УДК 517.9

А. В. Арсирий*, И. В. Молчанюк, А. В. Плотников****
*Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова
**Одесская государственная академия строительства и архитектуры

ОБОСНОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ СХЕМЫ ПОЛНОГО УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ С ПРОИЗВОДНОЙ ХУКУХАРЫ

Арсірій А. В., Молчанюк І. В., Плотніков А. В. Обгрунтування можливості використання схеми повного усереднення для задачі керування лінійною системою із похідною Хукухари. У даній статті розглядається задача оптимального керування багатозначними траекторіями із термінальним критерієм якості. Обгрунтовується метод повного усереднення для такого типу задач з малим параметром та неперіодичною правою частиною.
Ключові слова: диференціальні рівняння з похідною Хукухари, задачі керування, метод усереднення.

Арсирий А. В., Молчанюк И. В., Плотников А. В. Обоснование возможности применения схемы полного усреднения для задачи управления линейной системой с производной Хукухары. В данной статье рассматривается задача оптимального управления многозначными траекториями с терминальным критерием качества. Обосновывается метод полного усреднения для такого типа задач, содержащих малый параметр, для случая непериодической правой части.
Ключевые слова: дифференциальные уравнения с производной Хукухары, задачи управления, метод усреднения.

Arsirii A. V., Molchanyuk I. V., Plotnikov A. V. Justifying of opportunity using the full averaging schema for the control problem of the linear system with the Hukuhara derivative. In the given article we consider the optimal control problem of the setvalued with the terminal criteria of quality. The method of complete averaging is justified for such type of control system, containing a small parameter for the cases with non-periodic right-hand side.
Key words: differential equation with the Hukuhara derivative, control problem, method of averaging.

Введение.

В 30-х годах XX века появились первые исследования по теории дифференциальных уравнений с многозначной правой частью, в которых была предпринята попытка обобщить существовавшие в то время результаты по теории дифференциальных уравнений.

Быстрому развитию многозначного анализа или аппарата математического анализа применительно к исследованию многозначных отображений способствовала возможность исследования задач оптимального управления с помощью дифференциальных включений.

Так, в [6] M. Hukuhara ввел производную и интеграл от многозначных отображений и исследовал их связь между собой. Впоследствии в работах

F. S. de Blasi и F. Iervolino [4, 22] были рассмотрены дифференциальные уравнения с производной Хукухары. Затем были введены различные определения решений этих уравнений и доказаны теоремы их существования [1, 3].

Для решения задач оптимального управления широко применяется метод усреднения. Математическое обоснование метода началось с фундаментальных результатов Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [18]. Для дифференциальных уравнений и включений с производной Хукухары теоремы, являющаяся аналогом первой теоремы Н. Н. Боголюбова, были доказаны в работах Kisielewicz M. [21, 8], Плотникова А. В. [1, 3] и Скрипник Н. В. [1, 9].

В статье обоснована возможность применения метода усреднения для линейных управляемых дифференциальных уравнений с производной Хукухары.

Вначале введем некоторые необходимые нам в дальнейшем определения и обозначения.

Пусть R^n — n-мерное вещественное евклидово пространство векторов $x = (x_1, ..., x_n)^T$ с нормой $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$.

Пусть $Conv(R^n)$ — пространство непустых компактных и выпуклых подмножеств евклидового пространства R^n с метрикой Хаусдорфа

$$h(A, B) = min\{r \geq 0 | A \subset S_r(B), B \subset S_r(A)\},$$

где $A, B \in Conv(R^n)$, $S_r(a)$ – шар радиуса r с центром в точке a.

