Вісник Одеськ. держ. ун-ту. — 2000. — Т. 5, вип. 3. Фіз.-мат. науки. — С. 62–68.

УДК 519.677

В. Г. Голушков
Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова

МЕТОД ШТРАФОВ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ НЕПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

Рекомендовано до друку науковим семінаром
"Метод скінченних елементів та його застосування" ОНУ 21.09.2000

Побудовано схему змішаного методу скінченних елементів для задач про деформацію непологих оболонок з лінійною комбінацією головних та неголовних крайових умов. Коефіцієнти лінійної комбінації можуть бути штрафними функціями, що забезпечує апроксимацію головних типів крайових умов. Доведено умову слабкої еліптичності. На основі цієї умови доведено існування та одинина скінченноелементного розв'язку, а також збігання схеми.

Построена схема смешанного метода конечных элементов для задач о деформации непологих оболочек с линейной комбинацией главных и естественных краевых условий. Коэффициенты линейной комбинации могут быть штрафными функциями, что обеспечивает аппроксимацию основных типов краевых условий. Доказано условие слабой эллиптичности. На основе этого условия доказано существование и единственность конечно-элементного решения, а также сходимость схемы.

The scheme of the mixed finite element method for problems of deformation of the non-shallow shells with a linear combination of main and natural boundary conditions is constructed. The coefficients of linear combination can be penalty functions ensuring the approximation of main types of boundary conditions. The condition of the weak ellipticity is given. The existence and uniqueness of finite element solutions proceeds from this condition. The convergence of the scheme is analyzed.

Введение. Рассматривается схема смешанного метода конечных элементов (СМКЭ) для задачи о деформации непологих оболочек с линейной комбинацией главных и естественных краевых условий. Такой вид краевых условий снимает дополнительные требования к пространству допустимых перемещений. Это позволяет применить СМКЭ к задаче расчёта оболочки, представленной в виде нескольких оболочек со своим описанием геометрии, пространства допустимых перемещений, пространства конечных элементов (КЭ), на стыках которых заданы условия непрерывности перемещений и равенства сил. Таким образом, снимаются трудности в описании геометрии оболочек, в выборе пространств КЭ, в задачах расчёта оболочечных конструкций и т.д. При этом коэффициенты линейной комбинации могут выступать как штрафные функции для аппроксимации главных или естественных краевых условий, что важно в алгоритмической реализации. Однако известно [1], что штрафные функции снижают порядок сходимости вариационно-разностных методов. В данной статье строится схема СМКЭ с таким выбором пространств КЭ, чтобы интерполяционные многочлены Джонсона, Фалка и Осборна [2] позволили получить неулучшаемые по порядку оценки погрешности конечно-элементного решения.

1. Вариационная формулировка задачи. Пусть тонкая оболочка S в трёхмерном евклидовом пространстве E^3 есть образ замкнутой области $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega \subset E^2$ при отображении $r = r(x)$ с криволинейными координатами $x = \left(x^1, x^2\right)$ срединной поверхности. Рассмотрим модель Новожилова – Койтера [3], в которой тензор перемещений $u = \{u_i\}_{i=1}^3$ удовлетворяет системе линейных дифференциальных уравнений со следующими краевыми условиями на $\partial\Omega$

$$\alpha_i u_i + N^i(u) = 0, \qquad 1 \le i \le 3 \tag{1.1}$$

$$\alpha_4 u_{3,n} + M_n(\rho(u)) = 0 \tag{1.2}$$

$$\alpha_{5j} u_3(S_j) + M_{nt}(\rho(u))\Big|_{S_j^-}^{S_j^+} = 0,\ 1 \le j \le J, \tag{1.3}$$

