Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра оптимального керування і економічної кібернетики

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

«**Задачі прийняття рішень на основі теорії нечітких множин**»

«**Decision-making tasks based on fuzzy set theory**»

Виконав: здобувач денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика
Освітня програма «Прикладна математика»
Радчин Євгеній Михайлович
Керівник: доктор фіз.-мат. наук, доц. Кічмаренко О.Д. ____
Рецензент:

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№____від _____________2024 р.

Завідувач кафедри

______ Ольга Кічмаренко

Захищено на засіданні ЕК №_____
протокол №____від_________2024 р.
Оцінка___________ /_____ /_____

Голова ЕК

______ _____________

Одеса – 2024

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Математичне моделювання є широко вживаним і ефективним методом дослідження різноманітних об’єктів, процесів і явищ. Побудована модель – це спрощене відображення об’єкта або явища, зокрема, якщо значення окремих параметрів оригінального об’єкта визначаються нечітко або неточно, то в моделі значення цих параметрів подаються в точному вигляді (числом або вектором), що робить зручним використання класичних і числових методів розв’язання поставлених задач. Але, якщо розмитість значень цих параметрів є суттєвою особливістю досліджуваного об’єкта, то таке спрощення повторює представлення про оригінальний об’єкт та унеможливлює дослідження впливу нечітких параметрів. В багатьох галузях, наприклад, в економіці, біології, медицині, екології, соціальних науках та інженерії, необхідність ухвалення обґрунтованих рішень в умовах невизначеності та неповноти інформації є надзвичайно актуальною. Часто інформація, з якою стикаються аналітики й фахівці, є розмитою, неточною або неповною, що ускладнює процес ухвалення оптимальних рішень. Саме тому в сучасних дослідженнях науковці намагаються відтворити нечіткість в математичних моделях, а для цього якнайкраще підходить апарат теорії нечітких множин, який був запропонований Лотфі Заде [12]. Нечіткі множини дозволяють враховувати ступінь належності елементів до певної множини, який може приймати будь-яке значення в інтервалі від 0 до 1, - саме це і відображає невизначеність і розмитість реальних даних. Цей підхід дозволяє моделювати неточність, властиву багатьом реальним явищам, і надає нові можливості для аналізу складних проблем з невизначеністю. Публікація Л. Заде спричинила появу численних публікацій, в яких теорія нечітких множин застосовується для моделювання та розв’язання різноманітних явищ і процесів, в яких для нових постановок задач розробляються нові методи розв’язання наприклад, [2-5, 7, 10, 13].

Методи прийняття рішень на основі нечітких множин набули широкого поширення в різних галузях. Зокрема, вони застосовуються у задачах прогнозування, класифікації, управління ризиками, діагностики систем, експертних системах тощо. Використання теорії нечітких множин у цих задачах дозволяє не тільки підвищити точність рішень, а й забезпечити більшу гнучкість та адаптивність моделей, що є важливим у динамічних та складних системах.

Метою даної кваліфікаційної роботи є аналіз методів прийняття рішень на основі нечітких множин та їх застосування у розв'язанні прикладних задач в умовах невизначеності. Основна увага приділена порівнянню різних підходів до прийняття рішень, оцінці їхньої ефективності та можливостей для подальшого застосування.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити наступні задачі: вивчити основні поняття і означення теорії нечітких множин, виокремити різні постановки задач вибору з використанням нечітких множин, проаналізувати методи розв'язання цих задач, для реальних задач вибору альтернативного рішення побудувати математичні моделі в чіткій і нечіткій постановці, обговоривши всі можливі варіанти нечіткості моделі, підібрати метод розв'язання або комбінацію методів та програмно реалізувати їх.

Об'єкт дослідження – задачі прийняття рішень в умовах невизначеності.

Предмет дослідження – це математичні моделі задач вибору з нечіткими параметрами.

Методи дослідження: методи прийняття рішень на основі нечітких множин.

Структура роботи включає огляд теоретичних аспектів теорії нечітких множин, аналіз існуючих методів та підходів до прийняття рішень на їхній основі, а також практичну частину, де наведено приклади застосування розглянутих методів до реальних задач.

Отже, застосування теорії нечітких множин в процесі прийняття рішень відкриває нові можливості для розв'язання проблем, які виникають в умовах складних, багатокритеріальних задач. Оскільки нечіткі множини дозволяють працювати з даними, яким властива невизначеність, вони стають потужним інструментом для аналізу ситуацій, де традиційні методи не можуть бути застосовані. Це стосується як аналітичного моделювання, так і прогнозування, де враховується багато факторів, що впливають на результат, але їх точні значення невідомі або варіативні. Інтеграція нечітких множин з іншими математичними методами, такими як теорія ігор, статистичні методи або штучний інтелект, дозволяє створювати складні моделі, що враховують широкий спектр можливих сценаріїв і дають змогу ефективно ухвалювати рішення в умовах невизначеності.

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ОЗНАЧЕННЯ

В задачах досягнення нечітко визначеної мети їх складові – альтернативи, мета та обмеження – є нечіткими. Це означає, що в умовах прийняття рішень доводиться враховувати не лише традиційні кількісні показники, а й розмиті або неточні дані, що відображають невизначеність реальних ситуацій. Такий підхід дозволяє моделювати процеси, які не можна точно формалізувати в рамках класичних методів, і робить рішення більш адаптивними до умов невизначеності.

Наведемо необхідні для розуміння та побудови постановки задачі досягнення нечітко визначеної мети означення [2].

Припустимо, що X – це деяка звичайна множина. Тоді **нечіткою підмножиною** G в X будемо називати сукупність пар наступного вигляду: $\left(x,\ \mu_G\left(x\right)\right)$, де $x \in X$, а функція $\mu_G\left(x\right)$ визначається як $\mu_G\left(x\right):\ X \to \left[0;1\right]$. В свою чергу, функція $\mu_G\left(x\right)$ буде називатися **функцією належності** нечіткої підмножини G. **Ступенем належності** до нечіткої множини G деякого елемента $x \in X$ буде називатись значення функції належності $\mu_G\left(x\right)$ для цього елемента.

