуацію (L, E) за критерієм оптимальності ризику, якщо:

$$(\Pi_1^L - \Pi_1^N)(\Pi_2^F - \Pi_2^N) \geq (\Pi_1^F - \Pi_1^N)(\Pi_2^N - \Pi_2^L) \quad (9)$$

Далі наведемо аргументи, що пояснюють застосування концепції домінування ризиків. Інтерпретація критерію тут така: дві фірми намагаються зменшити ризики провалу координації при виборі часу.

Позначимо через p і q ймовірності, з якими гравці 1 та 2 вибирають дію E, відповідно, у грі зі змішаними стратегіями.

Гра $\tilde{G}$ має єдину рівноважну ситуацію у змішаних стратегіях при:

$$p^* = (\Pi_2^L - \Pi_2^N) / ((\Pi_2^L - \Pi_2^N) + (\Pi_2^F - \Pi_2^N)),$$

$$q^* = (\Pi_1^L - \Pi_1^N) / ((\Pi_1^L - \Pi_1^N) + (\Pi_1^F - \Pi_1^N))$$

З трьох рівноваг, (E, L) та (L, E) – стабільні, коли (p^*, q^*) нестабільна, для широкого класу динаміки. (9) означає, що одна рівноважна ситуація домінує за критерієм оптимальності ризику над іншою, якщо остання має більший привабливий сегмент змін (p, q).

З Лема 5, якщо $a \in [M_1; M_2]$, фірма 1, з високими витратами, користується перевагою другого ходу, а фірма 2 з низькими витратами має перевагу першого ходу. Таким чином (L, E) домінує над (E, L) за критерієм оптимальності Парето.

У випадку, коли параметр $a \in [M_2; \infty)$, жодна з рівноважних ситуацій не домінує за критерієм оптимальності Парето, оскільки обидві фірми матимуть перевагу другого ходу.

Лема 6:

Припустимо лінійність функцій попиту та витрат. Також нехай виконується Припущення (B). Тоді:

- (1) *(L, E)-домінує за критерієм оптимальності ризику (E, L) для всіх a .*
- (2) *(L, E) краще ситуації (E, L) за критерієм Парето-оптимальності, якщо $a \in [M_1; M_2]$, і не порівняти, якщо $a \in [M_2; \infty)$.*

(L, E) – приносить більший дохід лідеру якщо $a \in [M_1; M_2]$, і більший дохід послідовнику якщо

$a \in [M_3; \infty)$. де M_3 таке значення a , за якого $\Pi_1^F = \Pi_2^L$ або

$$M_3 = \frac{[4(2-b)(2+3b) - b^3(10-b) + 4\sqrt{2}(1+b)(2-b^2)^{\frac{3}{2}}](c_1 - c_2) + (4-b-3b^2)b^3c_2}{b^3(4+3b)}$$

Таким чином, використовуючи часову схему Гамільтона-Слатскі, підкріплену припущенням, що фірми зацікавлені в мінімізації ризиків пов'язаних з провалом координації при виборі часу. Отримуємо єдиний результат послідовної гри з більш ефективною фірмою як лідер і менш ефективно як послідовник. Підкріплення такого вибору через критерій Парето-оптимальності можливе лише з накладенням таких умов.

Для інтерпретації (4) частини буде корисно перефразувати її в термінах витрат: (L, E) призводить до більшого (меншого) прибутку лідера, якщо різниця витрат на одиницю продукції значна (незначна). Це говорить про те, що перевага другого ходу простежується на задньому плані, так як послідовник забезпечує отримання більшого прибутку, зменшуючи своє відставання у розмірі витрат.

Справжні припущення, спираються на стратегічну часову схему Гамільтона і Слатски (1990), а як і критерій оптимальності ризиків, як критерій вибору, і забезпечують прості і вичерпні пояснення появи стратегічного лідерства в цінах. Ігри з одночасними ходами і послідовними ходами в результаті генерують дуже близькі результати, що є надлишком доходу. А критерій оптимальності ризиків забезпечує цікавий спосіб призначення ролей фірмам, які розподіляють цей надлишок між собою, більшість якого переходить до фірми послідовника.

Важливо підкреслити, що критерій оптимальності ризиків застосовується тут до спрощеної гри $\tilde{G}$, а не до всієї розширеної двох рівнів гри. Так як повна розширена гра має нескінченно багато стратегій і безліч рівноважних ситуацій по Нешу.