Определение 1. [4] *Пусть $A, B \in Conv(R^n)$. Если существует множество $C \in Conv(R^n)$ такое, что $A = B + C$, то C называется разностью Хукухары множеств A и B и обозначается $A \overset{h}{-} B$.*

Определение 2. [4] *Многозначное отображение $F(\cdot) : R^1 \to Conv(R^n)$ дифференцируемо по Хукухаре в точке $t \in R^1$, если существует $D_hF(t) \in Conv(R^n)$ такое, что пределы*

$$\lim_{\Delta t \to 0_+} \frac{1}{\Delta t}(F(t + \Delta t) \overset{h}{-} F(t)), \quad \lim_{\Delta t \to 0_+} \frac{1}{\Delta t}(F(t) \overset{h}{-} F(t - \Delta t))$$

существуют и равны $D_hF(t)$.

Основные результаты.

Рассмотрим задачу оптимального управления линейной системой, описываемой дифференциальным уравнением с производной Хукухары стандартного вида:

$$D_hX(t, u) = \varepsilon[A(t)X(t, u) + B(t)u(t) + F(t)], \quad X(0, u) = X_0, \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $t \in R_+ = [0, +\infty)$; $X(\cdot, u) : R_+ \to Conv(R^n)$ — многозначное отображение, определяющее состояние системы; $D_hX(t, u)$ — производная Хукухары; $A(t)$ — матрица $(n \times n)$; $B(t)$ — матрица $(n \times m)$; $u(\cdot) \in U \in Conv(R^m)$ — управляемое воздействие; $F(\cdot) : R_+ \to Conv(R^n)$ — многозначное отображение.

Определение 3. *Множество суммируемых функций таких, что $u(t) \in U$ для почти всех $t \in R_+$, будем называть множеством допустимых управлений LU.*

Определение 4. [1] *Решением задачи (1) соответствующим допустимому управлению $u(\cdot) \in LU$, называется абсолютно непрерывное многозначное отображение $X(\cdot, u)$, удовлетворяющее (1) почти всюду на R_+.*

Предположение 1. Будем предполагать, что система (1) удовлетворяет условиям:
1) матрица $A(t)$ — измерима на R_+;
2) существует константа $a > 0$ такая, что $\|A(t)\| \le a$ для почти всех $t \in R_+$;
3) матрица $B(t)$ — измерима на R_+;
4) существует константа $b > 0$ такая, что $\|B(t)\| \le b$ для почти всех $t \in R_+$;
5) $U \in Conv(R^n)$;
6) многозначное отображение $F(\cdot)$ измеримо на R_+;
7) существует константа $f > 0$ такая, что $h(F(t), \{0\}) \le f$ для почти всех $t \in R_+$.

1. Построение усредненного уравнения для рассматриваемого исходного уравнения.

Уравнению (1) поставим в соответствие усредненное уравнение

$$D_h Y(t,v) = \varepsilon[\overline{A}Y(t,v) + v(t) + \overline{F}], \quad Y(0,v) = X_0, \tag{2}$$

где

$$\begin{gathered} \overline{A} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T A(t)dt, \quad \overline{F} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T F(t)dt, \\ v(t) \in V = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T B(t)U dt. \end{gathered} \tag{3}$$

Установим соответствие между управлением $u(\cdot)$ исходного уравнения (1) и управлением $v(t)$ усредненного уравнения (2). Обозначим множество допустимых управлений уравнения (1) LU, а уравнения (2) — LV.

Управлению $u(\cdot)$ поставим в соответствие управление $v(\cdot)$ следующим образом:

1) Вычисляем

$$w_i = \frac{1}{T_1}\int_{iT_1}^{(i+1)T_1} B(t)u(t)dt, \quad i = 0,1,2,\dots, \quad \text{где } T_1 > 0 \text{ — константа.}$$

2) Строим управление $v(t) = \{v_i(t), \quad iT_1 \le t < (i+1)T_1, \quad i = 0,1,2,...\}$, где $v_i(t)$ находим из условия:

$$\min_{\overline{v}(t)\in LV} \|w_i - \overline{v}(t)\| = \|w_i - v_i(t)\|.$$

Управлению $v(\cdot)$ поставим в соответствие управление $u(\cdot)$ следующим образом:

