

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ І. І. МЕЧНИКОВА
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФІЗИКИ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

**В. Я. Гоцульський, Д. Д. Поліщук,
О. К. Копійка**

МЕХАНІКА

Навчально-методичний посібник

Одеса
ОНУ
2020

**УДК 531/534(075.8)
Г748**

Автори:

В. Я. Гоцульський, доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри загальної фізики і фізики теплоенергетичних та хімічних процесів ОНУ імені І.І. Мечникова;

Д. Д. Поліщук, кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри загальної фізики і фізики теплоенергетичних та хімічних процесів ОНУ імені І.І. Мечникова;

О. К. Копійка, кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри загальної фізики і фізики теплоенергетичних та хімічних процесів ОНУ імені І.І. Мечникова.

Відповідальний редактор: Л. А. Коваль, зав. лабораторії кафедри загальної фізики і фізики теплоенергетичних та хімічних процесів ОНУ імені І.І. Мечникова.

Рецензенти:

О. М. Писаренко, кандидат фіз.-мат. наук, доцент, завідувач кафедри фізики Одеської державної академії будівництва та архітектури;

О. Р. Гохман, доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри фізики Південноукраїнського національного педагогічного університету ім. К. Д. Ушинського;

О. Є. Сергєєва, професор, доктор математичних наук, завідувач кафедри фізики і матеріалознавства Одеської національної академії харчових технологій.

*Рекомендовано до друку науково-методичною радою
ОНУ імені І. І. Мечникова.
Протокол № 5 від 12.12.2019 р.*

Гоцульський В. Я.

Г748 **Механіка : навч-метод. посіб. / В. Я. Гоцульський, Д. Д. Поліщук, О. К. Копійка ; за ред. В. Г. Шевчука ; відпов. ред. Л. А. Коваль; Одес. нац. ун-т імені І. І. Мечникова, ф-т математики, фізики та інформ. технологій. – Одеса: ОНУ, 2020. – 178 с.
ISBN 978-617-689-370-7**

Посібник направлений на полегшення самостійної роботи студентів: проведення всіх вимірювань, отримання кінцевого числового результату, формулювання фізичних висновків і, що найбільш важливо, розрахунку похибок прямих і кінцевих результатів, а також захисту отриманих результатів.

Посібник складено для студентів спеціальностей: 104 «фізика та астрономія», 105 «прикладна фізика та наноматеріали».

УДК 531/534(075.8)

ЗМІСТ

| | |
|---|-----|
| ВСТУП | 5 |
| ПОСТУПАЛЬНИЙ РУХ | 24 |
| <i>Лабораторна робота № 1.</i> Лінійні вимірювання. Вимірювання фізичних величин і визначення похибок(помилоч) вимірювань | 34 |
| <i>Лабораторна робота № 2.</i> Визначення модулів пружності сталі методом розтягування дроту і вигину пластини | 45 |
| <i>Лабораторна робота № 3.</i> Дослідження законів кінематики і динаміки поступального руху на машині Атвуда | 51 |
| <i>Лабораторна робота № 4.</i> Перевірка теореми про рух центра маси систем матеріальних точок | 58 |
| <i>Лабораторна робота № 5.</i> Дослідження пружного центрального удару двох кульок | 65 |
| ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА | 72 |
| <i>Лабораторна робота № 6.</i> Вивчення обертального руху твердого тіла за допомогою маятника Обербека | 77 |
| <i>Лабораторна робота № 7.</i> Визначення швидкості кулі за допомогою крутильно-балістичного маятника | 85 |
| <i>Лабораторна робота № 8.</i> Визначення моменту інерції махового колеса і моменту сили тертя в опорі | 94 |
| <i>Лабораторна робота № 9.</i> Визначення моменту інерції і перевірка теореми Штейнера методом крутильних коливань | 101 |
| <i>Лабораторна робота № 10.</i> Дослідження динаміки плоского руху за допомогою маятника Максвелла | 108 |
| <i>Лабораторна робота № 11.</i> Дослідження руху гіроскопа | 115 |
| <i>Лабораторна робота № 12.</i> Дослідження властивостей еліпсоїда інерції твердих тіл. Еліпсоїд моментів інерції | 123 |

| | |
|---|-----|
| КОЛИВАЛЬНІ РУХИ | 131 |
| <i>Лабораторна робота № 13.</i> Дослідження руху фізичного маятника і визначення прискорення вільного падіння | 132 |
| <i>Лабораторна робота № 14.</i> Дослідження вимушених коливань та явища резонансу | 140 |
| ХВИЛІ | 149 |
| <i>Лабораторна робота № 15.</i> Визначення швидкості поширення звуку методом інтерференції хвиль | 150 |
| <i>Лабораторна робота № 16.</i> Визначення швидкості поширення звуку у повітрі методом зсуву фаз | 155 |
| <i>Лабораторна робота № 17.</i> Визначення швидкості звуку методом стоячої хвилі | 160 |
| <i>Лабораторна робота № 18.</i> Дослідження коливань струни і градування шкали частоти звукового генератора | 167 |
| ДОДАТОК | 174 |
| СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ | 178 |

ВСТУП

Основна мета вивчення курсу загальної фізики полягає в тому, щоб представити фізичну теорію (фізичну модель) як узагальнення спостережень, практичного досліду та експерименту. Тому курс загальної фізики, з одного боку, повинен являти собою фізичну теорію в адекватній математичній формі (математичну модель), а з іншого боку, цей курс є експериментальним і повинен ознайомити студентів з основними методиками експериментального дослідження, з головними методами точних вимірів фізичних величин, найпростішими методами обробки результатів експерименту та основних фізичних приладів. Курс загальної фізики повинен сформувати у студентів певні навички експериментальної роботи, навчити правильно виражати фізичні ідеї, кількісно формулювати й вирішувати фізичні завдання, оцінювати порядок фізичних величин.

Програма курсу загальної фізики може бути виконана лише при повному і цілеспрямованому використанні лекцій, семінарських і лабораторних занять, а також часу для самостійної роботи студентів.

У процесі проведення фізичного практикуму студент вчиться самостійно відтворювати і аналізувати основні фізичні явища, що сприяє більш глибокому розумінню теорії досліджуваного явища, знайомиться з найважливішими вимірвальними приладами, вчиться правильно вибирати методику експерименту та відповідні цій методиці експериментальні прилади, виховує в себе творче відношення до дослідницької роботи.

Важливе значення має фізичний практикум і в активізації самостійної роботи студентів, у придбанні навичок самостійної роботи не тільки в лабораторіях практикуму, але й у процесі теоретичної підготовки до лабораторних робіт.

Безсумнівно, що найбільш ефективний шлях вивчення курсу фізики – це паралельне вивчення теоретичних питань (побудова фізичних моделей, формулювання основних визначень, законів тощо) на лекціях і опрацюванні їх в лабораторії, тобто фронтальна постановка завдань практикуму. Однак, здійснення фронтальної постановки завдань може викликати і певні труднощі. У лабораторіях практикуму нашої кафедри розрив у часі між лек-

ційним і лабораторним вивченням тих або інших питань значно скорочений завдяки проведенню практикуму по циклах. Кожний такий цикл містить у собі лабораторні роботи з одного розділу програми, виконувані паралельно з викладом даних питань на лекціях і на семінарських заняттях.

Однак, у деяких випадках виникає необхідність самостійного вивчення тих або інших питань теорії до того, як вони будуть викладені на лекціях. У таких випадках, щоб допомогти студентам успішно засвоїти новий для них розділ теоретичного курсу, викладач призначає студентам індивідуальні консультації, на яких студенти з'ясовують всі виникаючі питання.

З метою стимулювання *регулярної* самостійної роботи студентів-першокурсників над теоретичним матеріалом, введені заліки по циклах робіт фізичного практикуму.

Студенти, що не відвідувалися повністю з теорії та практики попереднього циклу лабораторних робіт і не одержали залік з цього циклу, до виконання наступного циклу не допускаються.

Принцип послідовності вивчення матеріалу при цьому не порушується, тому що теми циклів розташовуються в тій же послідовності, у якій викладається теоретичний матеріал на лекціях.

Свідоме виконання експерименту, уважність і зосередженість на процесі вимірів, дбайливе відношення до приладів – необхідна умова успішного проведення досліду.

Підготовка до виконання лабораторної роботи

Підготовка студента до лабораторних занять, виконання робіт і математична обробка результатів вимірів проводиться самостійно й систематично перевіряється й оцінюється викладачем.

Для виконання лабораторних робіт студенти розподіляються на бригади, як правило, по дві людини в кожній. Склад й номер бригади не змінюється до кінця семестру.

На вступному занятті студенти ознайомлюються з переліком робіт, які необхідно буде виконати протягом семестру, а також вказується література, за допомогою якої можна готуватися до цих занять.

До виконання кожної лабораторної роботи студент повинен ретельно завчасно підготуватися. Підготовка повинна проводитися в такій послідовності: 1) з методичних вказівок до фізичного практикуму студент дізнається про мету й задачі отриманої лабораторної роботи, знайомиться зі списком рекомендованої літератури до даної роботи, 2) після цього необхідно опрацювати відповідний теоретичний матеріал за зазначеною літературою, тому що «теоретичні» відомості в інструкції, як правило викладені коротко й не можуть замінити підручника (це бажано зробити за 3–4 дні до виконання роботи, щоб залишився час для з'ясування в керівника питань, що виникають у процесі підготовки), 3) уважно прочитати опис лабораторної роботи. Чітко засвоїти, які величини необхідно виміряти, на якій теоретичній основі базується метод виміру даної величини, який принцип дії установки в цілому. Після цього треба:

- продумати послідовність виконання експерименту, як це описано в інструкції до роботи у відповідному посібнику;
- пригадати (або вивчити) принцип дії й правила користування вимірювальними приладами, необхідними для виконання роботи;
- проаналізувати висновок робочої формули й визначити зміст і одиниці виміру кожної фізичної величини, продумати способи виміру цих величин;
- за допомогою довідкової літератури встановити приблизні межі можливих результатів експерименту, продумати побудову графіків (якщо такі передбачені завданням до роботи), заготовити табличку для запису результатів вимірів і обчислень;
- продумати спосіб розрахунку похибок вимірів фізичних величин, згадати правила дії з наближеними числами;
- на місці познайомитись із робочим стендом, складом обладнання.

Необхідно пам'ятати, що без уважної глибокої підготовки до лабораторних занять користь від них буде незначною. Робота повинна виконуватися свідомо, на основі ясного розуміння поставленого завдання.

Засвоєння матеріалу студент перевіряє, відповідаючи на контрольні питання, наведені у вказівках до кожної роботи.

Порядок виконання роботи

На початку кожного лабораторного заняття викладач, що проводить його, перевіряє теоретичну підготовку студента шляхом усного опитування, з'ясовує, чи досить він знаком з темою роботи.

Непідготовлений студент до виконання роботи не допускається й вважається відсутнім на заняттях. Такому студентові призначається твердий строк відпрацьовування.

При задовільних результатах опитування студент одержує на робочому аркуші відмітку про допуск і приступає до виконання вимірів відповідно до інструкції до даної лабораторної роботи.

Приступаючи до заняття, необхідно зайняти своє робоче місце й ознайомитися з устаткуванням. На робочому місці, як правило, є всі необхідні прилади. При виявленні несправності приладів або відсутності деяких з них самому ремонтувати або переносити прилади з інших робочих місць категорично забороняється. Про такі випадки варто повідомити лаборантові або викладачеві. Необхідні додаткові прилади або матеріали видаються тільки лаборантом.

Студент збирає установку або перевіряє її готовність до проведення експерименту, показує її викладачеві й потім приступає до виконання завдання, дотримуючись усіх правил користування вимірювальними приладами, вимог техніки безпеки й поведінки в лабораторії.

Варто мати на увазі, що оволодіння прийомами настройки установки – найважливіша частина мистецтва експериментатора, а навчання цим прийомам - одне з основних завдань лабораторного практикуму.

Техніка безпеки вимагає, щоб студенти заздалегідь погоджували з викладачем свої рішення у всіх випадках, коли помилка може бути небезпечна для студента й для приладу.

У випадку, якщо при виконанні лабораторних робіт використовуються електричні ланцюги, то підключати їх до джерела струму можна тільки після перевірки і з дозволу викладача.

Після закінчення вимірів електричні ланцюги необхідно відразу ж виключити.

Під час лабораторного заняття не дозволяється без потреби ходити по лабораторії, включати інші установки, крутити ручки приладів, відкривати крани й т. п. Невиконання цих вимог може привести до псування лабораторного устаткування, а також може бути небезпечно для життя й здоров'я.

Перед виконанням роботи студент повинен обговорити з викладачем свої міркування про вибір значень змінних і про число спостережень.

Не можна збивати регулювання приладів і розбирати схеми, не показавши викладачеві результатів роботи. У силу тих або інших причин може виникнути необхідність додаткових вимірів або виправлень. Розібрана установка не може служити в цьому випадку відмовкою. *При недостатньому числі спостережень робота також не вважається виконаною.*

По закінченні вимірів студент показує отримані результати викладачеві, який перевіряє й підписує їх (без підпису викладача робота вважається невиконаною). Час, що залишився до кінця заняття в лабораторії, студент використовує для математичної обробки результатів вимірів. Бажано провести в лабораторії оформлення робочого аркуша. Якщо оформлення робочого аркуша вимагає більш тривалої роботи, то його остаточну задачу можна перенести на наступне заняття.

Студенти, що не представили закінчений робочий аркуш з попередньої роботи, до наступної роботи не допускаються.

Кожну виконану роботу студент зобов'язаний захистити на співбесіді з викладачем. Для заліку роботи студент зобов'язаний дати вичерпну відповідь на питання викладача, які стосуються як теорії досліджуваного явища, так і методики експерименту, будови й дії використаних у роботі вимірювальних приладів і способів обчислення помилок. При заліку роботи викладач робить відмітку в журналі. Якщо робота не зарахована, то необхідно доопрацювати відповідний матеріал, який вказує викладач.

Відсутність студента на лабораторному занятті, незалежно від причин, не звільняє його від виконання даної лабораторної роботи, що відповідно до графіка випадає на дане заняття.

Для виконання пропущених з поважної причини робіт кафедра призначає додаткові заняття.

Оформлення робочого листка

При підготовці до лабораторної роботи студент складає робочий лист, на якому вказуються: факультет, курс, група, прізвище студента, дата, назва роботи та ін.

До робочого листа вносяться всі попередні дані, тобто зміст його повинен бути наступним:

1. Коротке формулювання ідеї методу вимірювань.
2. Схема експериментальної установки з позначенням всіх її елементів.
3. Основні розрахункові формули.
4. Назви й позначення фізичних величин.
5. Назви приладів, межі вимірювання, ціна поділки шкали й інструментальні похибки.
6. Таблиці для наступних записів вимірювань і обчислених величин. У стовпцях (або рядках) таблиці необхідно розмістити назву величини, її позначення й одиниці виміру. У перших стовпцях таблиць записують величини, що грають роль аргументу (наприклад, час, температура і т. п.). У наступних – залежні величини (швидкість, теплоємність і т. д.), заголовки деяких стовпців можуть бути об'єднані.
7. Графіки, якщо вони необхідні в роботі.
8. Обчислення шуканої величини.
9. Обчислення похибок.
10. Запис результатів роботи з урахуванням похибки.

Безумовно, у деяких роботах можливі відхилення від зазначеної схеми. Однак обов'язкове виконання наступної умови: робочий листок повинен повністю відбивати всю пророблену роботу. Чорнові записи на інших аркушах не допускаються, тому що переписування даних із чернеток може вносити додаткову помилку. При оцінюванні роботи студента викладач враховує всі етапи роботи над робочим листком. Тому замінити робочий аркуш іншим, «більш чисто написаним» не дозволяється. Якщо робочий листок не був прийнятий викладачем, а був повернутий студенту, то всі виправлення вносяться в той же примірник робочого листка; при

необхідності можна додавати до нього чисті аркуші, але первинний варіант із підписом викладача повинен бути збережений.

При записі результатів варто дотримуватися таких правил:

Числові значення розташовувати так, щоб коми, що відокремлюють цілі числа від десяткових знаків, були на одній вертикалі.

У випадку відсутності яких-небудь даних у таблиці ставиться прочерк. Його неприпустимо замінити нулем, тому що нуль – цілком конкретна величина.

Великі й дуже малі числа краще представляти таким чином, щоб у таблицю записувалися тільки їхні значущі цифри. Наприклад, замість величини $A = 4,5 \cdot 10^9$ в таблицю заносять величину в 10^9 раз меншу ($A \cdot 10^9 = 4,5$) з відповідним поданням назви та одиниць вимірювання фізичної величини. При цьому виключається необхідність кожен раз додавати до числа один і той самий співмножник. Таблиця виходить більш компактною. Прикладом може бути наступна таблиця при **прямих вимірах** в'язкості (безпосередньо приладом з відліком значень за його шкалою).

Динамічна в'язкість гліцерину при кімнатній температурі

| Номер виміру | Температура, t°C | | | | В'язкість η , Н с/м ² | | | |
|--------------|------------------|---------------------|--------------|----------------|---------------------------------------|------------------------|-----------------|------------------------------|
| | t_i | $\langle t \rangle$ | Δt_i | Δt_i^2 | η_i | $\langle \eta \rangle$ | $\Delta \eta_i$ | $\Delta \eta_i^2 \cdot 10^4$ |
| 1 | 0,0 | 19,9 | +0,1 | 0,01 | 1,49 | 1,50 | -0,01 | 1 |
| 2 | 0,0 | | +0,1 | 0,01 | 1,50 | | 0 | 0 |
| 3 | 9,5 | | -0,4 | 0,16 | 1,50 | | 0 | 0 |
| 4 | 9,7 | | -0,2 | 0,04 | 1,51 | | +0,01 | 1 |
| 5 | 0,0 | | +0,1 | 0,01 | 1,52 | | +0,02 | 4 |
| 6 | 0,2 | | +0,3 | 0,09 | 1,48 | | -0,02 | 4 |

У таблиці наведено первинну обробку **n прямих вимірів**. Тут середню величину в'язкості позначено $\langle \eta \rangle$ (можна $t_{\text{сер}}$, \bar{t}).

Вона знаходиться як $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_i$. Відхилення значень від середнього $\Delta \eta_i = \eta_i - \langle \eta \rangle$.

За державним стандартом обробки прямих вимірів користуються формулою для знаходження довірчого інтервалу (абсолютної похибки вимірювання):

$$\Delta\eta = t_n^\alpha \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta\eta_i)^2}{n \cdot (n-1)}}.$$

Тут t_n^α – коефіцієнт Стьюдента для кількості вимірів n за значенням надійності (вірогідності, що істинне значення величини попадає у довірчий інтервал) α .

| Надійність $\alpha, \%$ | 75 | 80 | 85 | 90 | 95 | 97.5 | 99 | 99.5 | 99.7 | 99.9 | 99.95 |
|-----------------------------|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Кількість вимірів n | Значення коефіцієнту Стьюдента, t_n^α | | | | | | | | | | |
| 1 | 1.000 | 1.376 | 1.963 | 3.078 | 6.314 | 12.71 | 31.82 | 63.66 | 127.3 | 318.3 | 636.6 |
| 2 | 0.816 | 1.080 | 1.386 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 | 14.09 | 22.33 | 31.60 |
| 3 | 0.765 | 0.978 | 1.250 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 | 7.453 | 10.21 | 12.92 |
| 4 | 0.741 | 0.941 | 1.190 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 | 5.598 | 7.173 | 8.610 |
| 5 | 0.727 | 0.920 | 1.156 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 | 4.773 | 5.893 | 6.869 |
| 6 | 0.718 | 0.906 | 1.134 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 | 4.317 | 5.208 | 5.959 |
| 7 | 0.711 | 0.896 | 1.119 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.499 | 4.029 | 4.785 | 5.408 |
| 8 | 0.706 | 0.889 | 1.108 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 | 3.833 | 4.501 | 5.041 |
| 9 | 0.703 | 0.883 | 1.100 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 | 3.690 | 4.297 | 4.781 |
| 10 | 0.700 | 0.879 | 1.093 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 | 3.581 | 4.144 | 4.587 |
| 11 | 0.697 | 0.876 | 1.088 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 | 3.497 | 4.025 | 4.437 |
| 12 | 0.695 | 0.873 | 1.083 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.055 | 3.428 | 3.930 | 4.318 |
| 13 | 0.694 | 0.870 | 1.079 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.650 | 3.012 | 3.372 | 3.852 | 4.221 |
| 14 | 0.692 | 0.868 | 1.076 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.624 | 2.977 | 3.326 | 3.787 | 4.140 |
| 15 | 0.691 | 0.866 | 1.074 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.602 | 2.947 | 3.286 | 3.733 | 4.073 |
| 16 | 0.690 | 0.865 | 1.071 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.583 | 2.921 | 3.252 | 3.686 | 4.015 |
| 17 | 0.689 | 0.863 | 1.069 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 | 3.222 | 3.646 | 3.965 |
| 18 | 0.688 | 0.862 | 1.067 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.878 | 3.197 | 3.610 | 3.922 |
| 19 | 0.688 | 0.861 | 1.066 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 | 3.174 | 3.579 | 3.883 |
| 20 | 0.687 | 0.860 | 1.064 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 | 3.153 | 3.552 | 3.850 |
| 21 | 0.686 | 0.859 | 1.063 | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 | 3.135 | 3.527 | 3.819 |
| 22 | 0.686 | 0.858 | 1.061 | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.508 | 2.819 | 3.119 | 3.505 | 3.792 |

| | | | | | | | | | | | |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 23 | 0.685 | 0.858 | 1.060 | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 | 3.104 | 3.485 | 3.767 |
| 24 | 0.685 | 0.857 | 1.059 | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.492 | 2.797 | 3.091 | 3.467 | 3.745 |
| 25 | 0.684 | 0.856 | 1.058 | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 | 3.078 | 3.450 | 3.725 |
| 26 | 0.684 | 0.856 | 1.058 | 1.315 | 1.706 | 2.056 | 2.479 | 2.779 | 3.067 | 3.435 | 3.707 |
| 27 | 0.684 | 0.855 | 1.057 | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.473 | 2.771 | 3.057 | 3.421 | 3.690 |
| 28 | 0.683 | 0.855 | 1.056 | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.467 | 2.763 | 3.047 | 3.408 | 3.674 |
| 29 | 0.683 | 0.854 | 1.055 | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.462 | 2.756 | 3.038 | 3.396 | 3.659 |
| 30 | 0.683 | 0.854 | 1.055 | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2.457 | 2.750 | 3.030 | 3.385 | 3.646 |
| 40 | 0.681 | 0.851 | 1.050 | 1.303 | 1.684 | 2.021 | 2.423 | 2.704 | 2.971 | 3.307 | 3.551 |
| 50 | 0.679 | 0.849 | 1.047 | 1.299 | 1.676 | 2.009 | 2.403 | 2.678 | 2.937 | 3.261 | 3.496 |
| 60 | 0.679 | 0.848 | 1.045 | 1.296 | 1.671 | 2.000 | 2.390 | 2.660 | 2.915 | 3.232 | 3.460 |
| 80 | 0.678 | 0.846 | 1.043 | 1.292 | 1.664 | 1.990 | 2.374 | 2.639 | 2.887 | 3.195 | 3.416 |
| 100 | 0.677 | 0.845 | 1.042 | 1.290 | 1.660 | 1.984 | 2.364 | 2.626 | 2.871 | 3.174 | 3.390 |
| 120 | 0.677 | 0.845 | 1.041 | 1.289 | 1.658 | 1.980 | 2.358 | 2.617 | 2.860 | 3.160 | 3.373 |
| ∞ | 0.674 | 0.842 | 1.036 | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 | 2.807 | 3.090 | 3.291 |

Правила округлення при обчисленнях

Результати лабораторних вимірів, а також довідкові дані, що використовуються при обробці експерименту, є наближеними величинами. Наближені величини, що отримані в результаті вимірів, записуються наближеними числами.

При записі результатів вимірів варто обов'язково вказувати величину абсолютної похибки, або довірчий інтервал, у який попадає істинне значення вимірюваної величини із заданим рівнем надійності. Наприклад,

$S = (3,74 \pm 0,02)\text{мм}$, разом приводять і відносну похибку

$$\varepsilon = \frac{\Delta S}{S} \cdot 100\% .$$

Отриманий результат необхідно виділити – підкреслити або взяти в рамку. Абсолютну похибку виражають завжди в тих же одиницях, що й вимірювану величину, наприклад:

$$\begin{aligned} \ell &= (1,527 \pm 0,004)\text{м} \\ v &= (2,67 \pm 0,06) \times 10^3 \text{ м/с} \end{aligned}$$

Загальноприйняте й стандартизоване правило, відповідно до якого абсолютна похибка виміру визначається числом з кількістю значущих цифр не більше двох (значущими цифрами в числах прийнято називати всі цифри $1, 2, 3, \dots, 9$, а також нуль, але тільки в тих випадках, якщо він стоїть в середині або наприкінці, але не на початку).

Точність визначення похибки при елементарних методах обробки, які викладаються студентам I курсу, не перевищує 3%. Це означає, що друга значуща цифра абсолютної похибки невірна й, отже, вказувати похибку із більшою точністю не має сенсу. Тому значення абсолютної похибки варто округляти, залишаючи одну значущу цифру. Тільки, якщо ця цифра дорівнює одиниці, точність записування абсолютної похибки однією цифрою виявиться недостатньою (різниця між 1 і 2 становить уже 100%). У цьому випадку варто привести й другу цифру, округливши її до 0 або до 5.

Інші двозначні числа, наприклад, 2,5; 2,7; 3,5; і т. п. у записі похибки не допускаються, тому що такий запис претендує на невикордану точність (при використанні більше строгих методів обробки іноді втримують і другу цифру).

Нагадаємо правило округлення: округляючи точне або наближене число до певного розряду, останню значущу цифру, що залишає, не змінюють, якщо перша із цифр, що відкидають, менше 5, і збільшують на 1, якщо наступна цифра більша за 5.

Якщо перша із цифр, що відкидають, дорівнює 5, то останню із залишених цифр зберігають незмінною, якщо вона парна і збільшують на одиницю, якщо вона непарна. Як видно, цей випадок не має обґрунтування й виправдується лише зручностями обчислювальної практики. Наприклад: потрібно округлити числа 53,65 і 20,35 до першого знаку після коми. У результаті отримаємо: 53,6; 20,4.

Похибка округлення у всіх випадках не перевищує половини одиниці розряду залишеної цифри.

У результаті вимірів або обчислень одержують наближене число, у якому розрізняють цифри вірні, які не містять в собі помилок, і сумнівні, у яких помилки містяться. Прийнято наближене число округляти й записувати у вигляді десяткового дробу, у

якому всі цифри, крім останньої, вірні. Останньою цифрою наближеного числа є сумнівна цифра. За її точність не можна поручитися. Зрозуміло, що порядок першої сумнівної цифри в наближеному числі визначається порядком першої значущої цифри абсолютної похибки.

При записі відносної похибки зберігають не менше двох значущих цифр.

Наближені величини такі, як π , e , $\sqrt{2}$, логарифми чисел і т. п., що приводять у спеціальних таблицях, можуть бути взяті, практично, з достатньою точністю. При обчисленнях беруть такі їхні значення, які перевищують на порядок точність інших величин, що входять у даний розрахунок.

При використанні в розрахунках табличних значень, для яких не зазначена похибка, максимальну похибку приймають рівною 5 одиницям розряду, що впливає за порядком останньої значущої цифри, що залишається.

Наприклад, для табличного значення коефіцієнта поверхневого натягу води при $20\text{ }^\circ\text{C}$, рівного $\sigma = 72,53\ 10^{-3}\ \text{H/м}$, результат записується у вигляді:

$$\sigma = (72,530 \pm 0,005) \times 10^{-3}\ \text{H/м}$$

Похибку, що виникає при округленні показань приладів, називають погрішністю відліку. Якщо показання приладу округляють до значення, що відповідає найближчій відмітці шкали, то межа похибки відлічування дорівнює $0,5$ ціни поділу шкали приладу; якщо можна оцінити на око десяту, п'яту частку розподілу шкали, то похибка відліку не перевищує $0,2$ ціни поділу шкали.

Щоб одержати результат непрямого виміру, виконують математичні операції, а потім округляють результат. Очевидно, немає необхідності виконувати математичні операції з результатами прямих вимірів, як з точними числами. Треба їх округляти до певної кількості цифр. Це значно полегшить роботу, але при цьому можуть виникнути додаткові похибки. Щоб сам процес обчислення не вносив додаткової помилки, всі обчислення варто проводити з кількістю значущих цифр, що перевищують на одиницю кількість значущих цифр у самому неточному з вихідних даних.

Оскільки значення абсолютної похибки приводиться з однією (рідше із двома) значущими цифрами, то всі обчислення по-

грішностей варто робити не більш, ніж із двома значущими цифрами. При цьому може виявитися, що не всі складові підсумкової похибки впливають на цю похибку. Тому при обчисленні підсумкової похибки **непрямих вимірів** деякими складовими можна заздалегідь знехтувати, якщо внесок їх дуже малий у порівнянні з іншими складовими. Вищесказане справедливо і у відношенні підсумкової відносної похибки. Наприклад: для непрямих вимірів динамічного коефіцієнту в'язкості водного розчину гліцерину за методом Стоксу були виконані **прямі** виміри часу падіння t сталевій кульки діаметром d та густиною ρ з висоти h у циліндричній трубці з водним розчином гліцерину, густина якого ρ_1 .

Для розрахунку коефіцієнту в'язкості користуються формулою:

$$\eta = \frac{g(\rho - \rho_1)d^2 t}{18 h},$$

де g – прискорення вільного падіння.

Було отримано такі результати вимірів з похибками після округлення:

| | |
|---|---------------------------------------|
| $t = (59,90 \pm 0,15) \text{ с}$ | $\frac{\Delta t}{t} = 0,0025$ |
| $d = (1,010 \pm 0,015) \text{ мм}$ | $\frac{\Delta d}{d} = 0,015$ |
| $h = (468,0 \pm 0,5) \text{ мм}$ | $\frac{\Delta h}{h} = 0,0011$ |
| $\rho_1 = (1,230 \pm 0,007) \text{ г/см}^2$ | $\frac{\Delta \rho_1}{\rho} = 0,0056$ |
| $\rho = (7,70 \pm 0,5) \text{ г/см}^2$ | $\frac{\Delta \rho}{\rho} = 0,0065$ |
| $g = (9,810 \pm 0,005) \text{ м/с}^2$ | $\frac{\Delta g}{g} = 0,00051$ |

Відносна похибка в'язкості розраховується за формулою:

$$\frac{\Delta \eta}{\eta} = \sqrt{\left(\frac{\Delta g}{g}\right)^2 + \left[\frac{\Delta(\rho - \rho_1)}{\rho - \rho_1}\right]^2 + \left(\frac{2\Delta d^2}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2},$$

З порівняння похибок результатів вимірів видно, що найбільший внесок у похибку непрямого виміру вносить похибка виміру d . Тоді:

$$\frac{\Delta\eta}{\eta} = 2 \frac{\Delta d}{d} = 2 \cdot 0,015 = 0,030 = 3,0\% .$$

Строго кажучи, відкидати всі інші похибки можна, якщо виконується нерівність:

$$\sqrt{\left(\frac{\Delta g}{g}\right)^2 + \left[\frac{\Delta(\rho - \rho_1)}{\rho - \rho_1}\right]^2 + \left(\frac{2\Delta d^2}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2} < 0,3 \frac{\Delta\eta}{\eta}$$

Перевіряємо:

$$\sqrt{(0,00051)^2 + \left(\frac{0,05 + 0,007}{7,7 - 1,2}\right)^2} + (0,0025)^2 + (0,0011)^2 \approx 0,00811$$

Отже,
$$\frac{\Delta\eta}{\eta} = 3,0\%$$

Оформлення графіків

При вивченні залежності однієї величини від іншої, результати експерименту можуть бути представлені у вигляді графіка.

Головна перевага графіків – це наочність. Побудувавши графік, експериментатор відразу одним поглядом охоплює вигляд отриманої залежності, одержує про неї якісне уявлення, відзначає наявність різних особливостей: максимумів, мінімумів, точок перегину, областей найбільшої й найменшої швидкості зміни, періодичності й т. п. Графік дозволяє легко судити про відповідність експериментальних даних до тієї або іншої теоретичної залежності, а також полегшує обробку вимірів.

При побудові графіків слід дотримуватися наступних правил:

- Графіки повинні виконуватись на міліметровому папері або на папері зі спеціальними координатними сітками.
- Загальноприйнятим є відкладання на осі абсцис аргументу,

тобто ту величину, зміни якої є причиною зміни іншої, по осі ординат – функцію.

- Масштаби по обох осях обирають незалежно один від одного. Однак, вибрати масштаб для аргументу та функції необхідно так, щоб точність величин, що знаходяться графічним шляхом, відповідала точності вимірів. Похибка повинна бути видима на графіку та представлятися відрізком достатньої довжини, інакше графік не відображає всіх деталей експерименту й не може бути використаний для графічної обробки даних без втрати точності. При цьому рекомендується брати більший масштаб для тієї величини, похибка вимірів якої менше.

Шкали аргументу й функції повинні починатися з того значення, що є найближчим до найменшого округленого, і кінчатися найближчим до найбільшого округленого значення даної величини. Так, якщо величина міняється в межах від 0,53 до 0,97 одиниць, то вісь доцільно ліворуч обмежити 0,5, а праворуч 1,0. Не слід прагнути до того, щоб на графіку обов'язково помістився початок координат (точка 0,0). Навіть у тому випадку, коли потрібно знайти точку перетину якої-небудь прямої на графіку з однією з координатних осей, немає необхідності, щоб ця точка містилася на графіку. Точку перетину легко знайти розрахунком, використовуючи подібність трикутників. Початок координат поміщають на графіку в тому випадку, коли це не вимагає великого збільшення його розмірів і, звичайно, тоді, коли (0,0) є результат виміру. **При правильних обраних масштабах кут нахилу отриманої кривої близький до 45°, а криві займають практично все поле креслення.** За одиниці масштабу є сенс обирати числа, кратні 5, 10, 50, 100 мм, а також парні й непарні числа. Не слід розставляти ці числа на осях графіка надто густо – досить нанести їх через 2 або через 5см. Не слід також проставляти експериментальні точки. Біля осей координат варто записати позначення, одиниці виміру, а іноді й назви відкладених величин. Точки повинні наноситися на графік ретельно й акуратно, щоб графік вийшов більш точним. Це важливо для подальшої графічної обробки результатів. Якщо на координатній площині є кілька кривих, то кожній кривій привласнюється номер, а на вільному полі креслення вказується назва,

позначення й одиниці виміру параметра, що відповідає даному номеру. Точки, що відносяться до різних кривих, повинні бути позначені різними символами (кружки, трикутники, квадрати й т. п.), щоб не плутати їх.

Виносні лінії на кресленні, як правило, не проводяться. Виносну лінію можна нанести у вигляді виключення тільки в тому випадку, якщо хочуть особливо виділити на графіку яку-небудь точку (наприклад, положення максимуму).

Похибку виміру зображують на графіку за допомогою відрізків, на середині яких перебуває експериментальна точка. Довжина відрізка дорівнює подвоєній величині помилки в даному масштабі. Відрізок зверху й знизу обмежують рисками. Помилку аргументу зображують горизонтальним відрізком, а помилку функції – вертикальним.

У більшості випадків можна заздалегідь забезпечити бажану точність аргументу. Крім того, похибка аргументу мала порівняно з похибкою в значенні функції, оскільки в похибки функції входять крім похибки аргументу ще й похибки інших величин. У такому випадку на графіку досить показати тільки похибку функції за допомогою вертикального відрізка.

Криву на графіку проводять плавно, уникаючи вигинів і зламів. Крива повинна проходити наскільки можливо ближче до всіх нанесених точок, але в жодному разі не слід проводити її через кожную точку; експериментальні точки повинні розташовуватися по обидві сторони від кривої.

Якщо на графіку нанесені величини похибок у вигляді вертикальних відрізків, то крива, як правило, повинна лежати в межах цих відрізків.

Злам на кривій можна малювати тільки в тому випадку, якщо його не можна пояснити погрішністю вимірів і якщо на його існування вказує велика кількість точок і відсутність систематичних помилок. *Варто пам'ятати*, що всяка особливість на кривій – злам, різка зміна кривизни та ін. – вимагає або спеціального експериментального доказу, або теоретичного пояснення.

Криву на графіку варто проводити від руки, олівцем. Готовий графік забезпечується заголовком, що повинен містити точне писання того, що показує графік.

Знаходження параметрів теоретичної або експериментальної залежності. Метод Гауса (метод найменших квадратів – МНК)

Часто перед експериментатором виникає завдання: встановити на основі дослідних даних функціональну залежність між вимірюваними фізичними величинами. Наприклад, представити знайдену з досліду залежність у вигляді поліному $y = a + bx + cx^2$, показникової функції $y = ae^{bx}$ та тому подібне. Вид рівняння можна підібрати довільно або одержати на підставі яких-небудь теоретичних міркувань. В обох випадках необхідно перевірити, чи придатна дана формула для подання сукупності експериментальних даних та підібрати якнайкраще значення невідомих параметрів a, b, c, \dots , що входять у формулу. Для простих формул, що містять один або два невідомих параметри, зручно користуватися *графічним методом*. Особливо просто вирішується завдання для лінійної функції $y = b + kx$, тому що в цьому випадку графік – пряма лінія. Значення k знаходиться як кутовий коефіцієнт прямої («тангенс кута нахилу» прямої до осі абсцис), а значення b – як величина відрізка, що відтинає пряма на осі ординат.

Якщо функція $y = f(x)$ нелінійна, то в цьому випадку зручно використовувати функціональний масштаб, тобто графік перекреслюється в нових координатах, обраних так, щоб одержати лінійну залежність.

Так, залежність виду $y = ax^n$ можна досліджувати на графіку $\sqrt[n]{y} = f(x)$, якщо n відомо. Якщо ж n , як і a , невідомі величини і їх необхідно визначити з експериментальних даних, то застосовується логарифмічний масштаб $lg y = f(lg x)$. У цьому випадку функція, яку підбирають, представляється на графіку прямою $lg y = lg a + n lg x$; параметри функції легко визначаються з нахилу й початкової ординати прямої. Функція виду $y = a + bx^2$ підбирається на графіку $y = f(x^2)$, тобто по осі абсцис відкладають значення x^2 . Експонентна функція виду $y = ax^2 e^{-b/x}$ зобразиться прямою в координатах $lg y/x^2$ і $1/x$

$$lg y/x^2 = lg a - b/x.$$

Звичайно при такому методі обробки результатів вимірів будують два графіки – графік у функціональному масштабі для кількісної обробки й графік у натуральному масштабі для наочного подання функції.

Метод найменших квадратів (Гауса)

При емпіричному (експериментальному) вивченні функціональної залежності однієї величини y від другої x , проводять ряд вимірів величини y_i при різних значеннях x_i , тобто отримують набір $\{y_i, x_i\}$. Результати можуть бути представлені у вигляді таблиці або графіка (рис. 1).