Універсальна множина X – це множина, у якої функція належності має вид:

$$\mu_X\left(x\right) = 1,\ \forall x \in X.$$

Носієм нечіткої підмножини G універсальної множини X, яка має функцію належності $\mu_G\left(x\right)$, називається звичайна множина, яка позначається як $\operatorname{supp} G$ та визначається наступним чином:

$$\operatorname{supp} G = \left\{x \middle| x \in X, \mu_G\left(x\right) > 0\right\}.$$

Перетин нечітких підмножин G та H універсальної множини X представляє собою нечітку підмножину $G \cap H$, функція належності якої має вид:

$$\mu_{G \cap H}(x) = \min\{\mu_G(x), \mu_H(x)\},\ x \in X. \tag{1}$$

Об'єднання нечітких підмножин G та H універсальної множини X представляє собою нечітку підмножину $G \cup H$, функція належності якої має вид:

$$\mu_{G \cup H}(x) = \max\{\mu_G(x), \mu_H(x)\},\ x \in X.$$

Різниця нечітких підмножин G та H універсальної множини X – це нечітка множина, що позначається як $G \setminus H$, яка характерна такою функцією належності:

$$\mu_{G \setminus H}(x) = \begin{cases} \mu_G(x) - \mu_H(x), \text{ якщо } \mu_G(x) \ge \mu_H(x), \\ 0, \quad \text{в усіх інших випадках,} \end{cases}$$

або:

$$\mu_{G \setminus H}(x) = \max\{\mu_G(x) - \mu_H(x), 0\}.$$

Підмножина α-рівня нечіткої множини G, де $\alpha \in [0;1]$ – це звичайна множина, яка включає в себе тільки елементи множини G, значення функції належності яких не менше за α. Позначення цієї підмножини записується як G_α та визначається наступним чином:

$$G_\alpha = \{x | \mu_G(x) \ge \alpha\}.$$

Нечітке відношення R на множині X – це нечітка підмножина декартового добутку $X \times X$, яка характеризується наступною функцією належності: $\mu_R : X \times X \to [0;1]$. Ступінь чи міра виконання відношення R між елементами x та y визначається як значення $\mu_R(x, y)$ цієї функції.

Якщо нечітке відношення R на множині X є **рефлексивним**, то для будь-якого елемента $x \in X$ буде виконуватись умова: $\mu_R(x,x)=1$.

Якщо нечітке відношення R на множині X є **антирефлексивним**, то для будь-якого елемента $x \in X$ буде виконуватись умова: $\mu_R(x,x)=0$.

Якщо нечітке відношення R на множині X є **симетричним**, то для будь-яких елементів $x, y \in X$ буде виконуватись умова: $\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)$.

Якщо нечітке відношення R на множині X є **асиметричним**, то для будь-яких елементів $x, y \in X$ буде справедлива така властивість: $\mu_R(x,y)>0 \Rightarrow \mu_R(y,x)=0$ або $\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)=0$, чи, інакше кажучи, $\min\{\mu_R(x,y),\mu_R(y,x)\}=0$.

Якщо нечітке відношення R на множині X є **антисиметричним**, то для будь-яких елементів $x, y \in X,\ x \neq y$ виконується умова: $\min\{\mu_R(x,y),\mu_R(y,x)\}=0$.

Якщо нечітке відношення R на множині X є **транзитивним**, то виконується умова: $R^2 \subset R$.

Якщо для нечіткого бінарного відношення характерними є властивості транзитивності, рефлексивності та симетричності, це відношення називається **відношенням подібності** або **еквівалентності**.

Нехай існує відображення $\varphi: X \to Y$ та A – деяка підмножина множини X, яка характеризується функцією належності $\mu_A(x)$. Будемо називати **образом нечіткої множини** A при наявності відображення φ нечітку підмножину множини Y, яка складається з пар вигляду: $(y,\mu_B(y))=(\varphi(x),\mu_A(x)),\ x \in X$, де $\mu_B(y)$ – це функція належності образу, яка визначається як $\mu_B:\ Y \to [0;1]$. Також цю функцію можна записати у такий спосіб:

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(y)} \mu_A(x),\ y \in Y, \tag{2}$$

де множина $\varphi^{-1}(y)$ для кожного елемента $y \in Y$ являє собою множину всіх елементів $x \in X$, для яких y є образом при відображенні φ, тобто: $\varphi^{-1}(y) = \{x | x \in X, \varphi(x) = y\}$.

Нечітке відображення множини X у множину Y – це відображення, яке кожному елементу $x \in X$ ставить у відповідність деяку нечітку підмножину множини Y. Воно описується наступною функцією належності: $\mu_\varphi : X \times Y \to [0;1]$. Зазначимо також, що для кожного фіксованого елемента множини X $x = x_0$, функція $\mu_\varphi(x_0, y)$ є функцією належності нечіткої підмножини в множині Y, яка в свою чергу являє собою образ елемента x_0 при відображенні φ.

Отже, **образ** B **нечіткої підмножини** A множини X при наявності **нечіткого відображення** $\mu_\varphi : X \times Y \to [0;1]$ – це нечітка підмножина множини Y, функція належності якої має вид:

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in X} \min\{\mu_A(x), \mu_\varphi(x, y)\}, \tag{3}$$

при чому якщо φ – це звичайне відображення, а $y = \varphi(x)$, то ця формула перетворюється на формулу (2). Також варто зазначити, що в цьому означенні використовується **максимінний добуток**, або композиція, нечітких відношень, яка описується такою функцією належності:

$$\mu_{A \cdot B}(x, y) = \sup_{z \in X} \min\{\mu_A(x, z), \mu_B(z, y)\},$$

де A та B – це нечіткі відношення на множині X.

Прообразом A **нечіткої підмножини** B множини Y за наявності нечіткого відображення $\mu_\varphi : X \times Y \to [0;1]$, називається об'єднання всіх нечітких множин, для яких виконується умова, при якій їх образи є підмножинами нечіткої множини B при відображенні φ. Якщо позначити образ нечіткої множини μ_φ як $A\cdot\mu_\varphi$, то умова визначення прообразу множини як включення $A\cdot\mu_\varphi \subset Y$ буде виглядати наступним чином: $\sup_{x\in X}\min\left\{\mu_2(x),\mu_\varphi(x,y)\right\}\le\mu_B(y),\ \forall y\in Y$.