ВИСНОВКИ

Вивчення моделей дуополії, зокрема моделі Курно і Бертрана, допомагає розкрити взаємодію двох гравців на ринку. Гравці можуть не одночасно робити свій хід. Аналіз можливостей отримання переваг першого або другого ходу визначає оптимальні стратегії для підприємств, зокрема враховуючи часові та конкурентні аспекти.

Розгляд диференційованих продуктів в дуополії підкреслює важливість унікальності товару для конкурентоспроможності. Розуміння, як продукти відрізняються, є ключовим елементом стратегічного планування.

Аналізуючи можливі переваги та стратегічну часову схему, підприємства можуть краще визначити оптимальний момент для введення нових продуктів чи зміни стратегії. Це дозволяє максимізувати ефективність рішень у змінюючому середовищі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.

1. Gal-Or [First Mover and Second Mover Advantage, International Economics review, 26, 649-653]
2. Dowrick (1986) [Von Shtackelberg and Cournot Duopoly: Choosing Roles. Rand Journal of Economics, 17, 251-256]
3. Amir 1999 [Shtackelberg versus Cournot Equilibrium, Games and Economics behavior, 26, 1-21]
4. Milgrom і Roberts (1990) [Milgrom і Roberts, 1990 та Vives, 2000, стор 151-154]
5. Rabah Amir і Anna Stepanova, [Second-Mover advantage and price leadership in Bertrand Duopoly, September 2002]
6. Amir, Grilo і Jin (1999), Games and Economics behavior Proposition 2.4
7. А.В. Крушевський, Теорія Ігор, Вища школа, Київ 1977.
8. Amir, R. (1995). Ендогенний Timing в 2-Players Game: A Counterexample. Games and Economics Behavior, 9, 234-237.
9. Eric van Damme, Sjaak Hurkens, Endogenous Price Leadership Games and Economics Behavior, 10, 2002.
10. Браніслав Л. Слатчев, Теорія Ігор: Домінування, Рівновага Неша та Симетрія, Каліфорнійський університет, Сан Дієго, 2007.

11. Mike Shor, Game Theory.net Як джерело для educators and students of game theory, 2001-2007.

12. Andrea Robbett, Jeffrey P. Carpenter, Game Theory and Behavior, The MIT Press, December 6, 2022.

13. Hans Peters, Game Theory: A Multi-Leveled Approach, Springer; Softcover reprint of the original 2nd ed. 2015 edition

ДОДАТОК А

Доведення лема 1.

Так як $\log \Pi_i(p_1, p_2) = \log(p_i - c_i) + \log D_i(p_1, p_2)$ з припущення (A2) випливає, що $\log \Pi_i$ - строгий супермодуляр (p_1, p_2) . Застосовуючи теорему Топкіса до цієї трансформованої функції виграшу, ми отримуємо, що будь-який вибір із реакційної відповідь кожної з фірм – незнижена функція за ціною конкурента. Отже, дуополія Бертрана є супермодулярною грою в даному випадку, і існування рівноваги Неша в чистих стратегіях випливає з теореми Тарскіса. Існування повної рівноваги за Штакельбергом для ігор G_1 і G_2 випливає з неперервності функцій виграшів та компактності множини стратегій.

Amir, Grilo and Jin [6] показали, що ціна Штакельберга вища за ціну Неша. Це випливає з наступного (не обмежуючи спільності, скажімо, для гри G_1). Нехай (p_1^S, p_2^S) пара цін, що асоціюються з довільною рівновагою Штакельберга гри G_1 та (p_1^N, p_2^N) – найбільша рівновага Бертрана, яка є Парето оптимальною рівновагою Бертрана [Теорема 7, Мілгрум і Робертс, 1990 [4]]. Тоді

$$\begin{aligned} (p_1 - A_1) D_1(p_1, p_2) &\geq (p_1 - A_1) D_1(p_1, p_2) \\ (p_1 - A_1) D_1(p_1, p_2) &\geq (p_1 - A_1) D_1(p_1, p_2) \end{aligned} \quad (*)$$

Перша нерівність, очевидно, випливає з того, що виграш лідера в цій грі не може бути гіршим, ніж його виграш Неша [Amir et al (1999), Lemma 4.1], а друга з нерівності рівноваги Неша. Оскільки $D_1(p_1^S, \cdot)$ – строго зростає, з (*) випливає $p_2^S \geq p_2^N$. Зважаючи на те, що обидві пари (p_1^S, p_2^S) і (p_1^N, p_2^N) лежать на r_2 і кожен вибір r_2 не зменшується, $p_2^S \geq p_2^N$ мається на увазі, що $p_1^S \geq p_1^N$.