где $N^i(u)$ – компоненты тензора обобщённых сил на $\partial\Omega$; $M_n(\rho(u))$ – нормальный момент; $M_{nt}(\rho(u))$ – момент кручения; $\rho(u)$ – тензор изгибной деформации [2]; $(\bullet)\Big|_{S_j^-}^{S_j^+}$ – скачки функции в угловых точках S_j границы $\partial\Omega$, $1 \le j \le J$; $u_{3,n}$ – производная нормальной компоненты перемещения по нормали к границе оболочки в касательной плоскости; $\alpha_i, \alpha_4 \ge 0$ – коэффициенты, являющиеся кусочно-гладкими на $\partial\Omega$ функциями; α_{5j} – скаляр; J – количество угловых точек области. Здесь для простоты рассматриваются однородные краевые условия. По умолчанию принимаются соглашения тензорного исчисления.

Основная вариационная формулировка задачи: найти $u \in V(\Omega) = \left(H^2(\Omega)\right)^2 \times H^3(\Omega)$, такую что

$$a(\rho(u), \rho(v)) + c(u, v) + d(u, v) = q(v), \forall v \in V, \tag{1.4}$$

где $a(\bullet,\bullet)$ и $c(\bullet,\bullet)$ – билинейные формы изгибной и мембранной деформации, определённые на $M \times M$; $M = (L_2(\Omega))^3$; $q(v) \in V$ – линейная форма распределённой нагрузки; V' – пространство двойственное к V;

$$d(u,v) = \sum_{i=1}^{3} \int_{\partial\Omega} \alpha_i v_i u_i \, dx + \int_{\partial\Omega} \alpha_4 v_{3,n} u_{3,n} \, dx + \sum_{j=1}^{J} \alpha_{5j} v_3(S_j) u_3(S_j)$$

В [4] показано, что

$$a(\rho(u), \rho(u)) \ge A \| \rho(u) \|_M^2,\ c(u,v) \ge B \| \gamma(u) \|_M^2, \tag{1.5}$$

где через A, B – будут обозначаться разные константы, $\gamma(u)$ – тензор мембранной деформации. В [5] доказано условие сильной эллиптичности для главных краевых условий. Обобщением является

$$a(\rho(u), \rho(u)) + c(u,u) + d(u,u) \ge A \| u \|_V^2. \tag{1.6}$$

В [5] доказано существование и единственность решения задачи (1.4).

Теорема 1. *Пусть задана последовательность* $\{\alpha_i^k\}_{i=1,k=1}^{4\ \ \infty}$, *элементы которой на части границы* $\partial\Omega_0$ *ненулевой меры положительны и* $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_i^k \to \infty$ *на* $\partial\Omega_0$. *Тогда последовательность решений* $\{u^k\}_{k=1}^{\infty}$ *задачи* (1.4) *для каждого набора* $\{\alpha_i^k\}_{i=1}^4$ *сходится к решению* u^0 *задачи с однородными краевыми условиями Дирихле.*

Доказательство. Из (1.4) – (1.6) и непрерывности билинейных и линейной форм следует существование константы $A > 0$, независящей от k, такой что $\left\| u^k \right\|_V \le A \| q \|_{V'}$, где $\| q \|_{V'}$ – норма правой части в (1.4). Следовательно, из ограниченной последовательности $\{u^k\}_{k=1}^{\infty}$ можно выделить подпоследовательность, обозначаемую также, которая слабо сходится в $V(\Omega)$ к пределу $u^* \in V(\Omega)$.

Покажем, что $u^* = u^0$. Рассмотрим i-ую компоненту решения. Из (1.4) – (1.6) и непрерывности билинейных форм следует, что $\int\limits_{\partial\Omega}\left(u_i^k\right)^2 dx \le A\|q\|_{V'}^2 \Big/ \min\limits_{x\in\partial\Omega_0}\alpha_i^k$.