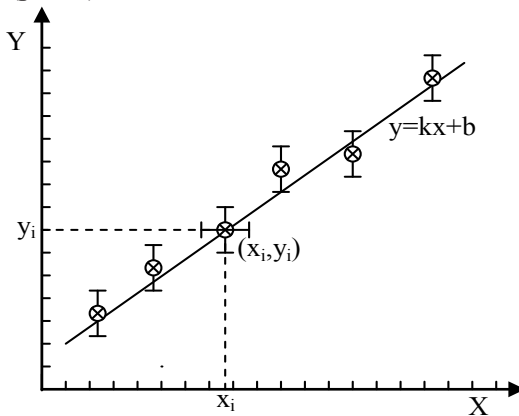


Рис. 1

Задача полягає в аналітичному відтворенні функціональної залежності між цими величинами, тобто в підборі функції $y = f(x)$, яка описує результати вимірювань. Особливість задачі полягає в тому, що наявність випадкових похибок вимірювання (або, як говорять, наявність «шуму» в експерименті) робить нерозумним підбір такої формули, яка б точно описувала експериментальні значення. Іншими словами, графік відтвореної залежності не повинен проходити через всі точки на рис. 1, а повинен, по можливості, згладжувати «шум». Звичайно, згладжування «шуму» буде тим точнішим, чим більша кількість вимірів.

Емпіричні формули звичайно підбирають по залежності певного типу (найбільш простих), наприклад,

$y = kx + b$; $y = kx^2 + bx + c$; $y = ae^{bx} + c$ та тому подібних.

Іншими словами, задача зводиться до визначення параметрів a , b , c ... на основі отриманих експериментальних даних в той час, як вигляд залежності вибрано завчасно, із яких-небудь теоретичних міркувань або інтуїтивно.

Якщо всі виміри величин y_i і x_i проведено з однаковою точністю, то параметри a , b , c знаходяться із умови, що сума квадратів відхилень експериментальних значень y_i від розрахованих y , тобто величина: y_i, x_i

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - y)^2, \quad (1)$$

приймала найменше значення (n – число вимірів).

Пошук значень a , b , c ..., які призводять до найменшого значення функції $S(a, b, c \dots)$, зводиться до розв'язування системи рівнянь:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \frac{\partial S}{\partial c} = 0 \dots \quad (2)$$

Розглянемо розв'язок цієї задачі на прикладі лінійної апроксимації

$$y = kx - b. \quad (3)$$

Тоді (1) приймає вигляд:

$$S = \sum_{i=1}^N (y_i - (kx_i + b))^2. \quad (4)$$

Якщо застосувати умову (2) до (4), то, при середніх значеннях змінних $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_s$, $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_s$, одержимо:

$$k = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}) \cdot (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}; \quad (5)$$

$$b = \bar{y} - k \cdot \bar{x}.$$

Можна показати, що

$$k = \frac{\overline{yx} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}.$$

Якщо з теоретичних міркувань відомо, що b дорівнює нулю, то $k = \frac{\overline{yx}}{\overline{x^2}}$.

Метод Гауса (МНК) відноситься до методів регресійного аналізу і реалізований у більшості математичних програм обробки даних, у тому числі у табличному процесорі Excel, при цьому в результаті дослідник отримує значення похибки даних відносно підібраної за моделлю функції.

ПОСТУПАЛЬНИЙ РУХ

Вивчення курсу загальної фізики має своєю метою подання фізичної теорії як узагальнення спостережень, практичного досвіду і експерименту. Тому курс загальної фізики, з одного боку, повинен представляти собою фізичну теорію в адекватній математичній формі, а з другого, як це вже згадувалось раніше, цей курс має бути експериментальним і повинен знайомити студентів з основними методиками експериментальних досліджень, головними методами вимірювання фізичних величин, найпростішими методами обробки результатів експерименту і основними фізичними приладами. Курс загальної фізики має сформулювати у студентів певні навички експериментальної роботи, навчити правильно виражати фізичну ідею, кількісно формулювати і розв'язувати фізичні задачі, оцінювати порядок фізичних величин, які досліджуються.

Виконанню цієї задачі значною мірою допомагають лабораторні роботи. Для їх якісного (а, отже, ефективного для навчання) виконання необхідно розуміти зміст досліджуваного явища. Тому викладанню, змісту і методиці виконання лабораторних робіт має передувати невеликий вступ, який містить загальний погляд на способи розв'язання відповідних задач. Найбільш наглядно це видно на прикладі механіки.

Класична механіка – наука про закони руху і рівноваги макроскопічних матеріальних тіл. При цьому під механічним рухом розуміється найпростіша форма руху – зміна положень тіл відносно один одного з плином часу.

Рух тіла визначено, якщо відомий закон його руху, тобто закон, згідно з яким змінюється положення тіла в просторі з плином часу. При цьому, в механіці використовуються певна модель простору і часу, а також система відліку.

Кінематика – це розділ механіки, де вивчаються способи опису руху у вибраній системі відліку незалежно від причин, які його зумовлюють.

Траєкторією точки називається геометричне місце послідовних положень тіла у вибраній системі відліку.

Закони руху точки можуть задаватися:

а) у векторній формі:

$$\vec{r} = \vec{r}(t); \quad (1)$$

б) у координатній формі:

в декартовій системі координат:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t); \quad (2)$$

у криволінійних координатах:

$$q_1 = q_1(t), q_2 = q_2(t), q_3 = q_3(t); \quad (3)$$

в) у натуральній формі задається траєкторія точки і закон руху точки вздовж траєкторії:

$$s = s(t), \quad (4)$$

де s – дуга траєкторії:

$$s = \int_0^t |\vec{v}| dt.$$

Співвідношення (1), (2) являють собою параметричне рівняння траєкторії, де t – параметр. Вид траєкторії визначає геометричний характер руху: прямолінійний, круговий, плоский, просторовий.

Знаючи закон руху $\vec{r}(t)$, можна знайти швидкість $\vec{v}(t)$ і прискорення $\vec{a}(t)$:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \vec{r}'_t; \quad (5)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} = \vec{r}''_t. \quad (6)$$

Обернена задача кінематики полягає в знаходженні $\vec{v}(t)$ і $\vec{r}(t)$ при відомому $\vec{a}(t)$.

Для розв'язання такої задачі необхідно ще знати так звані початкові умови, а саме швидкість $\vec{v}_0 = \vec{v}|_{t=t_0}$ і положення $\vec{r}_0 = \vec{r}|_{t=t_0}$ в деякий початковий момент часу t_0 .

Наприклад, при $\vec{a} = \text{const}$, $t_0 = 0$ швидкість і положення точки визначаються формулами:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v}_0 + \vec{a}t \\ \vec{r} &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}.\end{aligned}\quad (7)$$

Наступний крок опису механічного руху – розгляд взаємодії між матеріальними точками. Класична механіка виходить із ідеї дальності, дія у просторі передається миттєво. Ця дія характеризується силою; сила викликає прискорення. Основна задача механіки полягає в динамічному описі руху, який встановлює зв'язок між силою і кінематичним рівнянням руху.

Класична механіка базується на трьох основних законах, які називаються законами Ньютона і які можна сформулювати наступним чином.

1. Перший закон – закон інерції

В природі існують системи відліку, в яких ізолювана (тобто незв'язана з будь-якими матеріальними об'єктами) матеріальна точка знаходиться в стані спокою або рівномірного прямолінійного руху. Такі системи називаються інерціальними. Закон інерції називають також першим законом Ньютона.

2. Другий закон Ньютона

Якщо на матеріальну точку діє сила \vec{F} , то точка отримує по відношенню до інерціальної системи відліку таке прискорення \vec{a} , що добуток маси m точки на це прискорення дорівнює силі:

$$m\vec{a} = \vec{F}.\quad (8)$$

У цьому законі маса являє собі міру інертності тіла, тобто властивості різних тіл по-різному можуть реагувати на дію однієї і тієї ж сили. Підкреслимо, що закон (8) одночасно визначає силу, як векторну величину, яка характеризує дію на тіло інших тіл, в результаті чого тіло отримує прискорення або деформується.

3. Третій закон Ньютона

Дві матеріальні точки діють одна на одну з силами, однако-вими за абсолютною величиною і спрямованими в протилежних напрямках вздовж прямої, яка з'єднує ці точки.

До основних законів динаміки відносять ще й закон незалежності дії сил, згідно з яким при одночасній дії на матеріальну точку декількох сил, кожна із них надає точці таке ж прискорення, яке б вона надавала, діючи тільки одна – принцип суперпозиції сил:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i . \quad (9)$$

Для того, щоб звести знаходження закону руху до чисто математичної задачі, необхідно насамперед (у відповідності з (8)) знати закони діючих на тіло сил. Кожний такий закон отримано на основі обробки і узагальнення дослідних даних і по сутності, завжди будується на рівнянні (8) як на визначенні сили.

Наведемо приклади цих сил у самому простому вигляді, коли взаємодіючі тіла (заряди) знаходяться у спокої або рухаються з малими (нерелятивістськими) швидкостями.

1. Сила гравітаційного притягання:

$$\vec{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} ,$$

2. Однорідна сила тяжіння:

$$\vec{F} = m\vec{g} ,$$

\vec{g} – прискорення в полі тяжіння

3. Кулонівська сила взаємодії електричних зарядів:

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} ,$$

4. Сила пружності:

$$\vec{F} = -\chi\vec{r}$$

χ – додатній коефіцієнт пружності.

5. Сила опору (рідке тертя):

$$\vec{F} = -k\vec{v}$$

\vec{v} – швидкість тіла відносно суцільного середовища (рідкини або газу), k – коефіцієнт опору.

6. Сила тертя ковзання:

$$F = kR_0$$

k – коефіцієнт тертя ковзання, R_0 – сила нормального тиску, сила F направлена в бік, протилежний напрямку руху тіла.

В загальному випадку сила $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$ залежить від часу, координат і швидкості тіла.

Основне рівняння динаміки являє собою математичний вираз другого закону Ньютона:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t), \quad (10)$$

Або в координатному вигляді:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{y} = F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{z} = F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \end{cases} \quad (11)$$

По своїй суті ці рівняння являють собою систему диференціальних рівнянь другого порядку.

У всіх інерціальних системах відліку, наприклад, в умовно нерухомій (x, y, z) і такій, що рухається відносно неї вздовж осі x рівномірно і прямолінійно із швидкістю $v_0 = (x', y', z')$, другий закон Ньютона має однаковий вигляд. Інваріантність рівняння руху відносно перетворень Галілея

$$x = x' + v_0 t, y = y', z = z'$$

являє собою принцип відносності Галілея.

В динаміці розв'язуються дві основні задачі:

1. Віднайти діючу на тіло силу \vec{F} , якщо відомі його маса m і закон руху $\vec{r}(t)$. В цьому випадку задача приводиться до диференціювання $\vec{r}(t)$ по часу.

2. Віднайти закон руху тіла $\vec{r}(t)$, якщо відомі m і \vec{F} . В цьому випадку необхідно задати початкові умови – швидкість \vec{v}_0 і положення \vec{r}_0 тіла в початковий момент часу. Ця задача приводиться до інтегрування рівнянь (10), (11). Аналітично початкові умови записуються таким чином (при розв'язуванні задачі в декартовій системі координат):

$$\begin{aligned} x|_{t=0} &= x_0, y|_{t=0} = y_0, z|_{t=0} = z_0 \\ \dot{x}|_{t=0} &= v_{x_0}, \dot{y}|_{t=0} = v_{y_0}, \dot{z}|_{t=0} = v_{z_0} \end{aligned} \quad (11a)$$

Наявність початкових умов дозволяє знайти єдино можливі рішення задач (10) – (11a) при заданих силах, це й будуть шукані кінематичні рівняння руху:

$$\begin{aligned} x &= f_1(t; x_0, y_0, z_0; v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0}) \\ y &= f_2(t; x_0, y_0, z_0; v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0}) \\ z &= f_3(t; x_0, y_0, z_0; v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0}) \end{aligned} \quad (11б)$$

Відмітимо, що рівняння (11) мають універсальний характер і справедливі для всього нескінченного різноманіття механічних задач. Кожна конкретна задача характеризується завданням визначених сил і початкових умов.

Таким чином, друга задача динаміки може бути розв'язана повністю. Однак в більшості випадків, диференційні рівняння руху не можуть бути розв'язані аналітично (тобто доведені до інтегралів) і не може бути отриманий точний розв'язок задачі. Для практики це не має вирішального значення, оскільки наближений розв'язок можна одержати за допомогою ЕОМ.

Рівняння (11б) означають, що стан системи тіл в деякий момент часу єдино визначається їх взаємодією (тобто силами) і початковими умовами. Іншими словами, всі наступні стани зумовлені попереднім. Це положення носить назву принципу механічного детермінізму.

Звернемо увагу на оборотність механічних процесів. В найпростішому випадку сили, які діють на тіло, залежать тільки від

положення тіла $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$. Якщо при цьому в рівнянні (11) обернути час, тобто зробити заміну $t \rightarrow t = t_1$, то:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{-dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

При цьому $\vec{F}_1 = \vec{F}$ і рівняння (11) не змінюється, тобто воно є інваріантним відносно обернення часу.

Що до швидкості руху, то:

$$\vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}}{dt_1} = -\frac{d\vec{r}}{dt} = -\vec{v}.$$

При оберненні часу напрямком швидкості змінюється на протилежний. Таким чином, оборотність механічних процесів означає, що коли існує деякий рух, то можливий і зворотній рух, при якому система проходить всі ті ж положення у просторі в зворотній послідовності з протилежною за напрямком швидкістю.

Зокрема у випадку одновимірного руху, вісь координат вздовж траєкторії, отримаємо тільки одне диференціальне рівняння руху:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x, \frac{dx}{dt}, t) \quad (12)$$

і початкові умови:

$$x|_{t=0} = x_0; \frac{dx}{dt}|_{t=0} = \dot{x}_0 = v_0.$$

Розв'язок цього рівняння у деяких випадках можна звести до інтегралів.

Розглянемо приклади.

а) Одновимірний рух під дією постійної сили F :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m} = a.$$

Його загальний інтеграл отримується по методу розподілу змінних і виражається такою формулою рівноприскореного ру

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

б) Сила – функція часу $F(t)$.

Простими прийомами рішення доводиться до перших і других інтегралів:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = a(t)$$

$$\frac{dx}{dt} = \int a(t)dt + C_1 = v_0 t + v(t)$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \int v(t)dt$$

в) Сила залежить від координати $F(x)$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F(x)}{m}$$

Робимо підстановку $\frac{dx}{dt} = v$. Тоді:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

і це рівняння приймає вигляд:

$$v dv = \frac{1}{m} F(x) dx$$

Його рішення:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{1}{m} \int F(x) dx + C_1 = f(x) + C$$

Оскільки $v = \frac{dx}{dt}$, то: $\frac{dx}{dt} = \sqrt{2[f(x) + C]}$.

Після розділення змінних можна записати:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{2[f(x) + C_1]}} + C_2 = t.$$

г) Сила залежить від швидкості $F(v)$.

Розділивши змінні, отримаємо:

$$\int \frac{v dv}{F(v)} = \frac{x}{m} + C_1.$$

Перевизначивши $\int \frac{v dv}{F(v)} = f(v)$, маємо:

$$f(v) = \frac{x}{m} + C_1.$$

Далі напишемо вихідне рівняння у вигляді:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F(v)}{m}.$$

Розділивши змінні,

$$\int \frac{dv}{F(v)} = \frac{t}{m} + C_2,$$

і перезначивши $\int \frac{dv}{F(v)} = f_1(v)$, маємо:

$$f_1(v) = \frac{t}{m} + C_2.$$

Виключивши із рівнянь для f і f_1 величину v , знайдемо x як функцію t .

Окрім диференційних рівнянь руху для розв'язку задач динаміки широко використовуються так звані загальні теореми динаміки, які являються першими інтегралами рівнянь руху.

До них, зокрема, відносяться:

1. Теорема про зміну імпульсу системи.

Імпульс системи тіл $\vec{K} = \sum \vec{K}_i$, де $\vec{K}_i = m_i \vec{v}_i$ – імпульс

i -го тіла. Зміна імпульсу системи за довільний проміжок часу дорівнює геометричній сумі імпульсів, діючих на систему зовнішніх сил за той же проміжок часу

$$\vec{K} - \vec{K}_0 = \sum_i \int_0^t \vec{F}_i dt \quad (13)$$

Із цієї теореми витікає закон збереження імпульсу: якщо геометрична сума всіх діючих на систему зовнішніх сил дорівнює нулю, то імпульс системи залишається незмінним. Теорема використовується при вивченні руху рідин, в теорії зіткнення, в теорії реактивного руху та ін. Наслідком цієї теорії є також теорема про рух центра мас: центр мас механічної системи рухається як матеріальна точка, маса якої дорівнює масі системи і на яку діють всі зовнішні сили, прикладені до системи.

2. Теорема про зміну кінетичної енергії системи.

Зміна кінетичної енергії системи T при будь-якому її переміщенні дорівнює сумі робіт A_i всіх прикладених сил на цьому переміщенні:

$$T_2 - T_1 = \sum A_i \quad (14)$$

У випадку, коли всі діючі сили потенційні, із теореми витікає закон збереження механічної енергії: при русі під дією потенційних сил сума кінетичної і потенційної енергії системи залишається незмінною величиною.

Лабораторна робота № 1

Лінійні вимірювання. Вимірювання фізичних величин і визначення похибок (помилкок) вимірювань

Робота виконується фронтально.

Мета роботи:

- засвоєння основних положень та правил розрахунків помилок прямих та непрямих вимірів;
- оволодіння стандартною методикою розрахунку та представлення помилок, яка прийнята для подання наукових результатів на прикладі простих прямих вимірювань геометричних параметрів фізичних тіл правильної геометричної форми;
- опанування методикою розширення можливостей прямих вимірювань при застосуванні ноніусних шкал, знайомство із роботою штангенциркуля та мікрометра.

Теоретичний матеріал

Вимірювання будь-якої фізичної величини пов'язано з деякими похибками, які зумовлені як властивостями самого досліджуваного об'єкта (неідеальність його форми, зміни його параметрів із часом, вплив зовнішніх факторів і т. п.), так і з властивостями вимірювальних засобів, тому вимірювання фізичної величини має конкретний зміст лише тоді, коли визначається і похибка її виміру.

Умовно, усі різновиди помилок можна об'єднати у три великі класи – систематичні, випадкові та промахи. До **систематичних** відносяться помилки, які зумовлені нехтуванням або, навіть, незнанням деяких явищ та ефектів, які позначаються на величині, що вимірюється, та неточністю приладів, які залишаються незмінними впродовж проведення вимірювань. Наприклад, невідповідність показів приладів еталону, або неврахування впливу реагування матеріалу термометра у агресивному середовищі на вимірювання температури і т. і. Вони виявляються до початку вимірів і, разом із іншими, враховуються при поданні остаточного результату в якості складової сумарної помилки.

Що стосовно **промахів**, то їх існування зрозуміле із самої

назви, їх треба виявляти та позбавлятися, наприклад, повторною серією вимірювань.

Випадковою називають помилку, яка може змінюватись від одного виміру до наступного непередбачуваним способом і може бути, як позитивною, так і від'ємною. Якщо якась величина вимірюється багатократно, то можна, шляхом статистичної обробки результатів вимірювання, оцінити величину цієї помилки. Збільшуючи число вимірювань, можна практично виключити випадкову помилку.

Саме із основами визначення та представлення цих помилок можна познайомитись у процесі виконання цієї роботи.

Для знаходження справжнього (істинного) значення фізичної величини необхідне багаторазове вимірювання в незмінних (або контрольованих) умовах його проведення. В результаті ми отримуємо сукупність вимірів даної величини $\{x_i\}$. Як свідчить теорія помилок (див. літературу), найбільш наближеним до справжнього значення буде її середнє значення.

Визначимо середнє значення величини x як:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}, \quad (1)$$

де $i = 1, 2, \dots, N$, – число вимірів. Величина відхилення в окремому досліді $\Delta x_i = x_i - \bar{x}$, однак $\frac{\sum \Delta x_i}{N}$ не може прислугувати

ти мірою точності вимірювань, оскільки в силу рівноймовірності відхилень x_i від \bar{x} в той або інший бік, ця величина може бути близькою до нуля і при малих (більш точно вимірювання), і при великих (більш грубо вимірювання) відхиленнях Δx_i .

Тому, для цієї мети зручно користуватись **середньоквадратичною похибкою вимірювання** $\frac{\sum_{i=1}^N (\Delta x_i)^2}{N}$. При $N \rightarrow \infty$ ця ве

личина прямує до деякого постійного значення, яке і називається

середньоквадратичною похибкою. В математичній статистиці для визначення абсолютної похибки вимірювань при їх скінченній кількості рекомендується користуватись формулою Стюдента:

$$\Delta x = t_{\alpha}(N) \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\Delta x_i)^2}{N(N-1)}}, \quad (2)$$

де $t_{\alpha}(N)$ – коефіцієнт Стюдента, який залежить від числа вимірів N і **довірчого інтервалу**. **Надійність** α означає, що, наприклад, при $\alpha = 0,95$ (95%) окремий вимір з ймовірністю α потрапляє у визначений довірчий інтервал $x = \bar{x} \pm \Delta x$.

Результати абсолютною похибки Δx самі по собі не визначають точності вимірювання. Важливо знати, наскільки вона мала по відношенню до величини \bar{x} , яка визначається. Для оцінювання точності вимірювання вводиться поняття **відносної похибки** $\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x}$.

Результати вимірювання зручно оформлювати у вигляді наступної таблиці.

Таблиця 1

| № _i | x_i | $\Delta x_i = x_i - \bar{x}$ | $\Delta x_i^2 = (x_i - \bar{x})^2$ |
|----------------|-------|------------------------------|------------------------------------|
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| ... | | | |

$$\sum x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n, \quad \sum (\Delta x_i)^2 = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}, \quad \Delta x = t_{\alpha}^n \sqrt{\frac{\sum (\Delta x_i)^2}{N(N-1)}}, \quad x = \bar{x} \pm \Delta x, \quad \varepsilon_x = \frac{\Delta x}{\bar{x}} 100\%$$

Останній рядок уявляє формат подання остаточного результату при заданій надійності α

Звичайно, у фізичному експерименті досліджувана величина є функцією декількох безпосередньо вимірюваних величин, кожна з яких має свою похибку, що визначається за викладеною вище методикою. Для кожної з таких величин складається таблиця і визначається похибка її вимірювання. При цьому похибка кінцевого результату визначається похибками безпосередньо вимірюваних величин і називається **похибкою непрямого вимірювання**.

Розглянемо випадок, коли кінцевий результат (для простоти та прозорості дій) є функцією двох змінних $z = f(x, y)$, кожна з яких визначається із своєю похибкою:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x, \varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x}, y = \bar{y} \pm \Delta y, \varepsilon_y = \frac{\Delta y}{y}.$$

Спробуємо визначити оціночний алгоритм пошуку помилки непрямих вимірів. Для цього розглянемо повний диференціал функції:

$$dz = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x dy \quad (3)$$

Тут $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y$ – часткова похідна f по x , взята при постійному y .

Замінімо в (3) диференціали їх відповідними похибками (вважаючи $\Delta x, \Delta y$ малими величинами):

$$\Delta z = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x \Delta y \quad (4)$$

Підносимо Δz до квадрату і отримуємо:

$$(\Delta z)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y^2 (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x^2 (\Delta y)^2 + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x \Delta x \Delta y.$$

Знайшовши середнє значення цієї рівності по всіх можливих вимірах і враховуючи, що $\Delta\bar{x}\Delta\bar{y} = 0$ в силу статистичної незалежності величин Δx і Δy , отримуємо

$$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y^2 (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x^2 (\Delta y)^2}. \quad (5)$$

Розділимо обидві частини на $\bar{z} = f(\bar{x}, \bar{y})$ і визначимо похибку непрямого вимірювання:

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta z}{z} = \sqrt{\frac{1}{f^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y^2 (\Delta x)^2 + \frac{1}{f^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x^2 (\Delta y)^2}. \quad (6)$$

Тут значення f і $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y, \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x$ беруться при середніх значеннях \bar{x} і \bar{y} .

Результат (6) поширюється на функції довільного числа змінних. В більшості випадків, остаточну формулу непрямих вимірів помилки можна звести до випадку, коли результат представлений добутком або частинним від ділення параметрів остаточного результату. При цьому, помилку параметрів, які представлені сумою, треба шукати окремо. У складних випадках із тригонометричними функціями або логарифмами потрібно звертатись до спеціальних таблиць та стандартів або власноручно виводити кінцевий результат, як це було зроблено вище для найпростішого випадку двох змінних.

Приклад:
$$z = A \frac{x^3 y^{-2}}{p^{\frac{7}{2}} q^{\frac{3}{4}}},$$

де A – постійна, $x = \bar{x} \pm \Delta x, y = \bar{y} \pm \Delta y, p = \bar{p} \pm \Delta p, q = \bar{q} \pm \Delta q$.

Тоді
$$\bar{z} = A \left(\frac{\bar{x}^3 \bar{y}^{-2}}{\bar{p}^{\frac{7}{2}} \bar{q}^{\frac{3}{4}}} \right) \quad \text{і}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta z}{z} = \sqrt{\left(\frac{3\Delta x}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta y}{\bar{y}}\right)^2 + \left(\frac{7\Delta p}{2\bar{p}}\right)^2 + \left(\frac{3\Delta q}{4\bar{q}}\right)^2}.$$

Описаний алгоритм пошуку помилки зручно використовувати, наприклад, у випадку необхідності визначення об'ємів та площин тіл простої геометричної форми.

В якості конкретних прикладів розглянемо визначення об'ємів циліндра й кулі.

а) Об'єм циліндра:

$$V = \frac{\pi d^2 H}{4}, \text{ де } d - \text{ його діаметр, } H - \text{ висота.}$$

Для визначення об'єму циліндра необхідно провести пряме вимірювання d і H і обчислити похибки їх вимірювання, тобто отримати $H = \bar{H} \pm \Delta H$ і $d = \bar{d} \pm \Delta d$.

$$\text{Оскільки } \bar{V} = \frac{\pi \bar{d}^2}{4} \bar{H}, \text{ то:}$$

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{\bar{V}} = \sqrt{\left(\frac{2\Delta d}{\bar{d}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta H}{\bar{H}}\right)^2} \quad \text{і} \quad \Delta V = \varepsilon_v \bar{V}.$$

б) Об'єм кулі $V = \frac{4}{3}\pi R^3$; визначивши $r = \bar{r} \pm \Delta r$, запишемо:

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{\bar{V}} = \sqrt{\left(\frac{3\Delta r}{\bar{r}}\right)^2} = 3\varepsilon_r \quad \text{і} \quad \Delta V = \varepsilon_v \bar{V}.$$

Контрольні питання:

1. Як влаштовано штангенциркуль і мікрометр? Від чого залежить точність ноніуса й ціна поділки мікрометра?
2. Яка мінімальна помилка здійснюється при вимірі лінійних розмірів тіл за допомогою штангенциркуля та мікрометра?
3. Наведіть приклад систематичних помилок..
4. Якими величинами характеризується точність вимірів у випадку обмеженого числа дослідів? Що таке довірча ймовір-

ність (надійність) і довірчий інтервал? Як визначити довірчий інтервал?

5. Що таке відносна похибка? З якою метою її визначають?
6. Сформулюйте алгоритм розрахунку середньоквадратичної помилки.
7. Запишіть формулу Стьюдента.
8. Як розраховується помилка при непрямих вимірюваннях?

ДОДАТОК

Вимірювання лінійних розмірів тіл

Вимірювання фізичної величини реалізується порівнянням її з еталоном. Виміряти фізичну величину – це значить із використанням спеціальних технічних засобів (засобів виміру) дослідницьким шляхом знайти значення фізичної величини, а також ступінь її наближення до істинного(справжнього) значення.

У найпростіших випадках, наприклад, для вимірювання геометричних параметрів лінійні розміри вимірюваного тіла зрівнюються з відстанню між штрихами на робочій поверхні вимірювального інструменту. Точність вимірів визначається точністю нанесення штрихів на робочій поверхні інструмента й точністю визначення положення вимірюваного тіла щодо вимірювального інструмента, наприклад, лінійки довжиною 30÷50 см виготовляють із точністю до 1 мм.

Максимальну похибку виміру, що зумовлена неточністю виготовлення інструмента, називають припустимою інструментальною похибкою або межею абсолютної інструментальної похибки $\delta_{\text{п}}$. Вона дорівнює ціні поділки шкали приладу.

При виконанні вимірів виникає похибка відліку $\delta_{\text{в}}$ – помилка, яка обумовлена необхідністю закруглення результату з надлишком або недоліком при встановленні відліку на шкалі.

Максимальне значення інструментальної помилки $\delta_{\text{і}}$ при вимірюваннях, з урахуванням елементарних міркувань, складається з цих помилок:

$$\delta_{\text{і}} = \delta_{\text{п}} + \delta_{\text{в}}$$

ї її можна вважати такою, що дорівнює 3/2 ціни поділки інструменту.

Для розширення можливостей вимірювання та збільшення точності, в практиці вимірювань використовуються спеціальні прилади із допоміжними, так званими, ноніусними шкалами. Назва – «ноніус» – пішла від прізвища автора – португальського математика Нуніша (пишеться Nonius).

Найбільше поширення вони мають в техніці лінійних та кутових вимірювань. Розглянемо найпростіші та найбільш поширені серед них.

Штангенциркуль

Штангенциркуль являє собою металеву нерухому лінійку, по якій рухається спеціальний пристрій із допоміжною, ноніусною шкалою. Нерухома частина приладу називається основою (базою) і має шкалу звичайної лінійки, а, виходить, і її характеристики. Інша частина називається рухомою лінійкою (ноніусом) і її шкала дозволяє вимірювати десяті (і менше) частки міліметра. Точність виміру лінійних розмірів тіл за допомогою штангенциркуля вище, ніж при вимірі лінійкою. В прикладі, що розглядається нижче, шкала ноніуса має 10 поділок на рухомій лінійці; ціна поділки становить 0,1 мм.

Штангенциркуль оснащений двома парами утримувачів – губок. Між першими затискається обмірюєий об'єкт, а інші встромляються і розводяться для вимірювань параметрів внутрішніх порожнин в отворі, що досліджується.

При користуванні штангенциркулем покази знімають по двох шкалах: по базовій шкалі довжину в міліметрах, а по штриху рухомої шкали, що співпали з міліметровим штрихом нерухомої шкали, відраховують дробні частки міліметра.

Характеристики штангенциркуля, що розглядається:

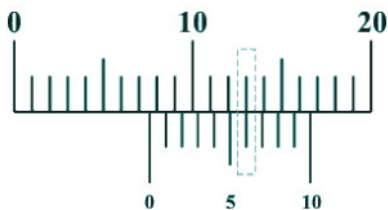
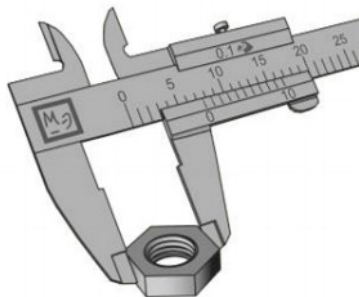
- ціна поділки бази (ЦД 1) ----- 1 мм
- ціна поділки ноніуса (ЦД2) ----- 0,1 мм
- інструментальна похибка $\delta_{\text{п}}$, що визначається мінімальною ціною поділки ----- $\pm 0,1$ мм
- відлік $\delta_{\text{в}}$ ----- 0,1 мм
- абсолютна помилка виміру ----- 0,2 мм

Приклад використання штангенциркуля

При вимірах предмет затискають між нерухомою й рухомою частинами штангенциркуля, як це показано на малюнку, і закріплюють гвинтом на рухомій частині. Якщо нуль шкали ноніуса при цьому точно потрапив на міліметрове ділення основної шкали, розмір предмета дорівнює цілому числу міліметрів (показам основної шкали).

Якщо розмір предмета не дорівнює цілому числу міліметрів, то нуль шкали ноніуса буде розташований між двома поділками основної шкали. У цьому випадку й працює шкала ноніуса, що дозволяє визначити розмір предмета з точністю до 0,1 мм.

Розмір предмета дорівнює цілому числу міліметрових поділок основної шкали, що «переступив» нуль шкали ноніуса, і такому числу десятих часток міліметра, що відповідає поділці шкали ноніуса, яка точно збіглася з одним з міліметрових поділок основної шкали (для прикладу на рисунку – 7,6 мм).



Мікрометр

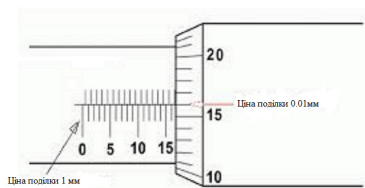
Мікрометр МК відноситься до категорії вимірювальних інструментів, призначених для проведення високоточних вимірів. Висока точність вимірів забезпечується конструкцією. Основними складовими частинами його є:

1. Скоба або дужка, що має 3-образну конструкцію,
2. Стебло – вимірювальна частина, на якій знаходиться основна шкала,
3. Робоча частина, що складається з п'яти й шпинделя.



Робота приладу полягає в переміщенні рухомого гвинта, що з'єднаний з вимірювальною віссю. Переміщення гвинта визначає його відхилення від нульової оцінки. На торцевій частині розглянутого інструмента розташована тріскачка, що призначена для того, щоб виключити ушкодження вимірюваної деталі. При торканні рухомого шпинделя з вимірюваною деталлю, відбувається прокручування тріскачки. Це прокручування і є сигналом про те, що можна робити виміри. Схематично прилад представлений на верхньому рисунку.

Для виявлення показів розмірів деталі, на стеблі приладу є основна шкала, ціна поділок якої становить 0,5 мм. Крок поділки на ній становить 1 мм між більшими рисками (тут, вгорі) та 0,5 мм між великою і малою (малі, тут, знизу). Один оберт барабану (на якому нанесені 50 поділок) відповідає пересуванню рухомого гвинта на 0,5 мм. Тобто, від нульової позначки (риски) вгорі до першої рисочки знизу.



Для визначення розміру деталі, знадобиться скласти отримані результати на рухомій і нерухомій частині. Спочатку прочитається результат верхньої базової шкали. Тобто кількість рисок, що дозволяє бачити тіло барабану. Це буде розмір в міліметрах.

До них додаються покази нижньої шкали, якщо правіше верхньої риски ця рисочка відкриється тілом барабану. Таким чином, визначений результат, як у нашому випадку, коли нижня тільки-но з'явилась, а на барабані є 0, складе 4 мм.

На наступному рисунку видно, що покази основної (міліметрової, тут вона знизу) шкали складають 16 мм. Верхня шкала додає 0,5 мм (рисочка, яка правіша останньої основної, вже з'явилась з-під барабану). А остаточний результат із урахуванням показів шкали барабану (16 поділок) буде 16,62 мм.

Лабораторна робота № 2

Визначення модулів пружності сталі методом розтягування дроту і вигину пластини

Мета роботи:

- визначення модуля Юнга при розтягуванні дроту й при вигині балки;
- ознайомлення з методами вимірювання модуля Юнга.

Теоретичний матеріал

Пружні сили. Деформація суцільного середовища. Типи пружних деформацій. Зв'язок між силою й деформацією. Закон Гука для деформацій розтягування й зсуву. Модуль Юнга. Коефіцієнт Пуассона. Енергія пружної деформації. Діаграма розтягування. Крихкість і пластичність.

Визначення модуля Юнга при розтягуванні дроту

Розглянемо один з найпростіших випадків пружної деформації – розтягування дроту, що має постійний переріз S .

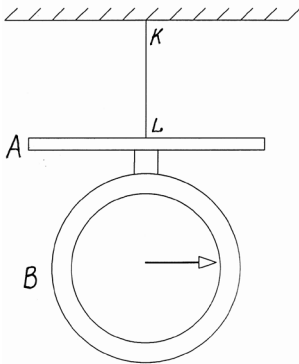


Рис. 1

Верхній кінець дроту закріпимо, а до нижнього підвісимо вантаж з масою m . Нехай l_0 – початкова довжина дроту, а Δl – її абсолютне видовження під дією вантажу m . Згідно із законом Гука, відносне подовження $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ буде прямо пропорційне нормальній напрузі σ ($\varepsilon = \alpha \sigma$). У нашому випадку

$\sigma = \frac{mg}{S}$ (g – прискорення вільного падіння).

Таким чином, можна записати:

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{E} \frac{mg}{S} \quad (1)$$

Коефіцієнт пропорційності α у формулі (1) записаний як $\frac{1}{E}$.

Константа E характеризує пружні властивості речовини, з якої складається дріт, і називається модулем Юнга. Легко бачити, що розмірність останнього в системі СІ $[E] = \frac{H}{m^2} = Па$.

Зі співвідношення (1) виходить, що модуль Юнга дорівнює такій напрузі, яка б розтягнула тіло циліндричної форми вдвічі ($\Delta l = l_0$). Однак, для більшості тіл це неможливо, тому що вони розриваються при значно меншій деформації.

Формула (1) є робочою при визначенні величини E методом розтягування. З огляду на те, що площа поперечного перерізу циліндричного тіла $S = \frac{\pi D^2}{4}$, одержуємо вираз для визначення модуля Юнга у цьому випадку:

$$E = 4 \frac{l_0}{\Delta l} \frac{mg}{\pi D^2}. \quad (2)$$

Методика вимірювань й обробки результатів експериментів

Блок-схема експериментальної установки представлена на рис. 1. До сталевого дроту (KL) прикріплена платформа (А), на яку по черзі кладуть тягарці масою 0,5 кг; 1 кг, ... 2,5 кг. За допомогою індикатора (В) послідовно визначається відповідне абсолютне подовження Δl дроту під дією цих навантажень. Аналогічні вимірювання, тільки у зворотному порядку проводяться при розвантаженні. Отримані дані заносяться в таблицю. У даній роботі пропонується провести обробку результатів двома методами.

Вправа 1. Основні похибки результатів вимірювання абсолютного видовження Δl в даній роботі викликані, головним чином, випадковими зсувами платформи (А) в горизонтальній площині при послідовному збільшенні навантаження на неї тягарців масою m , і відносно низькою якістю обробки її нижньої поверхні (шорсткість поверхні). Як можна бачити з аналізу виразу (2), всі величини, що входять до нього, за винятком Δl і m , є константами.

З огляду на визначення величини E як сталої, що характеризує пружні властивості речовини, формальним чином сталим мало б бути й відношення $\beta = \frac{\Delta l}{m}$.