Враховуючи той факт, що кожен вибір з r_1 і r_2 не менший функції за ціною конкурента, і те, що ціна Штакельберга вища за ціну Неша, існують такі можливі зв'язки, що пов'язують рівноважні ціни в іграх G_1 і G_2 :

$$(1') \quad p_2^L \geq p_2^F \text{ и } p_1^L \geq p_1^F$$

$$(2') \quad p_2^L \geq p_2^F \text{ и } p_1^L \leq p_1^F$$

$$(3') \quad p_2^L \leq p_2^F \text{ и } p_1^L \geq p_1^F.$$

Проаналізуємо кожний випадок окремо.

(1') Розглянемо такі нерівності, що пов'язують ігри G_1 і G_2 :

$$\begin{aligned} (p_1 - A_1) D_1(p_1, p_2) &\geq (p_1 - A_1) D_1(p_1^S, p_2) \\ (p_1 - A_1) D_1(p_1, p_2) &\geq (p_1 - A_1) D_1(p_1, p_2^S) \end{aligned} \quad (**)$$

де перша нерівність для фірми 1 випливає з означення рівноваги Штакельберга, а друга нерівність з того, що $p_2^L \geq p_2^F$ і $D_1(p_1^S, \cdot)$ – зростаюча функція. Отримуємо, що дохід фірми 1 вищий у грі G_2 ніж у грі G_1 , отже, фірма 1 віддасть перевагу G_2 . Аналогічні міркування показують, що фірма 2 віддаватиме перевагу грі G_1 перед грою G_2 .

(2') Тут, аргументи наведені для випадку (1') можуть бути застосовані тільки для фірми 1, і ми можемо зробити висновок, що фірма 1 вважає за краще бути послідовником.

(3') Тут, аргументи наведені для випадку (1'), можуть бути застосовані тільки для фірми 2, і ми можемо тільки зробити висновок, що фірма 2 вважає за краще бути послідовником.

Таким чином ми встановили, що завжди існує одна фірма, яка віддає перевагу стратегії послідовника.

Доведення Лема 2.

З теореми Топкінса ми знаємо, що всі вибори з реакційних відповідей обох фірм не зростають. Існування рівноваги для всіх трьох ігор впливає з тих самих аргументів, що і в доведенні Лема 1. (після накладання умови супермодулярності на гру, якщо одна з фірм, скажімо 1, вирішить вибрати ціну - p_1 (замість p_1^S) - див. Мілгрум і Робертс (1990))

Amir, Grilo and Jin [6, Лема 4.1] показали, що при виконанні умови (A2) або (A3), обидві фірми віддають перевагу виграшу лідера Штакельберга

найбільшому рівноважному виграшу Бертрана. Також Amir, Grilo and Jin [6, Пропозиція 2.5] показали, що обидві фірми віддають перевагу найменшому рівноважному виграшу Бертрана (з найменшою ціною, див. Мілгрум і Робертс, 1990) виграшу послідовника Штакельберга. Поєднуючи ці два результати разом ми отримуємо, що обидва гравці мають перевагу першого ходу.

Доведення Лема 3:

Існування рівноваг всім трьох ігор впливає з припущення. Ми знаємо з теореми Топкіса, що будь-який вибір із r_1 не зростає, коли як будь-який вибір із r_2 не зменшується. [Amir, Grilo and Jin (1999), Лемма 4.1] показали, що фірма 1 віддає перевагу виграшу лідера Штакельберга рівноважному виграшу Бертрана, тобто. гру G_1 гри G . Amir, Grilo and Jin (1999), (Припущення 2.6] показали, що фірма 1 віддасть перевагу рівноважному виграшу Бертрана, виграшу послідовника Штакельберга, тобто, гри G . Отже, фірма 1 буде грати гру G_1 , а не гру G_2 , або іншими словами має перевагу першого ходу.

Доведення Лема 4.