1) Вычисляем

$$w_i(t) = \frac{1}{T_1} \int\limits_{iT_1}^{(i+1)T_1} v(t)dt, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{где } T_1 > 0 \text{ — константа.}$$

2) Строим управление $u(t) = \{u_i(t), \quad iT_1 \le t < (i+1)T_1, \quad i = 0, 1, 2, ...\}$, где $u_i(t)$ находим из условия:

$$\min_{\overline{u}(t) \in LU} \left\| \frac{1}{T_1} \int\limits_{iT_1}^{(i+1)T_1} B(t)\overline{u}(t)dt - w_i \right\| = \left\| \frac{1}{T_1} \int\limits_{iT_1}^{(i+1)T_1} B(t)u_i(t)dt - w_i \right\|.$$

2. Близость решений исходного и усредненного уравнений.

Оценим близость решений исходного и усредненного уравнений (1) и (2).

Теорема 1. *Пусть выполняются условия предположения 1.*

Тогда для любых $\eta > 0$ и $L > 0$ существует $\varepsilon_0(\eta, L) \in (0, \sigma]$ такое, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ справедливы следующие утверждения:
1) для любого допустимого управления $u(\cdot) \in LU$ существует допустимое управление $v_u(\cdot) \in LV$ такое, что справедлива оценка

$$h(X(t, u), Y(t, v_u)) \le \eta; \tag{4}$$

2) для любого допустимого управления $v(\cdot) \in LV$ существует допустимое управление $u_v(\cdot) \in LU$ такое, что справедлива оценка

$$h(X(t, u_v), Y(t, v)) \le \eta. \tag{5}$$

Доказательство. Представим решения исходного и усредненного уравнений в интегральной форме:

$$X(t, u) = X_0 + \varepsilon \int\limits_0^t [A(s)X(s, u) + B(s)u(s) + F(s)]ds,$$
$$Y(t, v) = X_0 + \varepsilon \int\limits_0^t [\overline{A}Y(s, v) + v(s) + \overline{F}]ds.$$

Оценим сверху решение исходного уравнения:

$$h(X(t, u), \{0\}) \le$$
$$\le h(X_0, \{0\}) + \varepsilon h \left(\int\limits_0^t [A(s)X(s, u) + B(s)u(s) + F(s)]ds, \{0\} \right) \le$$
$$\le h(X_0, \{0\}) + \varepsilon \int\limits_0^t [\|A(s)\| h(X(s, u), \{0\}) + \|B(s)\| \|u(s)\| + h(F(s), \{0\})]ds \le$$
$$\le h(X_0, \{0\}) + (bu_0 + f)L + \varepsilon a \int\limits_0^t h(X(s, u), \{0\})ds.$$

Отсюда, по лемме Гроуолла–Беллмана, следует, что

$$h(X(t, u), \{0\}) \le (h(X_0, \{0\}) + L(bu_0 + f))e^{aL}.$$

Аналогично получим оценку для решения усредненного уравнения:

$$h(Y(t,v),\{0\}) \le (h(X_0,\{0\}) + L(bu_0+f))e^{aL}.$$

Обозначим через $M = (h(X_0,\{0\}) + L(bu_0+f))e^{aL}$.

Тогда

$$h(X(t,u),\{0\}) \le M, \quad h(Y(t,v),\{0\}) \le M. \tag{6}$$

Разобъем промежуток $[0, L\varepsilon^{-1}]$ с шагом $\frac{L}{\varepsilon m}$ и обозначим $t_i = \frac{iL}{\varepsilon m}, \quad i = 0, ..., m$.