Следовательно, $u_i^* = 0$ на $\partial\Omega_0$. Аналогично, $u_{3,n} = 0$ на $\partial\Omega_0$. Тогда u^* удовлетворяет однородным условиям Дирихле. В силу единственности решения задачи $u^* = u^0$. Осталось показать, что последовательность $\left\{u^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ сильно сходится к u^0. Из (1.4) – (1.6) имеем

$$0 \le \left\|u^k - u^0\right\|_V^2 \le A\left(a\left(\rho\left(u^k - u^0\right), \rho\left(u^k - u^0\right)\right) + c\left(u^k - u^0, u^k - u^0\right) + d\left(u^k - u^0, u^k - u^0\right)\right) =$$
$$= A\left(q\left(u^k\right) + q\left(u^0\right) - 2a\left(\rho\left(u^0\right), \rho\left(u^k\right)\right) - 2c\left(u^0, u^k\right)\right).$$

Так как $d\left(u^k, u^0\right) = 0$, то переход к слабому пределу завершает доказательство теоремы.

Теорема 2. *Пусть для некоторой угловой точки* S_j *существует последовательность* $\left\{\alpha_{5j}^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ *и* $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_{5j}^k \to \infty$. *Тогда последовательность решений* $\left\{u^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ *сходится к решению u и* $u_3\left(S_j\right) = 0$.

Доказательство полностью повторяет доказательство теоремы 1, только следует использовать неравенство $\left(u_3^k\left(S_j\right)\right)^2 \le A\|q\|_{V'}^2 / \alpha_{5j}^k$, левая часть которого определена, т.к. $u_3^k\left(S_j\right) \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$, где $C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ – пространство непрерывных функций.

Теорема 2 допускает обобщения на случай произвольной точки $S_j \in \partial\Omega$, а это позволяет задавать в приложениях жёсткое закрепление в отдельных точках границы. Из теоремы 1 и 2 следует, что на стыке двух типов граничных условий (α_i терпят разрыв первого рода), поведение решения определяется большим предельным значением α_i.

Для построения смешанной вариационной формулировки предположим, что $\alpha_4 > 0$ на $\partial\Omega$. Тогда способ задания краевого условия на нормальный момент на $\partial\Omega$ устанавливает следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть задана последовательность* $\left\{\alpha_4^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ *и* $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_4^k = 0$. *Тогда последовательность решений* $\left\{u^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ *задачи* (1.4) *сходится к решению u и* $M_n\left(\rho(u)\right) = 0$ *на* $\partial\Omega$.

Доказательство. Последовательность $\left\{u^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена в V константой, не зависящей от k. Следовательно, существует подпоследовательность $\left\{u^k\right\}_{k=1}^{\infty}$, слабо сходящаяся к $u^* \in V$. Так как вариационное уравнение (1.4) для u^k отличается от вариационного уравнения (1.4) для u слагаемым $\int\limits_{\partial\Omega}\alpha_4^k u_{3,n}^k v_{3,n}\,dx$, то

$$a\left(\rho\left(u - u^k\right), \rho\left(u - u^*\right)\right) + c\left(u - u^k, u - u^*\right) + d\left(u - u^k, u - u^*\right) = \int\limits_{\partial\Omega}\alpha_4 u_{3,n}\left(u_{3,n} - u_{3,n}^*\right)dx.$$

Переходя теперь к слабому пределу и используя (1.6) получим $u^* = u$. Тогда в неравенстве

$$\left\|u-u^k\right\|^2_{V(\Omega)} \le A\left(a\left(\rho\left(u-u^k\right),\rho\left(u-u^k\right)\right)+c\left(u-u^k,u-u^k\right)+d\left(u-u^k,u-u^k\right)\right)=$$
$$=A\left(q\left(u^k\right)-q(u)+\int_{\partial\Omega}\alpha_4 u_{3,n}^2\,dx\right)$$

переходя к слабому пределу, получим требуемый результат. Теорема доказана.

