

УДК 517.5

Е. Ю. Леончик

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

ОБ УСЛОВИИ МАКЕНХАУПТА В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Леончик Є. Ю. Про умову Макенхаупта у багатомірному випадку. У роботі знайдені точні показники сумовності для функцій, що задовольняють узагальнену умову Макенхаупта A_1 по прямокутникам у багатомірному випадку.

Ключові слова: умова Макенхаупта, рівновимірні переставлення.

Леончик Е. Ю. Об условии Макенхаупта в многомерном случае. В работе найдены точные показатели суммируемости для функций, удовлетворяющих обобщенному условию Макенхаупта A_1 по прямоугольникам в многомерном случае.

Ключевые слова: условие Макенхаупта, равноизмеримые перестановки.

Leonchik Y. Y. On the Muckenhoupt condition in the multidimensional case. In this paper the exact indexes of integrability for the functions satisfying generalized Muckenhoupt's condition A_1 on rectangles are obtained in the multidimensional case.

Key words: Muckenhoupt's condition, equimeasurable rearrangement.

ВВЕДЕНИЕ. Пусть положительная суммируемая функция f отделена от нуля на кубе $Q_0 \subset \mathbb{R}^d$, то есть $\text{ess inf}_{x \in Q_0} f(x) > 0$. Здесь и в дальнейшем рассматриваются только такие кубы и многомерные прямоугольники, стороны которых параллельны координатным осям. Говорят, что f удовлетворяет условию Макенхаупта A_1 при некотором $C > 1$ ($f \in A_1(C)$), если для всех кубов $Q \subset Q_0$ выполнено следующее неравенство [1]:

$$f_Q \equiv \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y) dy \leq C \text{ess inf}_{x \in Q} f(x), \quad (1)$$

где через $|\cdot|$ обозначена мера Лебега. Это условие играет важную роль в теории весовых пространств и теории квазиконформных отображений.

Одно из основных свойств функций из A_1 состоит в том, что найдется такое $p_0 = p_0(C, d) > 1$, для которого $f \in L^p(Q_0)$ при любом $p < p_0$ [1]. Другими словами, функция из A_1 допускает повышение показателя суммируемости. В работе [2] в одномерном случае установлено значение постоянной $p_0 = C(C-1)^{-1}$, которое, вообще говоря, не может быть увеличено. В случае $d \geq 2$ вопрос о точном значении p_0 остается открытым.

Через $A_1^*(C)$ обозначается класс функций аналогичный $A_1(C)$, но выполнение условия (1) требуется по всем прямоугольникам из Q_0 , а не только по кубам. Очевидно, что $A_1^*(C) = A_1(C)$ при $d = 1$ и $A_1^*(C) \subset A_1(C)$ при $d \geq 2$.

В данной работе получена поточечная оценка невозрастающей равноизмеримой перестановки функции $f \in A_1^*$. Из этой оценки вытекает, что при каждом $d \geq 1$ функция $f \in A_1^*(C)$ будет суммируема в любой степени $p < C(C-1)^{-1}$. Рассмотрен также вопрос о повышении показателя суммируемости для функций, удовлетворяющих следующим условиям ($f \in A_q^*(C)$):

$$\left(\frac{1}{|P|} \int_P f^q(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \text{ess inf}_{x \in P} f(x); \quad q \neq 0; \quad (2)$$

$$\exp \left(\frac{1}{|P|} \int_P \ln f(x) dx \right) \leq C \operatorname{ess\,inf}_{x \in P} f(x); \quad q = 0, \quad (3)$$

для всех прямоугольников $P \subset Q_0$. Очевидно, что эти условия существенны только для $C > 1$.

Автор глубоко благодарен А. А. Кореновскому за постановку задачи и плодотворные обсуждения.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ. Пусть $|Q_0| = 1$. Невозрастающая перестановка f^* равноизмерима с функцией f может быть определена таким равенством [3, с. 333]:

$$|\{x \in Q_0 : f(x) > \lambda\}| = |\{t \in [0; 1] : f^*(t) > \lambda\}|, \quad \lambda > 0.$$

1. Случай $q > 0$. Сперва рассмотрим $q = 1$.