Із завдання кращої відповіді фірми i :

$$\max_{p_i} (p_i - c_i)(a - p_i + bp_j)$$

$i, j=1, 2, i \neq j$ ми маємо її криву реакції $r_i(p_j) = \frac{a+bp_j+c_i}{2}$, де $p_j \in P_j$.

Пара цін рівноважних по Бертрану-Нешу (5) – утворюють унікальну точку, де обидві криві реакції перетинаються. Щоб досягти точки Штакельберга у гри G_i , фірма i максимізує свій прибуток уздовж r_j , тобто її objective (оптимальна) функція

$$\Pi_i[p_i, r_j(p_i)] = (p_i - c_i)[a - p_i + b\frac{a+bp_i+c_j}{2}]$$

Це призводить до ціни, визначеної в пункті (6). Ціну рівноважну за Штакельбергом для послідовника p_j^F отримуємо підстановкою p_i^L у r_j . Розв'язи всіх трьох ігор є внутрішніми, з припущення (B).

Доведення Лемма 5.

Наші аргументи тут ґрунтуються на простому обчисленні. Розглянемо

$$\Pi_2^L - \Pi_2^F = 0 \quad (\text{A},1)$$

$$\Pi_1^L - \Pi_1^F = 0, \quad (\text{A},2)$$

де Π_2^L, Π_2^F (Π_1^L, Π_1^F) рівноважні прибутки фірми 2 (фірми 1) в іграх G_2, G_1 (G_1, G_2) відповідно. Рівняння (7) забезпечують вирази всім чотирьох рівнів прибутку. Можна легко помітити, що (A,1) – квадратне рівняння щодо параметра a . Отже, рівняння має два розв’язки у термінах a . Але менший корінь не належить до інтервалу допустимих значень для a , і тому не розглядається. Тільки найбільший корінь, який дається (8) і позначений M_2 є дійсним розв’язком (A,1). Так як (A,1) – квадратне рівняння щодо a при a^2 стоїть негативний коефіцієнт, з цього випливає, що

$$\Pi_2^L - \Pi_2^F \geq 0$$

тоді і тільки тоді, коли $a \in [M_1, M_2]$.

Щодо (10), можна легко показати, використовуючи аргументи, аналогічні вищезгаданому, при $c_1 > c_2$ і обмеження на параметри (B), що ми завжди маємо $\Pi_1^L \leq \Pi_1^F$, тобто фірма 1 буде завжди користуватися перевагою другого ходу.

Покажемо, що можливість переваги першого ходу фірми 2, $M_2 - M_1$, збільшується з різницею витрат $c_1 - c_2$. Прямі обчислення призводять до

$$\frac{\partial(M_2 - M_1)}{\partial c_1} = -\frac{\partial(M_2 - M_1)}{\partial c_2} = \frac{(1+b)(2b^2 - 4 + (2+b)\sqrt{4-2b^2})}{(2+b)(4+3b)} > 0 \blacksquare$$

Доведення Лема 6.

(а) для того, щоб довести, що (L, E) домінує за критерієм оптимальності ризиків рівновага (E, L) або (див. (6))

$$\Delta = (\Pi_1^L - \Pi_1^N)(\Pi_2^F - \Pi_2^N) - (\Pi_1^F - \Pi_1^N)(\Pi_2^L - \Pi_2^N) < 0$$

підставимо (7), отримаємо $\Delta = \frac{N}{D}$, де

$$N = b^7 (b+1)(c_1 - c_2)[2a + (b-1)(c_1 + c_2)] \times \\ \times [2a^2(b^3 - 8b - 8) + 2a(b^4 - b^3 - 8b^2 + 8)(c_1 + c_2) + b(b^4 - 7b^2 + 8)(c_1^2 + c_2^2) - 4c_1c_2(b^2 - 2)^2],$$

$$D = 128((b^2 - 4)^2 (2 - b^2))^3$$

Легко перевірити, що $D > 0$ оскільки $0 < b < 1$. Проаналізуємо знак кожного доданку N , при припущенні $0 < b < 1$ і $c_1 > c_2$. Використовуючи умову (В), легко бачити, що $2a + (b-1)(c_1 + c_2) \geq 0$ для всіх допустимих a . Тепер визначимо знак виразу

$$(2a^2(b^3 - 8b - 8) + 2a(b^4 - b^3 - 8b^2 + 8)(c_1 + c_2) + b(b^4 - 7b^2 + 8)(c_1^2 + c_2^2) - 4c_1c_2(b^2 - 2)^2) \quad (A,3)$$