2. Смешанная вариационная формулировка. На основе общих положений теории двойственности запишем смешанную вариационную формулировку задачи [6], в которой компоненты тензора изгибной деформации $\rho=\{\rho_{11},\rho_{22},\rho_{12}=\rho_{21}\}\in M$ будут новыми независимыми переменными: найти $(\rho,u)\in M\times V$, такие что

$$a(\rho,\mu)-a(\mu,\rho(u))=0,\ \forall\mu\in M, \tag{2.1}$$
$$a(\rho,\rho(v))+c(u,v)+d(u,v)=q(v),\ \forall v\in V, \tag{2.2}$$

где

$$a(\rho,\mu)=\int_\Omega m^{\alpha\beta}(\rho)\,\mu_{\alpha\beta}\sqrt{a}dx; \tag{2.3}$$
$$c(u,v)=\int_\Omega n^{\alpha\beta}(\gamma(u))\,\gamma_{\alpha\beta}(v)\sqrt{a}dx; \tag{2.4}$$
$$m^{\alpha\beta}(\rho)=\frac{1}{12}e^3E^{\alpha\beta\lambda\mu}\rho_{\lambda\mu};\ n^{\alpha\beta}(\gamma)=e\,E^{\alpha\beta\lambda\mu}\gamma_{\lambda\mu}; \tag{2.5}$$
$$\rho_{\alpha\beta}(u)=u_{3/\alpha\beta}+\rho^{(1)}_{\alpha\beta}(u);\ a=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}; \tag{2.6}$$
$$\rho^{(1)}_{\alpha\beta}(u)=b^\lambda_\alpha u_{\alpha/\beta}+b^\lambda_\beta u_{\lambda/\alpha}+b^\lambda_{\alpha/\beta}u_\lambda-c_{\alpha\beta}u_3;$$
$$\gamma_{\alpha\beta}(u)=0.5\left(u_{\alpha/\beta}+u_{\beta/\alpha}\right)-b_{\alpha\beta}u_3; \tag{2.7}$$
$$E^{\alpha\beta\lambda\mu}=E\left(1-\upsilon^2\right)^{-1}\left[\upsilon a^{\alpha\beta}a^{\lambda\mu}+(1-\upsilon)a^{\alpha\mu}a^{\beta\lambda}\right];$$

$u_{\alpha/\beta}=u_{\alpha,\beta}-\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}u_\lambda$; $u_{3/\alpha\beta}=u_{3,\alpha\beta}-\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}u_{3,\lambda}$; $b^\lambda_{\alpha/\beta}=b^\lambda_{\alpha,\beta}-\Gamma^\chi_{\alpha\beta}b^\lambda_\chi-\Gamma^\lambda_{\chi\beta}b^\chi_\alpha$; $b^\beta_\alpha=a^{\beta\lambda}b_{\lambda\alpha}$; E – модуль Юнга; υ – коэффициент Пуассона; $e=e(x)$ – толщина оболочки; $e(x)\in C^1(\overline{\Omega})$; $e(x)\ge A>0$, $\forall x\in\overline{\Omega}$; для частных производных $\partial r/\partial x^\alpha$, $\partial^2 r/\partial x^\alpha\partial x^\beta$ используются обозначения $r_{,\alpha}$, $r_{,\alpha\beta}$, греческие индексы принимают значения $\{1,2\}$, а латинские $\{1,2,3\}$; $a_{\alpha\beta}$, $a^{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$, $b^{\alpha\beta}$, $c_{\alpha\beta}$, $c^{\alpha\beta}$ – ковариантные и контравариантные компоненты первого, второго и третьего фундаментальных тензоров поверхности; $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$ – символы Кристоффеля.

Исследования гладкости решений краевых задач о деформации тонких оболочек показали, что тензоры $\rho(u)$ и u принадлежат пространству с большей гладкостью элементов, чем M и V. Поэтому, можно преобразовать билинейные формы $a(\bullet,\rho(\bullet))$ и $d(\bullet,\bullet)$, используя формулу Грина, что снизит требование к гладкости пространства допустимых перемещений, т.е. расширит его. Это позволит построить новую вариационную формулировку, которую назовём расширенной, и в которой присутствуют только первые производные.