Для визначення явного виразу функції належності прообразу використаємо теорему, використовуючи позначення:

$$N=\left\{(x,y)\middle|(x,y)\in X\times Y,\mu_\varphi(x,y)>\mu_B(y)\right\},$$

$$N_x=\left\{y\middle|y\in Y,(x,y)\in N\right\},$$

$$N_y=\left\{x\middle|x\in X,(x,y)\in N\right\},$$

$$X^\circ=\left\{x\middle|x\in X,N_x\ne\varnothing\right\}.$$

Теорема 1. [2] У введених вище позначеннях нечітка множина A (прообраз множини B) описується такою функцією належності:

$$\mu_A(x)=\begin{cases}\inf\limits_{y\in N_x}\mu_B(y), & x\in X^\circ,\\ 1, & x\in X\setminus X^\circ.\end{cases}$$

Деяку нечітку підмножину в множині X ми будемо називати **нечіткою метою**, та позначимо її G. Вона описується наступною функцією належності: $\mu_G(x):\ X\to[0;1]$. Припустимо, що конкретну альтернативу $x\in X$ обрано за розв’язок. Таким чином можна побачити наявність прямопропорційної залежності між ступенем належності цієї альтернативи до множини, яка являє собою нечітку мету μ_G та ступенем досягнення цієї мети. Тобто зі зростанням значення $\mu_G(x)$, також буде зростати значення ступеня досягнення мети μ_G. **Нечіткі обмеження** задачі також є нечіткими підмножинами універсальної множини X.

Нечітке відношення нестрогої переваги на встановленій множині альтернатив X – це всіляке рефлективне відношення, що задане на цій множині та описується наступною рефлексивною функцією належності:

$$\mu_R : X \times X \to [0;1].$$

Рефлексивність цієї функції свідчить про наступну властивість: $\mu_R(x,x) = 1,\ \forall x \in X$.

Таким чином, якщо μ_R виступає в ролі нечіткого відношення переваги на заданій множині альтернатив X, то обрав будь-яку пару альтернатив x та y з цієї множини, значення $\mu_R(x,y)$ буде відображати міру виконання такої переваги: $x \geq y$, або інакше кажучи «x не гірше ніж y». Через те, що це відношення є рефлексивним, має місце цілком логічне твердження про те, що жодна альтернатива не може бути гіршою за саму себе. Також зазначимо, що при умові виконання рівняння $\mu_R(x,y) = 1$ буде справедливим одне з двох наступних тверджень: або x та y дорівнюють одна одній, або альтернатива x переважає альтернативу y. А з того, що $\mu_R(x,y) = 0$ випливає або те, що x зовсім не переважає y, або ці альтернативи не можуть бути порівняні між собою з позитивною мірою.

Варто зазначити, що нечітке відношення переваги, задане на множині альтернатив X, буде однозначно задавати три нечітких відношення, що відповідають йому:

1) нечітке відношення однаковості $R^I\left(\mu_R^I\right)$,
2) нечітке відношення квазіеквівалентності $R^e\left(\mu_R^e\right)$,
3) нечітке відношення строгої переваги $R^S\left(\mu_R^S\right)$.

В контексті задач прийняття рішень нечітке відношення нестрогої використовуються для аналізу недомінованих альтернатив та їх властивостей. Визначимо такі відношення:

1) однаковості: $R^I = \left(X \times X \setminus R \bigcup R^{-1} \right) \bigcup \left(R \bigcap R^{-1} \right)$,

2) квазіеквівалентності: $R^e = R \bigcap R^{-1}$,

3) строгої переваги: $R^S = R \setminus R^{-1}$,

де R^{-1} – це відношення, обернене до R, яке визначається наступною функцією належності: $\mu_{R^{-1}}(y,x) = \mu_R(x,y),\ \forall (x,y) \in X \times X$.

Встановимо вирази, необхідні для визначення функцій належності описаних вище відношень. Для цього використаємо означення операцій над нечіткими множинами:

1) нечітке відношення байдужості:

$$\mu_R^I(x,y) = \max\left\{1 - \max\left\{\mu_R(x,y), \mu_R(y,x)\right\}, \min\left\{\mu_R(x,y), \mu_R(y,x)\right\}\right\} =$$

$$= \max\left\{\min\left\{1 - \mu_R(x,y), 1 - \mu_R(y,x)\right\}, \min\left\{\mu_R(x,y), \mu_R(y,x)\right\}\right\};$$

2) нечітке відношення квазіеквівалентності:

$$\mu_R^e(x,y) = \min\left\{\mu_R(x,y), \mu_R(y,x)\right\};$$

3) нечітке відношення строгої переваги:

$$\mu_R^S(x,y) = \begin{cases} \mu_R(x,y) - \mu_R(y,x), & \text{коли } \mu_R(x,y) > \mu_R(y,x) \\ 0, & \text{коли } \mu_R(x,y) \le \mu_R(y,x). \end{cases}$$

Тепер приведемо властивості описаних вище нечітких відношень:

1) Нечіткі відношення квазіеквівалентності (μ_R^e) та байдужості (μ_R^I) входять до класів симетричних та рефлексивних відношень.

   Їх симетричність справедлива з огляду на їхні означення, а рефлексивність випливає з рефлексивності початкового нечіткого відношення μ_R, тобто: $\mu_R^e(x,x) = \mu_R^I(x,x) = \mu_R(x,x) = 1$.

2) Нечітке відношення строгої переваги (μ_R^S) є антирефлексивним та антисиметричним.

   Антирефлексивність випливає з того, що початкове нечітке відношення переваги є рефлексивним, тобто $\mu_R(x,x)=1$, а отже $\mu_R^S(x,x)=0$ для всіх $x \in X$. Антисиметричність, в свою чергу, доводиться наступними діями: припустимо, що $\mu_R^S(x,y)>0$, тобто $\mu_R(x,y)-\mu_R(x,y)>0$, отже $\mu_R^S(y,x)=0$.

Також варто зазначити, що у випадку, коли початкове нечітке відношення переваги μ_R на множині альтернатив X є транзитивним, нечіткі відношення квазіеквівалентності (μ_R^e) та строгої переваги (μ_R^S) в свою чергу також є транзитивними. До цього треба додати, що з вищесказаного випливає належність відношення μ_R^e до нечітких відношень еквівалентності, тому що воно є рефлексивним, симетричним та транзитивним. Про це свідчать наступні теореми:

Теорема 2. [2] Якщо нечітке відношення переваги μ_R на множині X транзитивне, то й відповідне нечітке відношення μ_R^e також буде транзитивним.

