УДК 519.635.4

В. В. Вербицкий*, И. Н. Глушко**
*Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова
**Одесский национальный политехнический университет

АПОСТЕРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ АППРОКСИМАЦИИ СМЕШАННЫМ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ БИГАРМОНИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Вербіцький В. В., Глушко І. М. Апостеріорні оцінки апроксимації змішаним методом скінченних елементів бігармонічної крайової задачі. Побудовано апостеріорний оцінювач похибки апроксимації за схемою С'ярле-Рав'ярта змішаного методу скінченних елементів задачі Діріхле для бігармонічного оператора. Отримано апостеріорні оцінки зверху похибки скінченно-елементного розв'язку крайової задачі.
Ключові слова: апостеріорний оцінювач похибки, метод С'ярле–Рав'ярта, змішаний метод скінченних елементів.

Вербицкий В. В., Глушко И. Н. Апостериорные оценки аппроксимации смешанным методом конечных элементов бигармонической краевой задачи. Построен апостериорный оценщик погрешности аппроксимации по схеме Сьярле-Равьярта смешанного метода конечных элементов задачи Дирихле для бигармонического оператора. Получены апостериорные оценки сверху погрешности конечно–элементного решения краевой задачи.
Ключевые слова: апостериорный оценщик погрешности, метод Сьярле–Равьярта, смешанный метод конечных элементов.

Verbitsky V. V., Glushko I. N. Aposteriori error estimation of a mixed finite element method approximation of a biharmonic boundary problem. Aposteriori error estimator for the approximation by Ciarlet-Raviart mixed finite element method of Dirichlet problem for the biharmonic operator is constructed. A posteriori upper bounds of errors of the finite element solution are obtained.
Key words: a posteriori error estimator, Ciarlet–Raviart method, mixed finite element method.

Введение.

Метод Сьярле-Равьярта, как вариант смешанного метода конечных элементов [8, 4, 5, 6], был предложен в работе [9] для задачи Дирихле бигармонического оператора. Априорные оценки сходимости метода получены в [14, 11, 10]. В работе [13] построен предобуславливатель для соответствующей системы линейных алгебраических уравнений. Апостериорные оценки конечно–элементных аппроксимаций — важная область исследований и неотъемлемая составляющая научных вычислений [3, 7, 15, 12].

Настоящая статья посвящена построению апостериорного оценщика погрешности аппроксимации методом Сьярле-Равьярта задачи Дирихле для бигармонического оператора. Апостериорный оценщик строится на основании невязки конечно-элементного решения. Затем с помощью полученного оценщика выводится апостериорная оценка сверху погрешности конечно-элементного решения.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим однородную задачу Дирихле для бигармонического оператора

$$\Delta^2 u = f \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1}$$

$$u = \partial_n u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{2}$$

Известно[1], что если Ω — выпуклый многоугольник и $f \in H^{-1}(\Omega)$, то слабое решение u краевой задачи (1)–(2) принадлежит пространству $H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ и

$$||u||_3 \leq c_1 ||f||_{-1} \qquad \forall f \in H^{-1}(\Omega), \tag{3}$$

где $c_1 > 0$ — константа.

Сделаем замену $p = -\Delta u$. Вместо (1) получим два уравнения

$$p = -\Delta u, \tag{4}$$

$$-\Delta p = f \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{5}$$

Пусть $f \in L_2(\Omega)$. Умножим уравнение (4) на произвольную функцию $\overline{p} \in H^1(\Omega)$, а уравнение (5) — на произвольную функцию $\overline{u} \in H_0^1(\Omega)$. Полученные уравнения проинтегрируем по области Ω. Применив формулу Грина и учтя граничные условия (2), получим следующую вариационную задачу. Для $f \in L_2(\Omega)$ найти такие $(u, p) \in H_0^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, что

$$\int\limits_\Omega p\overline{p}dx = \int\limits_\Omega \nabla u \cdot \nabla \overline{p} dx \quad \forall \overline{p} \in H^1(\Omega), \tag{6}$$

$$\int\limits_\Omega \nabla p \cdot \nabla \overline{u} dx = \int\limits_\Omega f\overline{u}dx \quad \forall \overline{u} \in H_0^1(\Omega). \tag{7}$$