Отже, дивлячись на β , як на випадкову величину, треба знайти її середнє значення $\langle \beta \rangle$ і абсолютну похибку її вимірювань $\Delta \beta$. Діаметр дроту варто виміряти мікрометром не менше п'яти разів у різних місцях і також вирахувати його середнє значення $\langle D \rangle$ і ΔD . Підставляючи у формулу (2) значення $\langle \beta \rangle$ і $\langle D \rangle$, можна обчислити середнє значення модуля Юнга $\langle E \rangle$, і відносну похибку опосередкованого вимірювання, відповідно до формули:

$$\frac{\Delta E}{E} = \sqrt{\left(\frac{\Delta l_0}{l_0}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \beta}{\beta}\right)^2}$$

Вправа 2. З огляду на лінійний характер залежності механічної напруги від відносного видовження $\sigma = E\varepsilon$, модуль Юнга можна визначити за допомогою графічного методу. Для цього потрібно нанести на графічну площину точки, координатами яких є попередньо розраховані значення зростаючої механічної напруги $\sigma = \frac{4mg}{\pi D^2}$ (вісь ординат) при відповідних величинах відносного видовження $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ (вісь абсцис). За допомогою методу найменших квадратів провести через ці точки пряму, тангенс кута нахилу якої до осі абсцис і є значенням модуля Юнга – E . Порівняйте результати, отримані в першому й у другому завданнях.

Визначення модуля Юнга з вигину балки (пластини) прямокутної форми

Якщо горизонтально розташовану пружну балку (пластину) закріпити з одного кінця, а інший кінець навантажити тілом вагою $P = mg$, то цей кінець опуститься, тобто пластина деформується. Легко зрозуміти, що при такому вигині верхні шари пластини будуть розтягуватися, нижні – стискуватися, а деякий середній (нейтральний) шар зберігатиме довжину й тільки перетплюватиме скривлення.

Переміщення λ , що одержує вільний кінець пластини, називається стрілою прогину. Стріла прогину буде залежати від модуля Юнга E і геометричних параметрів пластини. Для пластини, що має довжину L , ширину a і висоту b , стрілу прогину можна обрахувати за формулою:

$$\lambda = \frac{4mgL^3}{Eab^3} \quad (3)$$

У випадку, якщо пластина буде обома кінцями вільно покладена на тверді опори й навантажена посередині тягарцем вагою mg (рис. 2), стріла прогину буде також визначатися формулою (3), але із відповідними замінами mg на $\frac{mg}{2}$ і L на $\frac{L}{2}$. Дійсно, у такому випадку вага тягарця розподіляється між опорами порівну, і кожна з опор буде чинити на пластину протидію, що дорівнює $\frac{P}{2}$. Таким чином, пластина, що опирається обома кінцями на опори, поводить ся так, ніби вона була закріплена посередині, а на кожний з її кінців, що перебувають на відстані $\frac{L}{2}$ від її середини, діють спрямовані нагору сили $\frac{P}{2}$.

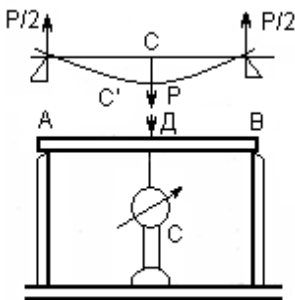


Рис. 2

Отже, стріла прогину буде дорівнювати:

$$\lambda = \frac{mgL^3}{4Eab^3} \quad (4)$$

Установка для визначення модуля пружності пластини по величині її вигину складається з масивної платформи із двома стійками на кінцях. На стійках укріплені сталеві призми так, що їх ребра паралельні між собою. На спеціальній штанзі встановлюють індикатор так, щоб його штифт торкався середини внутрішньої площини пластини. Зверху на середину пластини навантажують послідовно тягарці масою від 0,5 кг до 2,5 кг, з шагом

0,5 кг, щоразу визначаючи стрілу прогину за допомогою індикатора. Далі здійснюють ті ж самі операції у зворотному порядку, відзначаючи щоразу прогин пластини. Результати заносяться в таблицю.

Визначення модуля Юнга проводиться, використовуючи формулу (4), де $\frac{\lambda}{m} = \beta$, за методиками, що запропоновані вище.

Оцінка відносної похибки непрямих вимірів здійснюється відповідно до формули:

$$\frac{\Delta E}{E} = \sqrt{\left(3 \frac{\Delta L}{L}\right)^2 + \left(3 \frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \beta}{\beta}\right)^2}$$

Контрольні питання:

1. За якою ознакою тіла діляться на пружні й непружні? Що вважається деформацією тіла? Яка природа і особливість сил, що виникають усередині тіла при пружних і пластичних деформаціях? У чому причина пружних і пластичних деформацій?
2. Як по величині зовнішньої сили, що деформує тіло, визначити виникаючу при цьому силу пружності?
3. Перелічить основні типи деформацій.
4. Що називається деформацією розтягування (стиску), зсуву? Як при цьому зміщуються окремі шари (і частки) тіла? Якими абсолютними й відносними величинами характеризуються ці деформації та якими силами вони викликаються?
5. Що таке механічна напруга, і в яких одиницях вона вимірюється?
6. У чому полягає закон Гука? Як він математично записується в загальній формі? Наведіть запис закону Гука для деформації розтягування й зсуву.
7. Що називають модулем Юнга й модулем зсуву? В яких одиницях вони вимірюються і як вони пов'язані з коефіцієнтами розтягування й зсуву?
8. Зобразіть графік залежності пружного напруження від ступеню деформації. Вкажіть на графіку область пластичних деформацій.

9. Що називають межею пропорційної залежності? Межею пружності? Межею міцності?
10. Що називається коефіцієнтом Пуассона?
11. Які з величин у даних роботах необхідно виміряти ретельніше і чому?
12. Як деформуються окремі шари стрижня (пластини) при його вигині? Що називається стрілою прогину?
13. З якою метою рекомендується робити виміри як при зростаючих, так і при спадаючих навантаженнях?

Лабораторна робота № 3

Дослідження законів кінематики і динаміки поступального руху на машині Атвуда

Мета роботи:

- експериментальна перевірка законів кінематики і динаміки поступального руху матеріальної точки;
- набуття навичок графічного представлення результатів досліджень та їх аналізу;
- обрахування систематичних похибок вимірювань.

Теоретичний матеріал

Визначення матеріальної точки. Переміщення, швидкість та прискорення прямолінійного руху матеріальної точки, Опис прямолінійного руху матеріальної точки у векторній і координатній формах. Перший закон Ньютона. Сила як міра інтенсивності взаємодії тіл. Другий закон Ньютона. Маса. Імпульс. Третій закон Ньютона.

Основні закони кінематики і динаміки поступального руху матеріальної точки можуть бути перевірені дослідним шляхом на лабораторному пристрої «Машині Атвуда», сконструйованому англійцем Д. Атвудом (1784).

За допомогою запропонованого вченим методу можна ретельно дослідити прямолінійний рівноприскорений рух матеріальної точки, з різними, не дуже великими (порівняно із прискоренням вільного падіння) значеннями прискорення. Пристрій (рис. 1) складається з вертикальної штанги 2 зі шкалою (ціна поділки шкали 1 см), зверху якої встановлений легкий блок на підшипнику, що здатний обертатися з незначним тертям. Тонка нитка, на кінцях якої знаходяться однакові тягарці 3, перекинута через цей блок. Ці тягарці з масою M кожний, можуть спиратися на платформи 4, що здатні пересуватися вздовж штанги і

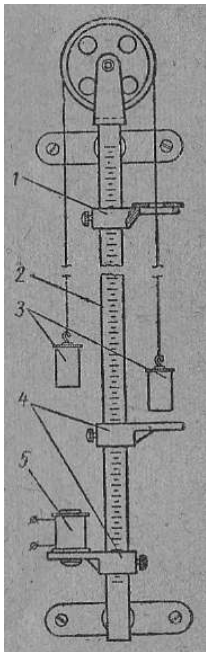


Рис. 1

фіксуватися на ній за допомогою гвинтів. На одній з цих платформ (лівій) встановлений електромагніт 5. Перед початком вимірювань (при вимкненому електромагніті) необхідно перевірити вільність переміщення системи тягарців і перемістити робочий (правий) тягарець у крайнє верхнє положення. Призначення електромагніту (у ввімкненому стані) – утримувати тягарці у стані спокою до початку вимірювань.

Для того, щоб тягарці розпочали рівноприскорений рух (після вимикання електромагніту), на один з них потрібно покласти зверху додатковий тягарець (переобтяжувач), маса якого m . На штанзі також закріплена ще одна платформа 1 з отвором, здатним вільно пропускати через себе один із тягарців масою M , але затримувати, вилучати з системи тіл, тягарець масою m , додаткова вага якого спричиняє рівноприскорений рух. До комплексу лабораторного устаткування також входять два електронних секундоміри, призначення яких фіксувати тривалість руху системи тягарців за наявністю впливу додаткового тягаря t_1 , і без нього t_2 .

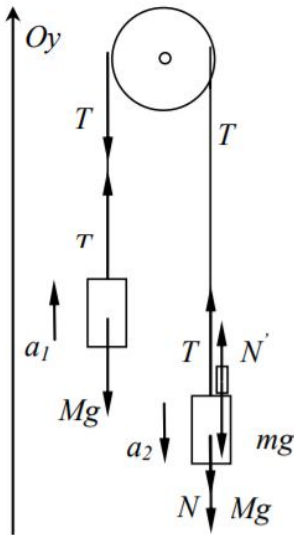


Рис. 2

Якщо на правий тягарець з масою M , як вже було зазначено, покласти додатковий тягарець з масою m і вимкнути електромагніт, то система з трьох тіл почне рухатися так, як це показано на рис. 2. При розгляді цього руху вважається, що маса блока і тертя у ньому є такими, що цим можна знехтувати, а тонка нитка не здатна до розтягування.

Для того, щоб визначити прискорення тягарців в системі відліку, що пов'язана зі штангою, потрібно укласти рівняння поступального руху кожного з трьох тягарців:

$$\begin{cases} M\vec{g} + \vec{T} = M\vec{a}_1 \\ M\vec{g} + \vec{T} + \vec{N} = M\vec{a}_2 \\ m\vec{g} + \vec{N}' = m\vec{a}_3 \end{cases}, \quad (1)$$

або в проекціях на вертикальну вісь Oy :

$$\begin{cases} T - Mg = Ma_1 \\ T - Mg - N = -Ma_2 \\ N' - mg = -ma_3 \end{cases} \quad (2)$$

Оскільки нитка є такою, що не розтягується, то модулі прискорень, з якими рухаються всі три тягарці будуть однаковими $a_1 = a_2 = a_3$, отже розв'язуючи систему рівнянь (2), можна отримати для прискорення тягарців a вираз:

$$a = g \frac{m}{2M + m} \quad (3)$$

Після вимикання електромагніту рух правого тягарця M з додатковим тягарцем m на ділянці довжиною S_1 від їх початкового (крайнього верхнього) положення і платформою з отвором 1 є рівноприскореним, а після цього на ділянці S_2 від платформи 1 до місця зіткнення із платформою 4 тягарець рухається за інерцією, тобто рівномірно. За допомогою машини Атвуда можна перевірити справедливність кінематичних законів рівноприскореного руху (початкова швидкість тягарця $v_0 = 0$):

$$S_1 = \frac{at_1^2}{2}, \quad (4)$$

$$v_1 = at_1. \quad (5)$$

Перевірка формул (4) і (5) здійснюється через варіації положення платформи з отвором 1 при незмінному положенні обох платформ 4 $(S_1 + S_2) = const$, що дозволяє змінювати відстані S_1 і S_2 , і тривалість t_1 і t_2 різного за характером руху. Графічний аналіз отриманих таким чином залежностей $S_1(t_1)$ і $v_1(t_1)$ дозволяє оцінити величину прискорення a і порівняти його із попередньо розрахованим по формулі (3) значенням.

Для визначення миттєвої швидкості v_1 в момент часу t_1 , коли припиняється дія переобтяжувача m і тягарці M починаються рухатися рівномірно зі швидкістю v_2 , треба взяти до уваги, що швидкість рівноприскореного руху правого тягарця v_1 в кінці ділянки S_1 дорівнює швидкості його подальшого рівномірного

$$\text{руху } v_2 = \frac{S_2}{t_2}.$$

Для перевірки другого закону Ньютона $\vec{F} = \sum_i M_i \cdot \vec{a}$ необхідно, щоб сумарна маса тягарців $\sum_i M_i$, що рухаються із прискоренням \vec{a} залишалася сталою, а величина результуючої сили змінювалася. Досягти цього можна, перекладаючи різні за масою перевантажувачі $m_1 > m_2$, з одного тягарця на інший.

Сила, яка надає системі прискорення у випадку, коли обидва перевантажувача знаходяться на правому тягарці дорівнює:

$$F_1 = (m_1 + m_2) g \quad (6.a)$$

Якщо ж менший за масою перевантажувач m_2 перекласти на лівий тягарець, то:

$$F_2 = (m_1 - m_2) g \quad (6.б)$$

З іншого боку, для цих двох випадків, другий закон Ньютона можна записати відповідно:

$$F_1 = (2M + m_1 + m_2) a_1, \quad F_2 = (2M + m_1 + m_2) a_2 \quad (7)$$

Порівнюючи (6) із (7), знаходять для розрахунку відношення прискорень:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} \quad (8.a)$$

Відношення прискорень, можна знайти і дослідним шляхом, якщо згадати, що як у першому випадку, так і у другому повинна виконуватися залежність $S = \frac{at^2}{2}$. Тоді, за умови незмінної у дослідах відстані S :

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\tau_2^2}{\tau_1^2} \quad (8.б)$$

Результати розрахунків $\left(\frac{a_1}{a_2} \right)_{\text{розрах}} \quad \text{за формулою (8.a) і опосеред-}$

кованих вимірювань цього відношення $\left(\frac{a_1}{a_2}\right)_{\text{досл}}$ із застосуванням виразу (8.б) повинні бути приблизно рівними між собою, що і є підтвердженням справедливості другого закону Ньютона.

Порядок виконання роботи:

Перевірте формули (4) і (5) для залежності шляху і швидкості від часу при рівнозмінному русі. Для цього, при незмінній масі перевантажувача (отже прискорення залишиться постійним), проведіть не менше семи дослідів, змінюючи величини S_1 і S_2 із шагом 10 см і вимірюючи час t_1 і t_2 . В таблицю 1 запишіть середні за трьом вимірами показання секундомірів, для кожної пари значень S_1 і S_2 .

Таблиця 1

| | | | | | | | |
|-----------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| S_1 , м | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 |
| t_1 , с | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| \bar{t}_1 , с | | | | | | | |
| S_2 , м | 1,0 | 0,9 | 0,8 | 0,7 | 0,6 | 0,5 | 0,4 |
| t_2 , с | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| \bar{t}_2 , с | | | | | | | |

Вправа 1. Використовуючи дані таблиці 1, заповніть таблицю 2 і побудуйте графік залежності S_1 від t_1^2 , відкладаючи по осі абсцис t_1^2 , а по осі ординат S_1 .

Таблиця 2

| | | | | | | | |
|-------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| S_1 , м | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 |
| \bar{t}_1 , с | | | | | | | |
| \bar{t}_1^2 , с | | | | | | | |

На графіку обов'язково вкажіть похибки для кожної точки. Абсолютні похибки вимірювання відстані S_1 вважати рівними 0,5см, а похибки вимірювання часу розрахувати за даними таблиці 1. По графіку визначте прискорення. Отримане значення a порівняйте з величиною, розрахованою за формулою (3).

Вправа 2. Використовуючи дані таблиці 1 і розрахунки кінцевої швидкості рівнозмінного руху $v_1 = \frac{S_2}{t_2}$, заповніть таблицю 3 і побудуйте графік залежності v_1 від t_1 , відкладаючи по осі абсцис t_1 , а по осі ординат v_1 , з обов'язковим вказуванням похибки по обом осям для кожної точки.

Таблиця 3

| | | | | | | | |
|-----------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| S_2 , м | 1,0 | 0,9 | 0,8 | 0,7 | 0,6 | 0,5 | 0,4 |
| \bar{t}_2 , с | | | | | | | |
| v_1 , м/с | | | | | | | |
| \bar{t}_1 , с | | | | | | | |

По графіку визначте прискорення. Отримане значення a також порівняйте з величиною, розрахованою за формулою (3) і значенням, знайденим при виконанні першої вправи.

Вправа 3. Перевірка виконання другого закону Ньютона. Для цього при незмінному значенні $S = 1,0$ м між крайнім верхнім положенням правого тягарця і платформою 4 розміщують на правому тягарці перевантажувач більшої маси m_1 , а на лівому – меншої маси m_2 . Вимикаючи електромагніт, вимірюють час τ_1 від початку руху системи до зіткнення правого тягарця з платформою 4. Час τ_1 знаходять як середнє для трьох вимірів. Потім знімають перевантажувач m_2 з лівого тягарця і розміщують його на правому тягарці, знаходять час τ_2 також як середнє трьох вимірів. Результати експерименту (S, τ_1, τ_2) ,

вимірювань $\left(\frac{a_1}{a_2}\right)_{\text{досл}} = \left(\frac{\bar{\tau}_2}{\bar{\tau}_1}\right)^2$ і розрахунків $\left(\frac{a_1}{a_2}\right)_{\text{розрах}}$ заносять у таблицю 4.

Таблиця 4

| № | $\tau_1, \text{н}$ | $\overline{\tau_1^2}, \text{н}^2$ | $\tau_2, \text{н}$ | $\overline{\tau_2^2}, \text{н}^2$ | $\left(\frac{a_1}{a_2}\right)_{\text{досл}}$ | $\left(\frac{a_1}{a_2}\right)_{\text{розра}}$ |
|---|--------------------|-----------------------------------|--------------------|-----------------------------------|--|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |

Проводять порівняння отриманих в останніх стовпчиках таблиці 4 середнього значення $\left(\frac{a_1}{a_2}\right)_{\text{досл}}$ з величиною $\frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}$.

Контрольні питання:

1. Дайте визначення переміщення, швидкості і прискорення матеріальної точки.
2. Сформулюйте закони динаміки поступального руху.
3. Який вид має графік залежності координати від часу при рівнозмінному русі при наявності початкової швидкості і за її відсутності? Як по цьому графіку визначити швидкість тіла в даний момент часу?
4. Рівнозмінний рух тіл можна було б вивчати на прикладі вільного падіння. Які при цьому виникають труднощі? У чому перевага й недоліки вивчення такого характеру руху за допомогою машини Атвуда?
5. Які помилки виникають у даній роботі? Які заходи варто прийняти для їхнього усунення або для зменшення величини цих помилок?
6. Чи зміниться натяг ниток, якщо один тягарець замінити іншим?

Лабораторна робота № 4

Перевірка теореми про рух центра маси систем матеріальних точок

Мета роботи:

- експериментальна перевірка законів динаміки матеріальної точки;
- набуття навичок графічного представлення результатів досліджень та їх аналізу;
- обрахування систематичних похибок вимірювань.

Теоретичний матеріал

Визначення матеріальної точки. Визначення переміщення, швидкості й прискорення матеріальної точки у векторній і координатній формах. Прямолінійний рух матеріальної точки. Фізичний зміст першого закону Ньютона. Сила як міра інтенсивності взаємодії тіл. Другий закон Ньютона. Маса. Імпульс. третій закон Ньютона.

В будь-якій системі матеріальних тіл існує одна унікальна точка C – центр інерції або центр мас, яка має ряд цікавих і важливих властивостей. Положення цієї точки відносно початку O даної системи відліку за допомогою радіус-вектору \vec{r}_c можна визначити наступним чином:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m} \quad (1)$$

де m_i і \vec{r}_i – маса і радіус-вектор i -го тіла, $m = \sum m_i$ – маса всієї системи.

Відповідно, в проекціях на координатні осі:

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{m}, \quad y_c = \frac{\sum m_i y_i}{m}, \quad z_c = \frac{\sum m_i z_i}{m}. \quad (1.a)$$

У випадку якщо тверде тіло є суцільним і однорідним, його центр має співпадати з центром симетрії. Якщо тіло має вісь симетрії, то центр мас лежить на цій осі. В більш складних випадках координати центра мас знаходяться або шляхом розрахунків, або з експерименту. Відзначимо також, що в однорідному полі сили

тяжіння центр інерції системи співпадає з її центром тяжіння.

Знайдемо швидкість руху центра мас. Взявши похідну від (1) за часом, можна отримати:

$$\vec{v}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{v}_c = \frac{1}{m} \sum_i \vec{p}_i, \quad (2)$$

де \vec{p}_i – імпульс i – го тіла.

Для імпульсу системи $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$, із (2) витікає, що:

$$\vec{P} = m\vec{v}_c, \quad (3)$$

тобто імпульс системи дорівнює добутку маси системи на швидкість руху її центру мас.

З огляду на другий закон Ньютона в диференційному вигляді:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}, \quad (4)$$

де \vec{F} – є результируючою всіх зовнішніх сил, які діють на систему.

Із (2) і (4) можна отримати:

$$m \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}. \quad (5)$$

Рівняння (5) називається рівнянням руху центру мас. Згідно з цим рівнянням, при русі будь-якої системи тіл (в інерціальній системі відліку), її центр мас рухається так, якби вся маса системи була зосереджена в цій точці і до неї були б прикладені всі зовнішні сили, які діють на систему. При цьому прискорення центру мас тіла зовсім не залежить від того, до яких точок тіла прикладені зовнішні сили.

Із (5) випливає, що якщо результируюча сила $\vec{F} = 0$, то $\frac{d\vec{v}_c}{dt} = 0$, а отже $\vec{v}_c = const$. Таким, зокрема, є випадок, коли система матеріальних точок є замкненою. І, крім того, якщо $\vec{v}_c = const$, то, згідно з (3), імпульс системи також не змінюється. Тобто, якщо центр мас системи рухається рівномірно і прямолінійно, то її імпульс зберігається в під час цього руху.

Рівняння (5) по формі співпадає з основним рівнянням динаміки матеріальної точки і є його узагальненням на випадок руху системи тіл.

Метою даної роботи є експериментальна перевірка теореми про рух центра мас. Для цього використовується машина Атвуда, доповнена деякими деталями (рис. 1).

Два тягарця А і В, маси яких однакові і рівні 0,5 кг, підвішені на двох паралельних нитках, перекинутих через блоки С і Д. Наявність цих двох паралельних ниток не дає змоги тягарцям обертатися навколо їх вертикальних осей. Тягарець А має форму циліндру, а тягарець В складається із двох напівциліндрів, складених своїми площинами так, що між ними існує проміжок, так що центр мас цього тягарця повинен знаходитися на тонкому дроті, який з'єднує його дві половинки.

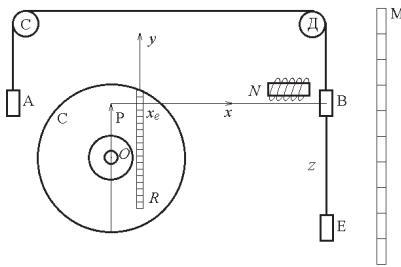


Рис. 1

Приблизно на середині прямої, яка з'єднує центри мас тягарців, що вільно висять, розміщений важіль Р, який може обертатися у вертикальній площині навколо осі О і переміщуватися поступально в площині обертання. Це дозволяє виставити гострий кінець важеля Р у центрі мас тягарців А і В і зафіксувати таке положення важеля гвинтом.

До гострого кінця важеля прикріплена нитка Z. Вона проходить у щілину важеля В через його центр мас (нитка перекинута через дріт у щіліні) і опускається вертикально вниз між двома напівциліндрами. Нитка весь час натягнута, оскільки на її нижньому кінці закріплено тягарець Е. На тягарці В симетрично з двох його кінців прикріплені гачки (на рис. 1 не показані), на які можна підвішувати додаткові тягарці. При навантаженні додатковими тягарцями (масою тягарця Е можна знехтувати) центр мас системи зміщується вздовж нитки Z (вісь X).

Коли система рухається (тягарець В – вертикально вгору, тягарець А – вертикально вниз), центр мас рухається вниз вздовж осі Y, залишаючись весь час на лінії натягнутої нитки.

Отже, за рухомим центром мас можна спостерігати як за рухом заздалегідь визначеної та фіксованої точки перетину нитки Z

і вертикальної прямої Y . Цією прямою є лівий край металевої лінійки R з поділками, здатної переміщуватися паралельно сама до себе у вертикальній площині. Переміщення лінійки досягається через те, що вона вільно підвішена до краю диска C , який може обертатися навколо горизонтальної осі O . Обертання диска по часовій стрілці дає переміщення лінійки вправо і навпаки. Гвинтом лінійка може бути закріплена в потрібному положенні.

Для утримування тягарців (за наявності додаткових тягарців на тягарці B) у спокої використовується електромагніт N . При вимиканні електромагніту тягарець B звільняється. Одночасно з цим вмикається цифровий секундомір, який фіксує початок руху системи. Відлік часу цифровим секундоміром припиняється у той момент, коли тягарець B досягає нижньої платформи, на якій міститься електричний контакт для виключення секундоміра.

В умовах даної задачі, x – координата центру мас залишається незмінною і рівною:

$$x_0 = \frac{m_1 x_1 - m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad (6)$$

де m_1 – маса тягарця B і всіх додаткових тягарців на ньому; m_2 – маса тягарця A ; x_1 і x_2 – їх горизонтальні координати, відлік яких відбувається від кінця важеля P .

y – компонента центру мас рухається вздовж вертикалі, що співпадає з лівим краєм лінійки R , із прискоренням, яке може бути визначеним з рівняння руху центру мас, яке в даній ситуації має вигляд:

$$(m_1 + m_2)\gamma = (m_1 + m_2)g - (T_1 + T_2), \quad (7)$$

тут T_1 і T_2 – натяг ниток тягарців B і A , відповідно.

Рівняння руху для тягарців B і A за умов нехтування силами їх тертя в повітрі, якщо вважати нитку невагомою і такою, що не розтягується, мають вигляд:

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g - T_1 \\ -m_2 a = m_2 g - T_2 \end{cases} \quad (8)$$

Тут за додатній напрямок прийнято напрямок вектору \vec{g} . Розв'язанням системи рівнянь (8) є вираз для визначення приско-

рення руху тягарців a :

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g - (T_1 - T_2)}{m_1 + m_2} \quad (9)$$

Нехтуючи масою блоків С і П порівняно з масою тягарців А і В, можна різницю сил натягу нитки $(T_1 - T_2)$ ототожити з силою тертя в осях двох блоків, тобто вважати, що:

$$T_1 - T_2 = 2f_T = m'g, \quad (10)$$

де m' – маса додаткового тягарця при визначенні сили тертя (див. нижче). З урахуванням (10), формула (9) приймає вигляд:

$$a = \frac{(m_1 - m_2 - m')g}{m_1 + m_2} \quad (11)$$

Із рівнянь (7) і (8) отримаємо:

$$(m_1 + m_2)\gamma = (m_1 - m_2)a \quad (12)$$

Після підстановки (11) в (12), остаточно отримуємо формулу для визначення вертикальної складової прискорення центру мас:

$$\gamma = \frac{(m_1 - m_2)(m_1 - m_2 - m')}{(m_1 + m_2)^2} g \quad (13)$$

Порядок виконання роботи

1. Перед тим, як почати вимірювання, необхідно переконатися, що нитки не перекручені (тягарці легко рухаються), електромагніт функціонує і при опусканні тягарця В замикається контакт, який вимикає цифровий секундомір.
2. На тягарець В навішують додаткові тягарці і знаходять, при якому найменшому m' починається рух тягарців, тобто вага тягарця m' і буде давати силу тертя (сила тертя спокою несуттєво відрізняється від сили тертя при переміщенні). Величину m' визначають за результатами 5 – 6 вимірювань.
3. На тягарець В навішують додаткові тягарці (10 або 15 г) і визначають із формули (6) x_c – координату центра мас. Початок координат при цьому належить сумістити з центром мас тягарців А і В (без врахування додаткових тягарців), тобто в

місці закріплення нитки Е. У цьому випадку координати x_i центрів мас тягарців А і В є рівними за модулем і можуть бути знайдені як половина відстані між тягарцями А і В, коли вони знаходяться на одному рівні ($l = 100$ см). Після визначення відстані x_c , на яку зміщується центр мас системи при заданому навантаженні, необхідно закріпити на цій відстані лівий край лінійки R.

4. Після цього тягарець В піднімають і фіксують на заданій висоті за допомогою електромагніту. Відмічають ту поділку на вертикальній лінійці R, напроти якої проходить натягнута нитка Z. Вимикають електромагніт і одночасно вмикають цифровий секундомір. В момент удару тягарця В об нижню платформу секундомір припиняє відлік часу руху. Записують показання секундоміру. Знову відмічають, на якому відліку шкали лінійки R знаходилась в цю мить нитка. Це дає змогу визначити відстань, яку проходить центр мас за час, визначений секундоміром. Змінюючи положення нижньої платформи на стійці можна змінювати час руху системи тіл. Для заданої величини перевантаження на тягарці В і різних інтервалів руху тягарців (різних положень нижньої платформи) прискорення повинно залишатися постійною величиною. Необхідно впевнитися у цьому.
5. Для визначення величини прискорення переміщення центра мас використовується кінематичний закон:

$$\gamma = \frac{2S}{t^2},$$

де S – відстань, яку проходить центр мас системи за час t . Відповідні величини S і t знаходять за декількома (5–6) вимірами (для фіксованого положення нижньої платформи). Знаходять похибку вимірів.

6. Безпосередня перевірка теореми про рух центра мас полягає у встановленні відповідності (в межах похибки вимірів) між визначеною дослідним шляхом величиною γ і її розрахованим значенням, отриманим за формулою (13).

Контрольні питання:

1. Сформулюйте закони динаміки поступального руху.
2. Який вид має графік залежності координати від часу при рівнозмінному русі за наявності початкової швидкості і за її відсутності? Як по цьому графіку визначити швидкість тіла в даний момент часу?
3. Рівнозмінний рух тіл можна було б вивчати на прикладі вільного падіння. Які при цьому виникають труднощі? У чому перевага й недоліки вивчення такого характеру руху за допомогою машини Атвуда?
4. Які помилки виникають у даній роботі? Які заходи варто було б вжити для їхнього усунення або для зменшення впливу цих помилок на результати обчислень?
5. Чи змінюється натяг ниток, якщо один тягарець замінити іншим?

Лабораторна робота № 5

Дослідження пружного центрального удару двох кульок

Мета роботи:

- застосування на практиці законів збереження в механіці для визначення часу та середньої сили пружного зіткнення двох кульок;
- опанування методу дослідження швидкоплинних процесів та вимірювання коротких часових інтервалів.

Теоретичний матеріал

Система матеріальних точок. Закон збереження імпульсу для замкнутих систем. Умови збереження окремих компонентів імпульсу для незамкнутих систем. Робота сили. Силове поле. Поле потенційних сил. Потенційна й кінетична енергії. Зв'язок сили з потенційною енергією. Потенційна енергія пружної й гравітаційної взаємодії. Закон збереження енергії. Консервативні й дисипативні системи. Пружні й непружні зіткнення матеріальних тіл. Центральний і нецентральний удар абсолютно пружних і абсолютно непружних кульок.

В механіці під ударом розуміють короткочасну взаємодію двох або більше тіл, яка виникає під час їх зіткнення, наприклад, співудар кульок, удар молотка об ковадло, попадання кулі у мішень, тощо.

Якщо в результаті удару механічна енергія не переходить в інші форми енергії, то удар можна визначити як ідеально пружний. При такому ударі двох кульок протягом короткочасного зіткнення відбувається їх деформація, під час якої кінетична енергія тіл переходить в енергію їх пружної деформації (потенціальну енергію). В момент, коли деформація кульок сягає найбільшого ступеню, пружні сили є максимальними. Після цього під дією пружних сил починається розштовхування цих тіл, під час якого потенціальна енергія стискання кульок знову поступово переходить в їх кінетичну енергію руху, поки кульки остаточно не розійдуться. Ідеальному удару відповідає повне відтворення форми тіл, що стикаються. Час, за який відбувається зіткнення, залежить від пружних констант, матеріалу кульок та їх відносної швидкості в момент початку руху.

Але насправді ідеальних пружних зіткнень в природі не спостерігається, оскільки завжди частина енергії втрачається на необоротну деформацію тіл і збільшення їх внутрішньої енергії. Проте, як показує досвід, для деяких тіл, наприклад сталевих кульок, втратами механічної енергії під час їх зіткнення все ж таки можна нехтувати.

Розглянемо центральний ідеально пружний удар двох кульок. Удар називається *центральним*, якщо напрямок руху двох кульок при їх зіткненні в момент їх стикання збігається з прямою, яка з'єднує центри кульок.

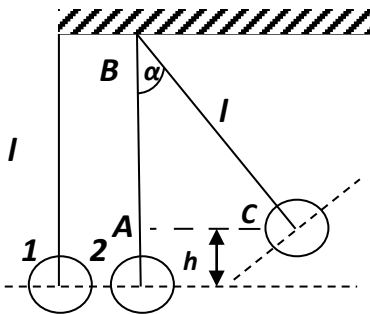


Рис. 1

З урахуванням детальної картини, описаної вище, у другому законі Ньютона, який можна застосувати до цього явища:

$$\vec{F}dt = m d\vec{v}, \quad (1)$$

де \vec{F} – є середньою силою, яка діє на кульки під час удару; dt – час удару, тобто час за який відбувається зіткнення кульок, m – маса одної з кульки; $d\vec{v}$ – зміна швидкості цієї кульки, що виникла внаслідок удару.

Аналіз рівняння (1) показує, що з чим більшою силою під час удару кульки діють одна на одну, тим за менший час відбувається їх зіткнення (при однаковій зміні швидкості кульки).

Розглянемо систему, яка складається із двох однакових за розміром і масою кульок ($m_1 = m_2$), що підвішені на практично нерозтяжних нитках довжиною l (рис. 1). Після того, як другу кульку (праву) відхиляють на кут α від положення рівноваги і відпускають, ця кулька, повертаючись до положення рівноваги, поступово збільшує свій імпульс, який в момент, що передує удару, набуває значення $m_2 v_2$.

Згідно із законом збереження імпульсу:

$$m_2 v_2 = m_2 v'_2 + m_1 v'_1, \quad (2)$$

де v'_2, v'_1 – швидкості першої і другої кульок після удару.

Оскільки удар кульок вважається абсолютно пружним, кінетична енергія системи до удару і після нього будуть однаковими:

$$\frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_2 v_2'^2}{2} + \frac{m_1 v_1'^2}{2} \quad (3)$$

З огляду на те, що $m_1 = m_2$, рівняння (2) і (3) можна об'єднати у систему:

$$\begin{cases} v_2 = v_2' + v_1' \\ v_2^2 = v_2'^2 + v_1'^2 \end{cases} \quad (4)$$

Після підведення до квадрату першого рівняння цієї системи, і отримання його різниці із другим рівнянням, можна побачити, що при абсолютно пружному ударі двох однакових кульок добуток рівняється $2v_2'v_1' = 0$. Але, оскільки внаслідок удару перша кулька почала рухатися, і $v_1' \neq 0$, то $v_2' = 0$. Отже за умови, що кульки, які стикаються, є однаковими, друга кулька, що рухається до удару, повністю передає свій імпульс нерухомій першій кульці і після цього зупиняється. Тобто, як видно з (4), $v_2' = v_1'$ і кульки нібито «обмінюються» швидкостями.

Визначення середньої сили удару під час зіткнення двох кульок

Проміжок часу, за який відбувся удар кульок, є кінцевим, тому в законі Ньютона (1) можна перейти від нескінченно малих до кінцевих величин $dt \rightarrow \tau$, $dv \rightarrow \Delta v$. Оскільки друга кулька після зіткнення з першою зупиняється $v_2' = 0$, то $\Delta v = v_2 - v_2' = v_2$. Тоді (1) можна переписати у вигляді:

$$F\tau = m_2 v_2 \quad \text{або} \quad F = \frac{m_2 v_2}{\tau} \quad (5)$$

Таким чином, за умови що маса кульок є відомою, середню силу удару під час їх зіткнення можна визначити з останнього виразу (5), якщо знати швидкість кульки в момент удару і час τ .

Визначення швидкості кульки при її ударі з іншою кулькою

Друга кулька, яку відвели від положення рівноваги на кут α (рис. 1), має запас потенціальної енергії $E_n = mgh$. Після того як кульку відпустили, ця енергія поступово переходить у кінетичну, і в самій нижчій точці її траєкторії повна механічна енергія

кульки дорівнює тільки її кінетичній енергії $E_k = \frac{m_2 v_2^2}{2}$.

За законом збереження повної механічної енергії маємо:

$$mgh = \frac{m_2 v_2^2}{2}$$

Звідки:

$$v_2 = \sqrt{2gh}, \quad (6)$$

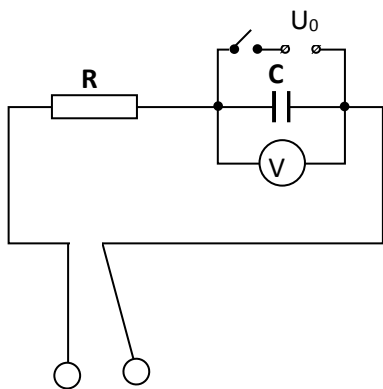
Висоту h , на якій на початку руху знаходилася друга кулька, можна визначити із геометричних міркувань, якщо розглянути прямокутний трикутник ΔABC на рис. 1 з гіпотенузою l і прилеглим до неї кутом α , косинус якого дорівнює $\cos \alpha = \frac{l-h}{l}$, звідки:

$$h = l(1 - \cos \alpha) = 2l \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

Після підстановки h до рівняння (6), остаточно знайдемо для швидкості другої кульки безпосередньо перед її ударом з першою кулькою:

$$v_2 = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{gl} \quad (7)$$

Визначення часу за який відбувається зіткнення кульок



Ідея методу полягає в тому, що кульки при ударі замикають електричне коло, яке складається із джерела постійного струму, конденсатора ємністю C , електричного опору R і вольтметра, з'єднаних між собою так, як це показано на схемі (рис. 2). В момент, коли кульки дотикаються одна одній, через RC ланцюжок відбувається розрядка попередньо зарядженого конденсато-

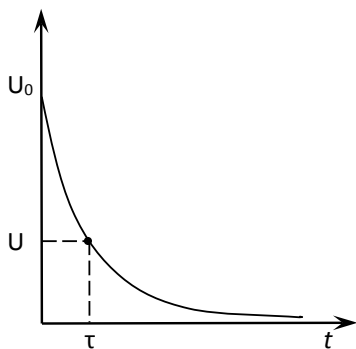


Рис. 2

ра. Для його повної розрядки через опір R потрібен певний час t . Якщо час τ , за який відбувається зіткнення кульок, менший ніж час t , необхідний для того, щоб всі електрони перейшли з одної обкладинки конденсатора на іншу, то при співударі конденсатор розрядиться не повністю. Той електричний заряд, який залишиться, буде створювати між обкладинками конденсатора напругу U .

Отже, якщо взяти до уваги експоненційний характер зменшення напруги з часом між обкладинками конденсатора внаслідок його розрядження (рис.3), то:

$$U(t) = U_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (8)$$

Після логарифмування рівняння (8), з огляду на умову, що коли $t = \tau$, то $U(t) = U$, можна отримати вираз для визначення часу τ , за який відбувається зіткнення кульок:

$$\tau = RC \ln \frac{U_0}{U} \quad (9)$$

Таким чином, знаючи початкову напругу між обкладинками конденсатора U_0 та визначивши напругу U на момент τ завершення зіткнення кульок, за умови, що відомі номінали опору R і конденсатору C , не важко визначити час співудару за формулою (9).