Теорема 3. [2] Якщо нечітке відношення переваги μ_R на множині X транзитивне, то транзитивним буде також відповідне нечітке відношення строгої переваги μ_R^S.

2. ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ

2.1 Постановка задачі досягнення нечітко визначеної мети

Нехай X – це універсальна множина альтернатив або варіантів, серед яких **особа, що приймає рішення (ОПР)** буде здійснювати вибір. На цій множині X визначимо нечітку мету G і множину допустимих альтернатив – нечіткі обмеження $C_1, C_2, \ldots, C_m$ та припустимо, що їх функції належності відомі.

Розв'язання задачі полягає в досягненні мети та дотриманні обмежень, причому мова йде як про звичайне досягнення поставленої мети, так і про реалізацією цієї мети в певній мірі. Також важливо враховувати ступінь виконання встановлених обмежень.

Підхід Беллмана – Заде, розроблений у 1970-х роках [12], є одним із основних методів для розв'язання задач прийняття рішень в умовах невизначеності та нечіткості. Він передбачає розгляд мети прийняття рішення та множини альтернатив як нечітких рівноважних підмножин універсальної початкової множини альтернатив. Така модель дозволяє знайти оптимальне рішення шляхом максимізації ступеня досягнення мети та виконання обмежень. Вимоги задачі в цьому підході враховуються способом, що дозволяє подати розв'язок в простій формі та забезпечує ефективність методу в задачах, де традиційні точні підходи не є дієвими.

Припустимо, що деяка альтернатива x досягає мети (або відповідає їй) зі ступенем $\mu_G\left(x\right)$ та задовольняє обмеження (чи інакше допустима) зі ступенем $\mu_C\left(x\right)$. У такому випадку **нечітким розв'язком** D задачі досягнення нечітко визначеної мети є перетин нечітких множин мети та обмежень, тобто $D = G \cap C$. Отже, розв'язок задачі нечітко визначеної мети в свою чергу також являє собою нечітку підмножину початкової множини альтернатив X. Враховуючи що перетин нечітких множин можна визначити за правилом (1), значення μ_D, тобто функцію належності розв'язку можна виразити наступним чином:

$$\mu_D(x) = \min\{\mu_G(x), \mu_C(x)\}.$$

Якщо в умові задачі є декілька цілей чи обмежень, то функцію залежності для знаходження нечіткого розв'язку можна записати у такий спосіб:

$$\mu_D(x) = \min\{\mu_{G_1}(x), \ldots, \mu_{G_n}(x) \mu_{C_1}(x), \ldots, \mu_{C_m}(x)\}.$$

Властивістю такого розв'язку є невизначеність, тому що він представляє собою не деяку єдину альтернативу, а нечітку множину початкових альтернатив. В цьому випадку, якщо ОПР не буде в змозі обробити розв'язок даного типу, треба однозначно обрати найкращу альтернативу. Вона має назву **максимізуючого розв'язку** і має вигляд:

$$\max_{x \in X} \mu_D(x) = \max_{x \in X} \min\{\mu_G(x), \mu_C(x)\}.$$

Тобто це та альтернатива, що має найвищий ступінь належності до знайденого раніше нечіткого розв'язку. Максимізуючий розв'язок є одним з найпоширеніших способів знаходження однієї «найкращої» альтернативи у задачі нечітко визначеної мети.

Однак не в кожному випадку мета та обмеження початкової задачі є підмножинами однієї універсальної множини. В зв'язку з цим інша постановка задачі, де нечітка мета є підмножиною однієї, а нечіткі обмеження є підмножинами іншої універсальної множини, буде більш всеосяжною з огляду на застосування на практиці.

Отже, розглянемо цей випадок. Нехай є універсальна множина початкових альтернатив X та однозначне відображення $\varphi: X \to Y$. Елементи множини Y, або значення відображення φ, є оцінками вибору альтернатив x з множини X або реакціями зазначеної системи на відповідні вихідні дії.

В цьому випадку нечітка мета визначається функцією належності $\mu_G : Y \to [0;1]$ та є нечіткою підмножиною універсальної множини оцінок вибору Y. Обмеження в свою чергу визначаються наступними функціями належності та є нечіткими підмножинами універсальної множини альтернатив X: $\mu_C : X \to [0;1]$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Задля розв'язання цієї задачі, вона зводиться до початкової постановки, де мета є нечіткою підмножиною універсальної множини X.

Нехай $\overline{\mu}_G$ – це нечітка множина альтернатив станів, вибір яких гарантує досягнення мети μ_G. Ця множина являє собою прообраз нечіткої множини μ_G при вищезазначеному відображенні φ, тобто $\overline{\mu}_G(x) = \mu_G(\varphi(x))$.

Отже, обидві задачі, з умовою присутності тих самих нечітких обмежень, еквівалентні одна одній. Таким чином, можна ввести нове визначення розв'язку цих задач досягнення нечіткої мети.

Нечіткий розв'язок задачі досягнення мети G (нечітка підмножина множини Y) при початкових обмеженнях C (нечітка підмножина множини X) – це максимальна множина D, якій властиві наступні твердження [2]:

1) Розв'язок задачі є допустимою альтернативою, з точки зору обмежень: $D \subset C$;
2) Досягнення нечіткої мети виконується: $\varphi(D) \subset G$ (тут $\varphi(D)$ – це образ множини D при наявності нечіткого відображення φ).

При цьому нечіткий розв'язок можна знайти, спираючись на визначення прообразу нечіткої підмножини, якщо задане нечітке відображення множини альтернатив у множину оцінок (або реакцій).

Отже, припустимо, що задані універсальні множини альтернатив X та оцінок, або реакцій, Y та нечітке відображення множини X у множину Y. Функція належності цього відображення виглядає наступним чином:

$\mu_\varphi : X \times Y \to [0;1]$. В такому випадку воно ставить у відповідність кожній альтернативі з множини X її нечітку оцінку з множини Y, а нечіткі обмеження описує функція належності $\mu_C(x)$.