Не составляет труда проверить, что если u — слабое решение краевой задачи (1)–(2) для $f \in L_2(\Omega)$, то $(u, p = -\Delta u)$ является решением вариационной задачи (6)–(7). Единственность решения вариационной задачи (6)–(7) легко получить, используя неравенство Фридрихса

$$||u||_{1,\Omega}^2 \leq c_2 \int\limits_\Omega \nabla u \cdot \nabla u dx \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

где $c_2 > 0$ — константа, зависящая только от области Ω. С другой стороны, если (u, p) — решение вариационной (6)–(7), то u — слабое решение краевой задачи (1)–(2) и $p = -\Delta u$ [9]. Кроме того, из (3) следует, что

$$||p||_{1,\Omega} = || - \Delta u||_{1,\Omega} \leq ||u||_{3,\Omega} \leq c_1 ||f||_{-1}.$$

Отсюда, учитывая, что $f \in L_2(\Omega)$, а значит

$$||f||_{-1} = \sup_{0 \neq v \in H^1(\Omega)} \frac{<f, v>}{||v||_{1,\Omega}} = \sup_{0 \neq v \in H^1(\Omega)} \frac{(f, v)}{||v||_{1,\Omega}} \leq$$
$$\leq \sup_{0 \neq v \in H^1(\Omega)} \frac{||f||_{0,\Omega} ||v||_{0,\Omega}}{||v||_{1,\Omega}} \leq ||f||_{0,\Omega},$$

получаем

$$||p||_{1,\Omega} \le c_1||f||_{0,\Omega} \tag{8}$$

Используя равенство (6) при $\overline{p} = u$, неравенства Фридрихса и Коши–Буняковского, получаем

$$||u||^2_{1,\Omega} \le c_2 \int\limits_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u \, dx = c_2 \int\limits_{\Omega} pu \, dx \le c_2||p||_{0,\Omega}||u||_{0,\Omega}.$$

Отсюда

$$||u||_{1,\Omega} \le c_2||p||_{0,\Omega}. \tag{9}$$

Пусть $\mathcal{T}_h$ — регулярная триангуляция области Ω треугольниками K([2], с. 127), h — параметр триангуляции ($0 < h < 1$). Определим конечномерные подпространства

$$S^{k,0}(\mathcal{T}_h) \subset H^1(\Omega),$$

$$S^{k,0}_0(\mathcal{T}_h) \subset H^1_0(\Omega),$$

где

$$S^{k,0}(\mathcal{T}_h) = \{u_h \in C^0(\overline{\Omega}) \ : \ u_h|_K \in P_k(K) \, \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

— пространство непрерывных сплайнов степени k ($k \ge 1$) и

$$S^{k,0}_0(\mathcal{T}_h) = \{u_h \in S^{k,0}(\mathcal{T}_h) \ : \ u_h = 0 \text{ на } \partial\Omega\}.$$

Задаче (6)–(7) поставим в соответствие следующую конечномерную вариационную задачу. Для $f \in L_2(\Omega)$ найти такие $(u_h, p_h) \in S^{2,0}_0(\mathcal{T}_h) \times S^{2,0}(\mathcal{T}_h)$, что

$$\int\limits_{\Omega} p_h \overline{p}_h dx = \int\limits_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla \overline{p}_h dx \quad \forall \overline{p}_h \in S^{2,0}(\mathcal{T}_h), \tag{10}$$

$$\int\limits_{\Omega} \nabla p_h \cdot \nabla \overline{u}_h dx = \int\limits_{\Omega} f \overline{u}_h dx \quad \forall \overline{u}_h \in S^{2,0}_0(\mathcal{T}_h). \tag{11}$$

Изложенный способ аппроксимации бигармонической краевой задачи называется методом Сьярле-Равьярта [9, 10, 11, 14]. В работе [10] получены следующие априорные оценки погрешности конечно-элементной аппроксимации для сплайнов второй степени:

$$||u - u_h||_{1,\Omega} \le c_3 h^2 ||u||_{3,\Omega},$$

$$||p - p_h||_{0,\Omega} \le c_4 h ||u||_{3,\Omega},$$

где $c_3 > 0$, $c_4 > 0$ — константы, не зависящие от h.