Оценим близость решений исходного и усредненного уравнений соответствующими допустимому исходному управлению $u(\cdot) \in LU$ и соответствующему ему допустимому усредненному $v_u(\cdot) \in LV$.

$$\begin{gathered} h(X(t,u), Y(t,v_u) \le \\ \le \varepsilon h\left(\int_0^t [A(s)X(s,u) + B(s)u(s) + F(s)]ds, \int_0^t [\overline{A}Y(s,v_u) + v_u(s) + \overline{F}]ds\right) \le \\ \le \varepsilon \left[h\left(\int_0^t A(s)X(s,u)ds, \int_0^t \overline{A}Y(s,v_u)ds\right) + \right. \\ \left. + \left\|\int_0^t B(s)u(s)ds - \int_0^t v_u(s)ds\right\| + h\left(\int_0^t F(s)ds, \int_0^t \overline{F}ds\right)\right]. \end{gathered} \tag{7}$$

Теперь каждое слагаемое в (7) оценим отдельно с учетом (6). Предположим, что для некоторого $k, \quad 0 \le k \le m-1, \quad t \in (t_k, t_{k+1})$.

$$\begin{gathered} h\left(\int_0^t A(s)X(s,u)ds, \int_0^t \overline{A}Y(s,v_u)ds\right) \le \\ \le h\left(\int_0^t A(s)X(s,u)ds, \int_0^t \overline{A}X(s,u)ds\right) + h\left(\int_0^t \overline{A}X(s,u)ds, \int_0^t \overline{A}Y(s,v_u)ds\right) \le \\ \le \sum_{i=0}^{k-1} h\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)X(s,u)ds, \int_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{A}X(s,u)ds\right) + h\left(\int_{t_k}^t A(s)X(s,u)ds,\right. \\ \left.\int_{t_k}^t \overline{A}X(s,u)ds\right) + h\left(\int_0^t \overline{A}X(s,u)ds, \int_0^t \overline{A}Y(s,v_u)ds\right). \end{gathered} \tag{8}$$

Обозначим через $X_i = X(t_i, u)$. Тогда

$$\begin{gathered} h\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)X(s,u)ds, \int_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{A}X(s,u)ds\right) \le \\ \le h\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)X(s,u)ds, \int_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)X_i ds\right) + h\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)X_i ds, \int_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{A}X_i ds\right) + \\ + h\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{A}X_i ds, \int_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{A}X(s,u)ds\right). \end{gathered}$$

Так как $\overline{A} = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T A(t)dt$ и $X_i \in Conv(R^n)$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0} h\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)X_i ds, \int_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{A}X_i ds\right) = \frac{L}{\varepsilon m}\alpha_1\left(\frac{L}{\varepsilon m}\right), \text{где} \quad \lim_{t\to\infty}\alpha_1(t) = 0.$$

То есть

$$h\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)X(s,u)ds, \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{A}X(s,u)ds\right) \leq h\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)X(s,u)ds,\right.$$

$$\left.\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)X_i ds\right) + h\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{A}X_i ds, \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{A}X(s,u)ds\right) + \tfrac{L}{\varepsilon m}\alpha_1\left(\tfrac{L}{\varepsilon m}\right) \leq$$

$$\leq \varepsilon h\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)\int\limits_{t_i}^{s}[A(q)X(q,u)+B(q)u(q)+F(q)]dqds, \{0\}\right) +$$

$$+\varepsilon h\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{A}\int\limits_{t_i}^{s}[A(q)X(q,u)+B(q)u(q)+F(q)]dqds, \{0\}\right) + \tfrac{L}{\varepsilon m}\alpha_1\left(\tfrac{L}{\varepsilon m}\right) \leq$$

$$\leq \varepsilon\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} a\int\limits_{t_i}^{s}[aM+bu_0+f]dqds\right) +$$

$$+\varepsilon\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} a\int\limits_{t_i}^{s}[aM+bu_0+f]dqds\right) + \tfrac{L}{\varepsilon m}\alpha_1\left(\tfrac{L}{\varepsilon m}\right) \leq$$

$$\leq 2\varepsilon a\left(\tfrac{L}{\varepsilon m}\right)^2(aM+bu_0+f) + \tfrac{L}{\varepsilon m}\alpha_1\left(\tfrac{L}{\varepsilon m}\right). \tag{9}$$