Порядок виконання роботи

1. В електричному колі, зібраному за схемою (рис. 2), підключіть тимчасово за допомогою кнопки «старт» конденсатор до джерела постійного струму та після від'єднання останнього визначить за показаннями вольтметра напругу між обкладинками конденсатору U_0 . Вимірювання потріб-

но повторити п'ять раз, кожного разу перед наступним вимірюванням повністю розряджаючи конденсатор шляхом приведення до контакту двох сталевих кульок. Отримані дані потрібно занести в таблицю.

2. Зафіксуйте лівий електромагніт у положенні, що відповідає заданому куту відхилення нитки α . Проведіть зарядку конденсатора (див. п. 1), потім зафіксуйте рукою ліву кульку у гнізді електромагніту. Електромагніт вмикається після натискування та утримування в такому стані кнопки «старт» на панелі установки. Відпустіть кнопку «старт», при цьому кулька почне рухатися. Одночасно натисніть праву кнопку, яка вмикає правий електромагніт. Слідкуйте за тим, щоб після удару права кулька була зафіксована цим електромагнітом. Якщо цього не станеться, буде мати місце багаторазовий співудар кульок, і такі досліди повинні вибраковуватися. Покази вольтметра U при одноразовій розрядці конденсатора за час удару, також слід занести до таблиці. Дослід необхідно повторити п'ять разів. Проведіть розрахунки похибки експерименту.
3. Змініть кут α і повторіть досліди (для трьох значень α), кожного разу повторюючи дії, описані у п. 2.
4. Розрахуйте швидкість v_2 за формулою (7), час співудару τ за формулою (9) і проведіть оцінку середньої сили удару F за формулою (5) для різних кутів відхилення. Необхідні відомості про параметри задачі (l, m, C, R) візьміть з таблички на приладі.

Контрольні питання:

1. Яка система тіл називається замкнутою?
2. Сформулюйте закон збереження імпульсу.
3. У яких випадках для незамкнутої системи тіл можна застосувати закон збереження імпульсу?
4. Які сили називаються консервативними? Приведіть приклади консервативних сил.
5. Дайте визначення кінетичній і потенційній енергіям.
6. Чому в полі консервативних сил можна ввести поняття потенційної енергії?

7. Сформулюйте закон збереження механічної енергії.
8. У якому випадку удар вважається абсолютно пружним? Абсолютно непружним? Які закони механіки при цьому виконуються?
9. Як пояснити, що при абсолютно пружному ударі двох куль швидкості куль після удару різні, а при абсолютно непружному ударі кулі рухаються після удару як одне ціле?
10. Як змінюються в даному завданні швидкості куль в результаті зіткнення та до удару?
11. У процесі зіткнення кулі деформуються. У який момент часу деформація досягає свого максимального значення? Як змінилися під час удару імпульс, кінетична енергія та сила взаємодії куль у випадку абсолютно пружного й абсолютно непружного удару?
12. За допомогою якого методу у даній роботі вимірюється час зіткнення куль?

ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА

Запропонований цикл лабораторних робіт з розділу «Динаміка обертального руху твердого тіла» складається з наступних завдань:

1. Вивчення основного рівняння динаміки обертального руху за допомогою маятника Обербека.
2. Визначення швидкості кулі за допомогою крутильно-балістичного маятника.
3. Визначення моменту інерції махового колеса і моменту сили тертя в опорі.
4. Визначення моменту інерції тіл і перевірка теореми Гюйгенса-Штейнера за допомогою крутильних коливань.
5. Вивчення динаміки руху твердих тіл за допомогою маятника Максвелла.
6. Вивчення прецесії гіроскопа.
7. Вивчення еліпсоїда інерції твердих тіл.

Кожна з лабораторних робіт повинна розглядатися як невелике самостійне наукове дослідження із захистом отриманих результатів. Тому при підготовці до виконання робіт слід звернути особливу увагу на теоретичний матеріал вивченого розділу, не обмежуючись відомостями, даними в методичних вказівках, а використовуючи конспект лекцій та рекомендовану лектором літературу. Для успішного захисту роботи необхідно обґрунтувати правильність обраної методики експериментальних досліджень, представити результати експериментів з оцінкою похибок вимірювань, зіставити результати дослідних даних з теоретичними розрахунками.

Основні закони динаміки обертального руху тіла

Особливістю обертального руху є те, що всі точки твердого тіла рухаються по концентричних колах, центри яких розташовані на осі обертання. Ці точки рухаються з різними лінійними швидкостями, а однаковою для них є кутова швидкість $\vec{\omega}$. Тому при описі обертального руху тіл необхідно всі динамічні характеристики виразити через кутову швидкість $\vec{\omega}$ і кутове прискорення $\vec{\beta}$. Це призводить до необхідності введення ряду нових фізичних величин: моменту сили, моменту імпульсу та моменту інерції.

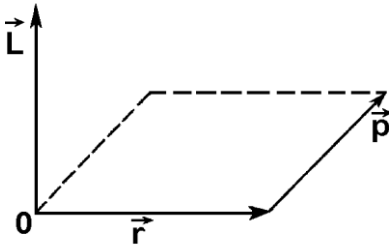


Рис. 1

Нехай положення деякої матеріальної точки відносно точки 0, прийнятої за початок, характеризується радіус-вектором \vec{r} та імпульсом \vec{p} , (рис. 1). Тоді момент імпульсу цієї точки відносно початку 0 є вектор $\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]$, напрям якого визначається правилом правого гвинта. Аналогічно можна

ввести поняття моменту сили \vec{M} : $\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]$, тут під \vec{F} розуміють рівнодіючу усіх сил, які діють на матеріальну точку.

Продиференціюємо момент імпульсу за часом:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} \right] + \left[\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \right].$$

Оскільки $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ і збігається з напрямком імпульсу \vec{p} , то перший доданок дорівнює 0. Другий доданок являє собою момент сили \vec{M} , оскільки $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$

В результаті отримуємо рівняння моментів $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$, яке відіграє важливу роль при розгляді обертового руху матеріальних точок і тіл.

Знайдемо тепер рівняння руху твердого тіла, яке обертається відносно нерухомої осі. Для кожної з точок тіла з елементарною масою можна записати: $\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_i$.

Підсумовуючи по всіх точках тіла, отримаємо:

$$\sum_{i=1}^N \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i.$$

З огляду на адитивність величин \vec{L}_i і \vec{M}_i , останнє співвідношення можна переписати:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (1)$$

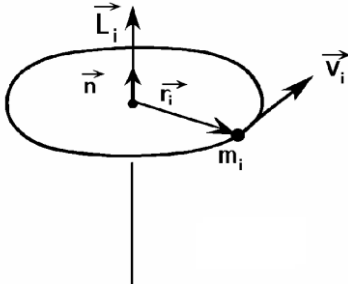


Рис. 2

Тут \vec{L} і \vec{M} – сумарні момент імпульсу і момент зовнішніх сил, які діють на тіло. Момент імпульсу і-ої матеріальної точки \vec{L}_i можна представити у вигляді:

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i].$$

Так як розглядається обертання твердого тіла, то $\vec{r}_i \perp \vec{v}_i$, тому:

$$\vec{L}_i = r_i \cdot m_i \cdot v_i \cdot \vec{n},$$

де \vec{n} – одиничний вектор уздовж осі обертання (див. рис. 2). Разом з тим $v_i = r_i \cdot \dot{\omega}$, тоді:

$$\vec{L}_i = m_i \cdot r_i^2 \cdot \omega \cdot \vec{n} = m_i \cdot r_i^2 \cdot \vec{\omega}, \text{ а } \vec{L} = \sum_i \vec{L}_i.$$

Підставивши у рівняння (1) це значення \vec{L}_i і виносячи за знак суми $\vec{\omega}$, отримаємо:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \vec{\omega} \sum_{i=1}^N (m_i r_i^2) \right\} = \vec{M}. \quad (2)$$

Введемо наступне позначення:

$$I = \sum_{i=1}^N m_i \cdot r_i^2$$

Величина I називається моментом інерції тіла щодо осі \vec{n} . Момент інерції тіла характеризує інертні властивості тіла щодо зміни кутової швидкості. Він залежить як від конфігурації точок у системі, так і від вибору осі, щодо якої розглядається обертання.

Тоді співвідношення (2) можна записати у вигляді:

$$\frac{d}{dt} (I \cdot \vec{\omega}) = \vec{M}. \quad (3)$$

Останній вираз являє собою основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла. Порівнюючи його з (1), знаходимо:

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}.$$

Якщо момент інерції тіла постійний, тобто в процесі обертального руху тіла конфігурація його точок не змінюється, то рівняння динаміки обертального руху відносно нерухомої осі обертання набирає вигляду:

$$I \cdot \frac{d\omega}{dt} = M ,$$

де I – момент інерції тіла відносно осі, $\frac{d\omega}{dt}$ – кутове прискорення, M – момент зовнішніх сил щодо зазначеної осі.

Зі співвідношення (3) випливає, що якщо момент всіх зовнішніх сил, які діють на тіло, дорівнює нулю ($M = 0$), то $I \times \omega = const$. Це одна з форм запису фундаментального закону фізики закону збереження моменту імпульсу. Більш загальне формулювання цього закону має такий вигляд: в інерційній системі відліку момент імпульсу замкнутої системи частинок залишається постійним:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i(t) = const .$$

Тут слід пам'ятати, що моменти імпульсу окремих частин системи можуть змінюватися з часом. Однак ці зміни завжди відбуваються так, що збільшення моменту імпульсу однієї частини системи дорівнює зменшенню моменту імпульсу її іншої частини. Відзначимо, що міркування, які призводять до закону збереження моменту імпульсу, цілком спираються на справедливість законів Ньютона. А як справи в системах, які не підкоряються цим законам, наприклад, в системах з електромагнітним випромінюванням, в атомах, ядрах і ін.?

З огляду на важливу роль, яку відіграє закон збереження моменту імпульсу в фізиці, поняття моменту імпульсу розширюють на немеханічні системи і постулюють закон збереження моменту імпульсу для всіх фізичних процесів. Такий розширений закон збереження моменту імпульсу вже не є наслідком законів Ньютона, а являє собою самостійний загальний принцип, який є узагальненням дослідних даних.

Знайдемо тепер кінетичну енергію обертання твердого тіла для випадку нерухомої осі:

$$E_k = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \cdot v_i^2}{2}$$

Так як $v_i = r_i \cdot \omega$, то:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot \sum_{i=1}^N m_i \cdot r_i^2 = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2.$$

Якщо тіло рухається ще й поступально зі швидкістю \vec{V}_c , то:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_c^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \dot{\varphi}^2,$$

де V_c – швидкість руху центру мас тіла.

Порівняємо тепер основні співвідношення динаміки обертального руху твердого тіла і поступального.

| Обертальний рух | Поступальний рух |
|--|---|
| $\frac{d}{dt}(I \cdot \vec{\omega}) = \vec{M}$ | $\frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = \vec{F}$ |
| $\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$ | $\vec{P} = m \cdot \vec{v}$ |
| $E_k = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$ | $E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ |

Лабораторна робота № 6

Вивчення обертального руху твердого тіла за допомогою маятника Обербека

Мета роботи:

- експериментально перевірити основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла, використовуючи залежності прискорення тіла від моменту зовнішньої сили і моменту інерції маятника.

Теоретичний матеріал

Обертальний рух твердого тіла. Момент сили, момент інерції. Теорема Штейнера. Основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла. Кутові швидкість і прискорення. Нормальне і тангенціальне прискорення.

Теоретичне введення

В роботі вивчається динаміка обертального руху твердого тіла. Зокрема, експериментально перевіряється основне рівняння динаміки обертального руху тіла навколо нерухомої осі:

$$I \frac{d\omega}{dt} = M \quad \text{або} \quad I \dot{\alpha} = M, \quad (1)$$

де I – момент інерції тіла; β – кутове прискорення; M – сума проєкцій на вісь обертання моментів зовнішніх сил.

На рис. 1 схематично показаний прилад, за допомогою

якого зручно досліджувати рівняння (1). Він називається маятником Обербека. Чотири спиці закріплені на втулці під прямим кутом. На спицях знаходяться вантажі масою $m_{\text{пр}}$ кожен. Втулка і два шківів радіусами r_1 і r_2 насаджені на загальну вісь.

Ось закріплена в підшипниках так, що вся система може

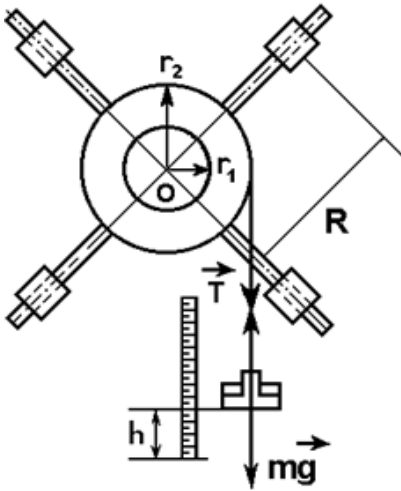


Рис. 1

обертатися навколо горизонтальної осі. Пересуваючи вантажі по спицях, можна легко змінювати момент інерції I тіла. На шків намотана нитка, до якої прив'язана платформа відомої маси. На платформу поміщається вантаж, нитка натягується і створює обертальний момент:

$$M = Tr_p \quad (2)$$

де T – сила натягу нитки, r_1 – радіус шківа (r_1 дорівнює r_1 або r_2). Силу T можна знайти з рівняння руху платформи з вантажем:

$$mg - T = ma, \quad (3)$$

де m – маса платформи з вантажем, a – її прискорення. Прискорення пов'язано з кутовим прискоренням β , в разі відсутності прослизання нитки, співвідношенням:

$$\beta = a/r. \quad (4)$$

З рівнянь (2) і (3) отримуємо, що момент сили натягу нитки:

$$M = Tr = m(g - a)r. \quad (5)$$

Крім того, на маятник діє момент сили тертя в осі $M_{тр}$. З урахуванням цього рівняння (1) має вигляд:

$$m(g - a)r - M_{тр} = I \cdot a/r. \quad (6)$$

У рівняння (6) входить прискорення "а" платформи. Це прискорення можна досить просто визначити експериментально.

Дійсно, вимірюючи час t , протягом якого платформа з вантажем опускається на відстань h , можна знайти прискорення a :

$$a = 2h/t^2. \quad (7)$$

Тоді :

$$a = \frac{gmr^2/I - M_{тр} r/I}{1 + m^2/I}. \quad (8)$$

Формула (8) дає зв'язок між прискоренням a , яке можна виміряти дослідним шляхом, і моментом інерції I . У формулу

(8) входить невідома величина – момент сили тертя $M_{\text{тр}}$. Хоча інтуїтивно зрозуміло, що момент сили тертя малий, проте він не настільки малий, щоб їм в (8) можна було повністю знехтувати. Якщо покласти $M_{\text{тр}} = 0$, то можна переконатися, що результати експерименту будуть відрізнятися від залежності (8). Можна по порядку величини експериментально визначити $M_{\text{тр}}$ і це потрібно, звичайно, зробити на початку роботи. Для цього за допомогою декількох вантажів, збільшуючи сили натягу нитки T , знайдіть мінімальне значення маси m_0 , при якій маятник почне обертатися. Подальші вимірювання потрібно проводити з вантажами масою $m \geq 10 m_0$. На перший погляд відносну роль моменту сили тертя можна зменшити, якщо взяти вантажі масою $m \gg m_0$, припустимо, вантаж $m = 10^3 m_0$. Однак це не так з двох причин. Перша: збільшення маси вантажу призводить до збільшення сили тиску N на вісь, а значить і до зростання моменту сили тертя $M_{\text{тр}} = \mu \times N \times r$, де μ – коефіцієнт тертя, r – плече сили тертя. Друга причина полягає в тому, що збільшення m зменшує час падіння t , а значить, погіршує точність вимірювання прискорення a [див. (7)].

Момент інерції, який входить в (8), відповідно до теореми Гюйгенса-Штейнера, може бути записаний у вигляді:

$$I = I_0 + 4 m_{\text{гр}} R^2. \quad (9)$$

Тут R – відстань центрів вантажів $m_{\text{гр}}$ від осі обертання, $I = I_0$, $R = 0$, тобто дорівнює моменту інерції системи при $R = 0$.

В (8) входить також відношення:

$$\frac{mr^2}{I} = \frac{m^2}{I_0 + 4 m_{\text{гр}} R^2}.$$

В умовах експерименту воно менше або порядку 10^{-2} (переконайтеся в цьому!). Нехтуючи цією величиною у вираженні (8), отримуємо формулу, яку можна перевірити експериментально:

$$\beta = \frac{a}{r} = \frac{1}{I} (mgr - M_{\text{тр}}). \quad (10)$$

Методика проведення експериментів

Цікавим є експериментально досліджувати дві залежності.

Перша – залежність кутового прискорення β від моменту зовнішньої сили $M = mgr$ за умови, що момент інерції I залишається постійним.

Якщо на осі ординат відкладати кутове прискорення β , а на осі абсцис – mgr , то згідно з (10), експериментальні точки повинні розміщуватися на прямій. З (10) видно, що нахил цієї прямої дорівнює $\frac{1}{I}$, а точка перетину з віссю абсцис дає M_{mp} .

Якщо експериментальні дані підтверджують лінійну залежність β від mgr , то можна приступити до вивчення другої залежності, а саме – залежності β від моменту інерції маятника при $m = \text{const}$. Момент інерції маятника залежить від відстані вантажів m_{tp} до осі обертання маятника (рис. 1).

Згідно з теоремою Гюйгенса-Штейнера:

$$I(R) = I_0 + 4m_{tp} R^2.$$

З'ясуємо, як перевірити залежність β (I) експериментально. Для цього перетворимо співвідношення (10), **нехтуючи** в ньому малою величиною (моментом сили тертя M_{tp}) порівняно з моментом сили натягу нитки mgr . З (10) маємо :

$$\beta = \frac{a}{r} = \frac{1}{I}(mgr - M_{tp}) \approx \frac{mgr}{I_0 + 4m_{tp} R^2}.$$

Отже,

$$\frac{g}{a} = \frac{I_0 + 4m_{tp} R^2}{m^2} = \frac{I_0}{m^2} + 4 \frac{m_{tp}}{m} \left(\frac{R}{r}\right)^2. \quad (11)$$

З (11) зрозуміло, як експериментально перевірити залежність (11): потрібно, вибравши постійну масу вантажу m , вимірювати прискорення при різних положеннях R вантажів m_{tp} на спицях. Результати вимірювань зручно зобразити у вигляді точок на координатній площині $ХОУ$, де $x = R/r^2$, $y = g/a$.

Якщо експериментальні точки в межах точності вимірювань лягають на пряму, то це підтверджує залежність (11), а значить, і формулу:

$$I(R) = I_0 + 4 m_{\text{тр}} R^2.$$

Відзначимо, що при виведенні формули (11) ми знехтували моментом сил тертя, тобто вважали, що $M_{\text{тр}} \ll mgr$. Значення $M_{\text{тр}}$ отримано з графіка залежності $\beta = \beta(mgr)$ при $R = \text{const}$. Це і дозволяє вибрати масу перевантаження так, щоб нерівність $mgr \gg M_{\text{тр}}$ заздалегідь виконувалася.

Роль моменту сил тертя можна оцінити й інакше. Для цього зауважимо – якщо маятник у початковий момент обертається з кутовою швидкістю ω_0 , то до моменту зупинки він повернеться на кут φ , який можна визначити із співвідношення:

$$\frac{1}{2} I \omega_0^2 = A_{\text{тр}} = M_{\text{тр}} \varphi, \quad (12)$$

де $\frac{1}{2} I \omega_0^2$ – початкова кінетична енергія обертового маятника, $A_{\text{тр}}$ – робота сил тертя. В (12) передбачається, що момент сил тертя є постійною величиною і пов'язаний з кутовим прискоренням співвідношенням:

$$I \beta_0 = M_{\text{тр}}, \quad (13)$$

де β_0 – прискорення, які визначається тільки моментом сил тертя $M_{\text{тр}}$.

З (12) і (13) знаходимо:

$$\omega_0^2 = 2\beta_0 \varphi. \quad (14)$$

Нехай n – повне число обертів, яке робить маятник до зупинки, а T_0 – період обертання маятника на початку руху. Тоді $\varphi = 2\pi n$, $\omega_0 = 2\pi/T_0$ і з (14) отримуємо:

$$\beta_0 = \pi/(nT_0^2). \quad (15)$$

Звідси видно як експериментально визначити β_0 : потрібно виміряти час T_0 , за який відбувається перший оборот, і повне число обертів n маятника до зупинки. У всіх подальших вимірах потрібно стежити, щоб виконувалася нерівність $\beta_0 < \beta$.

Порядок виконання роботи

1. Збалансуйте маятник. Для цього залиште на хрестовині два вантажі на двох протилежних спицях на рівних відстанях від осі обертання. Спиці, на яких знаходяться вантажі, з'єднані з втулкою різьбленням. Обертаючи спиці в різьбі, добийтеся рівноваги. Потім точно збалансуйте вантажі на другій парі спиць на такій же відстані від осі обертання. Корисно кілька разів привести маятник в обертання, кожен раз даючи йому можливість зупинитися. Подумайте, як на підставі цих дослідів визначити, чи добре збалансований маятник.
2. Визначте приблизно мінімальну масу m_0 , при якій маятник починає обертатися, і оцініть момент сил тертя з співвідношення:

$$M_{\text{тр}} = m_0 g r,$$

де r – радіус шківів, на якому підвішений вантаж m_0 .

3. Оцініть прискорення β_0 , яке виникає під дією моменту сил тертя. Для цього приведіть маятник у обертання, виміряйте час T_0 , за який він робить перший оборот, і повне число обертів маятника n до повної зупинки. Потім за формулою (15) обчисліть β_0 . Вимірювання повторіть три рази і порівняйте відповідні їм значення β_0 .
4. Визначте експериментально залежність кутового прискорення маятника β від моменту прикладеної сили $m g r$. У цій серії вимірювань момент інерції маятника повинен залишатися постійним: $I = \text{const}$.

Для визначення залежності $\beta = \beta(m g r)$ виміряйте час t , за який вантаж m опускається на відстань h . Вимірювання часу t для кожного вантажу при постійному значенні h повторіть три рази. Потім знайдіть середнє значення часу падіння вантажу за формулою:

$$\bar{t} = \frac{1}{3}(t_1 + t_2 + t_3)$$

і визначте середнє прискорення вантажу зі співвідношення:

$$\bar{a} = 2h / \bar{t}.$$

Ці виміри й обчислення повторіть для п'яти значень маси вантажу m , причому для всіх повинна виконуватися нерівність $m > m_0$.

Результати вимірювань запишіть в табл. 1.

Таблиця 1

| t_1 | t_2 | t_3 | \bar{t} | Δt | h | Δh | $\bar{\beta}$ | mgr |
|-------|-------|-------|-----------|------------|-----|------------|---------------|-------|
| | | | | | | | | |

Отримані експериментально точки відкладіть в координатній площині $x = mgr$, $y = \beta$ і по ним побудуйте графік залежності $y = f(x)$ (рис. 2а).

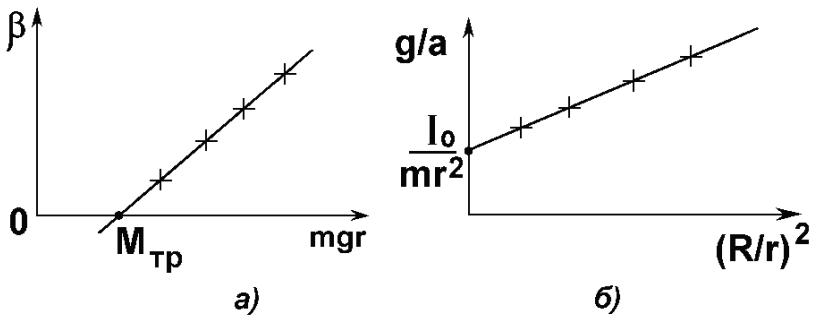


Рис. 2

5. Перевірте експериментально залежність (11). Для цього, взявши постійну масу вантажу $m > m_0$, визначте прискорення "а" вантажу m при різних положеннях вантажів $m_{тр}$ на спицях маятника.

У кожному положенні R вантажів на спицях вимір часу падіння t вантажу m з висоти h повторіть три рази. Результати вимірювань занесіть в табл. 2, де \bar{t} , Δt , Δh визначаються так само, як в табл. 1.

Отримані експериментальні точки нанесіть з урахуванням похибок у координатній площині $x = (R/r)^2$, $y = g/\bar{a}$, і побудуйте графік залежності $y = t(x)$. (рис. 2, б).

Таблиця 2

| R | r | $\left(\frac{R}{r}\right)^2$ | $m_{гр}$ | t_1 | t_2 | \bar{t}_3 | t | Δt | \bar{h} | Δh | \bar{a} | g/\bar{a} |
|---|---|------------------------------|----------|-------|-------|-------------|---|------------|-----------|------------|-----------|-------------|
| | | | | | | | | | | | | |

Контрольні питання:

1. Запишіть основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі. Між якими величинами встановлюється зв'язок у цьому рівнянні?
2. Що називають моментом сили? Як спрямований момент сили? Чому дорівнює його величина? Що таке плече сили? Моменти яких сил діють на систему в даній роботі? Як в роботі визначається момент сили тертя?
3. Що таке момент інерції? Який його фізичний зміст? Запишіть основне рівняння динаміки обертального руху для системи, розглянутої в роботі.
4. Як визначити силу натягу нитки, на яку підвішений вантаж? Чи зміниться сила натягу, якщо маятник разом з вантажем загальмувати?
5. За якої умови відносно прискорення вантажу, підвішеного на нитці, можна визначити кутове прискорення системи?
6. Сформулюйте і доведіть теорему Штейнера. Застосовуючи теорему Штейнера, виведіть розрахункову формулу для моменту інерції системи.
7. Вкажіть можливі помилки експерименту.

Лабораторна робота № 7

Визначення швидкості кулі за допомогою крутильно-балістичного маятника

Мета роботи:

- практичне застосування законів збереження моменту імпульсу і енергії, основного рівняння динаміки обертального руху твердого тіла для визначення швидкості польоту кулі.

Теоретичний матеріал

Обертальний рух твердого тіла. Момент сили, момент інерції. Теорема Штейнера, Момент імпульсу матеріальної точки, момент імпульсу твердого тіла відносно осі. Основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла. Закон збереження моменту імпульсу для замкнутих систем. Кінетична енергія обертального твердого тіла. Закон збереження енергії. Гармонійні коливання. Рівняння гармонійних коливань.

Теоретичне введення

При вивченні динаміки обертального руху тіл важливе значення має закон збереження моменту імпульсу. Моментом імпульсу частинки відносно точки O називають вектор, який дорівнює векторному добутку векторів \vec{r} і \vec{p} :

$$\vec{L} = [\vec{r} \cdot \vec{p}]$$

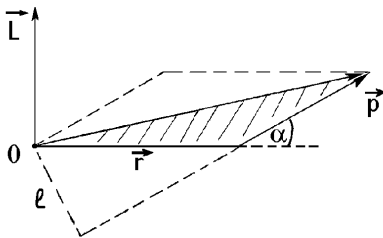


Рис. 1

Вектор \vec{p} і вектор \vec{L} утворюють правогвинтову систему. Модуль \vec{L} дорівнює: $L = r \cdot p \cdot \sin \alpha = l \cdot p$ де l – плече вектора \vec{p} відносно точки O . Момент імпульсу є адитивною величиною. Таким

чином, для системи частинок: $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$, де всі вектори визначені відносно однієї і тієї ж точки O заданої системи відліку.

Закон збереження моменту імпульсу системи частинок безпосередньо випливає з рівняння моментів:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Якщо система частинок замкнута ($\vec{M} = 0$), то момент імпульсу системи залишається постійним, тобто не змінюється з часом.

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i(t) = \text{const}.$$

З останнього виразу випливає, що моменти імпульсу окремих частинок замкнутої системи можуть змінюватися з часом, однак ці зміни завжди відбуваються так, що збільшення моменту імпульсу однієї частини системи дорівнює зменшенню моменту імпульсу її іншої частини.

Особливий інтерес представляють випадки, коли момент імпульсу \vec{L} зберігається для незамкнутих систем, в яких імпульс \vec{p} змінюється з часом. Наприклад, система Земля-Місяць, яка рухається в полі тяжіння Сонця, є незамкненою. Разом з тим, момент сил тяжіння відносно центру Сонця (силового центру) дорівнює нулю. Тому момент імпульсу системи Земля-Місяць відносно центру Сонця залишається постійним.

У більш обмеженому випадку в незамкнутих системах може зберігатися не сам момент імпульсу \vec{L} , а його проекція на деяку нерухому вісь z . Дійсно, якщо проекція сумарного моменту M всіх зовнішніх сил на цю вісь M_z дорівнює нулю, то з рівняння:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z$$

випливає, що:

$$L_z = \sum_i L_{zi}(t) = \text{const}.$$

Сам вектор \vec{L} , визначений відносно довільної точки O на цій осі, може змінюватися.

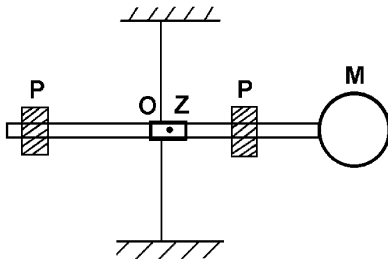


Рис. 2

Наприклад, якщо система рухається в однорідному полі тяжіння, то сумарний момент сил тяжіння, знайдений відносно довільної точки O вертикальної осі z , завжди перпендикулярний їй. Тому $M_z \equiv 0$ і $L_z = \text{const}$.

Теорія методу

Для визначення швидкості кулі в даній роботі використується крутільно-балістичний маятник, який має значний момент інерції. Маятник являє собою хрестовину з вантажами p , які пересуваються, мішенню M і дзеркальцем z . Маятник підвішен на сталевому дроті (рис. 1). При попаданні в мішень M кулі, яку вистрілюють з пістолета, маятник відхиляється на певний кут α від положення рівноваги і починає здійснювати гармонічні коливання. Період цих коливань значно більше часу зіткнення. Кут відхилення маятника від положення рівноваги визначається по відхиленню світлового зайчика, відбитого від люстерка z на горизонтальній шкалі "а" і відстані від осі обертання маятника до шкали "b". Якщо на дзеркальце направити промінь світла, то при відхиленні дзеркальця на кут α , відбитий промінь повернеться на кут 2α , при цьому $\text{tg } 2\alpha = \frac{a}{b}$.

Система маятник-куля є незамкненою, оскільки знаходиться в полі сил тяжіння. Однак проекція моменту сили тяжіння на вертикальну вісь z дорівнює нулю, тому проекція моменту імпульсу системи маятник-куля на вісь z зберігається, тобто $L_z = \text{const}$. Момент імпульсу кулі відносно точки O (центр мас маятника) дорівнює $\vec{L}_1 = [\vec{r} \cdot \vec{p}]$ і спрямований уздовж осі z . У момент

зіткнення з мішенню вектор $\vec{r} \perp \vec{p}$, тому проекція моменту імпульсу кулі на вісь z , $L_1 = m \cdot v \cdot r$ де m – маса кулі; v – її швидкість; r – відстань від осі обертання до місця попадання кулі в мішень. Зазнавши непружний удар з мішенню, система маятник-куля набуває кутову швидкість $\vec{\omega}_0$, яка спрямована вздовж осі z . Оскільки вісь обертання маятника є головною віссю інерції, то момент імпульсу системи має такий же напрямок, як і вектор $\vec{\omega}_0$.

Тоді момент імпульсу системи маятник-куля відносно осі обертання:

$$L = I \cdot \omega_0,$$

де $I = I_{\Pi} + I_M$

I_{Π} – момент інерції кулі відносно осі z , I_M – момент інерції маятника. Оскільки $I_{\Pi} \ll I_M$, то $I \approx I_M$. Відповідно до закону збереження

моменту імпульсу системи маємо:

$$m \times v \times r = I \times \omega_0.$$

Звідки швидкість кулі дорівнює:

$$v = \frac{I \cdot \omega_0}{m \cdot r} \quad (1)$$

Масу кулі m і відстань r можна виміряти безпосередньо. Для визначення I і ω_0 скористаємося законом збереження енергії і основним рівнянням динаміки обертального руху.

При попаданні кулі в мішень M , маятник набуває кінетичну енергію:

$$E_k = \frac{I \cdot \omega_0^2}{2},$$

де ω_0 – максимальне значення кутової швидкості. Під час закручування нитки кінетична енергія маятника переходить в потенційну енергію закручування нитки:

$$E_{\Pi} = k \cdot \frac{\alpha_0^2}{2}.$$

Тут k – модуль кручення, α_0 – кут максимального закручування нитки. Вважаючи втрати енергії на тертя незначними, за законом збереження маємо:

$$\frac{I \cdot \omega_0^2}{2} = \frac{k \cdot \alpha_0^2}{2}.$$

Останній вираз дає можливість отримати наступне співвідношення:

$$\frac{\alpha_0}{\omega_0} = \sqrt{\frac{I}{k}} \quad (2)$$

Тепер звернемося до основного рівняння динаміки обертального руху і запишемо його відносно осі обертання маятника:

$$M = I \cdot \beta,$$

де $\beta = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$ – кутове прискорення маятника, I – момент інерції

маятника відносно осі обертання. Після удару кулі, маятник буде коливатися під дією пружного моменту нитки $M = -k \cdot \alpha$. Знак мінус вказує на те, що пружний момент нитки спрямований в бік, протилежний вектору кутового переміщення маятника. З огляду на це, основне рівняння динаміки обертального руху можна записати у наступному вигляді:

$$I \cdot \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + k \cdot \alpha = 0.$$

Це лінійне однорідне диференціальне рівняння, частним рішенням якого є гармонійна функція

$$\alpha = A \cdot \cos \omega \cdot t.$$

Власна частота гармонійних коливань маятника визначається фізичними властивостями коливальної системи і дорівнює:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{I}}$$

Відповідно період коливання маятника буде:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I}{k}} \quad (3)$$

З огляду на співвідношення (2), знаходимо зв'язок між максимальною кутовою швидкістю маятника ω_0 і максимальним кутом його відхилення α_0 при попаданні кулі:

$$\omega_0 = \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot \alpha_0.$$

Величини T і α_0 можуть бути знайдені експериментально.

Для визначення моменту інерції маятника I відносно осі обертання скористаємося виразом (3), переписавши його у вигляді:

$$T^2 \cdot k = 4 \cdot \pi^2 \cdot I. \quad (4)$$

У це співвідношення входить модуль кручення нитки k , величину якого визначити експериментально важко. Щоб виключи-

ти k з подальшого розгляду скористаємося наступним прийомом. Пригвинтимо до стрижня маятника на відстані r_1 від осі обертання невелику кулю, яка має масу m_1 . Радіус кулі повинен бути набагато менше r_1 , тоді момент інерції системи маятник-куля відносно осі обертання буде:

$$I_1 = I + m_1 \cdot r_1^2$$

При цьому період коливань маятника зміниться і стане T_1 . З урахуванням цього можна записати:

$$T_1^2 \cdot k = (I + m_1 \cdot r_1^2) \cdot 4 \cdot \pi^2 \quad (4'')$$

Розділивши (4'') на (4), отримаємо:

$$\frac{T_1^2}{T^2} = 1 + \frac{m_1 \cdot r_1^2}{I}$$

Звідки момент інерції маятника:

$$I = m_1 \cdot r_1^2 \cdot \frac{T^2}{T_1^2 - T^2}$$

Підставивши тепер значення ω_0 і I в вираз для швидкості кулі (1), остаточно знаходимо:

$$v = \frac{m_1 \cdot r_1^2 \cdot T^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \alpha_0}{(T_1^2 - T^2) \cdot m \cdot r \cdot T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot m_1 \cdot r_1^2 \cdot T \cdot \alpha_0}{(T_1^2 - T^2) \cdot m \cdot r} \quad (5)$$

Всі величини, які входять в цей вираз можуть бути легко визначені експериментально.

Порядок виконання роботи

1. Зважити кулю на аналітичних вагах, а додаткову кулю на технічних.
2. Включити освітлювач, прикрутити додаткову кулю до стрижня маятника.
3. Відхилити маятник на невеликий кут і відпустити. Виміряти час десяти повних коливань і визначити період коливань маятника з кулею T_1 . Провести експеримент 3 рази і обчислити середнє значення T_1 .

- Зняти кулю і провести серію дослідів, аналогічну пункту 3, визначивши період коливань маятника T .
- Обчислити момент інерції маятника за формулою:

$$I = m_1 \cdot r_1^2 \cdot \frac{T^2}{T_1^2 - T^2}$$

- Зробити постріл, відзначаючи по шкалі найбільше відхилення зайчика "а", і виміряти відстань "r" від осі обертання до місця попадання кулі. Експерименти повторити 5 разів і знайти середні значення "а" і "r", а також розрахувати кордони довірчого інтервалу Δa , Δr відносно середніх значень виміряних величин.
- За формулою $\operatorname{tg} 2 \cdot \alpha_0 = \frac{a}{b}$ і середнього значення "а" знайти α_0 в радіанах. Обчислити ω_0 , використовуючи співвідношення
$$\omega_0 = \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot \alpha_0$$

Обчислення похибок вимірювань

Відносна помилка при вимірюванні швидкості кулі визначається виразом:

$$\frac{\Delta v}{v} = \sqrt{\left(\frac{\Delta I}{I}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \omega_0}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2}$$

Похибки $\frac{\Delta m}{m}$ і $\frac{\Delta m_1}{m_1}$ малі в порівнянні з похибками вимірювань

інших величин, тому ними можна знехтувати.

Тоді

$$\frac{\Delta I}{I} = \sqrt{4 \cdot \left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{\Delta r_1}{r_1}\right)^2 + \frac{4 \cdot (T_1^2 \cdot \Delta T_1^2 + T^2 \cdot \Delta T^2)}{(T_1^2 - T^2)^2}}$$

$$\frac{\Delta(\operatorname{tg} 2\alpha_0)}{\operatorname{tg} 2\alpha_0} = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2}; \quad \frac{\Delta(\operatorname{tg} 2\alpha_0)}{\operatorname{tg} 2\alpha_0} = \frac{4 \cdot \Delta \alpha_0}{\sin 4\alpha_0};$$

$$\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} = \sqrt{\left(\frac{\Delta\alpha_0}{\alpha_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2}$$

Звідки:
$$\frac{\Delta\alpha_0}{\alpha_0} = \frac{\sin 4\alpha_0}{4\alpha_0} \cdot \frac{\Delta(\operatorname{tg} 2\alpha_0)}{\operatorname{tg} 2\alpha_0};$$

$$\frac{\Delta\alpha_0}{\alpha_0} = \frac{\sin 4\alpha_0}{4\alpha_0} \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2}$$

Контрольні питання:

1. Дайте визначення моменту імпульсу матеріальної точки, моменту імпульсу твердого тіла відносно осі. Поясніть, чому в даній задачі можна застосувати закон збереження моменту імпульсу? Запишіть цей закон щодо розглянутої системи тіл. Чи можна в даній роботі використовувати закон збереження імпульсу?
2. На підставі яких законів визначають: кутову швидкість маятника, момент інерції маятника? Отримайте ці формули. Чи слід проводити вимірювання, якщо куля відскочила від мішені і не застрягла в ній?
3. Виведіть формулу для розрахунку швидкості польоту кулі.
4. Чи залишається постійною механічна енергія системи куля-маятник в результаті попадання кулі в мішень? За рахунок роботи яких сил відбувається зменшення кінетичної енергії при повороті маятника. Як визначити величину цієї роботи? До яких станів системи куля-маятник застосовуємо закон збереження механічної енергії? Які припущення при цьому вводяться?
5. З якою метою в роботі визначається період коливань маятника з кулею і без нього? Чому кут повороту маятника повинен бути малий – максимум 5-6°? Як змінюються з часом кутова швидкість коливання маятника, кутове прискорення, момент імпульсу, момент сил пружності? Накресліть графіки цих залежностей.