Определим квази-интерполяционный оператор $I_h : L_1(\Omega) \to S^{1,0}(\mathcal{T}_h)$ следующим образом

$$I_h v = \sum_{a \in \mathcal{N}_h} \lambda_a \frac{1}{|\omega_a|} \int\limits_{\omega_a} v dx,$$

где $\mathcal{N}_h$ — множество узлов триангуляции $\mathcal{T}_h$, λ_a — ассоциируемая с узлом $a \in \mathcal{N}_h$ базисная функция пространства $S^{1,0}(\mathcal{T}_h)$, ω_a — носитель базисной функции λ_a. Оператор I_h удовлетворяет следующим локальным оценкам[3, стр.22]:

$$||v - I_h v||_{0,K} \leq c_5 h_K ||v||_{1,\widetilde{K}}, \tag{12}$$

$$||v - I_h v||_{0,\partial K} \leq c_6 h_E^{\frac{1}{2}} ||v||_{1,\widetilde{K}} \quad \forall v \in H^1(\Omega),\ \forall K \in \mathcal{T}_h, \tag{13}$$

где h_K — диаметр треугольника K, $\widetilde{K}$ — объединение треугольников, имеющих хотя бы один общий узел с треугольником K.

2. Апостериорные оценки.

Погрешности $e_u \equiv u - u_h$ и $e_p \equiv p - p_h$ конечно–элементной аппроксимации (10)–(11) вариационной задачи (6)–(7) являются решением следующей задачи. Найти такие $(e_u, e_p) \in H_0^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, что

$$\int\limits_\Omega e_p \overline{p} dx = \int\limits_\Omega \nabla e_u \cdot \nabla \overline{p} dx + \int\limits_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla \overline{p} dx - \int\limits_\Omega p_h \overline{p} dx \quad \forall \overline{p} \in H^1(\Omega), \tag{14}$$

$$\int\limits_\Omega \nabla e_p \cdot \nabla \overline{u} dx = \int\limits_\Omega f \overline{u} dx - \int\limits_\Omega \nabla p_h \cdot \nabla \overline{u} dx \quad \forall \overline{u} \in H_0^1(\Omega). \tag{15}$$

Заметим, что задача (14)–(15) отличается от задачи (6)–(7) только правой частью. Наша цель — получить оценки решения задачи (14)–(15). Запишем (10) следующим образом

$$0 = \int\limits_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla \overline{p}_h dx - \int\limits_\Omega p_h \overline{p}_h dx \quad \forall \overline{p}_h \in S^{2,0}(\mathcal{T}_h). \tag{16}$$

Из (14) и (16) следует, что

$$\int\limits_\Omega e_p \overline{p}_h dx = \int\limits_\Omega \nabla e_u \cdot \nabla \overline{p}_h dx \quad \forall \overline{p}_h \in S^{2,0}(\mathcal{T}_h). \tag{17}$$

В равенстве (14) положим $\overline{p} = u$ и вычтем из него равенства (17) при $\overline{p}_h = u_h$ и (16) при $\overline{p}_h = I_h u$. В результате получим

$$\int\limits_\Omega e_p e_u dx = \int\limits_\Omega \nabla e_u \cdot \nabla e_u dx + \int\limits_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla (u - I_h u) dx - \int\limits_\Omega p_h (u - I_h u) dx. \tag{18}$$

Преобразуем последние два слагаемые правой части равенства (18). Каждый из интегралов по области Ω заменим суммой интегралов по треугольникам, к каждому из которых применим формулу Грина. Получим

$$\begin{aligned}
&\int\limits_\Omega p_h (u - I_h u) dx - \int\limits_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla (u - I_h u) dx = \\
&\quad = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \int\limits_K (p_h + \Delta u_h)(u - I_h u) dx - \int\limits_{\partial K} \frac{\partial u_h}{\partial n} (u - I_h u) ds \right\} = \\
&\quad = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int\limits_K R_K^{(1)}(u_h, p_h)(u - I_h u) dx + \sum_{E \in \mathcal{E}_h, E \notin \partial\Omega} \int\limits_E R_E^{(1)}(u_h)(u - I_h u) ds.
\end{aligned}$$