За теоремою 1 прообраз вищезазначеної множини D визначається наступним чином:

$$N = \{(x,y) | (x,y) \in X \times Y, \mu_\varphi(x,y) > \mu_G(y)\},$$

$$N_x = \{y | y \in Y, (x,y) \in N\},$$

$$X^\circ = \{x | x \in X, N_x \neq \varnothing\},$$

$$\mu_{\tilde{D}}(x) = \begin{cases} \inf \mu_G(y), & x \in X, \\ 1, & x \in X \setminus X^\circ. \end{cases}$$

Отже, нечіткий розв’язок можна описати наступною функцією належності:

$$\mu_D(x) = \min\{\mu_{\tilde{D}}(x), \mu_C(x)\},$$

або:

$$\mu_D(x) = \begin{cases} \min\left\{\mu_C(x), \inf\limits_{y \in N_x} \mu_G(y)\right\}, & x \in X^\circ, \\ \mu_C(x), & x \in X \setminus X^\circ. \end{cases}$$

Якщо потрібно обрати єдину альтернативу, то розв’язком задачі може бути та альтернатива, для якої ступінь належності до нечіткого розв’язку $\mu_D(x)$ є максимальною, тобто альтернатива, що забезпечує значення $\max\limits_{x \in X} \mu_D(x)$. Проте такий вибір не завжди є обґрунтованим, і можливі інші підходи для визначення єдиної альтернативи.

Таким чином, в основі підходу Беллмана – Заде лежить можливість симетрично описувати обмеження разом з метою в якості нечітких підмножин єдиної початкової універсальної множини. Це дозволяє спростити подання розв’язку задачі. Водночас не кожна задача прийняття рішень підпадає під опис таким методом.

Слід зауважити, що іноді значимість мети та обмежень враховується за допомогою введення деяких коефіцієнтів ваги. У такому випадку розв’язок задачі записується у наступному вигляді:

$$\mu_D(x) = \min\left\{\lambda_1\mu_{G_1}(x), \dots, \lambda_n\mu_{G_n}(x), \nu_1\mu_{C_1}(x), \dots, \nu_m\mu_{C_m}(x)\right\},$$

де $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — це коефіцієнти ваги для цільових функцій, а $\nu_1, \dots, \nu_m$ – для обмежень. Однак і цей підхід не завжди є достатньо аргументованим.

2.2 Задачі нечіткого математичного програмування, їх класифікація

Основною метою класичної задачі математичного програмування є пошук максимуму чи мінімуму цільової функції на заданій множині допустимих альтернатив, яка зазвичай записується у вигляді системи нерівностей. Наприклад:

$$f(x) \to \max,$$

$$\varphi_i(x) \le 0,\ i = 1, \dots, m,$$

$$x \in X.$$

Тут заданою множиною допустимих альтернатив виступає X, а заданими функціями є $f : X \to R^1$ та $\varphi_i : X \to R^1$, де $i = 1, \dots, m$.

Під час моделювання реальних задач можуть бути відомими тільки нечіткі описи функцій f та φ або їх параметрів або нечітко визначений набір можливих альтернатив X. У такій ситуації прийняте рішення може бути, наприклад, наближеним через обмеженість інформації або у формі, що є достатньою для розв'язання задачі, але не точною.

Крім того, в деяких випадках чітко визначений набір можливих альтернатив (або допустимих варіантів) може бути тільки наближенням в якомусь сенсі до реальних умов. Тобто в задачі можуть бути альтернативи, які не належать до множини обмежень, проте не є повністю недопустимими, лише менш бажаними. Наприклад, розглянемо випадок, коли множина допустимих альтернатив складається із набору деяких способів розподілу ресурсів, котрі ОПР має намір залучити для виконання певної операції. Можливо, що в такій ситуації було б недоцільно наперед встановлювати чітку межу між допустимими альтернативами, оскільки може статися, що певний розподіл ресурсів поза зазначеною межею може забезпечити ефект, що навіть перевищить бажаний для ОПР. З огляду на це, нечіткий опис початкових умов дозволяє більш точно врахувати реальні обставини, навіть якщо він в певному сенсі є наближеним, а не точним.

Різні варіанти нечіткого опису початкових даних можуть призводити до розбіжностей у постановці задач **нечіткого математичного програмування (НМП)**. Далі розглянемо деякі з типів таких постановок, згруповані у п’ять категорій.

Задача максимізації цільової звичайної функції на нечіткій множині альтернатив (чи варіантів), тобто:

$$f\left(x\right)\to \max ,$$

$$x\in X ,$$

де $f : X \to R^1$, $\mu_C : X \to \left[0;1\right]$. Існують два основних підходу для розв’язання цієї задачі:

1) Зведення до задачі нечітко визначеної мети.

В цьому випадку метод полягає у нормуванні цільової функції наступним чином:

$$\overline{f}(x) = \frac{f(x)}{\sup\limits_{x \in \operatorname{supp} \mu_C} f(x)} \to \max .$$

Тут функція $\overline{f}(x)$ – це функція належності до нечіткої мети, значення якої буде ступенем досягнення цієї мети якщо обирати альтернативу $x \in X$. Таким чином, для знаходження розв’язку цієї задачі можна безпосередньо застосувати підхід Беллмана – Заде, при цьому раціональним вибором альтернативи буде вважатися та альтернатива, ступінь належності котрої до нечіткого розв’язку задачі буде максимальним, іншими словами визначається як:

$$\max_{x \in X} \min \left\{ \mu_C(x), \overline{f}(x) \right\}.$$

2) Зведення до задачі багатокритеріальної оптимізації.

В цьому випадку багатокритеріальна задача оптимізації буде формулюватись наступним чином:

$$f(x) \to \max ,$$

$$\mu_C(x) \to \max ,$$

$$x \in X .$$

Цей підхід базується на врахуванні необхідності досягнення найвищого значення функції та максимальної належності розв'язку до множини допустимих альтернатив.