6. Чому необхідною умовою для застосування закону збереження моменту імпульсу є нерівність $T \gg \tau$, де T – період коливаний маятника; τ – час гальмування кулі?
7. Чому при відхиленні світлового зайчика кут приймається рівним 2α , а не α ?

Лабораторна робота № 8

Визначення моменту інерції махового колеса і моменту сили тертя в опорі

Мета роботи:

- на підставі основного закону динаміки обертального руху твердого тіла і закону збереження енергії експериментально визначити момент інерції тіла правильної геометричної форми;
- зіставити отриманий результат з теоретичним значенням.

Теоретичний матеріал

Обертальний рух твердого тіла. Момент сили, момент інерції. Момент імпульсу твердого тіла. Плоский рух твердого тіла. Кінетична енергія обертального руху твердого тіла. Закон збереження енергії при плоскому русі твердого тіла.

Теоретичне введення

Момент інерції є основною фізичною величиною, яка характеризує інертні властивості твердого тіла при обертальному русі. Якщо відомий розподіл мас в системі, то обчислення моменту інерції відносно обраної осі обертання зводиться до підсумовування:

$$I = \sum_i m_i \cdot r_i^2 . \quad (1)$$

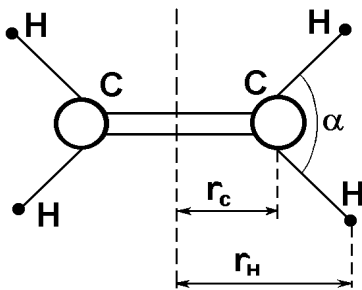


Рис. 1

Обчислимо, наприклад, момент інерції молекули етилену C_2H_4 відносно осі симетрії, яка проходить в площині креслення вертикально: для цієї молекули $r_C = 0,7 \text{ \AA}$, і кут $\alpha = 117^\circ 34'$. Тоді $r_H = 1,26 \text{ \AA}$ як впливає з рисунка. Підставляючи ці значення в (1), знаходимо:

$$I = 2 \cdot m_C \cdot r_C^2 + 4 \cdot m_H \cdot r_H^2 \approx 30 \cdot 10^{-10} (\text{Г} \cdot \text{см}^2).$$

Момент інерції молекул визначає структуру обертового спектра молекул, за яким можна судити про між'ядерні відстані.

Для тіл з безперервним розподілом щільності момент інерції може бути обчислений інтегруванням:

$$I = \int_{(V)} r^2 \cdot dm = \int_{(V)} r^2 \cdot \rho \cdot (r) \cdot dV . \quad (2)$$

Розрахуємо момент інерції кільця, яке має щільність ρ , внутрішній і зовнішній радіуси R_1, R_2 і висоту H відносно осі симетрії. Для цього подумки виділимо кільцевий елемент нескінченно малої товщини dr з внутрішнім радіусом r (рис. 2). Тоді елементарний момент інерції виділеного елемента буде

$$dI = r^2 \times dm = r^2 \times \rho \times dV = 2 \times \pi \times \rho \times H \times r^3 \times dr$$

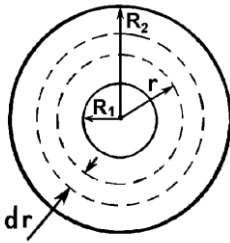


Рис. 2

Момент інерції всього кільця можна визначити інтегруванням:

$$I = \int_{R_1}^{R_2} dI = \int_{R_1}^{R_2} 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot H \cdot r^3 \cdot dr =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \rho \cdot H \cdot (R_1^4 - R_2^4) = \frac{1}{2} \cdot M \cdot (R_1^2 + R_2^2). \quad (2')$$

Визначивши масу кільця і вимірявши штангенциркулем зовнішній і внутрішній діаметр кільця, легко розрахувати його момент інерції. Однак в загальному випадку, для тіл неправильної геометричної форми, момент інерції складним чином залежить від розподілу маси і тому обчислення інтеграла (2) виявляється скрутним. Тоді для визначення моменту інерції тіл застосовують різні експериментальні методи.

У даній роботі пропонується провести розрахунок моменту інерції металевого кільця і визначити його експериментально, зіставивши результати.

Експериментальне визначення моменту інерції кільця і моменту сили тертя в опорі

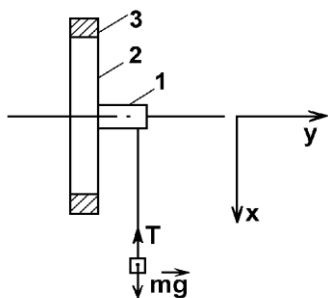


Рис. 2

Експериментальна установка (рис. 3) являє собою вал (1) з диском (2), на якому кріпиться кільце (3). Вал встановлений на шарикопідшипниках і може обертатися. На вал радіусу r намотується тонка нитка довжиною h , до кінця якої прикріплений вантаж масою m . Під дією сили тяжіння $m\vec{g}$ вся система починає обертатися. Розглянемо рух системи з точки

зору закону збереження енергії. При русі вантажу з висоти h його потенційна енергія mgh переходить в кінетичну енергію системи:

$$E_k = \frac{m \cdot v^2}{2} + \frac{I \cdot \omega^2}{2} \quad (3)$$

і витрачається на роботу A проти сил тертя в підшипниках. Кінетична енергія системи є сумою кінетичної енергії поступального руху вантажу і кінетичної енергії обертального руху диска, кільця й валу. В силу адитивності моменту інерції під I у вираженні (3) розуміється сумарний момент інерції кільця, диска і валу. Тоді при русі вантажу вниз до повного розмотування нитки на довжину h можна записати: $m \times g \times h = E_k + A$.

Визначимо тепер роботу сил тертя. Оскільки при обертанні махового колеса його потенційна енергія не змінюється, то робота всіх зовнішніх сил, які діють на нього, дорівнює тільки збільшенню кінетичної енергії. Таким чином, елементарна робота сил тертя при повороті махового колеса на нескінченно малий кут $d\varphi$:

$$\delta A = d\left(\frac{I \cdot \omega^2}{2}\right) \quad \text{або} \quad \delta A = I \cdot \omega \cdot d\omega.$$

Відповідно до основного рівняння динаміки обертального руху тіла навколо нерухомої осі:

$$I \cdot d\omega = M \cdot dt.$$

Підставивши цей вираз в останнє рівняння для δA і врахувавши, що $\omega \times dt = d\omega$, отримаємо:

$$\delta A = M \cdot d\varphi,$$

де $d\varphi$ – кутове переміщення. Робота зовнішніх сил при повороті твердого тіла на кінцевий кут визначиться як:

$$A = \int_0^{\varphi} M \cdot d\varphi.$$

Оскільки сила тертя є зовнішньою силою, а її момент постійний $M = \text{const}$, то робота сили тертя буде $A = M \cdot \varphi$, тут $\varphi = 2 \cdot \pi \cdot N$, де N – число обертів колеса. Тоді закон збереження енергії при русі розглянутої системи матиме вигляд:

$$m \cdot g \cdot h = E_k + M \cdot \varphi. \quad (4)$$

Тут M – момент сил тертя, φ – повний кут повороту колеса.

Після того, як вантаж опуститься на повну довжину нитки h , колесо буде обертатися за інерцією, і нитка почне намотуватися на вал. В результаті вантаж підніметься на деяку максимальну висоту $h_1 < h$, очевидно:

$$E_k = m \cdot g \cdot h_1 + M \cdot \varphi_1, \quad (5)$$

де φ_1 – повний кут повороту колеса при підйомі вантажу. З огляду на те, що $h = r \cdot \varphi$, а $h_1 = r \cdot \varphi_1$, з рівності (4) і (5) отримуємо:

$$M = \frac{m \cdot g \cdot r \cdot (h - h_1)}{h + h_1}. \quad (6)$$

Ця формула дозволяє обчислити момент сил тертя, якщо виміряти радіус валу r і висоти h , h_1 .

Застосуємо тепер динамічний метод до вивчення руху махового колеса і отримаємо вираз для розрахунку моменту інерції кільця за експериментальними даними.

Рівняння руху системи в проекціях на осі X і Y мають вигляд:

$$m \cdot g - T = m \cdot a,$$

$$T \cdot r - M = I \cdot \beta, \quad (7)$$

$$a = \beta \cdot r = \frac{2 \cdot h}{t^2},$$

Рішення рівнянь (6) і (7) дає:

$$I = m \cdot r^2 \cdot \left[\frac{g \cdot t^2}{2 \cdot h} \cdot \left(1 - \frac{h - h_1}{h + h_1} \right) - 1 \right] \quad (8)$$

Отриманий вираз дозволяє розрахувати момент інерції всієї системи відносно осі обертання, якщо визначити експериментально час руху вантажу "m" з висоти h. Зафіксувавши в дослідах одночасно і висоту підйому вантажу h₁, можна визначити момент сил тертя M, використовуючи співвідношення (6).

Для визначення моменту інерції кільця необхідно скористатися тією обставиною, що момент інерції – адитивна фізична величина. Якщо зняти кільце і провести таку ж серію дослідів по визначенню часу, руху вантажу з висоти h, то момент інерції системи без кільця (тобто диска і валу) буде:

$$I_1 = m \cdot r^2 \cdot \left[\frac{g \cdot t_1^2}{2 \cdot h} \cdot \left(1 - \frac{h - h'_1}{h + h'_1} \right) - 1 \right]. \quad (9)$$

Тоді момент інерції кільця:

$$I_0 = I - I_1 = \frac{m \cdot g \cdot r^2}{h} \cdot \left(\frac{h_1}{h + h_1} \cdot t^2 - \frac{h'_1}{h + h'_1} \cdot t_1^2 \right). \quad (10)$$

Порядок виконання роботи

1. Виміряти штангенциркулем діаметр валу (1) в різних його точках і визначити середнє значення радіуса валу.
2. Підняти вантаж "m" на висоту "h", намотуючи нитку на вал і зафіксувати його підкладкою.
3. Забрати підкладку, давши можливість вантажу "m" вільно

опускатися і визначити за допомогою секундоміра час руху вантажу "t" до повного його опускання на довжину нитки. Одночасно виміряти висоту підйому вантажу при його русі вгору. Провести не менше 5 вимірів "t" і "h₁".

4. Зняти кільце (3) (див. рис. 3.) і повторити серію експериментів по визначенню часу відповідно до пункту 3.
5. Експериментальні дані занести в таблицю і обчислити середні значення виміряних величин.

Таблиця

| N | r | t | t ₁ | h ₁ | h ₁ ' |
|---|---|---|----------------|----------------|------------------|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

6. За середнім значенням вимірюваних величин обчислити момент сили тертя і момент інерції кільця, використовуючи вирази (6) і (10). Визначити момент інерції кільця без урахування сил тертя і порівняти результати.
7. Вимірявши внутрішній і зовнішній діаметр кільця, розрахувати його момент інерції (2') і зрівняти з експериментально отриманим (10).
8. Визначити похибки прямих і непрямих вимірювань.

Контрольні питання:

1. Що називається моментом інерції? Яку роль відіграє момент інерції в динаміці обертального руху? Знайдіть шляхом інтегрування момент інерції тіла правильної геометричної форми – порожнього циліндра.
2. Дайте визначення моменту сили. Чому дорівнює величина моменту сили? Як спрямований цей вектор? Момент якої сили повідомляє маховому колесу кутове прискорення? Як спрямований момент цієї сили?
3. Запишіть основне рівняння динаміки обертального руху для даної задачі.
4. Чи змінюється напрямок моменту сили, кутової швидкості,

моменту імпульсу, кутового прискорення, якщо нитка почне намотуватися на вал, і вантаж буде підніматися вгору?

5. Виведіть розрахункову формулу для моменту інерції махового колеса.
6. За якої умови прискорення вантажу дорівнює тангенціальному прискоренню точок на поверхні валу, з якого змотується нитка?
7. Чому при порівнянні значення моментів інерції махового колеса, отриманого дослідним шляхом, зі значенням, розрахованим за формулою $\mathfrak{I} = \frac{1}{2}M(R_0^2 + R_2^2)$, спостерігається розбіжність? Як зменшити це розбіжність?

Лабораторна робота № 9

Визначення моменту інерції і перевірка теореми Штейнера методом крутильних коливань

Мета роботи:

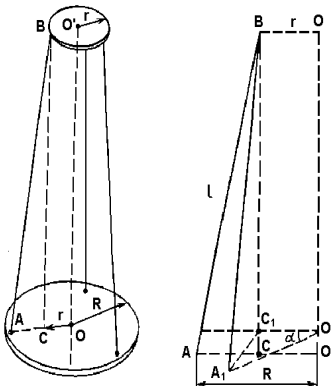
- методом крутильних коливань визначити момент інерції тіл,
- перевірити теорему Штейнера, зіставивши результати експерименту і розрахунку.

Теоретичний матеріал

Обертальний рух твердого тіла. Момент сили, момент інерції. Теорема Штейнера. Основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла. Потенційна і кінетична енергії. Кінетична енергія обертального руху твердого тіла. Закон збереження енергії. Гармонійні коливання. Амплітуда, період, частота.

Теоретичне введення

Момент інерції тіла складної форми можна виміряти методом тріфілярного підвісу. Тріфілярний підвіс являє собою круглу плоску платформу, підвішену на трьох, симетрично розташованих металевих нитках (рис. 1). Радіус платформи R . Верхні кінці ниток прикріплені до диска меншого радіуса $r < R$. Тріфілярний підвіс кріпиться на спеціальному кронштейні, вмонтованому в стіну.



а) **Рис. 1** б)

Платформа може здійснювати крутильні коливання відносно вертикальної осі, яка проходить через центри верхнього і нижнього дисків. Коливання збуджуються поворотом верхнього диска за допомогою шнура, пов'язаного з ним і перекинутого через блок.

При крутильних коливаннях платформи центр мас її переміщується уздовж осі обертання. Якщо робота сил, які призводять до втрат енергії, мала в порівнянні з енергією запасеної в системі, то можна вважати, що механічна енергія зберігається, а коливання є незатухаючими (це перше припущення, на якому базуються подальші розрахунки). На рис.1 представлені дві позиції платформи.

Позиція а. Платформа проходить через положення рівноваги. Механічна енергія є чисто кінетичною:

$$E_k = \frac{I \cdot \omega_0^2}{2},$$

де I – момент інерції платформи (вільної або навантаженої), ω_0 – кутова швидкість в розглянутий момент часу.

Позиція б. Платформа повернулася на кут φ , при цьому центр мас піднявся на висоту h , частина кінетичної енергії перейшла в потенційну $E_p = m \cdot g \cdot h$, де m – маса платформи (навантаженої і вільної).

Повна механічна енергія системи визначається співвідношенням:

$$E = m \cdot g \cdot h + \frac{I \cdot \omega^2}{2}. \quad (1)$$

Звернемося тепер до методики визначення моменту інерції тіла. Вкрай зрідка експериментатор має можливість провести прямі вимірювання необхідної величини. Зазвичай результат отримують шляхом непрямих вимірювань. Таким чином, завдання зводиться до встановлення зв'язку моменту інерції з величинами, безпосередньо вимірюваними в експерименті. Очевидно, що в нашому випадку це маса, час, геометричні характеристики системи: радіуси платформи – R , r і довжини ниток – L .

Встановимо зв'язок між висотою h і кутом повороту платформи. З рис. 1 видно, що:

$$h = BC - BC_1 = h_1 - h_2 \quad \text{або} \quad h = \frac{h_1^2 - h_2^2}{h_1 + h_2}. \quad (2)$$

Використовуючи теорему Піфагора знаходимо (рис. 1а):

$$h_1^2 = L^2 - (R - r)^2. \quad (3)$$

Теорема косинусів дозволяє знайти h_2 :

$$h_2^2 = L^2 - (A_1 C_1)^2 = L^2 - (R^2 + r^2 - 2 \cdot R \cdot r \cdot \cos \varphi). \quad (4)$$

Підставляючи вираз (3) і (4) в (2) після елементарних перетворень маємо:

$$h = \frac{4 \cdot R \cdot r \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{h_1 + h_2} \quad (5)$$

Беручи до уваги нерівності: $h < h_1, h_2$; $L^2 > (R-r)^2$ маємо:

$$h_1 + h_2 \approx 2 \cdot L.$$

Таким чином, формула (5) набуває вигляду:

$$h = \frac{2 \cdot R \cdot r \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{L}. \quad (6)$$

Для простоти розрахунків будемо вважати коливання малими, тобто $\sin \varphi \approx \varphi$ (друге припущення). Нескладно переконатися, що при $\varphi \approx 10^\circ$ рівність $\sin \varphi$ і φ виконується з похибкою в 0,5 %. Тому при виконанні роботи рекомендують порушувати коливання з амплітудою, що не перевищує кількох кутових градусів. З урахуванням вище сказаного (6) набуває вигляду:

$$h \approx \frac{R \cdot r \cdot \varphi^2}{2 \cdot L}. \quad (7)$$

Повна механічна енергія E з урахуванням (1) визначається співвідношенням:

$$E = \frac{m \cdot g \cdot r \cdot R \cdot \varphi^2}{2 \cdot L} + \frac{I \cdot \omega^2}{2}. \quad (8)$$

Відповідно до першого допущення $E = \text{const}$, похідна по часу вираження (8) дорівнює 0, тобто :

$$\frac{m \cdot g \cdot r \cdot R}{L} \cdot \varphi \frac{d\varphi}{dt} + I \cdot \omega \cdot \frac{d\omega}{dt} = 0.$$

Візьмемо до уваги відомі кінематичні співвідношення:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega; \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \beta,$$

після простих перетворень отримуємо:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{m \cdot g \cdot r \cdot R}{L \cdot I} \cdot \varphi = 0. \quad (9)$$

Рівняння (9) є лінійним, однорідним диференціальним рівнянням другого порядку, рішенням якого є функція:

$$\varphi = \varphi_{\max} \cos(\Omega \cdot t + \psi), \quad (10)$$

де φ_{\max} – амплітуда коливань, ψ – початкова фаза, Ω – циклічна частота коливань. Шляхом підстановки (10) в (9) легко переконатися, що функція (10) тотожно задовольняє рівняння (9) за умови рівності:

$$\Omega = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot r \cdot R}{L \cdot I}}. \quad (11)$$

Циклічна частота коливань (пов'язана з періодом співвідношенням:

$$\Omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}. \quad (12)$$

З огляду на (12) з (11) отримуємо:

$$I = \frac{m \cdot g \cdot r \cdot R}{4 \cdot \pi^2 \cdot L} \cdot T^2. \quad (13)$$

Формула (13) встановлює зв'язок між моментом інерції платформи, періодом її коливання, масою платформи і геометричними параметрами системи. Тому формулу (13) слід розглядати як робочу.

Порядок виконання роботи

1. Порушити малі коливання порожньої платформи. Визначте її момент інерції I_0 , використовуючи формулу (13). За допомогою секундоміра проведіть вимірювання часу 20-50 повних коливань, який дає можливість досить точно визначити величину періоду T . Необхідні величини r , R , L , а також маса платформи зазначені в додатку до установки.
2. Покладіть на платформу тіло, момент інерції якого потрібно визначити. Якщо тіло має осьову симетрію, необхідно встановити тіло так, щоб вісь обертання проходила через його центр маси. Вимірювання I проводяться відповідно до пункту 1. Однак в формулу (13) підставляється сумарна маса тіла і платформи. Оскільки момент інерції є адитивною величиною, момент інерції тіла I_T :

$$I_T = I - I_0. \quad (14)$$

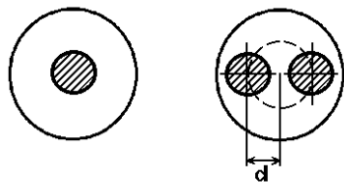
Проведіть вимірювання (за пропозицією викладача) моменту інерції тіла, яке має осьову симетрію. Зіставте результати вимірювань з розрахунками.

Слід врахувати, що $I_{\text{теор. кольца}} = \frac{M}{2}(r_1^2 + r_2^2)$

3. Вище вже згадувалося про можливість вимірювання моменту інерції тіла довільної форми відносно будь-якої осі, в тому числі і відносно осі, яка проходить через центр маси. Оскільки положення останнього точно не відомо, то роблять наступним чином. Проводять вимірювання періоду коливання системи при різних положеннях тіла. В кінцевому підсумку потрібно знайти таке положення, яким відповідає мінімальний період. Визначений у такий спосіб момент інерції буде відповідати моменту інерції відносно осі, що проходить через центр маси.

Перевірка теореми Штейнера

Теорему Штейнера перевіряють, користуючись двома однаковими тілами. Для цього слід виконати наступний цикл вимірювань.



а) **Рис. 1** б)

Визначте момент інерції одного тіла I_T , встановленого таким чином, щоб вісь обертання проходила через його центр маси. (рис. 2а). Встановити два тіла на відстані d від осі обертання відповідно до рис. 2б. Якщо I – момент інерції системи, то момент інерції I'_T кожного з тіл відносно осі, минаючий

через центр маси буде дорівнювати:

$$I'_T = \frac{I - I_0}{2}. \quad (15)$$

Порівняйте отримане значення з обчисленим відповідно до теореми Штейнера:

$$I'_T = I_T + m_T \cdot d^2, \quad (16)$$

де m_T – маса тіла.

Для запобігання перекосів тіла слід розташовувати на платформі строго симетрично, для чого на платформі нанесені концентричні кола на певній відстані один від одного.

Похибки вимірювань

Вид формули (13) дозволяє відразу записати вираз для відносної похибки моменту інерції у вигляді:

$$\frac{\Delta I}{I} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2}. \quad (17)$$

Однак слід мати на увазі те, що момент інерції тіла визначається як різниця результатів вимірювань при навантаженій I і вільній платформі I_0 : $I_T = I - I_0$.

З огляду на те, що помилки можуть тільки накопичуватися, можна оцінити похибку у визначенні I_T таким способом:

$$\frac{\Delta I_T}{I_T} \approx \frac{\Delta I + \Delta I_0}{I - I_0} \quad (18)$$

Як видно з (18), результат буде залежати від співвідношення між I і I_0 . Так, наприклад, при $I - I_0 \approx 0,1I_0$ похибка при визначенні I_T може виявитися в 20 разів більшою, ніж при визначенні величин I і I_0 . Дійсно, $\Delta I \approx \Delta I_0$ адже $\frac{\Delta I_T}{I_T} = 20 \frac{\Delta I_0}{I_0}$. Таким чином, при вимірюванні моментів інерції тіл, помітно менших величини I_0 , можна зіштовхнути з помилками, які перевищують величину I_T .

Беручи до уваги сказане вище, самостійно проведіть оцінки похибок вимірювань I_T , I_T . Проаналізуйте результати експериментів I_T , I_T .

Контрольні питання:

1. Яка величина називається моментом інерції тіла? Яку роль відіграє момент інерції в динаміці обертального руху?
2. Сформулюйте і доведіть теорему Штейнера.
3. У чому полягає метод тріфілярного підвісу? Застосування яких законів дозволяє отримати формулу для розрахунку моменту інерції тіл в даній роботі? Отримайте формулу для розрахунку моменту інерції.
4. Момент яких сил створює крутильні коливання системи? Чи враховується в роботі зміна сили натягу нитки в процесі коливань?
5. Як змінюється період крутильних коливань при зміні маси нижньої платформи? Яка умова повинна бути виконана, щоб коливання були гармонійними?
6. Яким чином, не змінюючи маси вантажу на платформі, змінити період крутильних коливань? Яке з знайдених значень періодів відповідає такому стану тіла на платформі, при якому вісь обертання проходить через його центр маси?
7. Вкажіть можливі помилки експерименту.

Лабораторна робота № 10

Дослідження динаміки плоского руху за допомогою маятника Максвелла

Мета роботи:

- експериментальне вивчення динаміки плоского руху тіл на маятнику Максвелла;
- визначення залежності сил натягу ниток маятника від величини його моменту інерції.

Теоретичний матеріал

Кінематика плоского руху тіл. Швидкість довільної точки тіла при плоскому русі. Рівняння динаміки тіла при плоскому русі. Закон збереження енергії при скачуванні тіл з похилій площині.

Теоретичне введення

У загальному випадку положення твердого тіла в просторі можна визначити, задавши будь-які три точки цього тіла, що не лежать на одній прямій. Положення кожної з обраних точок тіла відносно деякої системи відліку визначається 3-ма координатами x, y, z . Таким чином, загальне число координат, які описують стан твердого тіла, дорівнює 9. Однак, не всі з цих дев'яти координат будуть незалежними. Так як у твердому тілі відстань між будь-якими довільними точками тіла в процесі його руху не змінюється, то незалежних параметрів залишиться шість. Дійсно, положення двох точок в просторі характеризується 6-ю координатами: $x_1; y_1; z_1$ для однієї точки і $x_2; y_2; z_2$ для іншої. Якщо між цими точками існує міцний зв'язок, наприклад, вони з'єднані між собою стрижнем довжиною l , то кожна з координат може бути знайдена з очевидного співвідношення:

$$l^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Це означає, що незалежних змінних (або ступенів свободи), що описують стан такої системи в просторі, буде всього 5, тобто будь-який зв'язок зменшує число ступенів свободи на одиницю.

Таким чином, тверде тіло має 6 ступенів свободи. Ці шість незалежних параметрів можна задавати різними способом в залежності від обставин.

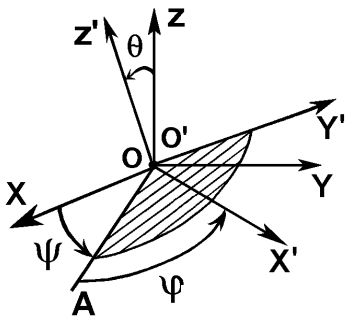


Рис. 1

системи відліку, в якій розглядається рух тіла, повністю визначається кутами Ейлера φ, ψ, θ (рис. 1). Ці кути фіксуються таким чином: вибирається лінія вузлів OA – лінія перетину площини $o'x'y'$ та площини oxy . Тоді зазначені на рисунку кути φ, ψ, θ (кут власного обертання, кут прецесії, кут нутації) є незалежними змінними і повністю визначають орієнтацію твердого тіла в просторі. Зміна орієнтації твердого тіла повністю описується завданням 3-х функцій:

$$\varphi(t), \psi(t), \theta(t).$$

Положення точки твердого тіла O' , з якою пов'язана система координат x', y', z' , задається радіус-вектором \vec{r}_0 цієї точки відносно інерціальної системи координат або ж декартовими координатами x_0, y_0, z_0 .

Отже, положення твердого тіла як системи з шістьма ступенями свободи описується шістьма параметрами $x_0, y_0, z_0, \varphi, \psi, \theta$. Швидкість кожної точки тіла складається з поступального руху зі швидкістю $v_0 = d\vec{r}_0/dt$ точки твердого тіла O і обертального руху з миттєвою кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо осі, яка проходить через точку O і виражається формулою:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega} \cdot \vec{r}'],$$

де \vec{r}' – радіус-вектор довільної точки твердого тіла в системі x', y', z' .

Рух твердого тіла в просторі зручно розкласти на складові для того, щоб з 6 параметрів описували поступальний рух тіла, а інші 3 орієнтацію тіла в просторі. Для цього достатньо зв'язати жорстко з довільною точкою тіла O' декартову систему координат x', y', z' .

Орієнтування в просторі цієї системи координат x, y, z , а значить і твердого тіла, відносно

Для аналізу руху твердого тіла, а також умов рівноваги необхідно вирішити систему рівнянь руху:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}, \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (2)$$

Перше рівняння – рівняння руху центру мас тіла, друге – рівняння моментів. Для твердого тіла ці рівняння є замкнутою системою, тобто з їх допомогою можна повністю визначити рух твердого тіла в заданих зовнішніх полях, якщо відомі початкові умови. Дійсно, для шести невідомих координат $x_0, y_0, z_0, \varphi, \psi, \theta$ є шість скалярних рівнянь (1), (2).

Цікавим видом руху є плоский рух, при якому траєкторії всіх точок тіла лежать у паралельних площинах. Прикладом плоского руху може служити скочування кулі, циліндра, обруча по похилій площині. Рух тіла в цьому випадку повністю визначається рухом одного з його перетинів в який-небудь із паралельних площин. Оскільки положення перетину в площині визначається завданням координат двох довільних точок перетину, то при плоскому русі тіла є 3 ступені свободи. Рівняння руху (1) і (2) для плоского руху набувають такий вигляд:

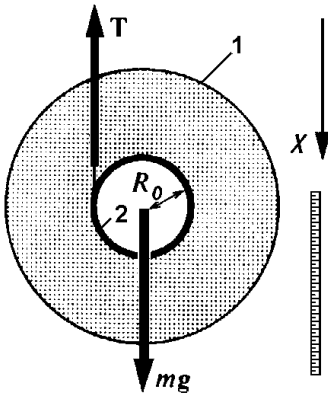
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}, \quad (1')$$

$$I \cdot \frac{d\omega}{dt} = M. \quad (2')$$

Тут ω і M – проекція векторів $\vec{\omega}$ і \vec{M} на вісь, перпендикулярну площині перетину, тобто $\vec{\omega}$ і \vec{M} при плоскому русі не змінюють свого напрямку.

Маятник Максвелла являє собою однорідний металевий диск (1), в середині якого укріплений стрижень (2). До кінців цього стрижня прикріплені дві міцні нитки, які ретельно (виток до витка) намотуються на стрижень від кінців до диска. При звіль-

ненні маятника він починає рух: поступальний вниз і обертальний навколо осі симетрії, тобто здійснює плоский рух.



Центр мас системи буде рухатися вздовж осі x : вектор кутової швидкості $\vec{\omega}$ буде завжди перпендикулярний площині диска. Тому рівняння руху (1') і (2') можна записати у вигляді:

$$m \cdot a = m \cdot g - 2 \cdot T, \quad (3)$$

$$I \cdot \beta = 2 \cdot r \cdot T, \quad (4)$$

$$a = \beta \cdot r. \quad (5)$$

де r – радіус стрижня, I – момент інерції системи відносно осі обертання, T – сила натягу ниток.

Для аналізу руху маятника систему рівнянь (3) – (5) зручно вирішити відносно прискорення "а" та сили натягу "Т". Після нескладних перетворень одержуємо:

$$a = \frac{m \cdot g}{m + I/r^2}, \quad (6)$$

$$T = \frac{m \cdot g}{2 \cdot (1 + m \cdot r^2/I)}. \quad (7)$$

По всій видимості, прискорення диска тим менше, чим більше момент інерції I системи. У граничному випадку при $I \rightarrow \infty$ прискорення диска $a \rightarrow 0$, а сила натягу $T \rightarrow mg$. В цьому випадку диск буде просто нерухомо висіти на нитках. При $I \rightarrow 0$ сила натягу $T \rightarrow 0$, тобто диск буде вільно падати і тому нитки не зазнають ніякого натягу.

Рівняння (3) і (4) не описують поведінку маятника в нижній мертвій точці, коли відбувається перекидання ниток з одного боку стрижня на іншу. Диск буде продовжувати обертатися в попередньому напрямку, але нитки будуть намотуватися на стрижень

таким чином, що рух диска піде вгору, поки його кінетична енергія не перетвориться в потенційну. Слід зазначити, що в нижній мертвій точці відбувається зміна напрямку швидкості на зворотну. Тому в цей момент центр мас маятника піддається більшому прискоренню, що призводить до великого натягу ниток.

У запропонованій роботі необхідно експериментально визначити залежність сили натягу ниток від величини моменту інерції системи, скориставшись виразом (7). Експериментальна установка дає можливість змінювати момент інерції маятника шляхом насадки на диск (1) кілець, які мають різну масу. Для визначення моменту інерції системи перетворимо рівняння (6) до виду:

$$I = m \cdot r^2 \cdot \left(\frac{g}{a} - 1 \right).$$

Щоб експериментально визначити момент інерції маятника I , необхідно визначити масу системи і прискорення поступального руху a . Прискорення системи легко визначити з виразу $a = 2 \cdot h / t^2$, де h – відстань, яку проходить центр мас маятника; t – час руху. Тоді останній вираз можна переписати:

$$I = m \cdot r^2 \cdot \left(\frac{g \cdot t^2}{2 \cdot h} - 1 \right). \quad (8)$$

Таким чином, для визначення моменту інерції системи необхідно визначити її масу m , виміряти радіус стрижня r і зафіксувати час руху t центру мас системи з відомою висоти h .

Визначивши момент інерції системи, з виразу (7) легко розрахувати силу натягу нитки T . Провівши експерименти з кільцями різної маси, за результатами дослідів будують залежність $T = f(I)$.

Установка дозволяє також визначити експериментально моменти інерції використаних в досліді кілець. Дійсно, вимірявши час руху t_0 маятника з висоти h_0 , за формулою (8) можна розрахувати момент інерції маятника I_0 :

$$I_0 = m_0 \cdot r^2 \cdot \left(\frac{g \cdot t_0^2}{2 \cdot h_0} - 1 \right). \quad (9)$$

Одягнувши на маятник кільце з масою m_1 і повторивши експеримент, знайдемо момент інерції системи маятник-кільце:

$$I = (m_0 + m_1) \cdot r^2 \cdot \left(\frac{g \cdot t^2}{2 \cdot h} - 1 \right) \epsilon. \quad (10)$$

Тоді, в силу адитивності, момент інерції кільця буде дорівнювати $I_1 = I - I_0$. Відзначимо, що в дослідах висоти h і h_0 можуть трохи відрізнятись одна від одної в силу специфіки установки.

Порядок виконання роботи

1. Виміряти штангенциркулем діаметр стрижня маятника.
2. Зафіксувати положення центру мас маятника по лінійці (3) (рис. 2) у верхньому і у нижньому положеннях маятника і визначити шлях h , який проходить центр мас.
3. Підняти маятник в крайнє верхнє положення, намотуючи нитки виток до витка на стрижень і закріпити маятник.
4. Натиснути кнопку "Пуск" пульта управління, при цьому маятник починає свій рух і автоматично включається таймер.
5. При проходженні маятником свого нижнього положення таймер автоматично вимикається, і на табло пульта управління висвічується час руху.
6. Натиснувши кнопку "Скидання", повторити експеримент не менше 5 разів.
7. Розрахувати момент інерції маятника і силу натягу нитки по формулам (9) і (7).
8. Провести експерименти з різними кільцями, надягаючи їх на диск маятника, відповідно до пунктів 1-7.
9. Результати експериментів представити графічно у вигляді залежності $T = f(I)$.
10. Визначити моменти інерції кілець, використовуючи вирази (9) і (10). Порівняти з розрахунком за формулою

$$I = \frac{m}{2} \cdot (r_1^2 + r_2^2).$$

11. Визначити похибки прямих і непрямих вимірювань.

Контрольні питання:

1. Які параметри визначають положення твердого тіла в просторі? Як визначити швидкість довільної точки тіла при плоскому русі?
2. Чи є система рівнянь (1) і (2) замкненою?
3. Скільки ступенів свободи має тіло, яке здійснює плоский рух?
4. Виведіть співвідношення (6) і (7).
5. Визначте швидкості точок на ободі кільця, що лежать на кінцях перпендикулярних діаметрів в довільний момент часу.

Лабораторна робота № 11

Дослідження руху гіроскопа

Мета роботи:

- ознайомлення з особливостями руху гіроскопа;
- вимірювання кутової швидкості прецесії.

Теоретичний матеріал

Обертальний рух твердого тіла. Момент сили. Момент інерції. Момент імпульсу твердого тіла відносно осі. Рівняння моментів. Миттєві осі обертання. Головні осі і головні моменти інерції, їх фізичний зміст. Гіроскопи і їх застосування. Прецесія гіроскопа. Вільний гіроскоп і гіроскоп на обертовому диску. Фізичний приклад прецесії.

Елементарні відомості про гіроскопи

Гіроскопом називається осесиметричне тіло, яке швидко обертається навколо осі симетрії. При такому обертанні вектор моменту імпульсу \vec{L} так само, як і вектор кутовий швидкості $\vec{\omega}$, буде спрямований уздовж осі тіла. Це зрозуміло з міркувань симетрії: в силу осесиметричності руху немає ніякого переважного напрямку, куди б міг бути направлений вектор \vec{L} .

Щоб вісь фігури гіроскопа могла вільно повертатися в просторі, гіроскоп зазвичай розташовують у так званій карданній підвісі (рис. 1). Маховик гіроскопа 1 закріплюється на кінцях діаметра внутрішнього кільця 2 (вісь CC') Внутрішнє кільце, у свою чергу, може обертатися навколо перпендикулярної осі BB' , яка проходить через підшипники на кінцях діаметра зовнішнього кільця. Нарешті, зовнішнє кільце 3

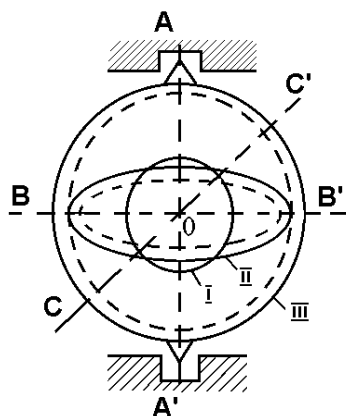


Рис. 1

може обертатися навколо третьої осі CC' , що проходить через нерухомий підшипник підставки.

Всі три взаємно перпендикулярні осі перетинаються в одній точці, яка називається центром карданового підвісу. Гіроскоп в кардановому підвісі має три ступені свободи і може робити будь-які повороти навколо центру підвісу і буде урівноважений, якщо центр його мас збігається з центром підвісу. До тих пір, поки на гіроскоп не діють ніякі зовнішні сили, його вісь буде зберігати свій напрямок в просторі в силу закону збереження моменту імпульсу. Напрямок (як і величина) вектора \vec{L} залишається незмінним. Щоб змінити напрямок осі гіроскопа, необхідно на нього подіяти моментом зовнішніх сил. При цьому спостерігається протиприродне, на перший погляд, обертання гіроскопа, назване гіроскопічним ефектом. Під дією пари сил \vec{F}_1 і \vec{F}_2 (рис. 2), які здавалося б, повинні були викликати поворот осі гіроскопа OO навколо прямої $O'O'$, однак вісь гіроскопа обертається навколо прямої $O''O''$ (осі OO , $O'O'$ і $O''O''$) взаємно перпендикулярні). Цей ефект пояснюється законами динаміки обертального руху.