Теорема 1. Пусть функция $f \in A_1^*(C)$. Тогда

$$f^*(t) \leq f_{Q_0} \cdot t^{-\frac{1}{\beta}}; \quad 0 < t \leq 1, \quad (4)$$

где $\beta = C(C - 1)^{-1}$, причем значение β , вообще говоря, увеличить нельзя.

Доказательство теоремы 1 опирается на следующее свойство равноизмеримых перестановок.

Лемма 1. Пусть функция $f \in A_1^*(C)$. Тогда

$$f^{**}(t) \equiv (f^*)_{[0; t]} \leq C f^*(t), \quad 0 < t < 1. \quad (5)$$

В свою очередь для доказательства этого утверждения будем применять вариант так называемой леммы Ф. Рисса “о восходящем солнце” для случая многомерных прямоугольников.

Лемма 2. [4] Пусть $f \in L(Q_0)$ и число $\alpha \geq f_{Q_0}$. Тогда найдется не более, чем счетный набор прямоугольников $P_k \subset Q_0$ ($k = 1, 2, \dots$) с попарно непересекающимися внутренностями и таких, что

$$f_{P_k} = \alpha; \quad k = 1, 2, \dots; \quad (6)$$

$$f(x) \leq \alpha \quad \text{для почти всех } x \in Q_0 \setminus (\cup_{k \geq 1} P_k). \quad (7)$$

Доказательство леммы 1. Зафиксируем $\lambda \in (f^*(1); f^*(+0))$ и обозначим $E_\lambda = \{x \in Q_0 : f(x) > \lambda\}$. Для произвольного $\varepsilon \in (0; f_{E_\lambda} - f_{Q_0})$ положим

$$\alpha = f_{E_\lambda} - \varepsilon > f_{Q_0}. \quad (8)$$

Применяя лемму 2, построим многомерные прямоугольники $\{P_k\}$ с попарно непересекающимися внутренностями и свойствами (6), (7). Сперва докажем, что $|G \setminus E_\lambda| > 0$, где $G = \cup_{k \geq 1} P_k$. Для этого предположим противное, т. е. $G \subset E_\lambda$ с точностью до множества меры нуль. Тогда, учитывая (6) и (7), получаем

$$\int_{E_\lambda} f(x) dx = \int_{E_\lambda \setminus G} f(x) dx + \int_G f(x) dx \leq \alpha |E_\lambda \setminus G| + \alpha |G| = \alpha |E_\lambda|$$

или, что то же самое, $f_{E_\lambda} \leq \alpha$. Получили противоречие с (8). Теперь, поскольку $|G \setminus E_\lambda| > 0$, то найдется такой номер N , что $|P_N \setminus E_\lambda| > 0$, и, следовательно, $\operatorname{ess\,inf}_{x \in P_N} f(x) \leq \lambda$. Таким образом, пользуясь (6) и (8), находим:

$$f_{E_\lambda} = \alpha + \varepsilon = f_{P_N} + \varepsilon \leq C \operatorname{ess\,inf}_{x \in P_N} f(x) + \varepsilon \leq C\lambda + \varepsilon.$$

Значит, в силу произвольности $\varepsilon > 0$, имеем $f_{E_\lambda} \leq C\lambda$. Отсюда для любого $t \in (0; 1)$ при $\lambda = f^*(t)$ получаем:

$$f^{**}(t) \leq f_{E_\lambda} \leq C\lambda = Cf^*(t),$$

поскольку $|E_\lambda| \leq t$. Лемма доказана.

Из леммы 1 сразу вытекает

Следствие 1. Если функция $f \in A_1^*(C)$, то $f^* \in A_1^*(C)$.