Якщо зробити обмеження більш м’якими, тобто уможливити варіант, коли вони можуть бути порушені у звичайній задачі математичного програмування, ми отримаємо нечіткий варіант цієї задачі – **задачу математичного програмування з нечітко визначеними значеннями обмежень**:

$$f(x) \to \max ,$$

$$\varphi(x) \tilde{\leq} 0,$$

$$x \in X.$$

Також існує варіант, коли замість максимізації цільової функції $f(x)$ метою задачі буде прагнення досягти деякого наперед вказаного значення цієї функції. Для цього випадку різним відхиленням функції $f(x)$ мають бути відповідно приписані різні ступені їх допустимості, тобто якщо наприклад відхилення буде зростати, його ступінь допустимості, відповідно, буде зменшуватись. Для цього варіанту нечітка задача буде мати наступний вигляд:

$$f(x) \geq z_0,$$

$$\varphi(x) \tilde{\leq} 0,$$

$$x \in X.$$

Для обох вищезазначених нечітких задач символ «~» над нерівністю означає її нечіткість. Формалізуємо ці задачі наступним способом.

Нехай є якесь значення цільової функції $f(x)$, досягнення якої є достатньою умовою виконання мети прийняття рішень, вона позначається як z_0. Також нехай ОПР подала два граничних рівня a та b, які використовуються для визначення сильного порушення кожної умови:

якщо $f(x) < z_0 - a$, то порушується умова $f(x) \geq z_0$,

якщо $\varphi(x) > b$, то порушується умова $\varphi(x) \leq 0$.

Використовуючи введені вище величини, можна визначити множини мети й обмежень за допомогою наступних функцій належності:

$$\mu_G(x) = \begin{cases} 0, & f(x) \le z_0 - a, \\ \mu(x,a), & z_0 - a < f(x) < z_0, \\ 1, & f(x) \ge z_0, \end{cases}$$

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 0, & \varphi(x) \ge b, \\ \nu(x,a), & 0 < \varphi(x) < b, \\ 1, & \varphi(x) \le 0. \end{cases}$$

Функції $\mu : X \to [0;1]$ та $\nu : X \to [0;1]$ у вищезазначених формулах надають змогу визначити з якою мірою будуть виконуватись відповідні нерівності, з огляду на початкові умови деякої задачі прийняття рішень та на погляд ОПР.

Отже, поставлена задача може бути представлена задачею досягнення нечітко визначеної мети, а це свідчить про можливість застосування до неї підходу Беллмана – Заде. В іншому випадку, поставлену задачу можна звести до задачі багатокритеріальної оптимізації наступного вигляду:

$$\mu_G(x) \to \max,$$

$$\mu_C(x) \to \max,$$

$$x \in X.$$

В наступному випадку метою задачі є **максимізація нечітко описаної функції**, тобто відображення $\mu_\varphi : X \times R^1 \to [0;1]$, в якому X – це універсальна початкова множина альтернатив (або варіантів), а R^1 – це числова вісь. Тут функція $\mu_\varphi(x_0, r)$ для кожного фіксованого x_0 із множини альтернатив X є нечіткою оцінкою альтернативи x_0 або іншими словами реакцію даної системи на вибір керування x_0. Також множину обмежень, яка є нечіткою множиною допустимих альтернатив: $\mu_C : X \to [0;1]$.

Максимізація звичайної цільової функції при обмеженнях, які мають нечіткі параметри. В цьому типу задач цільовою є звичайна функція $f : X \to R^1$ та задано систему обмежень $\varphi_i(x) \le b_i,\ i = 1,\ldots,m$, де параметри опису функцій $\varphi_i(x)$ задані нечітко, як нечіткі множини. Якщо, наприклад, розглядати лінійний випадок, тобто коли $X = R^n$, то функції $\varphi_i(x)$ будуть приймати наступний вигляд:

$$\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j,\ i = 1,\ldots,m,$$

де параметри описані нечіткими множинами: параметр a_{ij} множиною $\mu_{ij}(a_{ij})$, параметр b множиною $\nu_i(b_i)$.

Для розв'язання подібних задач існує декілька методів. Один із них — це метод модальних значень, основною суттю якого є заміна нечіткого параметру на його модальне значення, а отриману скалярну задачу розв'язують звичайними методами. Ступінь належності знайденого розв’язку визначається як мінімальне значення серед усіх знайдених ступенів належності модальних значень початкових параметрів. Проте цей метод підходить лише за умови, що функції належності цих параметрів є унімодальними, тобто кожна така функція має своє максимальне значення лише в єдиній точці. Коли ця умова не дотримується, то питання вибору значення параметра з найбільшим ступенем належності залишається відкритим.

В основі іншого підходу до розв'язання стоїть зведення початкової задачі до задачі першого типу.

Також існують методи, що зводять поставлену задачу до багатокритеріальної задачі оптимізації [1].

Можна розглядати інші постановки задач, які комбінують вищеописані види постановок.

3. ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ З НЕЧІТКИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ

Припустимо, що на заданій початковій універсальній множині альтернатив X дано функцію $\varphi: X \to R^1$, а також нечітку множину допустимих альтернатив $\mu_C: X \to [0;1]$, що є підмножиною X. Результати вибору тих чи інших альтернатив будуть оцінюватись значеннями функції φ, отже розв'язком задачі буде максимізація цієї функції з врахуванням нечіткої множини обмежень μ_C:

$$\varphi(x) \to \max,$$

$$x \in \tilde{C}.$$

Під «максимізацією» тут мається на увазі вибір такого нечіткого розв'язку μ_D, що являє собою нечітку підмножину універсальної множини альтернатив, для якого нечітке значення функції φ буде в деякому сенсі найкращим. Очевидно, що таке представлення розв'язку має сенс тоді, коли воно сприймається ОПР як змістовне. У випадку, коли ОПР не розглядає нечіткий опис задачі як прийнятний, то «максимізація» функції φ буде являти собою раціональний вибір якоїсь єдиної альтернативи або підмножини можливих альтернатив.

Раціональний підхід у такому випадку означає, що при виборі певної альтернативи ОПР має зважати на необхідність знаходження компромісу між очевидним бажанням отримати максимальне значення функції φ і прагненням обрати альтернативу, з числа допустимих, яка має максимальний ступінь належності до цієї множини.

Розглянемо два методи для розв'язання цієї задачі.

Перший підхід.

Цей розв'язок буде використовувати множини рівня нечіткої множини обмежень, а саме формулювати початкову задачу нечіткого математичного програмування як набір звичайних задач максимізації цільової функції φ на будь-яких можливих множинах рівня нечіткої множини допустимих альтернатив. Тобто, якщо в початковій задачі максимізації $\varphi(x) \to \max$ був знайдений розв'язок x_0 з універсальної множини альтернатив X на множині рівня λ, то ступінь належності альтернативи x_0 до нечіткої множини розв'язків задачі більший або дорівнює значенню λ. Отже, якщо перебрати всі значення λ, буде одержана функція належності нечіткого розв'язку.