Далее, используя свойства опорных функций, получим, что

$$h\left(\int\limits_{t_k}^{t} A(s)X(s,u)ds, \int\limits_{t_k}^{t} \overline{A}X(s,u)ds\right) \leq \int\limits_{t_k}^{t} h(A(s)X(s,u)ds, \overline{A}X(s,u)ds) \leq$$

$$\leq \int\limits_{t_k}^{t} \max_{\|\psi\|=1} |C(X(s,u), A^T(s)\psi) - C(X(s,u), \overline{A}^T\psi)|ds \leq$$

$$\leq \int\limits_{t_k}^{t} h(X(s,u),0) \max_{\|\psi\|=1} \|A^T(s)\psi - \overline{A}^T\psi\|ds \leq 2aM\tfrac{L}{\varepsilon m}. \tag{10}$$

Наконец,

$$h\left(\int\limits_{0}^{t} \overline{A}X(s,u)ds, \int\limits_{0}^{t} \overline{A}Y(s,v_u)ds\right) \leq a\int\limits_{0}^{t} h(X(s,u),Y(s,v_u))ds. \tag{11}$$

Таким образом, из (8),(9),(10),(11) получим, что

$$h\left(\int\limits_{0}^{t} A(s)X(s,u)ds, \int\limits_{0}^{t} \overline{A}Y(s,v_u)ds\right) \leq \tfrac{2aL}{\varepsilon m}(L(aM+bu_0+f)+M)+$$

$$+\tfrac{L}{\varepsilon}\alpha_1\left(\tfrac{L}{\varepsilon m}\right) + a\int\limits_{0}^{t} h(X(s,u),Y(s,v_u))ds. \tag{12}$$

Теперь в (7) оценим второе и третье слагаемые:

$$\left\|\int\limits_{0}^{t} B(s)u(s)ds - \int\limits_{0}^{t} v_u(s)ds\right\| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{k-1}\left\|\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} B(s)u(s)ds - \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} v_u(s)ds\right\| + \left\|\int\limits_{t_k}^{t} B(s)u(s)ds - \int\limits_{t_k}^{t} v_u(s)ds\right\|.$$

Так как $U \in Conv(R^m)$ и $v(t) \in V = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^T B(t)Udt$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\|\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} B(s)u(s)ds - \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} v_u(s)ds\right\| = \frac{L}{\varepsilon m}\alpha_2\left(\frac{L}{\varepsilon m}\right), \text{ где } \lim_{t\to\infty}\alpha_2(t) = 0.$$

То есть

$$\left\|\int\limits_0^t B(s)u(s)ds - \int\limits_0^t v_u(s)ds\right\| \le \left\|\int\limits_{t_k}^t B(s)u(s)ds - \int\limits_{t_k}^t v_u(s)ds\right\| +$$
$$+m\frac{L}{\varepsilon m}\alpha_2\left(\frac{L}{\varepsilon m}\right) \le \int\limits_{t_k}^t [\|B(s)\|\|u(s)\| - \|v_u(s)\|]ds + \frac{L}{\varepsilon}\alpha_2\left(\frac{L}{\varepsilon m}\right) \le$$
$$\le 2bu_0\frac{L}{\varepsilon m} + \frac{L}{\varepsilon}\alpha_2\left(\frac{L}{\varepsilon m}\right). \tag{13}$$

Далее

$$h\left(\int\limits_0^t F(s)ds, \int\limits_0^t \overline{F}ds\right) \le$$
$$\le h\left(\sum_{i=0}^{k-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} F(s)ds, \sum_{i=0}^{k-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{F}ds\right) + h\left(\int\limits_{t_k}^t F(s)ds, \int\limits_{t_k}^t \overline{F}ds\right).$$