Доказательство теоремы 1. Функция f^{**} абсолютно непрерывна на $[\varepsilon; 1]$ при любом $\varepsilon \in (0; 1)$. Следовательно, для почти всех $t \in (0; 1)$ справедливо равенство

$$(f^{**})'(t) = -\frac{1}{t^2} \int_0^t f^*(s) ds + \frac{1}{t} f^*(t) = -\frac{f^{**}(t) - f^*(t)}{t}. \quad (9)$$

Далее, сделав замену переменной [5, с. 320], имеем

$$-\int_t^1 \frac{(f^{**})'(s)}{f^{**}(s)} ds = \int_{f^{**}(1)}^{f^{**}(t)} \frac{du}{u} = \ln \frac{f^{**}(t)}{f^{**}(1)},$$

или, что тоже самое,

$$f^{**}(t) = f^{**}(1) \exp \left(-\int_t^1 \frac{(f^{**})'(s)}{f^{**}(s)} ds \right).$$

Используя это равенство и (9), находим:

$$f^{**}(t) = f^{**}(1) \exp \left(\int_t^1 \frac{f^{**}(s) - f^*(s)}{f^{**}(s)} \cdot \frac{ds}{s} \right); \quad 0 < t \leq 1. \quad (10)$$

Отсюда, учитывая неравенство (5), получаем $f^{**}(t) \leq f^{**}(1) \cdot t^{(1-C)C^{-1}}$. А поскольку $f^*(t) \leq f^{**}(t)$ и $f^{**}(1) = f_{Q_0}$, то имеем (4).

Покажем, что постоянная β в неравенстве (4), вообще говоря, не может быть увеличена. Для этого положим $f_0(x) = x^{-s}$; $0 < x \leq 1$; $(0 < s < 1)$. Тогда $f_0 = (f_0)^*$; $f_0 \in A_1^*((1-s)^{-1})$ и $\beta = s^{-1}$. Отсюда следует, что значение β нельзя увеличить. Теорема доказана.

Из неравенства (4) и равноизмеримости функций f и f^* мгновенно вытекает

Следствие 2. Пусть функция $f \in A_1^*(C)$. Тогда $f \in L^p(Q_0)$ при всех $p < C(C-1)^{-1}$.

Теперь легко установить точный показатель суммируемости в случае произвольного $q > 0$.

Теорема 2. Пусть функция $f \in A_q^*(C)$, $q > 0$. Тогда $f \in L^p(Q_0)$ при всех $p < qC^q(C^q - 1)^{-1}$.

Доказательство. Достаточно заметить, что при любом $q > 0$ из (2) мгновенно имеем $f^q \in A_1^*(C^q)$.

2. Случай $q = 0$. В этом параграфе рассмотрим функцию f , которая удовлетворяет условию (3). Сперва дополнительно предположим, что $f \in A_r(C)$ при некотором $r > 0$. Тогда $f \in A_q(C)$ для всех $q < r$ и, в силу теоремы 2, $f \in L^p(Q_0)$ при любом $p < \lim_{q \rightarrow +0} qC^q(C^q - 1)^{-1} = \ln^{-1} C$. Без дополнительного ограничения этот результат содержится в следующем утверждении.

Теорема 3. Пусть функция $f \in A_0^*(C)$. Тогда $f \in L^p(Q_0)$ при всех $p < \ln^{-1} C$, причем значение $\ln^{-1} C > 0$, вообще говоря, увеличить нельзя.

Доказательство. Обозначим $g = \ln f$ и $C_1 = \ln C$. Для любого прямоугольника $P \subset Q_0$ перепишем условие (3) в виде:

$$g_P - \operatorname{ess\,inf}_{x \in P} g(x) \leq C_1.$$

Это означает, что g — функция с ограниченным нижним колебанием [6]. Для таких функций имеет место следующее неравенство [7]:

$$g^*(t) - g_{Q_0} \leq C_1 \ln \frac{1}{t}, \quad 0 < t \leq 1.$$

А поскольку $g^* = (\ln f)^* = \ln f^*$, то

$$f^*(t) \leq \exp \left(\frac{1}{|Q_0|} \int_{Q_0} \ln f(x) dx \right) \cdot t^{-\ln C}.$$

Легко проверить, что это неравенство обращается в равенство для функции $f(x) = x^{-s} \in A_0(e^s)$, $s > 0$. Теорема доказана.

3. Случай $q < 0$. Как оказывается, в этом случае условие (2) гарантирует суммируемость функции в некоторой положительной степени.