Розглянемо цей варіант знаходження розв'язку більш детально.

Нехай C_λ – це множина рівня λ нечіткої підмножини допустимих альтернатив μ_C, яка має наступний вигляд:

$$C_\lambda = \left\{ x \middle| x \in X, \mu_C(x) \ge \lambda \right\}.$$

Введемо для всіх невід'ємних чисел λ множину розв'язків класичної задачі максимізації функції φ на множині альтернатив, ступінь належності котрих до множини допустимих значень вихідної задачі НМП більший, або рівний значенню λ. При умові $C_\lambda \ne \varnothing$, множина розв'язків буде виглядати наступним чином:

$$N(\lambda) = \left\{ x \middle| x \in X, \varphi(x) = \sup_{x' \in C_\lambda} \varphi(x') \right\}.$$

Задля того, щоб побудувати функцію належності нечіткого розв'язку, необхідно визначити ступені належності для кожної альтернативи $x_0 \in X$ до цієї множини. Отже, нехай ступінь належності деякої альтернативи $x_0 \in X$ до нечіткої множини розв'язків буде знаходитись як максимальне з чисел λ, відповідна множина $N(\lambda)$ котрих містить альтернативу x_0. Або інакшими словами візьмемо верхню границю з множини чисел λ.

Таким чином, нечітка підмножина μ_D, яка називається розв'язком задачі НМП, буде описуватись наступною функцією належності:

$$\mu^1(x) = \sup_{\lambda : x \in N(\lambda)} \lambda .$$

Тут верхній індекс «1» показує що це розв'язок саме першого типу. Справедливим є наступне твердження.

Твердження 1. [2] $x \in \operatorname{supp} \mu^1(x) \Rightarrow \mu^1(x) = \mu_C(x)$.

Отже, **функція належності розв'язку типу 1** буде мати наступний вигляд:

$$\mu^1(x) = \begin{cases} \mu_C(x), & x \in \bigcup\limits_{\lambda > 0} N(\lambda), \\ 0, & \text{у всіх інших випадках.} \end{cases}$$

Разом з тим виконується рівність: $\operatorname{supp} \mu^1(x) = \bigcup\limits_{\lambda > 0} N(\lambda)$.

Таким чином, можна сказати, що якщо $\mu^1(x) \neq 0$ на множині альтернатив X, тобто тільки тоді, коли $\exists \lambda > 0 : N(\lambda) \neq \varnothing$, **то розв'язок першого типу існує**.

Також варто зазначити, що нечіткому розв'язку буде відповідати нечітке максимальне значення $\mu_\varphi(r)$ функції $\varphi(x)$, яке виступає образом нечіткої множини розв'язку типу 1 при відображенні φ. З огляду на визначення образу нечіткої множини при нечіткому відображенні (3), це нечітке максимальне значення буде мати наступний вигляд:

$$\mu_{\varphi}(r) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(r)} \mu^1(x) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(r)} \sup_{x \in N(\lambda)} \lambda,$$

де $\varphi^{-1}(r) = \{x | x \in X, \varphi(x) = r\}$, тобто множина всіх альтернатив $x \in X$, для яких значення цільової функції $\varphi(x)$ дорівнює заданому значенню r.

Припустимо тепер, що в задачі нечіткого математичного програмування не існує розв'язку першого типу, тобто немає таких значень $\lambda > 0$, для яких $N(\lambda) \neq \varnothing$. В цьому випадку можна скористатись ε**-оптимальним нечітким розв'язком**, що вводиться за допомогою заданого параметра $\varepsilon > 0$, та має наступний вигляд:

$$\mu_{\varepsilon}^1(x) = \sup_{\lambda : x \in N(\varepsilon, \lambda)} \lambda,$$

де $N(\varepsilon, \lambda) = \left\{ x \middle| x \in X, \varphi(x) \geq \sup_{x' \in C_{\lambda}} \varphi(x') - \varepsilon \right\}$, а відповідне йому нечітке значення функції φ буде визначатись наступною функцією належності:

$$\mu_{\varphi}^{\varepsilon}(x) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(r)} \mu_{\varepsilon}^1(x).$$

При виконанні умови $\varepsilon \to 0$, границя $\mu_{\varphi}^{\varepsilon}$ виступає як верхня нечітка границя функції φ на нечіткій множині μ_C.

Корисність використання ε-оптимального нечіткого розв'язку не обмежується тільки випадком, коли $\mu^1(x) = 0$ для кожної альтернативи $x \in X$. Він використовується і в тих ситуаціях, коли $N(\lambda) = \varnothing$ при деяких значеннях $\lambda \in [0;1]$.

Розв'язок першого типу має наступні властивості [2]:

1) Для будь-якого число r_0 за умови, що $\mu_\varphi(r_0)>0$, знайдеться така альтернатива: $\tilde{x}\in X$, для якої $\varphi(\tilde{x})=r_0$ та $\tilde{x}\in N(\lambda)$ при деякому значенні $\lambda>0$, тобто:

$$r\in \operatorname{supp}\mu_\varphi \;\Rightarrow\; \left[\bigcup_{\lambda>0} N(\lambda)\right]\cap\varphi^{-1}(r_0)\neq\varnothing.$$

2) Якщо $r_0\in\operatorname{supp}\mu_\varphi$, то $\sup\limits_{x\in\varphi^{-1}(r_0)}\mu^1(x)=\sup\limits_{x\in\varphi^{-1}(r_0)}\mu_C(x)$.

3) Функція $\mu_\varphi(r)$ монотонно спадає на множині $\operatorname{supp}\mu_\varphi$.

Отже, функція $\mu_\varphi(r)$ визначена так, що її значення для фіксованого числа $r\in R^1$ є максимально можливим ступенем належності деякої альтернативи x до множини $\mu_C(x)$, де r – значення, якого досягає функція $\varphi(x)$ на цій множині.