Пусть T_h – регулярная триангуляция области $\overline{\Omega}$, h – максимальный из возможных диаметров треугольников. Каждая точка смены граничных условий (за счёт разрывов коэффициентов) и каждая точка краевого условия (1.3) является вершиной хотя бы одного треугольника. Обозначим через $\widetilde{T}$ объединение двух произвольных треугольников T_1 и T_2 из T_h, имеющих общую сторону ∂T_{12}. Если $\rho\in\left(H^1\left(\widetilde{T}\right)\right)^3$, $\forall\widetilde{T}$ и $v\in\left(C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)\right)^3$, то

$$\sum_{i=1}^{2}\int_{\partial T_{12}} M_n\left(\rho_{|T_i}\right)\left(v_{3|T_i}\right)_{,n} dx=0\text{, т.к. } M_n\left(\rho_{|T_1}\right)_{|\partial T_{12}}=M_n\left(\rho_{|T_2}\right)_{|\partial T_{12}}, \qquad (2.8)$$

равенство понимается в смысле совпадения следов, $v_{3,n}$ – непрерывная функция, меняющая знак при смене направления обхода границы. Поэтому применение формулы Грина приведёт к равенству

$$a(\rho,\rho(u))=\tilde{b}(\rho,u)+\int_{\partial\Omega} M_n(\rho)u_{3,n}\,dx, \qquad (2.9)$$

$$\tilde{b}(\rho,u)=\sum_{T\in T_h}\left\{\int_T\left(-m^{\alpha\beta}(\rho)_{|\alpha}u_{3,\beta}+m^{\alpha\beta}(\rho)\rho^{(1)}_{\alpha\beta}(u)\right)\sqrt{a}\,dx+\int_{\partial T} M_{nt}(\rho)v_{3,t}\,dx\right\}, \qquad (2.10)$$

где $v_{3,n}$ – производная по касательной к границе. Тогда введём пространства $\tilde{M}=\left\{\mu\in M,\mu_{\alpha\beta}\in H^1(T),\forall T\in T_h,M_n\left(\mu_{|T_1}\right)_{|\partial T_{12}}=M_n\left(\mu_{|T_2}\right)_{|T_{12}},\forall\tilde{T}\right\}$,с нормой

$\|\bullet\|_{\tilde{M}(\Omega)}=\left(\sum_T\|\bullet\|^2_{1,T}\right)^{1/2}$; $\tilde{V}=\left(H^1(\Omega)\right)^2\times W^{1,p}(\Omega)$, $p>2$, $W^{1,p}(\Omega)$ – пространство Соболева. Запишем теперь расширенную задачу: найти $(\rho,u)\in\tilde{M}\times\tilde{V}$, такие что

$$a(\rho,\mu)-\tilde{b}(\mu,u)+d_1(\rho,\mu)=0,\ \forall\mu\in\tilde{M}, \qquad (2.11)$$

$$\tilde{b}(\rho,v)+c(u,v)+d_2(u,v)=\tilde{q}(v),\ \forall v\in\tilde{V}. \qquad (2.12)$$

Теорема 4. *Пусть решение краевой задачи* $u\in\left(H^2(\Omega)\right)^2\times H^3(\Omega)$, α_i *– строго больше нуля на части* $\partial\Omega_0\subset\partial\Omega$ *ненулевой меры,* $1\le i\le 3$, $\alpha_4>0$ *на* $\partial\Omega$. *Тогда пара* $(\rho(u),u)\in\tilde{M}\times\tilde{V}$ *является единственным решением расширенной задачи:*

Доказательство. $\tilde{M}\in M$, $\rho(u)\in\tilde{M}$. Тогда (2.1) выполняется $\forall\mu\in\tilde{M}$. Применим к $a(\mu,\rho(u))$ преобразование (2.9), а затем заменим $u_{3,n}$ согласно краевому условию (1.2), $u_{3,n}=-\alpha_4^{-1}M_n(\rho)$. Получим уравнение (2.11), где $d_1(\rho,\mu)=\int_{\partial\Omega}\alpha_4^{-1}M_n(\rho)M_n(\mu)dx$.