Теорема 4. Пусть функция $f \in A_q^*(C)$, $q < 0$. Тогда $f \in L^p(Q_0)$ при всех $p < qC^q(C^q - 1)^{-1}$, причем значение $qC^q(C^q - 1)^{-1} > 0$, вообще говоря, увеличить нельзя.

Доказательство. Обозначим $g = f^q$, $C_1 = C^{-q}$ и перепишем условие (2) в таком виде:

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in P} g(x) \leq C_1 g_P.$$

Здесь нам понадобится вариант леммы 2 [4] для функции $g \in L(Q_0)$ и числа $\alpha \leq g_{Q_0}$, в котором (7) изменено на

$$g(x) \geq \alpha \quad \text{для почти всех } x \in Q_0 \setminus (\cup_{k \geq 1} P_k).$$

Рассмотрим множество $F_\lambda = \{x \in Q_0 : g(x) < \lambda\}$ для $\lambda \in (g^*(1); g^*(0))$ и число $\alpha = g_{F_\lambda} + \varepsilon < g_{Q_0}$ для $\varepsilon \in (0; g_{Q_0} - g_{F_\lambda})$. Аналогично доказательству неравенства (5) можно получить, что $g^*(t) \leq C_1 g_{**}(t) \equiv C_1 (g^*)_{[t; 1]}$.

Далее, для почти всех $t \in (0; 1)$ имеем:

$$(g_{**})'(t) = \frac{g_{**}(t) - g^*(t)}{1 - t}.$$

Отсюда, подобно (10), находим:

$$g_{**}(t) = g_{**}(0) \exp \left(\int_0^t \frac{g_{**}(s) - g^*(s)}{g_{**}(s)} \cdot \frac{ds}{1 - s} \right), \quad 0 < t \leq 1.$$

Значит, $g^*(t) \geq g_{**}(0)(1 - t)^{C_1 - 1}$ и $g^* \in L^p([0; 1])$ для любого $p > -(C_1 - 1)^{-1}$. Таким образом, в силу равноизмеримости функций f^q и g^* , получаем, что $f \in L^p(Q_0)$ при всех $p < qC^q(C^q - 1)^{-1}$.

Осталось показать, что значение $qC^q(C^q - 1)^{-1}$, вообще говоря, увеличить нельзя. Для этого положим $f_0(x) = x^{-s}$; $0 < x \leq 1$; ($s > 0$). Тогда $f \in A_q^*((1 - sq)^{-1/q})$ и $qC^q(C^q - 1)^{-1} = s^{-1}$. Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. В работе найдены точные показатели суммируемости для функций, удовлетворяющих обобщенному условию Макенхаупта по прямоугольникам в многомерном случае. А именно, доказано, что из (2) и (3) вытекает $f \in L^p(Q_0)$ для всех $p < qC^q(C^q - 1)^{-1}$.

1. **Muckenhoupt B.** Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function // Trans. Amer. Math. Soc. – 1972. – Vol. 165. – P. 207–226.
2. **Bojarski B., Sbordone C., Wik I.** The Muckenhoupt class $A_1(\mathbb{R})$ // Studia Math. – 1992. – Vol. 101 (2). – P. 155–163.
3. **Харди Г.Г., Литтлвуд Д.Е., Полиа Г.** Неравенства. – М.: Гос. изд. ин. лит., 1948. – 456 с.
4. **Korenovskyy A.A., Lerner A.K., Stokolos A.M.** On a multidimensional form of F. Riesz's "rising sun" lemma. Proc. Amer. Math. Soc. – 133(2005) – № 5. – P. 1437–1440.
5. **Валле–Пуссен Ш.Ж.** Курс анализа бесконечно малых, Т.1. – П.: Научное изд-во Петроград, 1922. – 488 с.
6. **Coifman R. R., Rochberg R.** Another characterization of BMO // Proc. Amer. Math. Soc. – 1980. – Vol. 79. – P. 249–254.
7. **Леончик Е.Ю., Малаксиано Н.А.** Оценки нижних колебаний равноизмеримых перестановок // Вісник Днепр. ун-ту. Математика. – 2005. – вип. 10, № 12. – С. 58–64.

Получена 8.06.2006