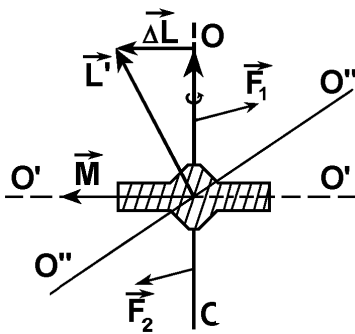


Рис. 2

Напрямок вектора \vec{L} задає нове положення осі обертання гіроскопа і, як легко бачити з рис. 2, вісь обернулася навколо прямої $O''O''$ так, що кут між векторами \vec{M} і \vec{L} зменшився. Якщо діяти на гіроскоп тривалий час зовнішніми силами, які мають постійний по напрямку момент \vec{M} , вісь гіроскопа встановиться врешті решт в напрямку, який збігається з вектором \vec{M} . Це явище покладено в основу роботи гіроскопічного компаса.

Момент пари сил \vec{M} відповідно до визначення спрямований уздовж прямої $O'O'$. За час Δt момент імпульсу \vec{L} збільшиться на:

$$\Delta \vec{L} = \vec{M} \cdot \Delta t, \quad (1)$$

тобто $\Delta \vec{L}$ паралельно \vec{M} . Отже, через час Δt момент імпульсу прийме значення:

$$\vec{L}' = \vec{L} + \Delta \vec{L}.$$

До сих пір ми розглядали простий рух гіроскопа навколо осі симетрії. Реальний гіроскоп, як правило, бере участь в більш складному русі, при якому вектор моменту імпульсу \vec{L} може не збігатися з вектором кутової швидкості $\vec{\omega}$. Розглянемо окремий випадок руху тіла, у якого закріплена одна точка (т. О, рис. 3). Покладемо, що гіроскоп обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_1$ навколо осі OO і одночасно вісь OO обертається навколо осі OO' з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_2$. Цей рух можна замінити обертанням з кутовою швидкістю $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ навколо миттєвої осі, становище якої визначається вектором $\vec{\omega}$. Компоненти моменту імпульсу \vec{L} гіроскопа визначаються співвідношеннями:

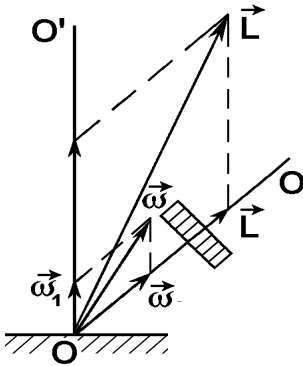


Рис. 3

$$\vec{L}_1 = \vec{I}_1 \cdot \vec{\omega}_1; \quad \vec{L}_2 = \vec{I}_2 \cdot \vec{\omega}_2,$$

де I_1 і I_2 — моменти інерції відносно осей OO і OO' відповідно. Тоді вектор \vec{L} буде дорівнювати:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{I}_1 \cdot \vec{\omega}_1 + \vec{I}_2 \cdot \vec{\omega}_2.$$

Легко помітити, що при $I_1 \neq I_2$ вектори \vec{L} і $\vec{\omega}$ не збігаються за напрямком.

До аналогічного результату можна прийти, якщо розглянути обертання гіроскопа навколо миттєвої осі, яка не збігається з віссю симетрії (див. рис. 4).

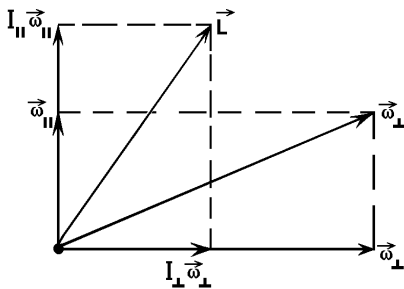


Рис. 4

В цьому випадку можна розкласти вектор $\vec{\omega}$ на дві складові: спрямовану вздовж осі фігури гіроскопа $\vec{\omega}_{\parallel}$ і перпендикулярну до неї $\vec{\omega}_{\perp}$. В результаті отримуємо:

$$\vec{L} = I_{\parallel} \cdot \vec{\omega}_{\parallel} + I_{\perp} \cdot \vec{\omega}_{\perp}, \quad (2)$$

де I_{\parallel} і I_{\perp} — моменти інерції відносно зазначених осей.

(Очевидно, що напрямки \vec{L} і $\vec{\omega}$ збігаються лише в тому випадку, коли $I_{\parallel} = I_{\perp}$).

В основі наближеної теорії гіроскопів лежить рівняння моментів:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \quad (3)$$

Якщо момент зовнішніх сил \vec{M} дорівнює нулю, гіроскоп називається вільним. Для вільного гіроскопа:

$$\vec{L} = I_{\parallel} \cdot \vec{\omega}_{\parallel} + I_{\perp} \cdot \vec{\omega}_{\perp} = \text{const}. \quad (4)$$

З рівняння (4) з урахуванням того, що моменти інерції I_{\parallel} і I_{\perp} не змінюються (відсутні деформації), витікає збереження з часом компонентів $\vec{\omega}_{\parallel}$ і $\vec{\omega}_{\perp}$ вектору $\vec{\omega}$:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{\perp} + \vec{\omega}_{\parallel} = \text{const}.$$

Таким чином, кінетична енергія обертального руху гіроскопа дорівнює:

$$K = \frac{1}{2} \cdot (\vec{L} \cdot \vec{\omega}) = \frac{1}{2} \cdot (I_{\parallel} \cdot \omega_{\parallel}^2 + I_{\perp} \cdot \omega_{\perp}^2) = \text{const}. \quad (5)$$

Сукупність рівнянь (3) – (5) дозволяє пояснити характер руху гіроскопа.

Стійкість руху швидко обертального гіроскопа легко пояснити, виходячи з рівняння (3). Дійсно, якщо гіроскоп з великим

моментом інерції привести в швидке обертання, то він буде мати великий момент імпульсу. Збільшення моменту $\Delta\vec{L}$ за час Δt визначається формулою (3):

$$\Delta\vec{L} = \int_0^{\Delta t} \vec{M} \cdot dt.$$

При короткочасних впливах навіть великих сил

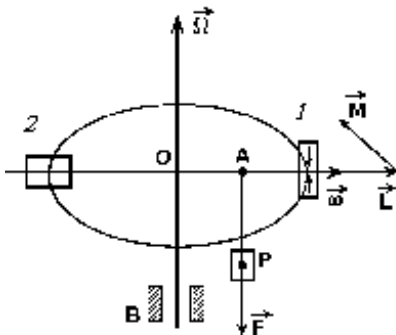


Рис. 5

величина $|\Delta\vec{L}| < |\vec{L}|$ і напрямок осі гіроскопа практично не змінюється. Гіроскоп як би чинить опір будь-яким спробам змінити величину і напрям його моменту імпульсу.

Цікаво проявляє себе гіроскоп при дії на нього зовнішніх сил, момент яких залишається постійним за величиною і перпендикулярним до осі обертання. У цьому випадку спостерігається так звана вимушена прецесія гіроскопа. Розглянемо гіроскоп, зображений на рис. 5. Він складається з маховика 1 і електромотора 2, розташованих на одній осі. Гіроскоп влаштований так, що він може вільно обертатися навколо осі симетрії, а також навколо горизонтальної та вертикальної осей.

Докладемо до якої-небудь точки осі гіроскопа (точка А) постійну силу \vec{F} . Якщо маховик не повертається, спостерігається звичайне явище: під дією вантажу Р маховик опуститься. Однак рух набуває зовсім інший характер, якщо маховик привести за допомогою електромотора в швидке обертання. У цьому випадку вісь фігури незбалансованого гіроскопа почне обертатися навколо вертикальної осі (вимушена прецесія). Остання легко пояснюється наближеною теорією, в якій передбачається, що кутові швидкості можливих рухів багато менше кутової швидкості обертання гіроскопа навколо осі симетрії. Інакше кажучи, у формулі (2) слід враховувати лише перший член:

$$\vec{L} \approx I_1 \cdot \vec{\omega}_1 = I_1 \cdot \vec{\omega}. \quad (6)$$

У такому наближенні вектори \vec{L} і $\vec{\omega}$ паралельні (рис. 4). Оскільки момент сили \vec{F} перпендикулярний осі обертання, а значить перпендикулярний і до \vec{L} , то він не змінює величину моменту імпульсу, а тільки змінює його напрямок. Отже, якщо зовнішня сила \vec{F} постійна, то вектор \vec{L} , а з ним і вісь гіроскопа, повинні здійснювати рівномірне обертання навколо вертикальної осі.

Напрямок та величину кутової швидкості прецесії легко знайти з таких міркувань. Введемо одиничний вектор \vec{k} , спрямований уздовж осі гіроскопа. Довжину відрізка ОА позначимо літерою l . Тоді момент сили \vec{F} буде дорівнювати:

$$\vec{M} = [\vec{l} \cdot \vec{F}] = l \cdot [\vec{k} \cdot \vec{F}], \text{ тому що } \vec{l} = l \cdot \vec{k}. \quad (7)$$

Відповідно обраним напрямом обертання маховика вектори \ddot{y} і \vec{L} будуть спрямовані вправо, причому

$$\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{k}, \quad \vec{L} = L \cdot \vec{k}, \quad (8)$$

оскільки момент імпульсу \vec{L} і його похідна $\frac{d\vec{L}}{dt}$ взаємно перпендикулярні і не змінюються по модулю, їх можна пов'язати співвідношенням:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{\Omega} \cdot \vec{L}]. \quad (9)$$

З урахуванням (3) отримуємо:

$$\vec{M} = [\vec{\Omega} \cdot \vec{L}].$$

Беручи до уваги (8), маємо:

$$L \cdot [\vec{\Omega} \cdot \vec{k}] = l \cdot [\vec{k} \cdot \vec{F}] = -l \cdot [\vec{F} \cdot \vec{k}], \quad \text{звідки} \quad [\vec{\Omega} \cdot \vec{k}] = -\left[\frac{l}{L} \cdot \vec{F} \cdot \vec{k}\right] \quad \text{та}$$

$$\vec{\Omega} = -\frac{l}{L} \cdot \vec{F}. \quad (10)$$

Таким чином, вектори $\vec{\Omega}$ і \vec{F} антипаралельні, причому $\vec{\Omega}$ має розмірність частоти (перевірити самостійно). Ця частота називається частотою прецесії. Гіроскоп буде здійснювати обертальний рух навколо вертикальної осі. Наведені міркування справедливі за умови $\Omega < \omega$.

Опис установки

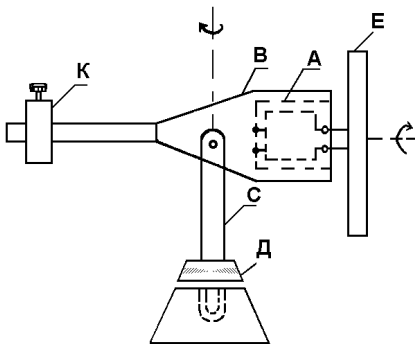


Рис. 6

Прилад (рис. 6) складається з електричного моторчика А, закріпленого в обоймі В. Обойма спірається на вертикальний стрижень С і може обертатися навколо горизонтальної осі, а разом зі стрижнем навколо вертикальної. Кути повороту навколо цієї осі можуть визначатися за шкалою Д.

Власне гіроскопом є ротор моторчика з масивним диском Е. Момент зовнішніх сил, прикладених до гіроскопа, може змінюватися при переміщенні вантажу К по стрижні обойми або додатковим навісом гирьок відомої маси. Живлення моторчика змінним струмом здійснюється через автотрансформатор, підводка струму живлення до рухомого моторчику здійснюється через ковзаючі контакти. В процесі виконання роботи необхідно дотримуватися правил безпеки і не доторкатися до диска, що обертається. Перед початком вимірювань необхідно переконаватися в тому, що прилад може вільно обертатися навколо своїх осей.

Порядок виконання роботи

Ознайомитися з інструкцією по експлуатації установки. Потім під наглядом викладача на практиці ознайомитися з органами її управління, які дозволяють задавати і визначати:

- а). момент зовнішніх сил;
- б). кутову швидкість обертання гіроскопа;
- в). кут повороту гіроскопа;
- г). кутову швидкість прецесії.

Будемо базуватися на формулі (10) записавши її в наступному вигляді:

$$\Omega = \frac{m \cdot g \cdot l}{I \cdot \omega}, \quad (11)$$

де m – маса рухомого вантажу; l – зсув центру мас вантажу відносно початкового положення, при якому гіроскоп був урівноважений.

Робота передбачає виконання наступного комплексу вимірювань:

- а). При фіксованому значенні $l > 0$ зняти залежність кутової швидкості прецесії Ω від кутової швидкості обертання гіроскопа ω / Побудувати графік у координатах $(\Omega, 1/\omega)$, який представляє собою пряму, тангенс кута нахилу якої до осі абсцис дорівнює:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m \cdot g \cdot l}{I} .$$

З графіка потрібно знайти $\operatorname{tg} \alpha$ і по відомим величинам m, g, I визначити момент інерції гіроскопа (I) відносно осі симетрії.

б). При заданій частоті обертання ω , зняти залежність Ω від l . Побудувати графік у координатах (Ω, l) , потім визначити тангенс кута нахилу прямої до осі абсцис. В цьому випадку його величина визначається виразом:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{m \cdot g}{I \cdot \omega}.$$

Як і раніше визначити величину I . Порівняти результати, показати, що в межах помилок вони рівні.

Контрольні питання:

1. Що таке осі вільного обертання? Які з них стійкі?
2. Що називається гіроскопом?
3. Який гіроскоп називається вільним? Врівноваженим?
4. Як влаштований карданний підвіс?
5. Що таке нутація гіроскопа?
6. Що таке прецесія гіроскопа? Чим прецесія відрізняється від нутації?
7. За яких умов можна вважати, що вектор моменту імпульсу гіроскопа, миттєва кутова швидкість обертання і вісь симетрії збігаються?
8. Від чого залежить швидкість прецесії?
9. Момент якої сили викликає прецесію гіроскопа в даній роботі? Яким способом можна змінювати величину і напрямки моменту сили?
10. Що мається на увазі, коли говорять, що прецесія є «безінерційним» рухом?
11. Чому невільний гіроскоп стає «слухняним»?

Лабораторна робота № 12

Дослідження властивостей еліпсоїда інерції твердих тіл.

Еліпсоїд моментів інерції

Мета роботи:

— вивчення еліпсоїда обертання тіл різної форми.

Теоретичний матеріал

Якщо скористатися уявленням про тверде тіло, як сукупністю матеріальних точок з масами m_i , то момент інерції твердого тіла визначається виразом:

$$I = \sum_{i=1}^N m_i \cdot r_i^2.$$

Момент інерції є аналогом маси, однак, поняття моменту інерції набагато складніше, ніж поняття маси.

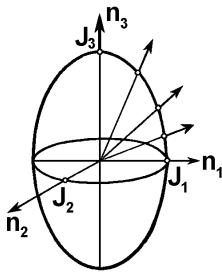


Рис. 1

Однією з основних особливостей моменту інерції є його залежність від орієнтації осі обертання відносно тіла, що обертається. Якщо вибрати систему координат з початком в центрі інерції (мас) тіла і відкласти вздовж кожного напрямку \vec{n}_i , що збігається з віссю обертання, відповідне цьому напрямку значення моменту інерції, то вийде поверхня, що має вигляд еліпсоїда (рис. 1). Таким чином, інертні властивості тіл при обертанні описуються завданням так званого еліпсоїда моментів інерції. Визначимо в загальному випадку вираз для моменту інерції тіла і рівняння еліпсоїда інерції.

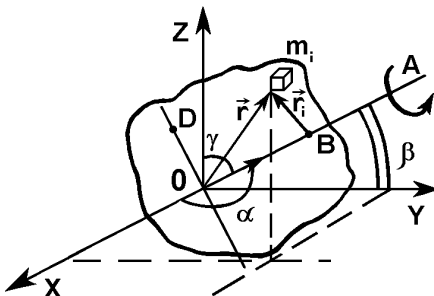


Рис. 2

Нехай з деякою точкою O тіла жорстко пов'язана декартова система координат (рис. 2). Визначимо момент інерції тіла відносно довільної осі обертання OA , напрямком якої задається одиничним вектором \vec{n} , що становить

кути α, β, γ з осями координат.

$$I = \sum_{i=1}^N m_i \cdot r_i^2 = \sum_i m_i \cdot (r^2 - \text{OB}^2). \quad (1)$$

Тепер врахуємо, що $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$,

$$\text{а } \text{OB} = (\vec{r} \cdot \vec{n}) = x \cdot n_x + y \cdot n_y + z \cdot n_z = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta + z \cdot \cos \gamma,$$

і очевидне співвідношення $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Тоді вираз (1) можна переписати у вигляді:

$$I = \sum_i m_i \cdot [(x^2 + y^2 + z^2) \cdot (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) - (x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta + z \cdot \cos \gamma)^2]$$

Виконавши перетворення, знайдемо:

$$\begin{aligned} I = & \cos^2 \alpha \cdot \sum_i m_i \cdot (z_i^2 + y_i^2) + \cos^2 \beta \cdot \sum_i m_i \cdot (x_i^2 + z_i^2) + \cos^2 \gamma \cdot \sum_i m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2) - \\ & - 2 \cdot \cos \gamma \cdot \cos \beta \cdot \sum_i m_i \cdot y_i \cdot z_i - 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \gamma \cdot \sum_i m_i \cdot x_i \cdot z_i - 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \\ & \sum_i m_i \cdot x_i \cdot y_i. \end{aligned} \quad (2)$$

Позначимо моменти інерції тіла відносно осей координат через I_x, I_y, I_z , де $I_x = \sum_i m_i \cdot (z_i^2 + y_i^2)$; $I_y = \sum_i m_i \cdot (x_i^2 + z_i^2)$; $I_z = \sum_i m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2)$.

Вирази $\sum_i m_i \cdot y_i \cdot z_i = I_y$; $\sum_i m_i \cdot x_i \cdot z_i = I_x$; $\sum_i m_i \cdot x_i \cdot y_i = I_x$ називають відцентровими моментами інерції, причому:

$$I_y = I_x; \quad I_x = I_x; \quad I_y = I_x.$$

Ці величини можуть бути позитивними, негативними або рівними 0.

З урахуванням зроблених позначень перепишемо вираз (2)

$$\begin{aligned} I = & I_x \cdot \cos^2 \alpha + I_y \cdot \cos^2 \beta + I_z \cdot \cos^2 \gamma - 2 \cdot I_y \cdot \cos \gamma \cdot \cos \beta - 2 \cdot I_x \cdot \cos \alpha \cdot \cos \gamma - \\ & - 2 \cdot I_x \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta. \end{aligned} \quad (3)$$

Видно, що момент інерції тіла визначається шістьма величинами, а не однією, як його аналог-маса. Для різних осей, що проходять через початок координат (різні кути α , β , γ), величина моменту інерції буде, природно, різна.

Розглянемо геометричну інтерпретацію зміни величини моменту інерції тіла по відношенню до різних осей. Для цього відкладемо від початку координат (рис. 1) по всіх осях в довільному напрямку, але в одному масштабі відрізки $OD = \frac{1}{\sqrt{I}}$, де I – момент інерції тіла відносно даної осі. Кінці всіх відрізків утворюють деяку поверхню. Знайдемо рівняння цієї поверхні. Координати кінця будь-якого відрізка OD можуть бути записані у вигляді:

$$x = OD \cdot \cos\alpha; \quad y = OD \cdot \cos\beta; \quad z = OD \cdot \cos\gamma;$$

$$\text{Звідси: } \cos\alpha = x \cdot \sqrt{I}; \quad \cos\beta = y \cdot \sqrt{I}; \quad \cos\gamma = z \cdot \sqrt{I}.$$

Використовуючи ці співвідношення, рівняння (3) можна записати у вигляді:

$$I_x \cdot x^2 + I_y \cdot y^2 + I_z \cdot z^2 - 2 \cdot I_x \cdot y \cdot z - 2 \cdot I_x \cdot x \cdot z - 2 \cdot I_x \cdot y \cdot x - 1 = 0. \quad (4)$$

Так як відрізки OD кінцеві, то можна стверджувати, що поверхня, що описується останнім рівнянням, є поверхнею еліпсоїда. Знаючи цю поверхню, можна завжди визначити момент інерції тіла відносно будь-якої осі, що проходить через початок координат, тому що $I = 1/OD^2$. Поверхня, що описується рівнянням (4), називається еліпсоїдом інерції, відносно довільного початку O . Оскільки еліпсоїд має три взаємно перпендикулярні осі, то рівняння (4), віднесене до цих осей, має найбільш простий вигляд, тобто не містить членів з добутками різних координат. Якщо прийняти ці осі (головні осі інерції) за осі координат, то $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$ і рівняння (3) набуває форму:

$$I(\vec{n}) = I_x \cdot \cos^2 \alpha + I_y \cdot \cos^2 \beta + I_z \cdot \cos^2 \gamma. \quad (5)$$

У цьому випадку момент інерції тіла визначається вже трьома величинами. Еліпсоїд інерції відносно центру мас тіла називають центральною, а його головні осі – головними центральними

осями інерції. Для однорідних симетричних тіл головні центральні осі інерції є осями симетрії тіла.

Методика визначення моментів інерції відносно довільних осей обертання тіла

Якщо жорстко зв'язати початок координат O з центром мас симетричних твердих тіл (куб, прямокутний паралелепіпед), а осі координат поєднати з осями симетрії цих тіл, то момент інерції тіл відносно довільної осі обертання, напрям якої у просторі визначається ортом \vec{n} , визначається виразом:

$$I(\vec{n}) = I_x \cdot \cos^2 \alpha + I_y \cdot \cos^2 \beta + I_z \cdot \cos^2 \gamma. \quad (5)$$

Метою цієї роботи є експериментальна перевірка співвідношення (5) для трьох симетричних тіл:

- 1) куб ($a = b = c$),
- 2) симетричний паралелепіпед ($a=b \neq c$),
- 3) несиметричний паралелепіпед ($a \neq b \neq c$), (a, b, c – довжина ребер тіл).

У дослідах використовується метод крутильних коливань. Досліджуване тіло жорстко закріплюється в рамці крутильного маятника, підвішеною на пружному вертикально натягнутому дроті. Якщо вивести маятник з положення рівноваги, то він буде здійснювати коливання з періодом

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I_M}{D}}, \quad (6)$$

де I_M – момент інерції маятника, D – постійна моменту пружних сил. Момент інерції маятника I_M дорівнює сумі моментів інерції рамки I_0 і досліджуваного тіла I : $I_M = I_0 + I$. Тому період коливань маятника:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I_0 + I}{D}}. \quad (7)$$

Період коливань вільної рамки очевидно буде:

$$T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I_0}{D}}. \quad (8)$$

З рівнянь (7) і (8) можна виключити невідому величину D і визначити зв'язок між періодом коливань маятника і моментом інерції тіла:

$$I = I_0 \cdot \frac{T^2 - T_0^2}{T_0^2}. \quad (9)$$

У схемі установки передбачена можливість змінювати орієнтацію осі обертання тіла по відношенню до жорстко пов'язаної з тілом системи координат. Тому в залежності від орієнтації осі обертання буде змінюватися як момент інерції тіла I , так і період коливань T . У загальному випадку:

$$I(\vec{n}) = I_0 \cdot \frac{T^2(\vec{n}) - T_0^2}{T_0^2}. \quad (10)$$

Якщо закріпити тіло в рамці так, щоб вісь обертання \vec{n} збігалася з будь-якої головною віссю інерції тіла ox , oy , oz , то з (10) випливає:

$$I_x = I_0 \cdot \frac{T_x^2 - T_0^2}{T_0^2}; \quad I_y = I_0 \cdot \frac{T_y^2 - T_0^2}{T_0^2}; \quad I_z = I_0 \cdot \frac{T_z^2 - T_0^2}{T_0^2}, \quad (11)$$

де T_x , T_y , T_z – періоди коливань маятника, коли вісь обертання \vec{n} збігається з однією з головних осей ox , oy , oz , відповідно. Підставивши (10) і (11) в (5) отримаємо:

$$T^2(\vec{n}) = T_x^2 \cdot \cos^2 \alpha + T_y^2 \cdot \cos^2 \beta + T_z^2 \cos^2 \gamma. \quad (12)$$

Таким чином, існує простий зв'язок між періодами крутильних коливань тіла T_x , T_y , T_z відносно його осей симетрії і періодом коливань цього ж тіла відносно осі \vec{n} з направляючими косинусами $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$. Звернемося тепер до порядку проведення експериментальних досліджень.

Однорідний куб

З міркувань симетрії, очевидно, що всі три моменти інерції куба відносно головних осей ox , oy , oz однакові.

З (5) та з урахуванням рівності $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ виходить:

$$I(\vec{n}) = I_x \cdot (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = I_k = const.$$

Таким чином, момент інерції однорідного куба відносно будь-якої осі, що проходить через його центр, буде однаковий. Ясно, що і період коливань куба повинен бути також однаковим для будь-якої осі, що проходить через його центр

$$T(\vec{n}) = T_x = \text{const}.$$

Для того, щоб переконатися в цьому, визначимо періоди коливань для наступних положень куба:

- 1) вісь обертання проходить через центри двох протилежних граней T_1, T_2, T_3 ,
- 2) вісь обертання проходить по головній діагоналі куба T_4, T_5, T_6, T_7 ,
- 3) вісь обертання проходить через середини протилежних ребер куба T_8, T_9, T_{10} ,
- 4) розрахувати похибку вимірювань.

Розрахунок показує, що для будь-якої осі куба, що проходить через центр мас:

$$I_k = \frac{1}{6} \cdot m \cdot a^2.$$

Це дає можливість використовувати куб як еталон при визначенні моменту інерції I_0 рамки.

Дійсно з (9) виходить:

$$I_0 = I_k \cdot \frac{T_0^2}{T_{\dot{Y}}^2 - T_0^2}. \quad (13)$$

Симетричний паралелепіпед

В цьому випадку моменти інерції паралелепіпеда відносно головних осей ox і oy , а також відповідні їм періоди коливань рівні між собою:

$$I_x = I_y; \quad T_x = T_y.$$

З (5) і (12) з урахуванням рівності випливає $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$:

$$\begin{aligned} I(\vec{n}) &= I_x \cdot (1 - \cos^2 \gamma) + I_z \cdot \cos^2 \gamma, \\ T^2(\vec{n}) &= T_x^2 (1 - \cos^2 \gamma) + T_z^2 \cdot \cos^2 \gamma. \end{aligned} \quad (14)$$

Як видно, період коливань $T_{\vec{n}}$ залежить тільки від кута γ , який утворює вісь обертання \vec{n} з oz (рис. 2). При $\gamma = const$ величина $T_{\vec{n}}$ не залежить від кутів α і β . Отже, період коливань повинен бути однаковим відносно будь-якої осі, що лежить в площині oxy ($\gamma = \frac{\pi}{2}$). У цьому випадку згідно з (14):

$$T(\vec{n}) = const = T_x$$

Для перевірки цього співвідношення визначте період коливань паралелепіпеда, закріплюючи його в чотирьох різних положеннях, при яких вісь обертання перпендикулярна його великому ребру (T_1, T_2, T_3, T_4). Результати усереднити і обчислити похибку вимірювань.

Несиметричний паралелепіпед

Закріпимо паралелепіпед так, щоб вісь обертання збігалася з однією з головних діагоналей, наприклад, АВ. Тоді напрямні косинуси будуть:

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}; \quad \cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}};$$

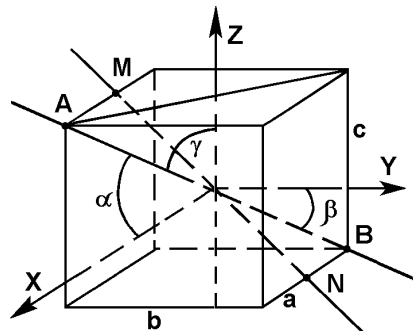
$$\cos \gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Зі співвідношення (12) знаходимо:

$$T_{AB}^2 \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = T_x^2 \cdot a^2 + T_y^2 \cdot b^2 + T_z^2 \cdot c^2. \quad (15)$$

Вимірявши довжину ребер a, b, c і визначивши періоди T_x, T_y, T_z і T_{AB} , перевіряють співвідношення (15). Для перевірки співвідношення (5) знаходять у такий спосіб.

- 1) визначають момент інерції рамки I_0 використовуючи (13),



- 2) по вимірним періодам T_x, T_y, T_z і T_{AB} з урахуванням співвідношень (10) і (11) обчислюють I_x, I_y, I_z і $I_{AB} \vec{n}$,
- 3) розрахувавши значення напрямних косинусів по вимірним a, b, c і використовуючи значення I_x, I_y, I_z перевіряють співвідношення (5):

$$I_{AB} \cdot (\vec{n}) = I_x \cdot \cos^2 \alpha + I_y \cdot \cos^2 \beta + I_z \cdot \cos^2 \gamma$$

- 4) оцінюють похибки, з якими визначені моменти інерції I_x, I_y, I_z . Результати розрахунків і експериментів представити в таблиці:

| T_0 | T_k | I_0 | T_x | T_y | T_z | T_{AB} | I_x | I_y | I_z | $I_{AB} \vec{n}$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|-------|-------|-------|------------------|
| | | | | | | | | | | |

В якості осей обертання можна вибрати також осі, що проходять через середини протилежних ребер куба. В цьому випадку, наприклад, для осі MN має місце

$$T_{MN}^2 \cdot (b^2 + c^2) = T_y^2 \cdot b^2 + T_z^2 \cdot c^2.$$

Для інших двох осей подібні співвідношення вивести самостійно.

Контрольні питання:

1. Виведіть вираз для періоду коливань крутильного маятника.
2. Розрахуйте момент інерції куба відносно осі, що проходить через його центр.
3. З чим пов'язана відміна поняття маси тіла від поняття моменту інерції?
4. Виведіть рівняння еліпсоїда моментів інерції.

КОЛИВАЛЬНІ РУХИ

Коливання – це зміна характеристик будь-яких систем, що повторюються або майже повторюються. Характерною особливістю усіх коливальних рухів є періодичність, тобто регулярна повторюваність через певні проміжки часу, які називають періодом коливання. В цьому сенсі можна згадати і коливання маятника годинника, сезонні коливання чисельності населення курортних містечок, коливання дифузorzів гучномовців, скорочення серцевих м'язів, положення планет навколо Сонця і т. ін.

У фізиці, залежно від природи величини, яка зазнає періодичної зміни, розрізняють коливання механічні, у тому числі звукові, електромагнітні та ін. Але спільними для усіх цих випадків є математичні моделі, що їх описують. Дуже схоже описується і рух маятника настінного годинника, і рух атомів та іонів у твердому тілі біля вузлів кристалічної решітки. При цьому треба зазначити, що переважна більшість акустичних, електромагнітних і оптичних явищ нерозривно зв'язана з коливальними рухами.

Колівальні системи, в яких параметри з часом не змінюються, називають лінійними. Колівальні процеси в таких системах добре вивчені, а їх математична теорія (тобто, моделі) повністю розвинена. Колівальні системи, параметри яких залежать від стану системи, називають нелінійними.

Найпростішими серед коливальних рухів є гармонічні коливання, при яких фізична величина змінюється з часом за законом синуса або косинуса. Така ситуація реалізується найчастіше у випадку невеликих відхилень параметрів системи відносно деякого середнього значення (лінійні системи). Гармонічні коливання важливі тим, що всі коливання, які зустрічаються у природі і техніці, з досить добрим наближенням описуються синусоїдальним законом. Навіть тоді, коли відбуваються несинусоїдальні коливання, то їх можна представити як результати накладення декількох гармонійних коливань. Окремо розглядаються нелінійні системи, наприклад, такі, які відповідають умовам великих відхилень від стану рівноваги, зі складним законом сили, що повертає до стану рівноваги.

Лабораторна робота № 13

Дослідження руху фізичного маятника і визначення прискорення вільного падіння

Фізичним маятником називають тіло, здатне здійснювати коливання навколо нерухомої точки, яка не збігається з його центром маси (рис. 1).

Мета роботи:

- дослідити зміну характеристик коливань фізичного маятника в залежності від способів підвісу та розташування центра маси,
- дослідити екстремуми відповідних функціональних залежностей,
- із використанням фізичного маятника знайти прискорення вільного падіння у визначеній точці простору,
- дослідити помилку такого вимірювання.

Теоретичний матеріал

Визначення коливань. Основні характеристики коливальних рухів. Умови виникнення коливань. Лінійні та нелінійні коливання. Математичні моделі гармонічних коливань. Гармонічний осцилятор. Рівняння гармонічного осцилятора та його розв'язки. Математичний та фізичний маятник. Основні характеристики і рівняння обертового руху.

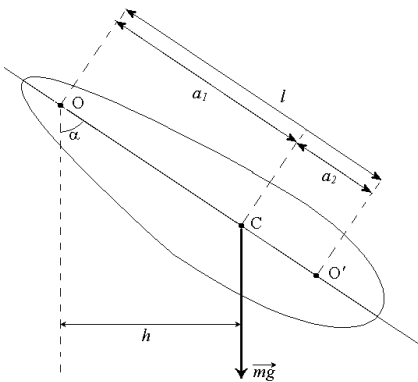


Рис. 1

Для визначення умов виникнення коливань та побудови математичної моделі коливальних рухів фізичного маятника скористаємось представленням руху об'єкта довільної форми навколо осі, яка є паралельною поверхні Землі (рис. 1). У положенні рівноваги фізичного маятника його центр маси C знаходиться на одній вертикалі з точкою підвісу O , але нижче від неї.

При відхиленні маятника від положення рівноваги на кут α виникає обертальний момент M сили тяжіння, плече якої $h = a_1 \sin \alpha$. Він намагається повернути маятник у положення рівноваги. Якщо дією моментів сил тертя знехтувати, то з основного рівняння динаміки обертального руху дістанемо:

$$I \cdot \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -mg \cdot a_1 \cdot \sin \alpha, \quad (1)$$

де I – момент інерції тіла відносно горизонтальної осі, що проходить через точку O (вісь перпендикулярна до площі рисунка); m – маса маятника; знак мінус вказує на те, що момент сили тяжіння намагається повернути маятник до положення рівноваги, а кут відхилення α відраховується у протилежному напрямі. Для малих кутів відхилення $\sin \alpha \approx \alpha$ і рівняння (1) набуває вигляду:

$$I \cdot \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -mg \cdot a_1 \cdot \alpha, \quad (2)$$

або приймає вигляд рівняння *гармонічного осцилятора*:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{mga_1}{I} \alpha = \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \omega_0^2 \alpha = 0 \quad (3)$$

Як відомо, розв'язок останнього рівняння може бути представлений у вигляді:

$$\alpha = \alpha_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (4)$$

де α_m – *амплітуда*, або максимальне за період відхилення від стану рівноваги, ω_0 – *циклічна частота власних коливань*, t – час, а φ_0 – *початкова фаза коливань*. Як відомо, *період коливань* – це час, який відокремлює однакові значення відхилення від рівноваги в одному напрямку, і зв'язаний з власною циклічною частотою очевидним співвідношенням $\omega_0 = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$. Тоді вираз $\frac{mga_1}{I}$ відповідає за змістом і величиною власній частоті коливань фізичного маятника у квадраті, а період коливань:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga_1}}. \quad (5)$$

Величина $\frac{I}{ma}$ має розмірність довжини, тобто:

$$\frac{I}{ma_1} = l. \quad (6)$$

Її називають *зведеною довжиною фізичного маятника*. Очевидно, *математичний маятник* (фізична абстракція, для якої вважається, що невеличкі коливання здійснює матеріальна точка на невагомому підвісі) матиме такий самий період коливань, як і фізичний маятник, за умовою, що його довжина дорівнює зведеній довжині фізичного маятника.

Точку O' , що знаходиться на лінії OC на відстані l від точки підвісу O , називають *точкою коливань або центром коливань фізичного маятника*. Якщо у цій точці підвісити фізичний маятник, то його період коливань не зміниться. Справді, якщо O' є точка підвісу маятника, то його нова зведена довжина:

$$l' = \frac{I'}{ma_2},$$

де I' – момент інерції маятника відносно осі, що проходить через точку O' .

За теоремою Гюйгенса-Штейнера момент інерції маятника:

$$I = I_0 + ma_1^2, \quad \text{а} \quad I' = I_0 + ma_2^2,$$

де I_0 – момент інерції маятника відносно паралельної осі, що проходить через його центр маси. Тоді:

$$l = \frac{I_0 + ma_1^2}{ma_1} = \frac{I_0}{ma_1} + a_1, \quad \text{а} \quad l' = \frac{I_0}{ma_2} + a_2. \quad (6')$$

Із рис. 1 видно, що:

$$a_2 = l - a_1, \quad \text{то} \quad a_2 = \frac{I_0}{ma_1}; \quad l' = \frac{I_0 ma_1}{mI_0} + \frac{I_0}{ma_1} = a_1 + \frac{I_0}{ma_1} = l.$$

З рівностей приведених довжин витікає рівність періодів коливань відносно осей, що проходять через спряжені точки O і O' . Ця властивість фізичного маятника дозволяє визначити по-

ложення спряжених точок і знайти зведену довжину фізичного маятника l експериментально.

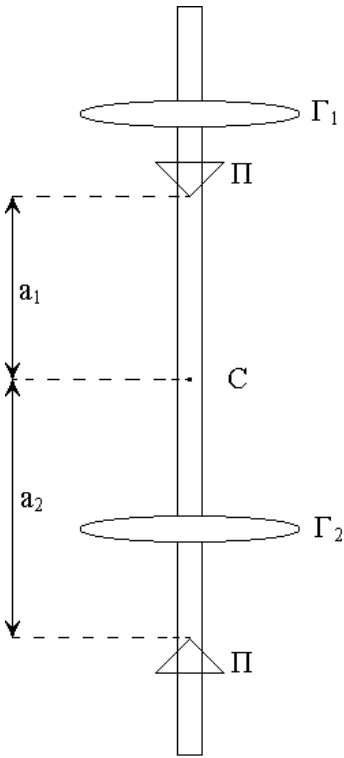


Рис. 2

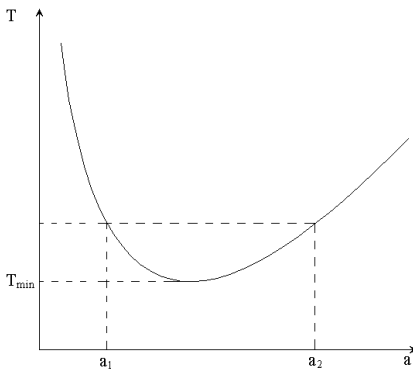


Рис. 3

Дослідним шляхом можна визначити період коливань маятника і знайти g . Для цього у вираз (5) підставимо вираз (6) і остаточно знайдемо:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}. (7)$$

Опис приладу і методики вимірів

У задачі використовується довгий металевий суцільний стрижень, вздовж тіла якого нанесені рисочки для відліку відстані (фактично шкала довжин), і вздовж якого пересуваються як опорні призми Π , так і спеціальні вантажі Γ_1 і Γ_2 (рис. 2). Якщо центр хитань розташувати в межах тіла, то можна досягти такого положення, що маятник буде оборотним, тобто вибрані його дві точки опори стануть спряженими.