Так как $\overline{F} = \lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T F(t)dt$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0} h\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} F(s)ds, \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{F}ds\right) = \frac{L}{\varepsilon m}\alpha_3\left(\frac{L}{\varepsilon m}\right), \text{ где } \lim_{t\to\infty}\alpha_3(t) = 0.$$

То есть

$$h\left(\int\limits_0^t F(s)ds, \int\limits_0^t \overline{F}ds\right) \le$$
$$\le \int\limits_{t_k}^t h(F(s), \overline{F})ds + \frac{L}{\varepsilon}\alpha_3\left(\frac{L}{\varepsilon m}\right) \le 2f\frac{L}{\varepsilon m} + \frac{L}{\varepsilon}\alpha_3\left(\frac{L}{\varepsilon m}\right). \tag{14}$$

Из (7),(12),(13),(14) следует, что

$$h(X(t,u), Y(t,v_u)) \le \varepsilon h\left(\int\limits_0^t A(s)X(s,u)ds, \int\limits_0^t \overline{A}Y(s,v_u)ds\right) +$$
$$+\varepsilon\left\|\int\limits_0^t B(s)u(s)ds - \int\limits_0^t v_u(s)ds\right\| + \varepsilon h\left(\int\limits_0^t F(s)ds, \int\limits_0^t \overline{F}ds\right) \le$$
$$\le \frac{2aL}{m}(L(aM + bu_0 + f) + M) + L\alpha_1\left(\frac{L}{\varepsilon m}\right) + a\varepsilon\int\limits_0^t h(X(s,u), Y(s,v_u))ds +$$
$$+2bu_0\frac{L}{m} + L\alpha_2\left(\frac{L}{\varepsilon m}\right) + 2f\frac{L}{\varepsilon m} + \frac{L}{\varepsilon}\alpha_3\left(\frac{L}{\varepsilon m}\right) = L\left(\frac{2}{m}(aL+1)(aM + bu_0 + f) +\right.$$

$$+\alpha_1\left(\tfrac{L}{\varepsilon m}\right)+\alpha_2\left(\tfrac{L}{\varepsilon m}\right)+\alpha_3\left(\tfrac{L}{\varepsilon m}\right)\Big)+a\varepsilon\int\limits_0^t h(X(s,u),Y(s,v_u))ds. \qquad (15)$$

Тогда из леммы Гронуолла–Беллмана из (15) следует, что

$$h(X(t,u),Y(t,v_u))\le$$

$$\le L\left(\tfrac{2}{m}(aL+1)(aM+bu_0+f)+\alpha_1\left(\tfrac{L}{\varepsilon m}\right)+\alpha_2\left(\tfrac{L}{\varepsilon m}\right)+\alpha_3\left(\tfrac{L}{\varepsilon m}\right)\right)e^{a\varepsilon\int\limits_0^t ds}=$$

$$\begin{gathered}=L\left(\tfrac{2}{m}(aL+1)(aM+bu_0+f)+\right.\\ \left.+\alpha_1\left(\tfrac{L}{\varepsilon m}\right)+\alpha_2\left(\tfrac{L}{\varepsilon m}\right)+\alpha_3\left(\tfrac{L}{\varepsilon m}\right)\right)e^{aL}.\end{gathered} \qquad (16)$$

Выберем количество точек разбиения m_0 таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$\tfrac{2L}{m_0}(aL+1)(aM+bu_0+f)\le\tfrac{\eta}{e^{aL}}. \qquad (17)$$

Затем при фиксированном m_0 выберем ε_0 так, чтобы для любого $\varepsilon\le\varepsilon_0$ выполнялось

$$L\left(\alpha_1\left(\tfrac{L}{\varepsilon m}\right)+\alpha_2\left(\tfrac{L}{\varepsilon m}\right)+\alpha_3\left(\tfrac{L}{\varepsilon m}\right)\right)\le\tfrac{\eta}{e^{aL}}. \qquad (18)$$

Таким образом из (16) и (18) следует оценка (4).