прирівняємо його до нуля і дозволимо щодо a (отримаємо два корені). Вираз, що розглядається, буде негативним, якщо a прийматиме значення більше ніж

$$\hat{a} = - [(c_1 + c_2)(b^4 - b^3 - 8b^2 + 8) + (b+1)(c_1 - c_2) \sqrt{(4 - b^2)(b^4 - 12b^2 + 16)}] / 2(b^3 - 8b - 8)$$

Порівнюючи $\hat{a}$ і M_1 легко бачити, що $\hat{a} < M_1$ таким чином вираз (A,3) негативно для всіх допустимих значень a .

Отже, $\Delta = \frac{N}{D}$ негативно всім допустимих значень a . І це означає, що рівновага (L, E) домінує рівноважну ситуацію (E, L) за критерієм оптимальності ризиків.

(b) Перша частина безпосередньо впливає з Лемми 5. Дійсно, ми вже показали, що рівновага (L, E) домінує рівновагу (E, L) за критерієм

Парето-оптимальності, при $a \in [M_1, M_2]$, тобто. $\Pi_1^F > \Pi_1^L$ та $\Pi_2^L > \Pi_2^F$. А

якщо $a \in [M_2, \infty)$, обидві фірми користуються перевагою другого ходу, тобто.

$\Pi_1^F > \Pi_1^L$ та $\Pi_2^F > \Pi_2^L$. Отже, жодна із рівноважних ситуацій не домінує іншу за критерієм Парето-оптимальності. Щодо порівняння доходів, його отримуємо шляхом простих обчислень використовуючи (7): $\Pi_2^L > (<) \Pi_1^F$ якщо $a \in [M_1, M_3]$ ($a \in [M_3, \infty)$).

ДОДАТОК В

Функція $F [0, \infty)^2 \rightarrow \mathbf{R}$ називається строго супермодулярною (сабмодулярною) якщо

$$F(x_1, y_1) - F(x_2, y_1) > (<) F(x_1, y_2) - F(x_2, y_2)$$

для всіх $x_1 > x_2$ $y_1 > y_2$. Функція F лог-супермодулярна, якщо $\log F$ – строгий супермодуляр.

Супермодулярність і сабмодулярність має повну характеристику термінами знака частних похідних у разі гладких цільових функцій (Топкінс, 1978). Нехай F двічі неперервно диференційовна функція.

Якщо
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \geq (\leq) 0.$$

для $\forall x, y$, тоді F - строго супермодулярна (сабмодулярна). Ця умова є необхідною та достатньою.

Теорема Топкінса (1978) про монотонність, що часто використовується в цій роботі, формулюється наступним чином:

Теорема А1: Будь-яка функція $x^*(y) \in \operatorname{argmax}_{x \geq 0} F(x, y)$ є неспадною (незростаючою) за y якщо F – строгий супермодуляр (строгий сабмодуляр) за (x, y) .

Ця теорема у роботі застосовується до $\log$ функції виграшу кожної фірми.

Гра в нормальній формі з компактними дійсним множинами стратегій є супермодулярною (лог-супермодулярною), якщо виграші є супермодулярами (лог-супермодулярами). Гра двох гравців із виграшами є строгим сабмодуляром (лог-сабмодуляром) стає супермодулярною (лог-супермодулярною) грою, якщо ми змінюємо порядок у множині стратегій одного з гравців.

У роботі ми також спираємося на пов'язану теорему Тарскі (1955) про нерухому точку, яка встановлює, що супермодулярні ігри мають рівновагу в чистих стратегіях, оскільки кожен вибір з найкращих відповідей не зменшується.

Теорема A2: Нехай K_1, K_2 – компактні інтервали і $f: K_1 \times K_2 \rightarrow K_1 \times K_2$ неспадна. Тоді множина нерухомих точок f не пуста і містить найбільший та найменший елемент.

Означення: Під-гри

Підмножина або частина послідовної гри, що починається в деякому вузлі (вершині), такому, що кожен гравець знає всі дії гравців, які робили свій хід до нього в кожній точці.

Означення: (опуклості, увігнутості)

Ігри з опуклими неперервними функціями виграшів, які називаються часто ядром, називаються опуклими.

Неперервна і строго опукла функція f на замкнутому інтервалі набуває мінімального значення лише в одній точці інтервалу.