

УДК 539.3

✓ В.А. Гришина, канд. физ.-мат. наук;  
 В.А. Гришин, канд. физ.-мат. наук,  
 В.В. Реут, канд. физ.-мат. наук, доц., Одес.  
 госуниверситет

## НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ОБОЛОЧКИ ИЗ ДВУХ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ПЛАСТИН

В.О.Гришина, В.О.Гришин, В.В.Реут.

**Напружений стан оболонки із двох напівбескінченних пластин.** Розглянуто напружений стан оболонки із двох напівбескінченних пластин, що стиковані під прямим кутом. Довільне навантаження діє як у середній площині, так і перпендикулярно. Результат одержано у вигляді ряду за степенями малого параметра, коефіцієнти якого виражено в елементарних функціях.

V.A.Grishina, V.A.Grishin, V.V.Reut.

**Stressed state of shell made of two semi-infinite plates.** Investigation is given to stressed state of a shell made of two semi-infinite plates buttjoined at right angle. Free loading is acting both in the midplane and at right angle. The result is obtained in the form of a series according to the powers of the small parameter the coefficients of which are expressed in elementary functions

Рассмотрим напряженное состояние оболочки, образованной двумя пластинами в виде двух полубесконечных полуплоскостей, состыкованных под прямым углом, и находящейся под действием произвольной нагрузки. В работе использован подход, основанный на сведениях задачи о напряженном состоянии пластинчатой оболочки к задаче о плоскоизгибном напряженном состоянии пластины с дефектом, где роль дефекта выполняет ребро оболочки [1]. Такой подход позволяет вдвое уменьшить число рассматриваемых дифференциальных уравнений и упростить условия стыковки.

Для получения решения воспользуемся постановкой задачи в безразмерном виде. Тогда система для определения трансформант скачков усилий и перемещений на дефекте будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -C_{33}^- & C_{30}^- \\ 0 & \varepsilon^2 \alpha^{-4} D_1^{-1} & -C_{30}^- & C_{00}^- \\ -\varepsilon^2 C_{33}^+ & \varepsilon^2 C_{30}^+ & -\alpha^{-4} D_1^{-1} & 0 \\ -C_{03}^+ & C_{00}^+ & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0^+ \\ f_3^+ \\ f_0^- \\ f_3^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{3q}^- \\ H_{0q}^- \\ \varepsilon^2 H_{3q}^+ \\ H_{0q}^+ \end{bmatrix}. \quad (1)$$

В качестве безразмерного малого параметра  $\varepsilon$  можно выбрать отношение толщины оболочки к характерному геометрическому размеру (например, в случае действия сосредоточенной силы в качестве последнего можно использовать расстояние от точки приложения силы до ребра). Роль функции Грина в рассматриваемой задаче выполняет фундаментальная функция бигармонической задачи

$$\Phi(x) = (4|\alpha|^3)^{-1} (1 + |\alpha x|) \exp(-|\alpha x|), \quad (2)$$

а коэффициенты системы имеют вид:

$$\begin{aligned} C_{00}^\pm &= (2|\alpha|^3)^{-1}; \quad C_{33}^\pm = -\chi_\pm |\alpha|^3; \\ C_{30}^\pm &= C_{03}^\pm = 0; \quad \chi_\pm = 2^{-1} (1 \pm \nu) (3 \pm \nu). \end{aligned} \quad (3)$$

Введем для удобства величину  $\varepsilon_1 = \varepsilon D_1$ , которая также является безразмерной и малой по сравнению с единицей.

Легко видеть, что система (1) распадается на две независимо решаемые системы отно-

сительно скачков  $f_3^\pm$  и  $f_0^\pm$ , решения для которых можно скомпоновать в зависимости от вида нагружения:

для изгибной нагрузки

$$\begin{aligned} f_0^- &= \varepsilon_1^2 \frac{H_{3q}^- \chi_+}{|\alpha|(1 + \varepsilon_1^2 \chi_+ \chi_- \alpha^2)} ; \quad f_3^- = \frac{2|\alpha|^3 H_{0q}^-}{1 + 4\varepsilon_1^2 \alpha^2} ; \\ f_0^+ &= \frac{H_{3q}^-}{1 + \varepsilon_1^2 \chi_+ \chi_- \alpha^2} ; \quad f_3^+ = \frac{4\alpha^6 H_{0q}^-}{1 + 4\varepsilon_1^2 \alpha^2} ; \end{aligned} \quad (4)$$