Здесь $R_K^{(1)}(u_h,p_h)=p_h+\Delta u_h$, $\mathcal{E}_h$ — множество сторон E триангуляции $\mathcal{T}_h$,

$$R_E^{(1)}(u_h)=\frac{\partial u_h}{\partial n}|_{K'}-\frac{\partial u_h}{\partial n}|_K,\ \text{если}\ E\ \text{— общая сторона}\ K\ \text{и}\ K'.$$

Используя интегральное неравенство Коши–Буняковского, локальные неравенства (12), (13) и неравенство Коши–Буняковского для сумм, получаем

$$\begin{aligned}
&\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K R_K^{(1)}(u_h,p_h)(u-I_hu)dx+\sum_{E\in\mathcal{E}_h,E\notin\partial\Omega}\int_E R_E^{(1)}(u_h)(u-I_hu)ds\le\\
&\le\sum_{K\in\mathcal{T}_h}||R_K^{(1)}(u_h,p_h||_{0,K}\,||u-I_hu||_{0,K}+\sum_{E\in\mathcal{E}_h,E\notin\partial\Omega}||R_E^{(1)}(u_h)||_{0,E}\,||u-I_hu||_{0,E}\le\\
&\le c_5\sum_{K\in\mathcal{T}_h}h_K||R_K^{(1)}(u_h,p_h||_{0,K}\,||u||_{1,\widetilde{K}}+c_6\sum_{E\in\mathcal{E}_h,E\notin\partial\Omega}h_E^{\frac{1}{2}}||R_E^{(1)}(u_h)||_{0,E}\,||u||_{1,\widetilde{E}}\le\\
&\le\max\{c_5,c_6\}\left\{\sum_{K\in\mathcal{T}_h}h_K^2||R_K^{(1)}(u_h,p_h||_{0,K}^2+\sum_{E\in\mathcal{E}_h,E\notin\partial\Omega}h_E||R_E^{(1)}(u_h)||_{0,E}^2\right\}^{\frac{1}{2}}\times\\
&\times\left\{\sum_{K\in\mathcal{T}_h}||u||_{1,\widetilde{K}}^2+\sum_{E\in\mathcal{E}_h,E\notin\partial\Omega}||u||_{1,\widetilde{E}}^2\right\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Здесь $\widetilde{E}$ — объединение треугольников, имеющих со стороной E общую вершину. Заметим,что

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_h}||u||_{1,\widetilde{K}}^2+\sum_{E\in\mathcal{E}_h,E\notin\partial\Omega}||u||_{1,\widetilde{E}}^2\le c_7||u||_{1,\Omega}^2,$$

где константа c_7 равна наибольшему числу множеств $\widetilde{K}$ и $\widetilde{E}$, которым принадлежит треугольник K. Значит,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega p_h(u-I_hu)dx-\int_\Omega\nabla u_h\cdot\nabla(u-I_hu)dx\le\\
&\qquad\le c_8\left\{\sum_{K\in\mathcal{T}_h}h_K^2||R_K^{(1)}(u_h,p_h||_{0,K}^2+\sum_{E\in\mathcal{E}_h,E\notin\partial\Omega}h_E||R_E^{(1)}(u_h)||_{0,E}^2\right\}^{\frac{1}{2}}||u||_{1,\Omega},
\end{aligned}\tag{19}$$

где c_8 — константа не зависящая от h.

Из (7) и (11)

$$\int_\Omega\nabla e_p\cdot\nabla\overline{u}_hdx=0\quad\forall\overline{u}_h\in S_0^{2,0}(\mathcal{T}_h).\tag{20}$$

Из (15), учитывая (20),

$$0=\int_\Omega f\overline{u}_hdx-\int_\Omega\nabla p_h\cdot\nabla\overline{u}_hdx\quad\forall\overline{u}_h\in S_0^{2,0}(\mathcal{T}_h).\tag{21}$$