Оценка (5) доказывается аналогично.

Теорема доказана.

3. Близость критериев качества.

Рассмотрим критерий качества для исходного уравнения (1)

$$I(u)=\Phi(X(T,u))\to max, \qquad (19)$$

а также для усредненного уравнения

$$\overline{I}(v)=\Phi(Y(T,v))\to max, \qquad (20)$$

где $\Phi(\cdot):Conv(R^n)\to R^1$.

Теперь покажем близость решений задач (1),(19) и (2),(20) по значениям критериев качества.

Теорема 2. *Пусть система (1) удовлетворяет условиям предположения 1 и пусть отображение $\Phi(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной λ. Тогда для любых $\eta>0$ и $L>0$ существует $\varepsilon_0(\eta,L)\in(0,\sigma]$ такое, что при всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ и $T\in[0,L\varepsilon_0^{-1}]$ справедливы следующие утверждения:*
1) для оптимального управления $u^*(\cdot)$ исходной задачи (1),(19) существует допустимое управление $v_{u^*}(\cdot)$ усредненного уравнения (2) такое, что

$$|I(u^*)-\overline{I}(v_{u^*})|\le\eta; \qquad (21)$$

2) для оптимального управления $v^*(\cdot)$ усредненной задачи (2),(20) существует допустимое управление $u_{v^*}(\cdot)$ исходного уравнения (1) такое, что

$$|I(u_{v^*})-\overline{I}(v^*)|\le\eta; \qquad (22)$$

3) для оптимальных управлений $u^*(\cdot), v^*(\cdot)$ исходной (1), (19) и усредненной (2), (20) задач справедливо неравенство

$$|I(u^*) - \overline{I}(v^*)| \leq \eta; \tag{23}$$

4) для оптимального управления $u^*(\cdot)$ и допустимого управления $u_{v^*}(\cdot)$ исходной задачи (1),(19) справедливо неравенство

$$|I(u^*) - I(u_{v^*})| \leq \eta. \tag{24}$$

Доказательство. Пусть $u^*(\cdot)$ и $v^*(\cdot)$ — оптимальные управления соответственно исходной (1),(19) и усредненной (2),(20) задач, а $X^*(\cdot, u^*)$ и $Y^*(\cdot, v^*)$ — порожденные ими многозначные оптимальные решения.

$$D_h X^*(t, u^*) = \varepsilon[A(t)X^*(t, u^*) + B(t)u^*(t) + F(t)], \quad X^*(0, u^*) = X^0,$$
$$D_h Y^*(t, v^*) = \varepsilon[\overline{A}Y^*(t, v^*) + v^*(t) + \overline{F}], \quad Y^*(0, v^*) = X^0.$$

Пусть $v_{u^*}(\cdot)$ и $u_{v^*}(\cdot)$ — допустимые управления соответственно усредненной (2),(20) и исходной (1),(19) задач, соответствующие оптимальным управлениям $u^*(\cdot)$ и $v^*(\cdot)$, а $X^1(\cdot, u_{v^*})$ и $Y^1(\cdot, v_{u^*})$ — порожденные этими управлениями многозначные решения, удовлетворяющие уравнениям

$$D_h X^1(t, u_{v^*}) = \varepsilon[A(t)X^1(t, u_{v^*}) + B(t)u_{v^*}(t) + F(t)], \quad X^1(t, u_{v^*}) = X^0,$$
$$D_h Y^1(t, v_{u^*}) = \varepsilon[\overline{A}Y^1(t, v_{u^*}) + v_{u^*}(t) + \overline{F}], \quad Y^1(t, v_{u^*}) = X^0.$$

Согласно теореме 1, о близости решений исходного и усредненного уравнения

$$h(X^*(t, u^*), Y^1(t, v_{u^*})) \leq \eta_1, \quad h(X^1(t, u_{v^*}), Y^*(t, v^*)) \leq \eta_1 \quad \forall t \in [0, T].$$