1. Графічна залежність періоду коливань T від відстані a зображена на рис. 3. З цього графіка видно, що при наближенні точки підвісу до центру маси C ($a_1 \rightarrow 0$) період коливань T прямує до нескінченності, тобто рух стає неперіодичним. Період зростає також при віддаленні точки підвісу від центра маси маятника.

ника. При деякому певному значенні відстані a період коливань є мінімальним (T_{\min}).

Дійсно, зведена довжина фізичного маятника однозначно зв'язана із періодом (5). З другого боку, якщо зведену довжину визначати через момент інерції маятника відносно осі, яка проходить через центр маси, формула (6') уявляє собою квадратичну залежність періоду відносно a .

Для побудови цього графіка та виконання першого завдання положення призм та вантажів задаються наступним чином:

- 1) призма П на 5-тій та 85-тій поділках;
- 2) вантаж Г2 в інтервалі від 30-ї до 60-ї поділок шкали;
- 3) вантаж Г1 на 91-ій поділці.

Пересуваючи призму біля 1-го вантажу через 2 см в бік центра маси, визначають період коливань маятника відносно точки опори, що задається її положенням. Для цього відхиляють маятник на кут до 3° і визначають час 20 повних коливань для кожного положення призми, ретельно переконаючись кожного разу, що коливання здійснюється в одній площині і позбавлене биття.

2. Перед початком вимірів з метою визначення прискорення вільного падіння необхідно вибрати такі умови досліду, щоб точність вимірів була найбільшою. Проведемо такі оцінки. Для цього перепишемо (5) у вигляді:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + ma}{mga}}. \quad (8)$$

Якщо період коливань відрізняється від T_{\min} , то, як видно з рис. 3, одне і теж значення T досягається при двох різних значеннях a . Якщо помістити точку підвісу на відстані a_1 від центру тяжіння, то центр качань буде знаходитись на відстані a_2 . Ці значення a_1 та a_2 необхідно знайти на досліді, щоб обчислити g , так як в цьому разі $a_1 + a_2 = l$ є зведеною довжиною. Але важко досягти умов збігу періодів прямого і оберненого маятника. Вони будуть відрізнятися на якесь значення ΔT . Тоді:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + ma_1^2}{mga_1}}, \quad \text{а} \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + ma_2^2}{mga_2}},$$

і, якщо знехтувати ΔT^2 , то:

$$g = 4\pi^2 \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1 T_1^2 - a_2 T_2^2} = \frac{4\pi^2 (a_1 - a_2) \cdot (a_1 + a_2)}{T^2 (a_1 - a_2) + 2a_2 T \Delta T}. \quad (9)$$

Якщо розкласти цей вираз в ряд за ступенями ΔT і обмежитись членами першого порядку, то:

$$g = 4\pi^2 \frac{a_1 + a_2}{T^2} \left[1 - \frac{2a_2 \Delta T}{(a_1 - a_2 T)} \right].$$

Якщо періоди T_1 і T_2 повністю збігаються, то (9) переходить у (7). Враховуючи (9) і (7), отримаємо для відносної похибки, обумовленої тим, що періоди T_1 і T_2 не збігаються:

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{2a_1 \Delta T}{T(a_1 - a_2)}. \quad (10)$$

Із (10) бачимо, що похибка необмежено зростає, якщо $|a_1 - a_2| \rightarrow 0$, тобто, якщо $T \rightarrow T_{min}$. Тому умови досліду повинні бути такі, щоб a_1 і a_2 відрізнялись на певну величину. Якісний результат забезпечують виміри, якщо $\frac{a_1}{a_2} > 1.5$.

Попередні дослідження дозволяють завжди розташувати призми і грузи так, щоб виконувалась ця умова. Для цього у маятника, що застосовується у нашій лабораторії, як і у першому завданні, слід розмістити:

- 1) призми Π на 5-тій та 85-тій поділках;
- 2) вантаж G_2 в інтервалі від 30-ї до 60-ї поділок шкали;
- 3) вантаж G_1 на 91-ій поділці і призвести його до коливального руху.¹

Щоб знайти зведену довжину маятника, будемо змінювати його момент інерції I відносно точки підвісу доки точки, в яких закріплені призми Π , не стануть спряженими. Цей стан можна до-

¹ Для початку спостережень маятник відхиляють на 3-5см у нижній точці, уважно спостерігаючи за тим, щоб коливання здійснювались в одній площині.

сягти певним розташуванням вантажу. Для цього вантаж G_1 слід пересувати в інтервалі від 91-ої до 115-ої поділок стержня і через 3 см визначати період коливань маятника.

Ці виміри треба повторювати тричі при спостереженні 25 повних коливань². Отримані середні значення періодів треба нанести на графік у залежності від положення вантажу G_1 . На осі абсцис треба відкладати відстань (поділки шкали стержня маятника), а на осі ординат – величини періодів коливань. Після цього треба перевернути маятник і знову призвести його до коливального руху на другій опорній призмі II . Далі потрібно пересувати вантаж G_1 на 3 см в інтервалі від 115-ої до 91-ої поділки і кожного разу визначати період коливань маятника. Ці значення періодів треба нанести на графік. Точка перетину кривих визначить положення вантажу G_1 , при якому періоди коливань маятника T_1 і T_2 в прямому і оберненому положеннях найбільш близькі один до одного.

Вантаж G_1 треба закріпити у положенні, що відповідає точці перетину кривих і визначити час 50 повних коливань не менше трьох разів у прямому положенні маятника і так само визначити період із 50 коливань, повторених три рази для оборотного маятника. Якщо періоди T_1 і T_2 для прямого і оборотного маятника не відрізняються більше ніж на 0,003 с, то для обчислення прискорення сили тяжіння g користуються формулою (7). При розходженні T_1 і T_2 на більшу величину для розрахунку g користуються формулою (9), або формулою Бесселя:

$$g = \frac{8\pi^2 l}{T_1^2 + T_2^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(T_1^2 - T_2^2) \cdot l}{(T_1^2 + T_2^2) \cdot (a_1 - a_2)}}, \quad (11)$$

Щоб визначити величини a_1 і a_2 треба маятник зняти з консолі, обережно покласти його на підставку з гострою гранню і врівноважити. Відстані від точки маятника, що знаходиться на грані, до опорних призм дають величини a_1 і a_2 . Виміри a_1 і a_2

² Кількісні характеристики, які пропонуються для використання винайдено попередніми дослідями. Зокрема, здається, що кількість коливань краще збільшити для зростання точності вимірювань. Але при збільшенні часу коливань зростає і вплив сил тертя, які гальмують коливання і призводять до зростання значення періоду.

виконують за допомогою масштабної лінійки з точністю до одного міліметра. За результатами вимірів обчислюють прискорення сили тяжіння і оцінюють точність експерименту.

Контрольні питання:

1. Який рух зветься коливальним ?
2. Опишіть стан механічної рівноваги. Якими є умови перебування механічної системи у стані рівноваги? Яка рівновага є стійкою і яка – нестійкою? При яких умовах у механічній системі може виникнути коливальний рух?
3. Які коливання зветься вільними, або власними? Від чого залежить частота власних коливань?
4. Які коливання називають гармонічними? Що таке фаза гармонічних коливань і що вона характеризує? Як пов'язані між собою фази, координати, швидкості та прискорення тіла, що здійснює гармонічні коливання? Від чого залежать амплітуда, частота та початкова фаза гармонічних коливань? Гармонічний осцилятор.
5. Яку систему називають математичним маятником? Якими параметрами визначається період коливань математичного маятника. Опишіть коливання математичного маятника. Побудуйте схематичні графіки залежності прискорення, швидкості та координати від часу.
6. Дайте визначення фізичного маятника. Що зветься зведеною довжиною фізичного маятника та його центром коливань. Які точки маятника є спряженими?
7. Які є методи знаходження зведеної довжини фізичного маятника?
8. Який зв'язок існує між прискоренням земного тяжіння та зведеною довжиною і періодом коливань фізичного маятника. Чому прискорення земного тяжіння у різних широтах різне?
9. Які коливання називають малими? І як величина амплітуди може впливати на різновид коливальних рухів?
10. Чим визначається точність вимірювань прискорення вільного падіння за допомогою фізичного маятника?
11. Як залежить значення прискорення вільного падіння від широти місцевості?

Лабораторна робота № 14

Дослідження вимушених коливань та явища резонансу

Мета роботи:

- дослідити резонансні явища у механічній коливальній системі, для чого побудувати амплітудні резонансні криві в середовищах, що характеризуються різними коефіцієнтами в'язкості (тобто гальмування руху), розрахувати для кожного випадку добротність системи, коефіцієнт згасання, логарифмічний декремент згасання;
- провести аналіз отриманих даних.

Теоретичний матеріал

Згасаючі коливання. Рівняння коливань при наявності тертя. Частота й логарифмічний декремент згасання. Час релаксації. Аперіодичні рухи. Вимушені коливання. Рівняння коливань під дією сили, що змушує. Резонанс. Амплітудні й фазові резонансні криві. Добротність. Одержання резонансної кривої і її зв'язок з добротністю.

Згадаємо спочатку вільні коливання, які реалізуються відповідно до рівняння руху $m \frac{d^2 s}{dt^2} = -k$. Якщо тілу надати запас енергії і дати можливість коливатись, то при малих кутах відхилення і малій силі тертя воно буде коливатись майже за гармонічним законом із власною частотою $\omega_0 = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$. Тут m – маса тіла, k – коефіцієнт пружності (жорсткості).

Але в реальних умовах наданий тілу запас енергії зменшується. Енергія витрачається на роботу проти сил тертя. У випадку малих відхилень тіла від положення рівноваги силу тертя можна прийняти пропорційною швидкості його руху, і рівняння руху тіла буде:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -k - h \frac{ds}{dt}, \quad (1)$$

а його рішення:

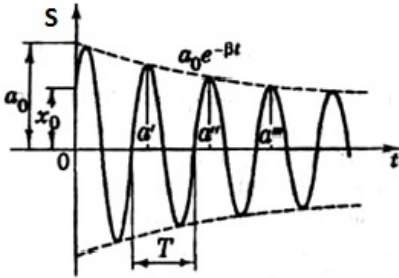
$$s = a_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (2)$$

описує коливання з циклічною у загальному випадку частотою:

$$\omega \neq \omega_0. \quad (3)$$

Тут s – зміщення тіла відносно положення рівноваги, h – коефіцієнт сили тертя, a_0, φ_0 – початкові амплітуди і фаза коливань.

Коефіцієнт затухання



$$\delta = \frac{h}{2m}$$

характеризує швидкість затухання амплітуди коливань з часом. Якщо взяти відношення амплітуд в (2) через про-

міжок часу $\tau = \frac{1}{\delta}$, то воно

буде дорівнювати $e^{-\delta t} = e^{-1}$. Таким чином, **коефіцієнт затухання δ – величина, обернена проміжку часу τ , упродовж якого амплітуда коливань тіла зменшується в e разів.**

Для тіла, що коливається, більш природною є характеристика не за часом, а за числом коливань. Тому вводять ще одну величину – логарифмічний декремент затухання Θ , який показує зменшення амплітуди за один період. Щоб визначити зміст Θ , позначимо через N число коливань, на протязі яких амплітуда коливань зменшується в e разів. Тоді можна записати, що $N = \frac{\tau}{T}$ і $\Theta = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N}$. Таким чином, **логарифмічний декремент затухання Θ є величина, обернена числу коливань, після яких амплітуда зменшується в e разів.**

Для прикладу характеристик δ і Θ порівняємо швидкість затухання двох систем з параметрами:

$$\begin{aligned} T_1 &= 10^{-8} \text{ c}, \delta_1 = 10^5 \text{ c}^{-1}, \Theta_1 = 10^{-3}, \tau_1 = 10^{-5} \text{ c}, N_1 = 10^3, \\ T_2 &= 10^{-3} \text{ c}, \delta_2 = 10^2 \text{ c}^{-1}, \Theta_2 = 10^{-1}, \tau_2 = 10^{-2} \text{ c}, N_2 = 10. \end{aligned}$$

Як видно, коливання першої системи швидше затухають із плином часу, а другої – краще визначаються зміною кількості коливань.

У техніці замість логарифмічного декременту вводять величину, яку називають добротністю:

$$Q = \frac{\pi}{\Theta} = \pi N . \quad (4)$$

Добротність тим більше, чим довше триває коливання системи, причому тут слово “довше” відноситься до природного масштабу часу системи, який задається тривалістю окремого коливання. В наведеному вище прикладі добротність другої системи в 100 разів менша, ніж добротність першої системи.

Щоб коливання не затухали, необхідно підводити із-зовні енергію, як це робиться у випадку підтримки коливальних рухів у годинниках або на гойдалці. Але існує ще один варіант підтримки коливань, коли вони підтримуються дією зовнішньої сили.

Звернемося до випадку коливання тіла під дією зовнішньої сили, що змінюється за законом $F = F_0 \cos \omega t$. Такі коливання відбуваються з частотою зовнішньої сили і називаються вимушеними. Рівняння динаміки вимушених коливань має вигляд

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -k s - h \frac{ds}{dt} + F_0 \cos \omega t .$$

Рішенням цього рівняння є функція:

$$s = a \cos(\omega t + \varphi) , \quad (5)$$

де

$$a = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} , \quad (6)$$

а

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} . \quad (7)$$

Швидкість тіла буде змінюватись за законом:

$$v = \frac{ds}{dt} = -a\omega \sin(\omega t + \varphi) , \quad (8)$$

і відповідно:

$$v_{\max} = a\omega = \frac{F_0}{m\sqrt{\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega^2} + 4\delta^2}}.$$

Функція (5) описує усталені коливання, при яких енергія, що надходить від зовнішнього джерела, повністю витрачається на роботу проти сил тертя. Із співвідношень (5–7) не важко отримати, що енергія сильно залежить від значень частоти ω і φ . Дійсно, робота, що виконується зовнішньою силою за період коливань:

$$A = \int_0^T F dS = \int_0^T F \frac{dS}{dt} dt = F_0 a \omega \int_0^T \cos \omega t \sin(\omega t + \varphi) dt \quad (9)$$

Як видно із (9) робота буде максимальна при значенні $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, тобто коли фаза швидкості збігається з фазою зовнішньої сили. Із (7) видно, що такому значенню φ відповідає частота

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}, \quad (10)$$

і значення максимальної амплітуди зміщення усталених коливань при малому коефіцієнті тертя в порівнянні з власною частотою коливань ω_0 буде резонансна амплітуда:

$$a_p = \frac{F_0}{2m\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}. \quad (11)$$

Резонанс швидкості буде спостерігатись, коли зовнішня частота ω_0 .

Якщо частоту ω плавно змінювати, то згідно з (6) і (7) отримаємо залежності $a(\omega)$, $\varphi(\omega)$ і швидкості $v(\omega)$, які можна зобразити графічно резонансними кривими (рис. 4–6).

Таким чином, результат дії одного осцилятора з частотою ω на другий з власною частотою ω_0 сильно залежить від співвідношення частоти. При частоті ω_p система коливається з максимальною амплітудою a_p , тобто осцилятор з власною частотою

ω_0 отримує максимум енергії від зовнішнього джерела. Це явище називається **резонансом зміщення** системи, що коливається. Як неважко відстежити із (8), **резонанс швидкості** руху тіла спостерігається, коли частота зовнішньої сили $\omega = \omega_p$.

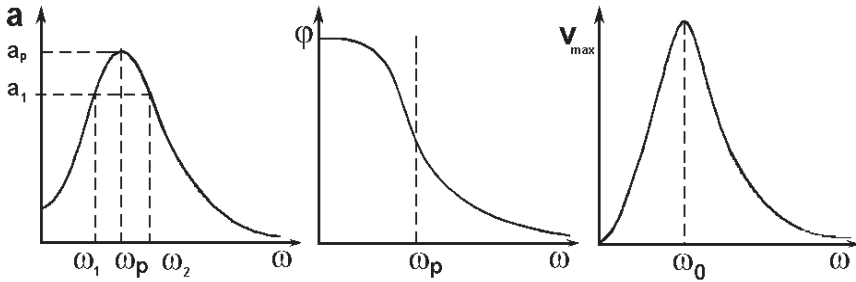


Рис. 4–6

Не треба забувати, що резонансні криві (рис. 4–6) відносяться до усталених (стаціонарних) коливань. Стаціонарні коливання встановлюються не одразу, а через деякий час. Чим гостріша резонансна крива, тим довше треба чекати усталення стаціонарної амплітуди.

Гостроту резонансної кривої можна охарактеризувати добротністю осцилятора. **Добротність осцилятора Q визначають як відношення енергії, яку він має при резонансі, до енергії, яка тратиться на роботу проти сил тертя протягом одного періоду коливань.** Якщо взяти це відношення, то після підрахунків отримаємо вираз (4).

Добротність осцилятора пов'язана з шириною резонансної кривої $2\Delta\omega$. Ширина резонансної кривої виділяє область тих частот зовнішньої сили, що змушує, для яких енергія коливань осцилятора складає не менше 50 % від енергії коливань при резонансі. Так як енергія осцилятора пропорційна a^2 , то ширину резонансної кривої на рис. 4 можна отримати, якщо провести пряму, паралельну вісі абсцис через ординату a_1 рівну $0,7a_p$.

Точки перетину цієї прямої з резонансною кривою виділяють область частот $2\Delta\omega = (\omega_2 - \omega_1)$. Величину $\Delta\omega$ називають півшириною резонансної кривої. Отже ω_1 і ω_2 – частоти зовніш-

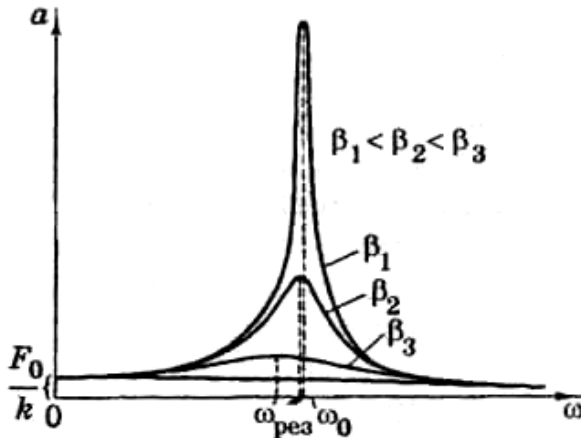
ньої дії, при яких відношення:

$$\frac{a_p^2}{a_1^2} = \frac{a_p^2}{0,49 a_p^2} \cong 2. \quad (12)$$

Якщо коефіцієнт затухання малий ($\delta^2 < \omega_0^2$), то резонансна крива досить симетрична в області резонансу. В цьому випадку, якщо підставити a_p із (11) і a_1 із (6) для ω_1 в (12), то отримаємо, що $\Delta\omega = \delta$ і добротність:

$$Q = \frac{\pi}{\Theta} = \frac{\pi}{\delta\Gamma} = \frac{\pi\omega_0}{2\pi\delta} = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega}. \quad (13)$$

Із співвідношення (13) видно, що добротність осцилятора характеризує як частоту резонансної кривої, так і час встановлення коливань (Q залежить від $\delta = \frac{1}{\tau}$). Чим гостріша резонансна крива, тим більший час встановлення стаціонарних вимушених коливань.



Що стосовно впливу гальмування на положення максимуму резонансної кривої, то слід відзначити, що резонанс зміщений спостерігається при значеннях циклічної частоти, нижчих від частоти власних коливань (див. вираз (10)). І, якщо на досліді у

повітрі частоти сили, що змушує, і власних коливань при резонансі майже не відрізняються, то занурення системи, яка коливається, у рідину, тим більше у випадку збільшення в'язкості, приводить до помітного зсуву резонансної кривої. Цей ефект можна спостерігати і в запропонованих дослідженнях.

Опис установки і методики вимірювань

В даній роботі необхідно виміряти амплітуди коливань тіла при різних частотах діючого зовнішнього осцилятора. Побудувати криву $a(\omega)$ і визначити ширину кривої, коефіцієнт затухань δ , декремент затухань q і добротність Q .

Металевий феромагнітний тонкий стрижень жорстко закріплюється на масивному штативі так, щоб точку закріплення можна було змінювати. Поблизу цього стрижня розташований електромагніт, який діє на нього з деякою силою, що змінюється за періодичним законом. Електромагніт живиться від звукового генератора. Це дозволяє змінювати частоту і амплітуду сили, що діє на стрижень, шляхом зміни напруги на виході генератора. Амплітуду коливань стрижня можна виміряти за допомогою мікроскопу типу «Мир», в окулярі якого розміщена шкала з поділками.

Порядок виконання роботи:

1. Включіть освітлення стрижня і проведіть юстування системи так, щоб зображення стрижня було чітке і знаходилось у центрі шкали.
2. Ввімкніть генератор і підберіть частоту діючої сили, при якій коливання стрижня максимальні. Відрегулюйте напругу на виході генератора так, щоб відхилення стрижня від положення рівноваги не виходили за межі шкали. Встановлену напругу не змінюйте протягом вимірів амплітуди коливань при різних частотах, так як вона визначає значення F_0 .
3. Знайдіть власну частоту коливань стрижня ω_0 . Для цього встановіть частоту генератора на відмітці «нуль» і, поступово збільшуючи її, визначте значення амплітуди коливань стрижня на різних частотах. Побудуйте графік $a(\omega)$ і знайдіть ширину кривої ω_p . Переконайтесь, що δ мале, крива гостра і ω_p приблизно можна порівняти з ω_0 .

Змініть точку закріплення стрижня і визначте ω_0 для трьох різних довжин. Порівняйте ці частоти і зробіть висновок.

- З'ясуйте вплив в'язкості середовища на коливання стрижня. Для цього при певній довжині стрижня і значенні F_0 помістіть його по черзі в рідини з різним значенням коефіцієнта в'язкості і визначте $a(\omega)$. Побудуйте ці залежності і знайдіть $\Delta\omega, \delta, \Theta, Q$. При цьому за ω_0 можна взяти його значення для стрижня, визначене із коливань у повітрі.

Контрольні питання:

- Запишіть рівняння руху лінійного осцилятора під дією гармонійної зовнішньої сили. Від чого залежить час усталення стаціонарного режиму змушених коливань? Чому дорівнює частота сталих змушених коливань при гармонійному зовнішньому впливі?
- Що називається резонансом? Укажіть характерні риси амплітудної резонансної кривої? Яка частота називається резонансною? Як зв'язана резонансна частота $\omega_{рез}$ із частотою власних коливань ω_0 ? У якому випадку резонансна частота $\omega_{рез}$ дорівнює власній частоті ω_0 ?
- Яке співвідношення між фазою змушених коливань і фазою зовнішньої сили в наступних випадках: 1) $\omega \ll \omega_0$, 2) $\omega \gg \omega_0$, 3) $\omega \approx \omega_0$. Чим пояснити, що найбільш ефективна передача енергії від джерела зовнішньої сили до коливальної системи відбувається при резонансі?
- Використовуючи рівняння руху змушених коливань і фазову резонансну криву, розгляньте фізичну картину змушених коливань у різних областях частоти, припускаючи, що тертя мале, тобто коефіцієнт згасання $\delta \ll \omega_0$? Які сили, що входять у рівняння руху, визначають величину амплітуди змушених коливань у наступних випадках: 1) $\omega \ll \omega_0$, 2) $\omega \gg \omega_0$, 3) $\omega \approx \omega_0$? Яка сила компенсує зовнішню силу при резонансі?
- Що називається коефіцієнтом згасання (декрементом згасання) – δ і логарифмічним декрементом згасання θ ? Яка із цих величин характеризує швидкість згасання з часом?

Якою величиною оцінюють швидкість згасання залежно від числа коливань?

6. Що називається добротністю? Чому добротність є найважливішою характеристикою резонансних властивостей системи?
7. Поясніть, як за допомогою амплітудної резонансної кривої визначити коефіцієнт згасання, логарифмічний декремент згасання й добротність.

ХВИЛІ

У своїй практичній діяльності та при спостереженнях за подіями в оточуючому нас середовищі людина зустрічає різноманітні хвильові процеси: і хвилі на поверхні водойм, і хвилі міграцій великої кількості людей, і хвилі пандемій, і звукові хвилі в атмосфері, в конденсованих тілах і електромагнітні хвилі.

Найпростіший варіант поширення механічних хвиль, які можна достатньо просто описати, реалізується в пружних середовищах, де передача збурення внаслідок виникнення локальних коливань здійснюється за рахунок зв'язків сусідніх областей простору. Формально передача збурення в певному напрямку відповідає зміні енергетики сусідніх об'єктів, тобто немовби перенесенню енергії в цьому напрямку (за виключенням випадку утворення стоячих хвиль, про що мова піде нижче).

Математичні моделі, що описують хвильовий процес, використовують апарат опису коливань, у якому розв'язок рівнянь руху можна представити гармонічними функціями, які є симетричними відносно просторових та часових характеристик.

Лабораторна робота № 15

Визначення швидкості поширення звуку методом інтерференції хвиль

Мета роботи:

- визначити швидкість звуку в повітрі методом інтерференції звукових хвиль;
- оцінити похибку експерименту.

Теоретичний матеріал

Поздовжні й поперечні хвилі. Рівняння плоскої хвилі. Амплітуда, фаза й частота хвилі. Динаміка хвильового процесу в пружному середовищі. Енергія хвилі. Потік енергії. Принцип Гюйгенса. Інтерференція хвиль.

В фізиці хвилями або хвилею називають чередування з часом у просторі максимумів та мінімумів будь-якої фізичної величини, наприклад, густини речовини, напруженості електричного поля, температури. Хвилею часто звать також явища, при яких у просторі відбувається поширення короткочасного електричного або механічного “поштовху”.

Хвильовий процес буде відомим, якщо в будь-які моменти часу відомі зміщення у процесі коливання частинок речовини, розташованих на різних відстанях від джерела хвиль. Отже, хвильовий процес буде визначений, якщо відома функціональна залежність зміщення згаданих частинок від координат її точки рівноваги x , y , z і часу t , тобто

$$\xi = \xi_0(x, y, z, t) , \quad (1)$$

Розглянемо вигляд функції (1). Для спрощення розглянемо плоску хвилю, яка поширюється у напрямку осі Ox . В цьому випадку хвильові поверхні (геометричні місця точок, які коливаються в однакових фазах) будуть перпендикулярні осі Ox , а зміщення коливальних точок цих поверхонь залежать тільки від x і t , тобто $\xi = \xi_0(x, t)$.

Нехай зміщення частинки, що лежить у площині $x = 0$, визначається рівнянням:

$$\xi = A \sin wt. \quad (2)$$

Зміщення частинок у площині, яка розташована на відстані x від початкової, відбудуться пізніше на час τ . За цей час хвиля поширюється від площини $x=0$ до заданої. Отже:

$$\xi = A \sin w(t - \tau). \quad (3)$$

Оскільки $\tau = \frac{x}{v}$, де v – швидкість поширення хвилі, то (3) перепишемо так:

$$\xi = A \sin w \left(t - \frac{x}{v} \right) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{vT} \right).$$

Так як довжина хвилі $\lambda = vT$, а хвильове число $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, то:

$$\xi = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right), \text{ або } \xi = A \sin(wt - kx). \quad (4)$$

У середовищі можуть поширюватись кілька хвиль. Дослід показує, що кожна хвиля поширюється незалежно від наявності інших хвиль. Частинка середовища при цьому здійснює коливання, які є результатом додавання коливань, що створюються в даній точці простору кожною хвилею. Результуюче зміщення частинки середовища в будь-який момент часу дорівнює геометричній сумі зміщень, які здійснюють частинки під дією кожної хвилі, зокрема.

Тільки за певних умов, при накладанні двох хвиль, амплітуда результуючих коливань різних частинок середовища матиме значення, яке з часом не буде змінюватись. В одних місцях спостерігається підсилювання коливань, в інших – послаблення. У загальному випадку амплітуда результуючих коливань не дорівнює сумі амплітуд складових коливань. Це явище накладання хвиль називають інтерференцією. Характерною ознакою інтерференції є існування зон з максимальними і мінімальними амплітудами результуючих коливань. Ці зони чергуються, але не переміщуються.

Інтерференційна картина виникає, коли коливання частинок середовища, що збуджуються інтерферуючими хвилями, відбуваються в однакових напрямках, частоти їх коливань однакові і зсув фаз між коливаннями частинки з часом не змінюються. Хвилі, що

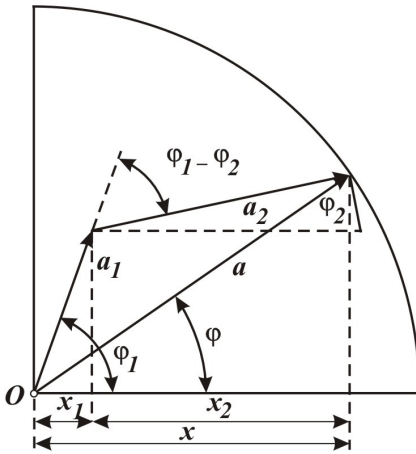
відповідають цим умовам, називають **когерентними**. Така назва відповідає і джерелу їх збурення.

Нехай в якусь точку, що розташована на відстанях r_1 і r_2 від когерентних джерел, в момент часу t доходять дві когерентні хвилі:

$$\xi_1 = A_1 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi r_1}{\lambda}\right), \quad \xi_2 = A_2 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi r_2}{\lambda}\right). \quad (5)$$

При додаванні коливань одного напрямку знайдемо амплітуду результуючого коливання, для чого представимо обидва коливання за допомогою векторів (див. рисунок), які обертаються навколо спільного центру зі швидкістю, що, фактично, є циклічною частотою наших коливань. У будь-який момент часу:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (6)$$



де $\varphi_1 = \frac{2\pi r_1}{\lambda}$, $\varphi_2 = \frac{2\pi r_2}{\lambda}$.

Тоді

$$(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{2\pi(r_2 - r_1)}{\lambda} = \frac{2\pi d}{\lambda}.$$

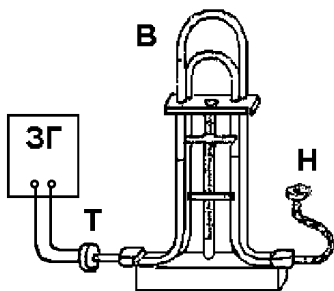
Із виразу (6) витікає, що амплітуда результуючого зміщення буде максимальною і рівною $A_{\max} = A_1 + A_2$ в тих точках, для яких різниця ходу хвиль:

$$d = r_2 - r_1 = n\lambda, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

З (6) також випливає, що амплітуда результуючих коливань має мінімальне значення $A_{\min} = |A_1 - A_2|$ для різниці фаз, коли:

$$\frac{2\pi d}{\lambda} = (2n + 1)\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

тобто для значень різниці ходу хвиль, рівних непарному числу довжин півхвиль:



$$d = r_2 - r_1 = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}. \quad (8)$$

Таким чином, у випадку додавання когерентних хвиль, результуюче коливання у кожній точці середовища має постійну за часом амплітуду, що залежить від відстані цієї точки до джерел коливань.

Опис установки та методика вимірів

Швидкість поширення звукової хвилі у середовищі можна знайти, якщо відома довжина хвилі λ і її частота ν , за визначенням

$$c = \frac{\lambda}{O} = \lambda \nu. \quad (9)$$

Для визначення довжини хвилі використовують прилад, схема якого зображена на рисунку. Коливання від звукового генератора (ЗГ) подаються на телефон (Т), який збуджує звукові хвилі. Звукова хвиля потрапляє в латунну трубку і поширюється у повітрі по двох трубках, довжину однієї з яких можна змінювати, як це робиться в тромбоні. Хвилі, що рухаються по двох трубках, сходяться в отворі, до якого прикріплена слухова трубка Н. При переміщенні трубки В можна встановити таке її положення, при якому різниця ходу двох хвиль дорівнює парному або непарному числу довжин півхвиль. Вимірюючи переміщення трубки В, при зміні максимуму звуку на мінімум або від одного мінімуму до наступного, можна визначити за формулами (7) або (8) довжину звукової хвилі λ . Установку слід налагоджувати на мінімум звуку, так як він визначається більш виразно.

Порядок виконання роботи

1. Задати звукову частоту ν на генераторі. При цьому слід керуватись тим, щоб на шкалі приладу розмістилось декілька максимумів гучності.
2. Налаштувати систему на мінімум гучності. Це налаштування слід починати з положення трубок В, при якому обидві

хвилі проходять однакові шляхи і в трубці Н чути максимум гучності. Після цього слід установити положення трубки В, при якому спостерігається перший мінімум гучності звуку. Відстань l_1 , на яку при цьому зсунувся покажчик трубки В, дорівнює половині різниці ходу хвиль, тобто одна хвиля проходить шлях більший, ніж друга, на $2l_1$. Цей шлях відповідає зміщенню від точки, де максимум гучності до сусіднього мінімуму, і тому із (7) і (8) отримаємо:

$$2l_1 = \frac{\lambda}{2}, \text{ або } \lambda = 4l_1.$$

3. Визначити положення трубки В, які відповідають наступним мінімумам гучності звуку. Якщо відстань, на яку слід пересунути трубку В для отримання наступного мінімуму, дорівнює l_2 , то за формулою (8) $\lambda = 2l_2$.
4. При пересуванні трубки В від одного мінімуму гучності звуку до інших визначити для кожного виміру l_i довжину звукової хвилі даної частоти. Усі отримані значення λ слід усереднити і по значенню $\lambda_{\text{в}}$ визначити за формулою (9) швидкість звуку на даній частоті ν .
5. Провести дослідження швидкості звуку на двох інших частотах.
6. Зробіть оцінки точності проведених вимірювань.

Контрольні питання:

1. Яке явище зветься інтерференцією? Чим інтерференція відрізняється від суперпозиції хвиль? Як розподіляється енергія в просторі у випадку інтерференції хвиль?
2. Що таке когерентні джерела хвиль і когерентні хвилі?
3. Запишіть вираз для амплітуди результуючого коливання, що виникає при накладенні двох когерентних плоских хвиль. У яких точках середовища результуюча амплітуда коливань буде максимальна, у яких амплітуда результуючого коливання мінімальна?
4. Яка природа звуку? Від чого залежать швидкість поздовжніх і поперечних звукових хвиль?
5. Поясніть залежність швидкості звуку від температури.
6. В чому полягає принцип Гюйгенса-Френеля?

Лабораторна робота №16

Визначення швидкості поширення звуку у повітрі методом зсуву фаз

Мета роботи:

- вивчити додавання двох взаємно перпендикулярних коливань при різних значеннях зсуву фаз між коливаннями;
- за допомогою фігур Ліссажу виміряти довжину звукової хвилі у повітрі;
- визначити швидкість звуку у повітрі; оцінити точність експерименту.

Теоретичний матеріал

Гармонійні коливання. Подання коливань за допомогою вектора амплітуди. Додавання коливань одного напрямку. Биття. Додавання взаємно перпендикулярних коливань. Фігури Ліссажу.

Розглянемо монохроматичну хвилю, що поширюється у додатному напрямку осі Ox :

$$\xi = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right), \quad (1)$$

аргумент синуса $\omega \left(t - \frac{x}{v} \right)$ називають фазою хвилі. Якщо можна вважати, що хвиля поширюється у середовищі без затухання, то амплітуда коливань плоскої хвилі у всіх точках буде однаковою. Зафіксуємо будь-яке значення рівняння (1), тобто покладемо

$\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = \text{const}$. Продиференціювавши цей вираз за часом, знайдемо швидкість, з якою переміщується у просторі зафіксоване значення фази, тобто:

$$\frac{d}{dt} \left(\omega t - \frac{\omega x}{v} \right) = \omega \left[1 - \frac{1}{v} \frac{dx}{dt} \right] = 0, \quad \text{отже} \quad \frac{dx}{dt} = \tilde{n}.$$

Звідси видно, що швидкість поширення хвилі у рівнянні (1) є швидкістю переміщення фази. Тому швидкість c називають фазовою швидкістю.

Довжину хвилі λ можна визначити, як відстань між двома

найближчими частинками, фази коливань яких відрізняються на 2π . Звідси:

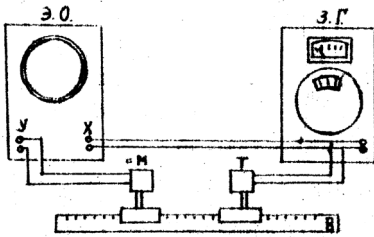
$$\omega\left(t - \frac{x + \lambda}{v}\right) - \omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = 2\pi, \quad (2)$$

отримаємо $\lambda = \frac{2\pi}{\omega} = vt$, або :

$$c = \lambda\nu. \quad (3)$$

Отже, щоб знайти швидкість поширення хвилі, треба знайти її частоту ν і виміряти довжину хвилі λ .

Опис установки і методика вимірів



Співвідношення (3) використовують в даній роботі для визначення швидкості звука. Частота звука ν задається звуковим генератором, а довжина хвилі λ визначається по зсуву фаз двох хвиль. Для цього електромагнітна хвиля частоти ν від звукового

генератору ділиться на дві. Одна з них подається на горизонтально відхиляючі пластини електронного осцилографа. Промінь осцилографа під дією синусоїдальної напруги переміщується в горизонтальній площині за законом:

$$a_x = a \sin \omega t, \quad (4)$$

де a – амплітуда переміщення, а $\omega = 2\pi\nu$. Якщо напруга на вертикально відхиляючих пластинах осцилографа відсутня, то електронний промінь рухається по прямій лінії, паралельній осі X.

Друга хвиля з допомогою динаміка (телефонна трубка Т) перетворюється у звукову хвилю, що проходить деяку відстань $l = x_2 - x_1$, а потім попадає на динамічний мікрофон (М) і перетворюється в електричну хвилю. Ця хвиля подається на пластини осцилографа, що відхиляють промінь по вертикалі.

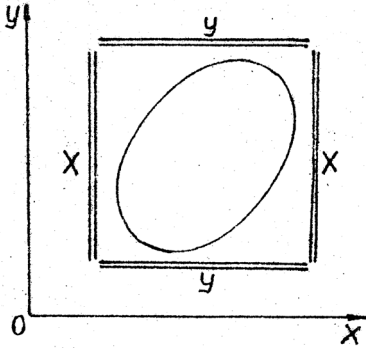
У порівнянні з напругою, що подається на горизонтальні пластини осцилографа, ця напруга зсунута по фазі на φ . Відхилення променя у вертикальному напрямку будуть слідувати закону:

$$a_y = b \sin(\omega t + \varphi), \quad (5)$$

де b – амплітуда вертикальних коливань.