Полагая в (14) $\overline{p}=e_p$, а в (15) $\overline{u}=e_u$, получаем следующее

$$\int_\Omega e_pe_pdx=\int_\Omega\nabla e_u\cdot\nabla e_pdx+\int_\Omega\nabla u_h\cdot\nabla e_pdx-\int_\Omega p_he_pdx=$$

$$
= \int\limits_\Omega f e_u dx - \int\limits_\Omega \nabla p_h \cdot \nabla e_u dx + \int\limits_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla e_p dx - \int\limits_\Omega p_h e_p dx,
$$

т. е.

$$
\int\limits_\Omega e_p e_p dx = \int\limits_\Omega f(u - u_h) dx - \int\limits_\Omega \nabla p_h \cdot \nabla (u - u_h) dx +
$$

$$
+ \int\limits_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla (p - p_h) dx - \int\limits_\Omega p_h (p - p_h) dx.
$$

Сложим последнее равенство с равенствами (16) при $\overline{p}_h = p_h - I_h p$ и (21) при $\overline{u}_h = u_h - I_h u$. Получим

$$
\int\limits_\Omega e_p e_p dx = \int\limits_\Omega f(u - I_h u) dx - \int\limits_\Omega \nabla p_h \cdot \nabla (u - I_h u) dx +
$$

$$
+ \int\limits_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla (p - I_h p) dx - \int\limits_\Omega p_h (p - I_h p) dx. \tag{22}
$$

Преобразуем первые два слагаемые правой части равенства (22), воспользовавшись формулой Грина.

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_\Omega f(u - I_h u) dx - \int\limits_\Omega \nabla p_h \cdot \nabla (u - I_h u) dx = \\
&\quad = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \int\limits_K (f + \Delta p_h)(u - I_h u) dx - \int\limits_{\partial K} \frac{\partial p_h}{\partial n} (u - I_h u) ds \right\} = \\
&\quad = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int\limits_K R_K^{(2)}(p_h)(u - I_h u) dx + \sum_{E \in \mathcal{E}_h, E \notin \partial\Omega} \int\limits_E R_E^{(2)}(p_h)(u - I_h u) ds.
\end{aligned}
$$

Здесь $R_K^{(2)}(p_h) = f + \Delta p_h$,

$$
R_E^{(2)}(p_h) = \frac{\partial p_h}{\partial n}|_{K'} - \frac{\partial p_h}{\partial n}|_K,
$$

если E — общая сторона треугольников K и K'.

Используя интегральное неравенство Коши–Буняковского, локальные неравенства (12), (13) и неравенство Коши–Буняковского для сумм, получаем

$$
\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int\limits_K R_K^{(2)}(p_h)(u - I_h u) dx + \sum_{E \in \mathcal{E}_h, E \notin \partial\Omega} \int\limits_E R_E^{(2)}(p_h)(u - I_h u) ds \leq
$$

$$
\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} ||R_K^{(2)}(p_h)||_{0,K} \, ||u - I_h u||_{0,K} + \sum_{E \in \mathcal{E}_h, E \notin \partial\Omega} ||R_E^{(2)}(p_h)||_{0,E} \, ||u - I_h u||_{0,E} \leq
$$

$$
\leq c_5 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K ||R_K^{(2)}(p_h)||_{0,K} \, ||u||_{1,\widetilde{K}} + c_6 \sum_{E \in \mathcal{E}_h, E \notin \partial\Omega} h_E^{\frac{1}{2}} ||R_E^{(2)}(p_h)||_{0,E} \, ||u||_{1,\widetilde{E}} \leq
$$

$$
\leq \max\{c_5, c_6\} \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 ||R_K^{(2)}(p_h)||_{0,K}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h, E \notin \partial\Omega} h_E ||R_E^{(2)}(p_h)||_{0,E}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \times
$$

$$\times \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} ||u||^2_{1,\widetilde{K}} + \sum_{E \in \mathcal{E}_h, E \notin \partial\Omega} ||u||^2_{1,\widetilde{E}} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда, повторяя рассуждения сделанные при выводе оценки (19), получаем

$$\int_\Omega f(u - I_h u)dx - \int_\Omega \nabla p_h \cdot \nabla(u - I_h u)dx \le$$
$$\le c_8 \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 ||R_K^{(2)}(p_h)||^2_{0,K} + \sum_{E \in \mathcal{E}_h, E \notin \partial\Omega} h_E ||R_E^{(2)}(p_h)||^2_{0,E} \right\}^{\frac{1}{2}} ||u||_{1,\Omega}. \tag{23}$$