Пусть $v\in\left(C^\infty(\overline{\Omega})\right)^3$. Применим преобразование (2.9) к $a(\rho,\rho(v))$ в уравнении (2.2). Учтём, что в силу (1.2) $\int_{\partial\Omega} M_n(\rho)\,v_{3,n}\,dx+\int_{\partial\Omega}\alpha_4\,v_{3,n}\,u_{3,n}\,dx=0$, $\forall v_3\in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Тогда получим равенство (2.12) для $v\in\left(C^\infty(\overline{\Omega})\right)^3$, где $d_2(u,v)=\sum_{i=1}^{3}\int_{\partial\Omega}\alpha_i\,u_i\,v_i\,dx+\sum_{j=1}^{J}\alpha_{5j}\,v_3(S_j)u_3(S_j)$,

$\tilde{q}(v)$ – линейная форма на пространстве $\tilde{V}$. Так как $V(\Omega)$ плотно в $\tilde{V}(\Omega)$, то предельным переходом получим, что $(\rho(u),u)$ удовлетворяет уравнению (2.12).

Чтобы показать единственность решения, докажем условие слабой эллиптичности

$$\sup_{(\mu,v)\in\tilde{M}\times\tilde{V}}\frac{\tilde{b}(\mu,w)+c(w,v)+d(w,v)}{\|\mu\|_{\tilde{M}}+\|v\|_{(H^1(\Omega))^3}+\|v\|_{0,\alpha,\partial\Omega}}\ge A\|w\|_{(H^1(\Omega))^3},\ \forall w\in\tilde{V}, \qquad (2.13)$$

Это условие для случая главных краевых условий доказано в [2]. Предположим, что условие (2.13) не выполняется. Тогда существует последовательность $\left\{w^k\right\}_{k=1}^{\infty}$,

$w^k \in \widetilde{V}$ такая, что левая часть неравенства (2.13) стремится к нулю, а правая ограничена. Тогда можно выделить подпоследовательность, обозначаемую $\{w^k\}_{k=1}^{\infty}$, слабо сходящуюся в $(H^1(\Omega))^3$ к некоторому $w^* \in (H^1(\Omega))^3$. Покажем, что $w^* = 0$.

Переходя к слабому пределу, получим $c(w^*, y) = 0$, $d_2(w^*, y) = 0$, $\forall y \in \widetilde{V}$. Так как $\widetilde{V}$ плотно в $(H^1(\Omega))^3$, то $c(w^*, w^*) = 0$, $d_2(w^*, w^*) = 0$ и $\gamma(w^*) = 0$, $w^*|_{\partial\Omega_0} = 0$. $\widetilde{b}(\bullet,\bullet)$ не определена на $\widetilde{M} \times (H^1(\Omega))^3$. Поэтому, чтобы перейти к слабому пределу, покажем, что $w^* \in \widetilde{V}$. Выберем $\eta_{11} = w$, $\eta_{22} = \eta_{12} = \eta_{21} = 0$, $w \in H_0^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), v|_{\partial\Omega} = 0\}$. Получим $\eta \in \widetilde{M}(\Omega)$ и $M_{nt}(\eta) = 0$. Тогда

$$\widetilde{b}(\eta, w^k) = \int_{\Omega} \left(-m^{\alpha\beta}(\eta)|_{\alpha} w_{3,\beta}^k + m^{\alpha\beta}(\eta)\rho_{\alpha\beta}^{(1)}(w^k)\right)\sqrt{a}dx. \tag{2.14}$$