У наслідок обох переміщень промінь на екрані описує еліпс. Дійсно, якщо виключити із (4) і (5) час t , то знайдемо траєкторію:

$$\frac{a_x^2}{a^2} + \frac{a_y^2}{b^2} - \frac{2a_x a_y}{ab} \cos \varphi = \sin^2 \varphi. \quad (6)$$



Рівняння (6) описує еліпс в координатах a_x, a_y . У окремому випадку, коли $\varphi = 2\pi k$, де $k = 0, 1, 2, \dots$, еліпс вироджується в пряму, що проходить в першому і третьому квадрантах. При $\varphi = (k - 1)\pi$ на екрані виникає пряма лінія, що проходить в другому і четвертому квадрантах.

Отже, якщо збільшувати відстань між x_1 і x_2 (положення мікрофона М і трубки Т) доки на екрані осцилографа отримаємо пряму в першому і третьому квадрантах, то відстань $x_2 - x_1 = \lambda$. Дійсно, за формулою (2) маємо:

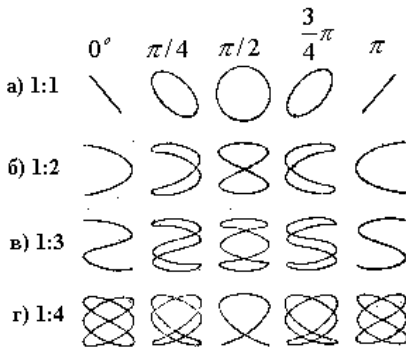
$$\omega \left(t - \frac{x_1}{c} \right) - \omega \left(t - \frac{x_2}{c} \right) = \frac{(x_2 - x_1)\omega}{\tilde{n}} = 2\pi.$$

Звідки $x_2 - x_1 = \frac{2\pi v}{\omega} = vT = \lambda$.

Порядок виконання роботи

1. Встановіть перемикач “діапазон частот” і ручку “підсилення” осцилографа в середнє положення. Ввімкніть тумблер “Сіть” і, після розігріву протягом 5-7 хвилин, ввімкніть тумблер “промінь”. На екрані повинна з’явитись розгортка. Ручками “ось X” і “ось Y” установіть розгортку до центра екрана. Ручками “яркост” і “фокус” добийтесь максимальної чіткості променю.
2. Ввімкніть звуковий генератор. Після розігріву протягом 5–7 хвилин, ручку “перемикач виходу” встановіть в положення **20 В**, лімби “частота” і “баланс” установити на нульові поділки, а ручку “регулювання виходу” – приблизно у середні положення. Повертаючи ручки “установка нуля”, добитися того, щоб стрілка вольтметра зупинилася на нульовій поділці шкали. Так установлюється нульове значення шкали частот, і цю ручку більше не повертати.
3. Підключити телефон Т до вихідних клем звукового генератора, а мікрофон М – до вертикального входу осцилографа і добитися, щоб картина на екрані осцилографа мала вигляд стійкої синусоїди. Виясніть, чому і яким чином амплітуда звукової хвилі залежить від частоти і вихідної потужності звукового генератора, а також від відстані між телефоном і мікрофоном. Особливу увагу слід звернути на ті частоти, яким відповідає різке зростання амплітуди синусоїди. Якщо при цьому відбувається помітне спотворення синусоїди на екрані осцилографа, або мембрана телефону збуджується на другій, або більш високій гармоніки, то необхідно понизити вихідну потужність настільки, щоб це явище зникло. Визначення таких частот слід записати.
4. Встановіть ручку осцилографа “діапазон частот” в положення “вимкнено”. З’єднайте вихід клем звукового генератора з горизонтальним входом осцилографа. Отримайте на екрані осцилографа еліпс. Виясніть, як змінюється його форма і розміри від частоти, амплітуди коливань, які створює звуковий генератор, від відстані між телефоном і мікрофоном, як впливають на параметри еліпса положення ручок “підсилення” і “послаблення” на панелі осцилографа.

- Повільно посуваючи мікрофон від телефону, запишіть його положення, при яких еліпс на екрані осцилографа стягується у лінію. Зробіть такі самі спостереження у зворотному напрямку. Усю серію дослідів повторіть не менше трьох разів.
- Побудуйте графік залежності координати мікрофона від номера його положення, в яких еліпс перетворюється в пряму лінію і із графіка знайдіть λ . За формулою (3) визначте швидкість v .



Зробіть виміри довжини λ не менше ніж для п'яти – семи різних частот звукового генератора. Для кожного значення v оцініть похибку вимірів.

На основі отриманих значень визначить чи залежить швидкість від частоти.

Змінюючи частоту ЗГ отримайте фігури Ліссажу на екрані.

Контрольні питання:

- У результаті якого впливу електронний промінь осцилографа здійснює коливання одночасно у двох взаємно перпендикулярних напрямках?
- Виведіть рівняння кривої, що описує електронний промінь на екрані осцилографа. За яких умов на екрані видно: 1) еліпс, 2) пряму, 3) коло?
- Як створюється зсув фаз між взаємно перпендикулярними коливаннями електронного променя?
- На яку величину варто змінити відстань між мікрофоном і телефоном після одержання на екрані прямої, щоб на екрані знову виникла пряма?
- Якими будуть фігури Ліссажу, якщо частоти взаємно перпендикулярних коливань різні?
- Які зміни відбудуться на екрані осцилографа, якщо між мікрофоном і телефоном помістити який-небудь предмет?
- Чи залежить швидкість звуку від частоти?

Лабораторна робота № 17

Визначення швидкості звуку методом стоячої хвилі

Мета роботи:

- визначити швидкість звуку в повітрі за параметрами стоячої хвилі у повітряному стовпчику;
- оцінити точність експерименту.

Теоретичний матеріал

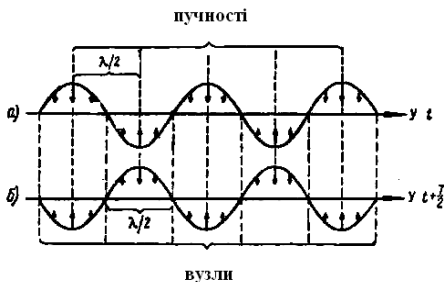
Класифікація хвиль. Поздовжні й поперечні хвилі. Рівняння плоскої хвилі. Амплітуда, фаза й частота хвилі. Динаміка хвильового процесу в пружному середовищі. Енергія хвилі. Потік енергії. Принцип Гюйгенса. Інтерференція хвиль. Заломлення й відбиття хвиль. Стоячі хвилі.

Особливим випадком інтерференції хвиль є так звана стояча хвиля, яка утворюється при накладанні біжучої і відбитої хвиль. Розглянемо модель, в якій хвилі поширюються у середовищі без затухання й амплітуди їх коливань однакові. Вважаємо, що падаюча хвиля поширюється в додатному напрямі осі Ox , а відбита хвиля – у протилежному напрямі. Розташуємо початок координат у точці, в якій обидві хвилі мають однакові фази. За початок відліку часу виберемо момент, коли фази коливань обох хвиль дорівнюють нулю. Тоді рівняння падаючої і відбитої хвиль:

$$\xi_1 = A_0 \sin(\omega t - kx), \quad \xi_2 = A_0 \sin(\omega t + kx).$$

Результуюче зміщення описується рівнянням стоячої хвилі:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A_0 \cos kx \cdot \sin \omega t. \quad (1)$$



Якщо зафіксувати деяку точку, координати якої x , то частинка, що знаходиться в цій точці, буде коливатись за гармонічним законом з амплітудою $2A_0 \cos kx$ і фазою ωt . При переході від однієї точки до іншої амплітуда змінюється за законом:

$$A = 2A_0 \cos \frac{2\pi x}{\lambda}. \quad (2)$$

У точках, для яких виконується умова

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm n\pi, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

амплітуда коливань максимальна і дорівнює $2A_0$. Ці точки називають **пучностями стоячої** хвилі. Координати пучностей визначаються з умови (3):

$$x_{\text{пучн.}} = \pm n \frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4)$$

а відстань між ними:

$$x_{n-1} - x_n = \frac{\lambda}{2}.$$

Вузли утворюються у тих місцях, де коливання у обох хвилях весь час відбуваються в протилежних фазах і тому $A=0$. Із (2) видно, що це точки, для яких виконується умова:

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Частинки середовища, що знаходяться у вузлових точках, не коливаються. Координата вузлових точок з умови(5):

$$x_{\text{вузл.}} = \pm \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Відстань між сусіднім вузлом і пучністю:

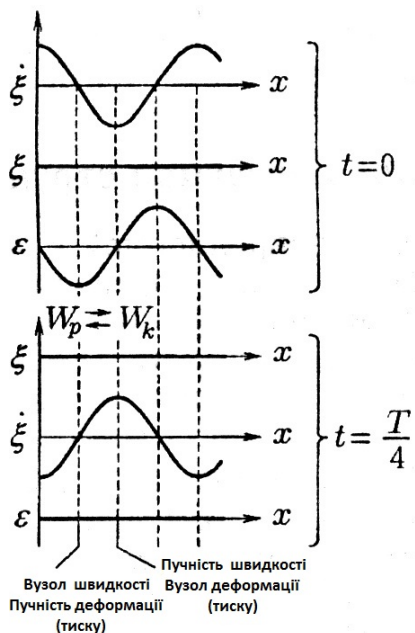
$$x_{\text{вузл.}} - x_{\text{пучн.}} = \frac{\lambda}{4}. \quad (7)$$

Стояча хвиля зміщень супроводжується утворенням стоячої хвилі швидкостей і стоячої хвилі відносної деформації (у газовій системі – тиску). Продиференціюємо рівняння (1) по t і x . Рівняння стоячої хвилі швидкостей:

$$\frac{d\xi}{dt} = 2A_0 \omega \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \omega t, \quad (8)$$

а рівняння стоячої хвилі деформації (тиску):

$$\varepsilon = \frac{d\xi}{dx} = -2A_0 \frac{2\pi}{\lambda} \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \sin \omega t. \quad (9)$$



З рівняння (1) і (8) випливає, що вузли і пучності хвилі швидкостей збігаються з вузлами і пучностями хвилі зміщень. З рівняння (1) і (9) видно, що вузли стоячої хвилі відносно деформації збігаються з пучностями зміщень і швидкостей, а пучності відносно деформації – з вузлами зміщень і швидкостей.

У стоячій хвилі не переноситься енергія. Це пояснюється тим, що падаюча і відбита хвилі мають однакові амплітуди і переносять однакову енергію у протилежних напрямках. Повна енергія стоячої хвилі зосереджена між вузовими точками графіків зміщень та деформацій і з часом не змінюється. Відбувається тільки перехід потенціальної енергії у кінетичну і навпаки. Коли вся енергія переходить у потенціальну, то вона зосереджується в основному біля пучностей хвилі відносно деформації, тобто біля вузла хвилі зміщень. Коли вся енергія переходить у кінетичну, то вона зосереджується в основному біля вузлів хвилі деформацій, тобто біля пучності хвилі зміщень.

На рисунку представлені «миттєві фото» швидкості, зміщення та деформації (тиск) для моментів часу 0 та $T/4$. З рисунку видно, що двічі за період відбувається перетворення енергії стоячої хвилі з потенціальної (пучності деформації) до кінетичної (пучності швидкості).

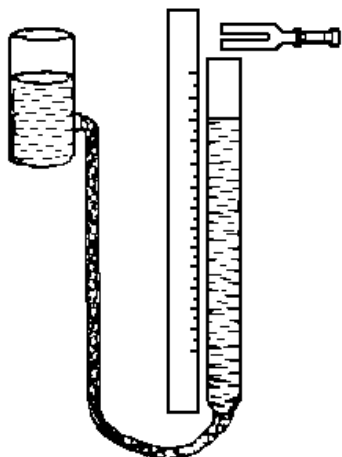
На рисунку представлені «миттєві фото» швидкості, зміщення та деформації (тиск) для моментів часу 0 та $T/4$. З рисунку видно, що двічі за період відбувається перетворення енергії стоячої хвилі з потенціальної (пучності деформації) до кінетичної (пучності швидкості).

Як зазначалось, стоячі хвилі практично виникають при накладанні хвилі, що біжить, і відбитої. У місцях відбивання хвиль на межі поділу двох середовищ залежно від умов може утворитись або вузол, або пучність. Якщо середовище, від якого відбивається хвиля, має більшу густину, ніж середовище, в якому вона поширюється, то на межі утворюється вузол і, якщо навпаки,

то пучність. Умови відбивання хвиль на межі середовищ різної густини розглядаються в теорії пружності. Але можна провести спрощені міркування, які пояснюють відбивання хвиль від середовищ різної густини.

Для наочності уявимо собі, що хвиля поширюється у пружному середовищі і доходить до межі абсолютно твердого тіла. Так як частинки абсолютно твердого тіла не зміщуються, а перше середовище діє на друге з деяким імпульсом, то за третім законом Ньютона друге середовище діє на перше з силою протилежного напрямку. Внаслідок дії цієї сили виникає відбита хвиля, подібна до падаючої, але з протилежним напрямом коливань. Тому частинки коло межі двох середовищ будуть залишатись нерухомими у будь-який момент часу.

Відбиття хвилі від середовища меншої густини в граничному випадку можна уявити, як поширення хвилі вздовж пружного стрижня, який знаходиться у вакуумі. У цьому випадку хвиля доходить до кінця стрижня і далі поширюватися не може, так як нема частинок, які б коливались. Тому на кінці стрижня через деякий час накопичується надлишок енергії, що відповідно супроводжується збільшенням амплітуди коливань. Так як частинки стрижня зв'язані, то буде збільшуватись амплітуда близько розта-



шованих точок. Внаслідок цього у протилежному напрямку буде поширюватись відбита хвиля у тій же фазі, що і падаюча.

Гіпотетично (див. рисунок) можна уявити стовпчик повітря (обмежений боковими стінками труби з боків, а знизу – поверхнею рідини), як деякий вібратор, який відгукується на сигнал у відкритого кінця підвищенням гучності звучання при висоті стовпчику, що задовольняє умові:

$$(2n + 1) \frac{1}{4} \lambda \quad \text{при } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

Тоді, при збільшенні частоти коливань датчика, який збу-
рює звукові коливання у стовпчику повітря, можна знайти наступ-
ну частоту, при якій також буде виконуватись попередня умова.
Фактично, змінюється частота зовнішніх коливань для цього мо-
дельного вібратора і, коли вона буде набувати деяких значень, які
відповідають умові утворення стоячої хвилі, можна відчутти під-
силення звучання¹. Це дає можливість формально називати таке
явище резонансом. Саме тому алгоритм подібних вимірювань
швидкості звуку інколи називають *методом резонансу*. Стовпчик
повітря у згаданому приладі тоді можна називати *резонатором*.

Опис установки і методики вимірів

Для визначення швидкості звуку у повітрі будемо користу-
ватись відомим співвідношенням:

$$v = \lambda \nu \quad (11)$$

Джерелом звуку можна взяти гучномовець, який підключе-
ний до звукового генератору, або камертон. В обох випадках час-
тота звуку ν відома. Щоб знайти довжину хвилі в повітрі, скори-
стаємось установкою, схематично зображеною на рисунку. Якщо
джерело звуку розташувати над стовпчиком повітря у трубі, то
звукова хвиля добіжить до поверхні води і відіб'ється. При утво-
ренні стоячої хвилі у поверхні води буде вузол, а на виході трубки
– пучність. При такій висоті стовпчика повітря (дивись формулу
(7) та (10)) чути максимальну гучність звуку. Це явище резонансу,
яке спостерігається при збігу частоти звуку з однією із власних
частот повітряного вібратора. Резонанс буде також спостеріга-
тись, коли висота стовпчика повітря у посудині буде дорівнюва-
ти непарному числу чвертей довжини звукової хвилі, тобто при

$$h_1 = \frac{1}{4} \lambda, \quad h_2 = \frac{3}{4} \lambda, \quad h_3 = \frac{5}{4} \lambda \quad \text{і так далі.}$$

Якщо виміряти висоти стовпчиків повітря, при яких спосте-
рігається резонанс, то можна визначити довжину звукової хвилі λ
(див.(7) та (10)).

¹ Таким чином відгукується дека музичних інструментів на коливання струн. Форма та матеріал дека значною мірою і визначає підсилення та характер звуку музичного інструменту за рахунок забезпечення умов утворення стоячих хвиль. Вигнута форма дека забезпечує сприйняття різних частот.

Порядок виконання роботи

1. Заповніть трубку В повністю водою. Для цього підніміть вгору посудину А. Ударом молоточка приведіть у коливання камертон і піднесіть його до відкритого кінця трубки В. Після чого різко опустіть посудину А вниз. Спостерігайте за положенням рівня води в трубці В і приблизно визначить його положення h_1 , при якому буде чути перший максимум гучності звуку.
2. Точно визначте значення h_1 . Для цього рівень води в посудині В підніміть трохи вище рівня h_1 , який ви визначили приблизно, і при звучанні камертона знижуйте рівень води повільно, доки не буде максимум гучності звуку і запишіть значення h_1 . Таких вимірів зробіть не менш трьох – п'яти.
3. Визначте значення h_2, h_3, \dots , які відповідають другому, третьому і далі максимумам гучності звуку за наведеним вище способом.
4. Знайдіть довжину хвилі λ у повітрі, скористувавшись співвідношенням (11), усередніть ці значення і за формулою (10) визначить швидкість звуку v . Розрахуйте помилку вимірів.

Контрольні питання:

1. Що таке хвиля? Які хвилі називаються поздовжніми, поперечними? Чи можуть поширюватися поперечні хвилі в об'ємі газу, рідини, твердого тіла? Поперечною або поздовжньою є звукова хвиля в повітрі?
2. Запишіть рівняння плоскої хвилі, сферичної хвилі.
3. Яка хвиля називається стоячою і як вона утворюється? Які основні розходження між стоячою й біжучою хвилею? Поясніть процес встановлення стоячих хвиль у повітряному стовпі.
4. Який характер відбиття хвилі від більш щільного середовища? від середовища менш щільного? Чому в одному випадку відбиття відбувається із втратою півхвилі, а в іншому – без втрати? Чи змінюється фаза хвилі при відбитті від поверхні води? від відкритого кінця повітряного стовпа?
5. Запишіть рівняння стоячої хвилі. Які точки стоячої хвилі

називаються вузлами? пучностями? Знайдіть координати вузлів і пучностей стоячої хвилі. Як змінюється фаза коливань при переході через вузол?

6. Як розподіляється енергія в стоячій хвилі? Чому стояча хвиля не переносить енергію?
7. При якій довжині повітряного стовпа спостерігається максимум гучності звучання?

Лабораторна робота № 18

Дослідження коливань струни і градуювання шкали частоти звукового генератора

Мета роботи:

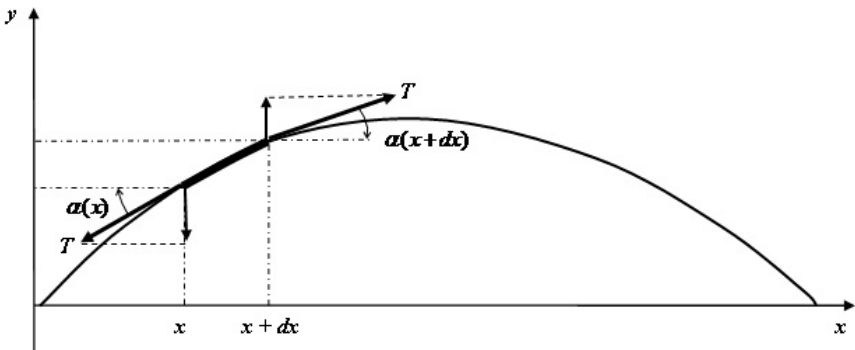
- дослідити умови утворення стоячих хвиль у натягненій струні; на підставі отриманих даних проградувати шкалу частот звукового генератора.

Теоретичний матеріал

Динаміка хвильового процесу в пружному середовищі. Хвильове рівняння. Енергія хвилі. Принцип Гюйгенса. Інтерференція хвиль. Стоячі хвилі.

Задача даної роботи полягає в дослідженні коливань струни та таруванні звукового генератора за частотою. Для цього, перш за все, необхідно отримати формулу, яка б зв'язувала частоту коливань струни з її параметрами і натягом.

Розглянемо коливання гнучкої однорідної струни з закріпленими кінцями, схематичне зображення якої представлено на рисунку.



Проекції сил натягу T струни на вісь y , що беруться в точках x і $x + dx$, при малих кутах α , з урахуванням умови $\sin \alpha \cong \operatorname{tg} \alpha$ рівні:

$$T \sin \alpha(x) \cong T \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_x \quad \text{і} \quad T \sin \alpha(x + dx) \cong T \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x + dx}$$

Різниця цих проекцій є сила, що діє на елемент струни, який знаходиться в межах x і $x + dx$, в напрямку осі y . Можна запи-

сати другий закон Ньютона:

$$T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x+dx} - \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_x \right) = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \rho dx, \quad (1)$$

де ρ – погонна густина, тобто маса одиниці довжини струни. Поділимо рівняння (1) на dx і позначимо:

$$\frac{T}{\rho} = \tilde{n}^2. \quad (2)$$

Таким чином, отримуємо:

$$\tilde{n}^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (3)$$

Рівняння типу (3) називають *хвильовими рівняннями*. В загальному випадку залежність відхилення y від змінних x і t є складною. У випадку стоячої хвилі рішення значно спрощується. Стояча хвиля має ту властивість, що усі її точки коливаються одночасно, хоча і з різними амплітудами. Таким чином, рішення рівняння (3) можна зобразити у вигляді деякої періодичної функції часу $B(t)$, амплітуда якої залежить від координати x :

$$y = A(x)B(t), \quad (4)$$

Щоб знайти функції $A(x)$ і $B(t)$, підставимо (4) у хвильове рівняння (3). Тоді отримаємо:

$$\tilde{n}^2 \frac{1}{A} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{1}{B} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}. \quad (5)$$

Як видно, ліва частина рівняння (5) не залежить від t , а права – від x . Так як змінні x і t є незалежними, то це може мати місце тільки в тому випадку, якщо обидві частини рівняння (5) є сталими. Позначимо цю сталу через $- \tilde{n}^2 k^2$ (вибір знаку перед $\tilde{n}^2 k^2$ буде пояснений нижче). Рівняння (5) розпадається на два:

$$\frac{d^2 B}{dt^2} + \tilde{n}^2 k^2 B = 0, \quad (6)$$

і

$$\frac{d^2 A}{dx^2} + k^2 A = 0. \quad (7)$$

Рішенням цих рівнянь, як неважко переконатись безпосередньою підстановкою, є гармонічні функції:

$$B = B_0 \sin kct, \quad \text{і} \quad A = A_0 \sin kx.$$

Підставивши отримані значення A і B в (4), знайдемо рішення хвильового рівняння

$$y = y_0 \sin kx \sin kct, \quad (8)$$

де y_0 – деяка постійна, яка визначає амплітуду коливань і не має для нас суттєвого значення.

Розглянемо (8) більш детально. Точки, у яких $\sin kx$ стає рівним нулю, є вузлами стоячої хвилі. Між двома сусідніми вузлами усі ділянки струни коливаються в однаковій фазі (їх швидкості мають однакові напрямки), а при переході через вузол фаза коливань змінюється на π внаслідок зміни знаку $\sin kx$. Амплітуда коливань змінюється повздовж струни за гармонічним законом, а частота коливань усіх точок струни постійна і дорівнює kc .

Пояснимо чому перед k^2 був вибраний знак мінус. Якщо змінити цей знак, то рішення рівнянь (6) і (7) перетвориться в експоненти з дійсними показниками, що описують монотонний спад, а не періодичний рух. Це не відповідає картині стоячої хвилі. Додатні значення k^2 не можна вибрати довільно. Дійсно, граничні умови $y(0,t) = y(L,t) = 0$ (L – довжина струни) дають:

$$\sin kL = 0, \quad (9)$$

або:

$$kL = \pi n \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (10)$$

Як легко переконатись, n визначає кількість пучностей (але не вузлів) струни, що коливається. Таким чином, хвильовому рівнянню з даними граничними умовами задовольняє не будь-яка функція типу (8), а лише та з них, для якої виконується умова (10).

Частота коливань ν може бути визначена із (8):

$$kc = 2\pi\nu \quad (11)$$

Якщо підставити знайдене звідси k в (10) і використати вираз (2), то отримаємо формулу для власних частот струни, тобто

частот, при яких в струні встановлюються стоячі хвилі:

$$v = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}} ; \quad (T = mg) \quad (12)$$

Треба відмітити, що визначена формулою (12) власна частота не залежить від модуля Юнга матеріалу струни. Такий, на перший погляд, парадоксальний результат є наслідком того, що ми не врахували зміни натягу струни при коливаннях. В умовах нашого досліду це припущення, що T – є сталою, добре виконується.

За допомогою (12) отримаємо замість (8)

$$y(x, t) = y_0 \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho}} t\right). \quad (13)$$

Із цього співвідношення видно, що точки струни з координатами $x = 0, \frac{L}{n}, 2\frac{L}{n}, \dots, L$ є вузлами. Так як вузли весь час залишаються в спокою, то енергія по струні не тече (енергія не може перейти через вузли). Передача енергії повздовж струни може відбуватися за рахунок хвилі, яка біжить.

Відзначимо, що хвильовому рівнянню задовольняють не тільки рішення в формі (8), але і сума виразів типу (8) з різними n :

$$y(x, t) = \sum_n y_0 \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho}} t\right). \quad (14)$$

Таким чином, у струні можуть одночасно існувати коливання з різними власними частотами; поряд з основним тоном ($n = 1$) можуть збуджуватись його гармоніки ($n = 2, 3, 4, \dots$).

З'ясуємо, при яких умовах приведену вище теорію, яка описує рух ідеально гнучкої струни у вакуумі, можна застосовувати для реальної струни.

При коливанні реальної струни завжди відбуваються втрати енергії. Частина енергії втрачається внаслідок тертя об повітря, друга частина проходить через кінці струни і т. д.

Для підтримки незатухаючих коливань використовують вібратор. Якщо енергія втрат в точності компенсується енергією, що надходить від вібратору, то в струні можна спостерігати стоячі хвилі. Але тепер по струні повинна відбуватись передача енергії.

Тому поряд із стоячою буде існувати і біжуча хвиля, внаслідок цього вузли будуть трохи розмиті. Якщо втрати енергії за період малі в порівнянні з запасом коливальної енергії в струні, то створення стоячої хвилі біжучою хвилею не дуже суттєві. Так як енергія хвилі пропорційна квадрату амплітуди, то наші умови можна записати у вигляді:

$$a^2 = y_0^2, \quad (15)$$

де a – амплітуда хвилі біжучої, яку можна виміряти по розмиттю вузла, а y_0 – амплітуда стоячої хвилі, що визначається в пучності, яка знаходиться по сусідстві з даним вузлом.

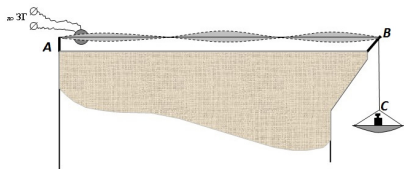
Слід визначити також, що приведена вище теорія виводилась для струни з жорстко закріпленими кінцями, що в реальних умовах не виконується. Але якщо перейти від розгляду усієї струни до розгляду її ділянки, яка розташована між двома вузлами, то використання формул стає очевидним.

При спостереженні стоячих хвиль в реальних умовах легко помітити, що струна не коливається в одній площині, а обертається навколо положення рівноваги. Але будь-який обертальний рух можна зобразити як суму коливань у двох взаємно перпендикулярних площинах, так що попередні висновки залишаються в силі.

В роботі досліджуються коливання натягнутої струни. Схема експериментального приладу зображена на рисунку.

Струна натягнена подібно до струни музичного інструменту, з одного боку жорстко до опори (A), з другого – вантажем на шальці (C). При цьому другою опорою (B) прислуговує металева пластина з невеличким прорізом, в якому і розташовується струна. Стояча хвиля збудується електромагнітним вібратором, який живиться від ЗГ (звуковий генератор).

Якщо навантажити шальку і ввімкнути звуковий генератор, то від вібратора по струні побіже поперечна хвиля, яка відбивається від її місця закріплення (A) і з другого боку – від опори на металевій пластині (B). Утворюється складна картина коливань. При повільній зміні частоти звукового генератора можна помітити, що при певних частотах коливання струни стабілізуються – створюються стоячі хвилі. При цьому струна ділиться неру-



хомими точками – вузлами на декілька рівних відрізків. Амплітуда коливань окремих точок струни перестає при цьому залежати від часу і визначається тільки їх положенням на струні.

При зміні навантаження на шальці картина коливань одразу розмивається. Якщо тепер змінити частоту звукового генератора, то можна знову отримати стоячу хвилю з тим же числом вузлів. Таким чином, частота коливань стоячої хвилі залежить від натягу струни.

Порядок виконання роботи

1. Ввімкнути звуковий генератор. Встановити частоту на нуль (дивись інструкцію до ЗГ-33) і навантажити струну. Повертати ручку зміни частоти генератора і провести спостереження стоячих хвиль. Кожного разу записувати кількість пучностей n на струні і відповідну їм частоту на генераторі. Розрахувати частоти коливань струни за формулою (12).
2. Повторити експеримент при різних навантаженнях (виконати при п'яти різних навантаженнях).
3. Перевірити градування шкали генератора. Для цього побудувати графік, на осі ординат якого відкладіть значення частоти коливань струни, розраховані для різних n при постійному натягу, а на осі абсцис – відповідні поділки, відмічені на шкалі генератора. Зробити за графіком висновки.
4. Побудувати графік залежності частоти коливань струни від величини натягу.

Контрольні питання:

1. Яка хвиля називається стоячою і як вона утворюється?
2. Запишіть рівняння стоячої хвилі. У чому відмінність стоячої хвилі від біжучої? Які точки хвилі називаються вузлами? пучностями? У яких фазах перебувають точки стоячої хвилі по обидві сторони від вузла? між двома найближчими вузлами?
3. Як відбувається відбиття хвиль від вільного й закріпленого

кінців струни? Чому в одному випадку відбиття відбувається із втратою півхвилі, а в іншому – без втрати?

4. Запишіть вираз для власних (нормальних) частот струни, тобто частот, при яких у струні встановлюються стоячі хвилі. Від яких умов залежить утворення стоячих хвиль у струні?
5. Як розподіляється енергія в стоячій хвилі? Які ділянки струни при сталій стоячій хвилі піддаються найбільшій деформації? Які ділянки струни мають найбільшу швидкість? Намалюйте кілька послідовних положень струни, що приймають участь у стоячій хвилі.

ДОДАТОК

1. Тригонометричні функції

| Корні квадратних рівнянь $ax^2 + bx + c = 0$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2a}$ | |
|--|---|
| $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $\sec^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha = 1$ $\operatorname{csc}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1$ $\sin \alpha \cdot \operatorname{csc} \alpha = 1$ $\cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1$ $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$ | $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$ $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$ $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha}$ |
| $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$ $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$ $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$ $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$ | $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ |

| | |
|---|--|
| $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$ $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$ | $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$ $2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$ $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$ |
| $sh \alpha = \frac{(e^\alpha - e^{-\alpha})}{2}$ | $th \alpha = \frac{(e^\alpha - e^{-\alpha})}{(e^\alpha + e^{-\alpha})}$ |
| $ch \alpha = \frac{(e^\alpha + e^{-\alpha})}{2}$ | $cth \alpha = \frac{(e^\alpha + e^{-\alpha})}{(e^\alpha - e^{-\alpha})}$ |

2. Фундаментальні фізичні сталі

| | |
|---|---|
| Швидкість світла у вакуумі | $c = 2,99\,792\,458 \times 10^8 \text{ м/с}$ (точно) |
| Гравітаційна стала | $\gamma = 6,672 \times 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$ |
| Стандартне прискорення вільного падіння | $g = 9,807 \text{ м/с}^2$ |
| Стала Авогадро | $N_A = 6,022 \times 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ |
| Стандартний об'єм моля газу | $V_0 = 22,41 \text{ л/моль}$ |
| Молярна газова стала | $R = 8,314 \text{ Дж}/(\text{К} \times \text{моль})$ |
| Стала Больцмана | $k = 1,3807 \times 10^{-23} \text{ Дж/К}$ |
| Стала Фарадея | $F = 0,965 \times 10^8 \text{ Кл/моль}$ |
| Елементарний заряд | $e = \begin{cases} 1,602 \times 10^{-19} \text{ Кл} \\ 4,803 \times 10^{-10} \text{ CGSE} \end{cases}$ |
| Маса електрона | $m_e = \begin{cases} 0,911 \times 10^{-30} \text{ кг} \\ 0,511 \times 10^{-10} \text{ МэВ} \end{cases}$ |
| Маса протона | $m_p = 1,672 \times 10^{-27} \text{ кг}$ |
| Стала Планка | $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ Дж} \times \text{с}$ $\hbar = \frac{h}{2\pi} = \begin{cases} 1,0546 \times 10^{-34} \text{ Дж} \times \text{с} \\ 0,659 \times 10^{-15} \text{ эВ} \times \text{с} \end{cases}$ |

| | |
|---------------------|--|
| Атомна одиниця маси | $1a.е.м. = \begin{cases} 1,660 \times 10^{-27} \text{ кг} \\ 931,5 \text{ МэВ} \end{cases}$ |
| Електрична стала | $\epsilon_0 = 0,885 \times 10^{-11} \frac{\Phi}{i}$ $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \frac{i}{\text{О}}$ |
| Магнітна стала | $\mu_0 = 1,257 \times 10^{-6} \frac{\Gamma_H}{м}$ $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \frac{\tilde{A}}{i}$ |

3. Деякі постійні числа і наближені формули

| Постійні числа | Наближені формули (при $\alpha \ll 1$) |
|-----------------------|--|
| $\pi = 3,141$ | $(1 \pm \alpha)^n \approx 1 + n\alpha$ |
| $\pi^2 = 9,8696$ | $e^\alpha \approx 1 + \alpha$ |
| $\sqrt{\pi} = 1,7725$ | $\ln(1 + \alpha) \approx \alpha$ |
| $e = 2,7183$ | $\sin \alpha \approx \alpha$ |
| $\lg e = 0,4343$ | $\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ |
| $\ln 10 = 2,3026$ | $\text{tg } \alpha \approx \alpha$ |

4. Грецький алфавіт

| | | |
|--------------|--------------|--------------|
| Α, α Альфа | Ι, ι Йота | Ρ, ρ Ро |
| Β, β Бета | Κ, κ Каппа | Σ, σ Сигма |
| Γ, γ Гамма | Λ, λ Лямбда | Τ, τ Тау |
| Δ, δ Дельта | Μ, μ Мю | Υ, υ Іпсилон |
| Ε, ε Епсілон | Ν, ν Нью | Φ, φ Фі |
| Ζ, ζ Дзета | Ξ, ξ Ксі | Χ, χ Хі |
| Η, η Ця | Ο, ο Оміврон | Ψ, ψ Псі |
| Θ, θ Тета | Π, π Пі | Ω, ω Омега |

5. Густина речовин

| Тверді речовини | ρ , г/см ³ | | |
|----------------------------|----------------------------|-----------------|------|
| Алмаз | 3,5 | Натрій | 0,97 |
| Алюміній | 2,7 | Нікель | 8,9 |
| Вольфрам | 19,1 | Олово | 7,4 |
| Графіт | 1,6 | Платина | 21,3 |
| Залізо (сталь) | 7,8 | Пробка | 0,20 |
| Золото | 19,3 | Свинець | 11,3 |
| Кадмій | 8,65 | Срібло | 10,5 |
| Кобальт | 8,9 | Титан | 4,5 |
| Лід | 0,916 | Уран | 19,0 |
| Мідь | 8,9 | Фарфор | 2,3 |
| Молібден | 10,2 | Цинк | 7,0 |
| Рідини | ρ , г/см ³ | | |
| Бензол | 0,88 | Ртуть | 13,6 |
| Вода | 1,00 | Спирт | 0,79 |
| Гліцерин | 1,26 | Тяжка вода | 1,1 |
| Касторове масло | 0,90 | Ефір | 0,72 |
| Гас | 0,80 | | |
| Гази (при нор. ум.) | ρ , кг/м ³ | | |
| Азот | 1,25 | Кисень | 1,43 |
| Аміак | 0,77 | Метан | 0,72 |
| Водень | 0,09 | Вуглекислий газ | 1,98 |
| Повітря | 1,293 | Хлор | 3,21 |

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Заремба В. Г., Полищук Д. И. Измерение физических величин и определение ошибок измерений: уч. пособ. Одесса : Издательство ОГУ имени И. И. Мечникова, 1974. 32 с.
2. Физический практикум. Механика и молекулярная физика : уч. пособ. / ред.: В. И. Иверонова. Москва : Наука, 1967. 353с.
3. ДСТУ 3008:2015. Звіти у сфері науки і техніки. Структура та правила оформлювання. Київ: ДП «УкрНДНЦ» 2016. 26 с. (Інформація та документація)
4. ДСТУ ISO 2602:2006 (ISO 2602:1980, IDT). Подання результатів випробування статистичне. Оцінювання середнього значення. Довірчий інтервал. Київ: Держспоживстандарт України, 2009. 7 с. (Інформація та документація)
5. ДСТУ ISO 5479:2009 (ISO 5479:1997, IDT). Статистичне опрацювання даних. Критерії відхилення від нормального розподілу. Київ: Держспоживстандарт України, 2009. 32 с.
6. Пустыльник Е. И. Статистические методы в экспериментальной физике. Москва : Наука, 1968. 288 с.
7. Козицький С. В., Поліщук Д. Д. Курс загальної фізики. Механіка. Одеса : Астропринт, 2011. 472 с.
8. Сивухин Д. В. Общий курс физики. В 5 т. 4-е изд., стереот. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2005. Том I. Механика. 560 с.
9. Матвеев А. Н. Курс общей физики в пяти томах. 3-е изд., стереот. Москва : ОНИКС 21 век: Мир и Образование, 2003. Том 1. Механика и теория относительности. 432 с.
10. Кушнір Р. М. Загальна фізика. Механіка. Молекулярна фізика. Львів : Видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2003, 404 с.
11. Кушнарєнко Н. М., Укдалова В. К. Наукова обробка документів: навч. посіб. Київ : Знання, 2006. 223 с.
12. Фізичний практикум. Частина I. Механіка, молекулярна фізика, електрика та магнетизм: навч. посіб. / М. О. Боровий та ін. Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2012. 141 с. URL: <http://gen.phys.univ.kiev.ua>

Навчальне видання

Гоцульський Володимир Якович
Поліщук Дмитро Дмитрович
Копійка Олександр Кузьмич

МЕХАНІКА

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

За редакцією авторів

Верстка – С. Остапенко

Підп. до друку 25.06.2020. Формат 60x84/16.
Ум.-друк. арк. 10,46. Тираж 30 пр.
Зам. № 2103.

Видавець та виготовлювач
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

Україна, 65082, м. Одеса, вул. Єлісаветинська, 12
Тел.: (048) 723 28 39. E-mail: druk@onu.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4215
від 22.11.2011 р. Р 51