Так как отображение $\Phi(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной λ, то из этих неравенств следует, что

$$|I(u^*) - \overline{I}(v_{u^*})| = |\Phi(X^*(T, u^*)) - \Phi(Y^1(T, v_{u^*}))| \leq$$
$$\leq \lambda h(X^*(T, u^*), Y^1(T, v_{u^*})) \leq \lambda\eta_1,$$
$$|I(u_{v^*}) - \overline{I}(v^*)| = |\Phi(X^1(T, u_{v^*})) - \Phi(Y^*(T, v^*))| \leq$$
$$\leq \lambda h(X^1(T, u_{v^*}), Y^*(T, v^*)) \leq \lambda\eta_1.$$

Обозначим $\eta = \lambda\eta_1$ и получим справедливость оценок (21) и (22).

Теперь покажем справедливость оценки (23). Так как $u^*(\cdot)$ и $v^*(\cdot)$ — оптимальные управления, то

$$I(u^*) \geq I(u_{v^*}), \quad \overline{I}(v^*) \geq \overline{I}(v_{u^*}).$$

Возможны два случая:

$$1) \quad \overline{I}(v_{u^*}) + \lambda\eta_1 \geq I(u^*) > \overline{I}(v^*) \geq \overline{I}(v_{u^*}),$$
$$2) \quad I(u_{v^*}) + \lambda\eta_1 \geq \overline{I}(v^*) \geq I(u^*) \geq I(u_{v^*}).$$

Объединяя оба случая и обозначая $\eta = \lambda\eta_1$, получаем оценки (23) и (24). Теорема доказана.

Заключение. В статье рассматривалась задача управления многозначными траекториями с терминальным критерием качества.

Обоснована возможность применения метода усреднения для данной задачи. То есть доказана теорема, аналогичная теореме Боголюбова, показывающая близость многозначных траекторий исходной и усредненной систем. Также доказана теорема о близости соответствующий критериев качества.

1. **Крылов Н. М.** Введение в нелинейную механику [текст] / Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов. – К. Изд-во АН УССР, 1937. – 363 с.
2. **Плотников А. В.** Дифференциальные уравнения с "четкой" и нечеткой многозначной многозначной правой частью. Асимптотические методы [текст] / А. В. Плотников, Н. В. Скрипник. – Одесса: Астропринт, 2009. – 191 с.
3. **Плотников В. А.** Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы [текст] / Плотников А. В., Витюк А. Н. – Одесса: Астро-Принт, 1999, – 354 с.
4. **Brandao Lopes Pinto A. J.** Uniqueness and existence theorems for differential equations with compact convex valued solutions [text] / Brandao Lopes Pinto A. J., de Blasi F. S., Iervolino F. – Boll. U. M. I., 1970. – № 4. – P. 534–538.
5. **de Blasi F. S.** Equazioni differentiali con soluzioni a valore compatto convesso [text] / de Blasi F. S., Iervolino F. – Boll. Unione Mat. Ital., 1969. – V. 2, № 4–5. – P. 491–501.
6. **Hukuhara M.** Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe [text] / Hukuhara M. // Func. Ekvacioj., 1967. – № 10. – P. 205–223.
7. **Kisielewicz M.** Description of a class of differential equations with set - valued solutions [text] / Kisielewicz M. // Lincei-Rend. Sc. fis. mat. enat. – 1975. – V. 58. – P. 158–162.
8. **Kisielewicz M.** Method of averaging for differential equations with compact convex valued solutions [text] / Kisielewicz M. // Rend. Mat. – 1976. – V. 9, № 3. – P. 397–408.
9. **Perestyuk N. A.** Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities (De Gruyter Studies in Mathematics: 40) [text] / Perestyuk N. A., Plotnikov V. A., Samoilenko A. M., Skripnik N. V. – Berlin/Boston: Walter De Gruyter GmbH Co., 2011. — 307 p.