Аналогично оценкам (19), (23) получаем следующую оценку для последних двух слагаемых правой части равенства (22):

$$\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla(p - I_h p)dx - \int_\Omega p_h(p - I_h p)dx \le$$
$$\le c_9 \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 ||R_K^{(1)}(u_h, p_h)||^2_{0,K} + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E ||R_E^{(1)}(u_h)||^2_{0,E} \right\}^{\frac{1}{2}} ||p||_{1,\Omega}, \tag{24}$$

где c_9 — константа, не зависящая от h. Здесь

$$R_E^{(1)}(u_h) = -\frac{\partial u_h}{\partial n},$$

если $E \in \partial\Omega$.

Введем обозначения:

$$\eta_1^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 ||R_K^{(1)}(u_h, p_h)||^2_{0,K} + \sum_{E \in \mathcal{E}_h, E \notin \partial\Omega} h_E ||R_E^{(1)}(u_h)||^2_{0,E},$$

$$\eta_2^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 ||R_K^{(2)}(p_h)||^2_{0,K} + \sum_{E \in \mathcal{E}_h, E \notin \partial\Omega} h_E ||R_E^{(2)}(p_h)||^2_{0,E},$$

$$\widetilde{\eta}_1^2 = \eta_1^2 + \sum_{E \in \partial\Omega} h_E ||R_E^{(1)}(u_h)||^2_{0,E}.$$

Используя неравенства Фридрихса, Коши–Буняковского и оценку (19), из (18) получаем

$$||e_u||^2_{1,\Omega} \le c_2 \int_\Omega \nabla e_u \cdot \nabla e_u \, dx =$$
$$= c_2 \{ \int_\Omega e_p e_u dx + \int_\Omega p_h(u - I_h u)dx - \int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla(u - I_h u)dx \} \le$$
$$\le c_2 \{ ||e_p||_{0,\Omega} ||e_u||_{0,\Omega} + c_8 \eta_1 ||u||_{1,\Omega} \}.$$

Значит,

$$||e_u||^2_{1,\Omega} \le c_2 \{ ||e_p||_{0,\Omega} ||e_u||_{0,\Omega} + c_8 \eta_1 ||u||_{1,\Omega} \}. \tag{25}$$

Используя неравенство Коши–Буняковского, оценки (23) и (24), из равенства (22) получаем

$$||e_p||^2_{0,\Omega} \le c_8 \eta_2 ||u||_{1,\Omega} + c_9 \widetilde{\eta}_1 ||p||_{1,\Omega}. \tag{26}$$

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 1. *Существуют такие константы $c_{10} > 0$ и $c_{11} > 0$, зависящие только от области Ω и регулярности триангуляции $\mathcal{T}_h$, что*

$$||e_p||^2_{0,\Omega} \le c_{10}\alpha, \tag{27}$$

$$||e_u||_{1,\Omega} \le c_{11}\left\{\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \beta}\right\}, \tag{28}$$

где

$$\alpha = (\eta_2 + \widetilde{\eta}_1)||f||_{0,\Omega}, \quad \beta = \eta_1||f||_{0,\Omega}.$$

Доказательство. Из (26), учитывая (9) и (8), получаем

$$||e_p||^2_{0,\Omega} \le c_1 c_2 c_8 \eta_2 ||f||_{0,\Omega} + c_1 c_9 \widetilde{\eta}_1 ||f||_{0,\Omega}.$$

Отсюда сразу следует оценка (27), если положить $c_{10} = \max\{c_1c_2c_8, c_1c_9\}$.