Переходя к слабому пределу и используя равенства $M_n(\eta) = 0$, $m^{\alpha\beta}(\eta)\rho_{\alpha\beta}(w) = \eta_{\alpha\beta} m^{\alpha\beta}(\rho(w))$ получим $m^{11}(\rho(w^*)) = 0$. Аналогично $m^{22}(\rho(w^*)) = 0$, $m^{12}(\rho(w^*)) = m^{21}(\rho(w^*)) = 0$. Тогда из (2.5), $\rho(w^*) = 0$. Следовательно [2], w^* – жёсткое перемещение оболочки и $w^* \in (C^3(\overline{\Omega}))^3$. Тогда положим $\eta_{\alpha\beta} = \omega\, a_{\alpha\beta}$, $\omega \in H^1(\Omega)$. В этом случае, используя формулу Грина (w^* – достаточно гладкая и $\rho(w^*) = 0$), получим $\widetilde{b}(\eta, w^*) = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{12(1-\nu)} E e^3\, \omega\, w_{3,n}^* dx = 0$, $\forall \omega \in H^1(\Omega)$. Отсюда $w_{3,n}^*|_{\partial\Omega} = 0$. Тогда жёсткое перемещение равно нулю, т.е. $w^* = 0$ в $\overline{\Omega}$. Используя (2.4) – (2.7) и непрерывность билинейных форм можно показать [2], что неравенство (2.13) выполняется с точностью до слагаемого $\|w\|_{(L_2(\Omega))^3}$. Но так как w^k сходится к w^* сильно в $(L_2(\Omega))^3$, то отсюда следует, что $\|w^k\|_{(H^1(\Omega))^3} \to 0$, $k \to \infty$. Получили противоречие. Неравенство (2.13) доказано.

Покажем, что задача (2.11), (2.12) имеет единственное решение. Рассмотрим соответствующую однородную задачу. Складывая уравнения этой задачи при $\mu = \rho$, $v = u$ и используя (1.5) получим $\rho = 0$, $\gamma(u) = 0$, $u|_{\partial\Omega} = 0$, $M_n(\rho)|_{\partial\Omega} = 0$ и, следовательно $\widetilde{b}(\mu, u) = 0, \forall \mu \in \widetilde{M}$, , $c(u, v) = 0$, $d_2(u, v) = 0$, $\forall v \in \widetilde{V}(\Omega)$. Тогда из (2.13) $u = 0$. Теорема доказана.

3. Схема СМКЭ. Пусть $X_h^{(r)}$ – пространство непрерывных сплайнов лагранжевого типа степени $r \geq 1$, построенных по узлам триангуляции T_h. Построим $M_h \subset \widetilde{M}$. Основным условием является непрерывность нормального момента, в смысле совпадения следов, при переходе через стороны смежных треугольников. Поэтому базисными функциями в M_h будут нормальные моменты к сторонам триангуляции. Пусть n_α – составляющие разложения вектора нормали в касательной плоскости по осям координат. Тогда $M_n(m(\mu)) = m^{\alpha\beta}(\mu) n_\alpha n_\beta \in H^1(T)$, если $\mu \in H^1(T)$. Отсюда $m^{\alpha\beta}(\mu) = n^\alpha n^\beta M_n(m(\mu))$, где $n^\alpha = a^{\alpha\beta} n_\beta$. Введём

$$M_h = \Big\{ \mu^h, \mu_{\alpha\beta}^h = \frac{1}{12} e^3 E_{\alpha\beta\lambda\mu} m_h^{\lambda\nu}, m_h^{\alpha\beta}(\mu) = n^\alpha n^\beta M_n,$$

$$M_{n|T} \in P^{r-1}, M_n^{T_1}{}_{|\partial T_{12}} = M_n^{T_2}{}_{|\partial T_{12}}, \forall \widetilde{T}\}, \ V_h = X^{(r)} \times X^{(r)} \times X^{(r)}, \ r \ge 1,$$

P^r – пространство многочленов степени не выше r.