для плоской нагрузки

$$\begin{aligned} f_0^- &= -\varepsilon_1^2 \frac{H_{3q}^+}{\alpha^4(1 + \varepsilon_1^2 \chi_+ \chi_- \alpha^2)} ; \quad f_3^- = -\varepsilon_1^2 \frac{4\alpha^2 H_{0q}^+}{1 + 4\varepsilon_1^2 \alpha^2} ; \\ f_0^+ &= \varepsilon_1^2 \frac{H_{3q}^+ \chi_-}{|\alpha|(1 + \varepsilon_1^2 \chi_+ \chi_- \alpha^2)} ; \quad f_3^+ = \frac{2|\alpha|^3 H_{0q}^+}{1 + 4\varepsilon_1^2 \alpha^2} . \end{aligned} \quad (5)$$

Скачки и сами решения могут быть разложены в ряд по степеням малого параметра  $\varepsilon_1^2$ . После обратного преобразования Фурье первый член разложения определяет асимптотическое решение, а остальные — погрешность. Отметим, что все члены ряда, определяющие асимптотическое решение и погрешность, могут быть получены в элементарных функциях.

Случай с произвольной нагрузкой может быть сведен к случаю действия сосредоточенных сил, направленных вдоль осей  $x, y, z$ . В качестве примера приведем решение задачи, когда нагрузка выбрана в виде пары сосредоточенных сил  $P_z$ , приложенных симметрично относительно ребра оболочки в точках  $(\xi, \eta)$  и  $(-\xi, \eta)$  и направленных перпендикулярно срединным плоскостям. При этом в силу симметрии достаточно рассматривать только значение  $x > 0$ . В предположении  $W(0, \eta) = U(0, \eta) = 0$  (необходимость фиксации перемещения какой-либо точки возникает вследствие бесконечности конструкции и несамоуравновешенности нагрузки) после применения обратного преобразования Фурье и перехода к размерным величинам, помеченным звездочкой, получаем следующие формулы для асимптотического решения:

$$\frac{W_*(x, y) E_* h_*}{P_{z*}} = \frac{\varepsilon_1^2}{8\pi} \left\{ \left[ (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \right] \ln \frac{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}}{\sqrt{(x + \xi)^2 + (y - \eta)^2}} + 2x\xi \right\} , \quad (6)$$

$$\frac{U_*(x, y) E_* h_*}{P_{z*}} = \frac{1}{\pi} \left\{ \ln \frac{\xi + (y - \eta)^2}{(x + \xi)^2 + (y - \eta)^2} + \frac{[2\xi + (1 + \nu)x](x + \xi)}{(x + \xi)^2 + (y - \eta)^2} - \frac{(1 + \nu)x\xi[(x + \xi)^2 - (y - \eta)^2]}{[(x + \xi)^2 + (y - \eta)^2]^2} \right\} ,$$

$$\frac{V_*(x, y) E_* h_*}{P_{z*}} = \frac{1}{\pi} \left\{ -(1 - \nu) \operatorname{arctg} \frac{\eta - y}{x + \xi} + \frac{[-(1 - \nu)\xi + (1 + \nu)x](\eta - y)}{(x + \xi)^2 + (y - \eta)^2} + \frac{2(1 + \nu)x\xi(x + \xi)(\eta - y)}{[(x + \xi)^2 + (y - \eta)^2]^2} \right\} .$$

Отметим, что под точкой приложения силы изгибающие моменты и обобщенные поперечные силы имеют особенность, которая исчезает при  $x=0$ , когда точка приложения силы выходит на ребро.

Анализ формул (6) и вычисления показывают, что при расположении точек приложения сил на расстоянии, превышающем 5—10 толщин оболочки, изгибные напряжения на несколько порядков превышают плоские и в этом случае достаточно рассматривать только задачу изгиба. При сближении точек приложения сил с ребром

до расстояния порядка нескольких толщин оболочки первый член асимптотики  $\hat{W}$  уменьшается, и задачу уже нельзя рассматривать как чисто изгибную, так как плоские напряжения становятся соизмеримыми с изгибными. При выходе точек приложения сил на ребро асимптотическое решение для прогибов  $\hat{W}$  становится равным нулю, и уже решение плоской задачи становится определяющим, что подтверждается также результатами работ [2, 3], рассматривающих этот частный случай нагружения оболочки.

#### Литература

1. В.А.Гришин, Г.Я.Попов, В.В.Реут. Расчет коробчатых оболочек прямоугольного сечения//Прикладная математика и механика. — 1990. — Т. 54. — Вып. 4. — С. 605 — 612.
2. Власов В.В., Колесников А.В. О местном напряженном деформированном состоянии тонкостенной призматической конструкции от действия сосредоточенной нагрузки, приложенной к ребру//Темат. сб.научн.тр.Московск.авиацин-та.—М.,1978.— № 467. — С. 39 — 47.
3. Sumuchin M.G., Dundurs J. Transmission of concentrated force into prismatic shell//Int.J.Solid and Struct. — V. 9. — 1973. — № 2. — P. 269 — 278.