Из (25), учитывая (9), (8) и принятые в теореме обозначения, получаем

$$||e_u||^2_{1,\Omega} \le c_2||e_p||_{0,\Omega}||e_u||_{1,\Omega} + c_1c_2^2c_8\eta_1||f||_{0,\Omega} \le c_{12}\{\alpha|||e_u||_{1,\Omega} + \beta\},$$

где $c_{12} = \max\{c_2, c_1c_2^2c_8\}$. Таким образом, для нормы погрешности конечно-элементной аппроксимации $||e_u||_{1,\Omega}$ получаем квадратичное неравенство

$$||e_u||^2_{1,\Omega} - c_{12}\alpha||e_u||_{1,\Omega} - c_{12}\beta \le 0.$$

Решая это неравенство, получаем следующие оценки

$$0 \le ||e_u||_{1,\Omega} \le c_{12}\frac{\alpha}{2} + \sqrt{c_{12}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + c_{12}\beta}.$$

Отсюда следует утверждение (28), если положить $c_{11} = \max\{c_{12}, \sqrt{c_{12}}\}$. □

Заключение. Нами рассмотрена аппроксимация по схеме Сьярле-Равьярта смешанного метода конечных элементов задачи Дирихле для бигармонического оператора в многоугольной области. Конечно-элементные пространства образуют лагранжевые сплайны второй степени. С использованием невязки конечно-элементного решения построен апостериорный оценщик погрешности аппроксимации. Получены апостериорные оценки сверху погрешностей дискретного решения краевой задачи.

1. **Кондратьев В. А.** Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками [текст] / Кондратьев В. А. // Тр. Моск. матем. о-ва. – 1967. – Т. 16. – С. 209–292.

2. **Сьярле Ф.** Метод конечных элементов для эллиптических задач [текст] / Ф. Сьярле. – М.: Мир, 1980. – 512 с.

3. **Ainsworth M.** A posteriori error estimation in finite element analysis [text] / Ainsworth M., Oden J. T. – Jonh Wiley & Sons, 2000. – 240 p.

4. **Arnold D. N.** Mixed finite element methods for elliptic problems [text] / D. N. Arnold // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. – 1990. – V. 82. – P. 281-–300.

5. **Arnold D. N.** Mixed finite element methods for linear elasticity with weakly imposed symmetry [text] / Arnold D. N., Falk R. S., Winther R. // Math. Comput. – 2007. – V. 76. – P. 1699–1723.

6. **Auricchio F.** Mixed Finite Element Methods, in Encyclopedia of Computational Mechanics [text] / Auricchio F., Brezzi F., Lovadina C. – Vol. 1, Chapter 9. – Wiley, 2004. – P. 237–278.

7. **Babuška I.** The Finite Element Method and its Reliability [text] / Babuška I., Strouboulis, T. – Oxford, Clarendon Press, 2001. – 736 p.

8. **Brezzi F.** Mixed and hybrid finite element methods [text] / Brezzi F., and Fortin M. – Berlin, Springer-Verlag, 1991. – 350 p.

9. **Ciarlet P.** A Mixed Finite Element Method for the Biharmonic Equation [text] / Ciarlet P., Raviart P. // Symposium on Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations, C DE BOOR, Ed , Academic Press, New York, 1974. – P. 125–143.

10. **Falk R. S.** Error estimates for mixed methods [text] / Falk R.S., Osborn J. E. // RAIRO. – Anal. numer. – 1980. – Vol. 14., № 3. – P. 249–277.

11. **Fix G. J.** Theory and applications of mixed finite element methods, in Constructive Approaches to Mathematical Models [text] / G. J. Fix, M. D. Gunzburger, R. A. Nicolaides. – New York, Academic Press, 1979. – P. 375–393.

12. **Grätsch T.** A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis [text] / Grätsch T., Bathe K.–J. // Computers and Structures. – 2005. – V. 83. – P. 235—265.

13. **Hanisch M. R.** Two-level additive Schwarz preconditioners for fourth-order mixed methods [text] / Hanisch M. R. // Electronic Transactions on Numerical Analysis. – 2006. – V. 22. – P. 1–16.

14. **Scholz R.** A Mixed Method for 4th Order Problems using Linear Finite Elements [text] / Scholz R. // RAIRO. – 1978. – V. 12. – P. 85–90.

15. **Verfürth R.** A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh refinement techniques [text] / Verfürth R. – Chichester: John Wiley & Sons, 1996. – 127 p.