Запишем дискретную задачу: найти $(\rho^h, u^h) \in M_h \times V_h$ такие, что

$$a(\rho^h, \mu^h) - \widetilde{b}(\mu^h, u^h) + d_1(\rho^h, \mu^h) = 0 \qquad (3.$$

$$\widetilde{b}(\rho^h, v^h) + c(u^h, v^h) + d_2(u^h, v^h) = q(v^h), \ \forall v^h \in V_h. \qquad (3.$$

Теорема 5. *В предположениях теоремы* 4 *и при достаточно малых* h *ди кретная задача имеет единственное решение.*

Доказательство следует из того, что однородная система имеет только нулев решение. Это доказывается так же как в теореме 4 доказывается единственность р шения, а также с помощью неравенств (1.5) и (2.13).

Пусть α_i, $1 \le i \le 4$ ограничены положительной константой снизу. Тогда испол зуя технику получения оценок по [2, теорема 3] и оценки интерполяции [2, леммы 7 8] получим

Теорема 6. *Пусть выполняются условия теоремы 4 и* α_i, $1 \le i \le 4$ *ограничен снизу положительной константой. Тогда существует константа* $A > 0$ *такая что*

$$\left\|\rho(u) - \rho^h\right\|_{(L_2(\Omega))^3} + \left\|u - u^h\right\|_{(H^1(\Omega))^3} \le Ah^r \|u\|_{(H^{r+1}(\Omega))^2 \times (H^{r+2}(\Omega))}, \ r \ge 1. \qquad (3.3)$$

Пусть теперь $\alpha_i \to \infty$ при $h \to 0$. Из теорем 1 и 2 следует, что (ρ^h, u^h) будет сходиться к решению задачи $(\rho^0, u^0) \in \widetilde{M} \times \widetilde{V}$ с однородными краевыми условиями Дирихле, а α_i являются штрафными функциями. Тогда оценка погрешности $\left\|\rho^0 - \rho^h\right\|_{(L_2(\Omega))^3} + \left\|u^0 - u^h\right\|_{(H^1(\Omega))^3}$ отличается от оценки (3.3) только слагаемыми $\int\limits_{\partial\Omega} \alpha_n^{-1} M_n(\rho^h) M_n(\mu^h)\, dx$ и $\int\limits_{\partial\Omega} (N^i(u^0) - \alpha_i u_i^h) v_i^h\, dx$, $\forall \mu^h \in M_h$, $\forall v^h \in V_h$. Условия, которым удовлетворяют интерполяционные многочлены Джонсона , Фалка и Осборна [2] обеспечивают оценку погрешности $O(h^r)$ при $r = 1$, если $\alpha_i = 1/h^2$, $1 \le i \le 3$, $\alpha_4 = 1/q$, $q \ge 1$.

Заключение. Результаты этой статьи показывают, что рассмотренная схема СМКЭ, известная для пластин как схема Германа – Джонсона, является эффективной по порядку сходимости метода, по количеству степеней свободы КЭ, по возможностям применения к задачам с минимальной гладкостью решения. Это особенно важно в задачах о деформации непологих оболочек и оболочечных конструкций.

1. **Сьярле Ф.** Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М.: Мир, 1980. – 512 с.
2. **Голушков В. Г., Масловская Л. В.** Смешанный метод конечных элементов в задачах теории оболочек // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1994. – Т. 34, № 5. – С. 748–769.
3. **Koiter W. T.** On the nonlinear theory of thin elastic shells // Proc. Koninklijke Nederlandse Akad. van Wetenchappen. – 1966. – V. 69, Ser B. – P. 1–54.
4. **Масловская Л. В., Филиппович А. П., Голушков В. Г.** О смешанных вариационных формулировках задач теории оболочек // Изв. вузов. Математика. – 1985. – № 9. – С. 37–43.
5. **Bernadon M., Ciarlet P. C.** Sur l'ellipticite du modele lineaire de coques de W.T. Koiter // Leet. Notes in Econom. and Math. Systems. – 1976. – V. 134. – P. 89–136.
6. **Масловская Л. В., Голушков В. Г.** О смешанных вариационных формулировках задач теории оболочек // Изв. вузов. Математика. – 1991. – № 2. – С. 69–78.