З огляду на третю властивість, функція $\mu_\varphi(r)$ є монотонно спадаючою на множині $\operatorname{supp}\mu_\varphi$. Тобто на універсальній множині X немає таких альтернатив, для яких би були справедливими одночасно наступні нерівності: $\mu_C(x)>\mu_\varphi(x)>0$ і $\varphi(x)>r$, отже, не існує такої альтернативи $x\in X$, яка мала би більший, ніж $\mu_\varphi(r)$ ступінь належності $\mu_C(x)$ і забезпечувала би більше, ніж r значення цільової функції $\varphi(x)$, яку потрібно максимізувати.

В ситуації коли нечіткий розв'язок є неприпустимим для ОПР та необхідно вибрати єдину альтернативу $x\in X$, то такий вибір повинен бути пов'язаний не лише зі ступенем її належності до нечіткої множини $\mu_C(x)$, але й зі значенням функції $\varphi(x)$. Спираючись на монотонність функції належності, яка показана у третій властивості, можна затвердити, що чим більшим буде значення r_0, тим відповідно меншим буде значення $\mu_C(x)$ ступеня належності альтернативи x, при якій досягається це значення. Отже, зволікаючи на це, ОПР має звернути увагу на нечітке максимальне значення $\mu_{\varphi}(r)$ функції $\varphi(x)$ і обрати пару $(r_0, \mu_{\varphi}(r_0))$, що відповідатиме її прагненню досягти найбільшого значення r_0 функції $\varphi(x)$ при одночасно найвищому ступені належності цього значення до множини $\mu_{\varphi}(r)$. Після того, як така пари була отримана, доцільно зосередитися на альтернативі $x_0 \in \varphi^{-1}(r_0)$, що має найбільшу належність до множини $\mu_C(x)$ (або ж альтернативі, що є найближчою до x).

Однак, цей підхід не позбавлений недоліків, а саме:

1) Цей розв'язок не достатньо чітко підкреслює потребу у знаходженні компромісу між значеннями ступеня належності обраної альтернативи до множини допустимих розв'язків та між значеннями цільової функції.
2) Також цей розв'язок є достатньо непростим з точки зору обчислення. Це можна продемонструвати, якщо припустити, що функція належності є неперервною. В такому випадку, через нескінченну кількість множин рівня, застосування цього методу призведе до отримання нескінченної кількості задач. Однак на практиці задля успішного пошуку розв'язку достатньо буде розглянути лише заздалегідь визначену експертами або ОПР множину задач для множин рівня, яка буде скінченною.

Другий підхід.

В основу другого типу розв'язку вкладається знаходження множини ефективних альтернатив, при виборі найкращої альтернативи ОПР буде прагнути отримати найбільші значення цільової функції, а також найбільші значення функції належності нечіткої множини альтернати. Тому при знаходженні та визначенні розв'язку будуть враховуватись лише альтернативи, які називаються ефективними за Парето (як в задачах багатокритеріальної оптимізації.

Альтернатива $x_0 \in X$ ефективна по двом функціям $\varphi(x)$ та $\mu_C(x)$, якщо для деякої іншої альтернативи x' з тієї ж множини альтернатив X з наступних нерівностей: $\varphi(x') \geq \varphi(x_0)$ та $\mu_C(x') \geq \mu_C(x_0)$, випливають та є справедливими наступні рівності: $\varphi(x') = \varphi(x_0)$ та $\mu_C(x') = \mu_C(x_0)$. Іншими словами, припустивши, що x_0 є ефективною альтернативою для обох функцій $\varphi(x)$ та $\mu_C(x)$ на множині альтернатив X, можна стверджувати, що при виборі якоїсь іншої альтернативи не можна збільшити значення однієї функції, не зменшивши значення другої.

При умові, якщо в задачі прийняття рішень наявні декілька критеріїв, множина ефективних альтернатив буде являти собою набір запропонованих варіантів раціонального вибору, що здійснюється ОПР. Таким чином, нехай P буде множиною всіх альтернатив, які є ефективними для функцій $\varphi(x)$ та $\mu_C(x)$, та застосовуються в контексті задачі НМП.

Отже, розв'язок задачі НМП – це нечітка множина, яка має таку функцію належності:

$$\mu^2(x) = \begin{cases} \mu_C(x), & \text{коли } x \in P, \\ 0, & \text{у всіх інших випадках.} \end{cases}$$

Тут верхній індекс «2» показує, що це розв'язок другого типу.

Також варто зазначити, що в цьому типі визначення розв'язку задачі НМП в основі стоїть припущення, що ОПР під час вибору оптимального рішення має розпоряджатися тільки Парето оптимальними альтернативами, тобто такими, для яких одночасно отримуються найкращі значення функцій $\varphi(x)$ та $\mu_C(x)$.

Отже, значення функції $\varphi(x)$ в нечіткій формі, яке відповідає розв'язку другого типу, має наступний вигляд:

$$\mu_\varphi^2(r) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(r)} \mu^2(x),\ r \in R^1.$$

Еквівалентність розв'язків, отриманих за першим і другим підходом.

Встановимо взаємозв'язок між розв'язками, отриманими за двома відходами.

Теорема 4. [2] Якщо множина X компактна, функція $\varphi(x)$ неперервна, а функція $\mu_C(x)$ напівнеперервна на множині X, то для кожного значення $r \in R^1$ виконується така рівність:

$$\mu_\varphi^1(r) = \mu_\varphi^2(r).$$

За означенням розв'язку другого типу його реалізацію можна звести до знаходження множини найкращих альтренатив функцій $\varphi(x)$ та $\mu_C(x)$. Проте, якщо розглядати цю множину в загальному випадку, вона включатиме в себе безмежну кількість елементів, тому, аналогічно з варіантом пошуку розв'язку першого типу, побудова цієї множини представляє собою достатньо складне завдання. Але на практиці, при отриманні розв'язку другого типу для конкретної задачі достатнім буде визначити скінченний набір найкращих альтернатив, які будуть обрані з множини P. Саме для пошуку вищезгаданих альтернатив можна скористатися такою властивістю.

Припустимо, що існують два числа ν_1 та ν_2, такі, що: $\nu_1 > 0$, $\nu_2 > 0$, $\nu_1 + \nu_2 = 1$, та для яких альтернатива x_0 призводить до набуття на універсальній множині альтернатив X максимуму функції лінійної згортки $F(x_0) = \nu_1\varphi(x_0) + \nu_2\mu_C(x_0)$. В такому випадку обрана альтернатива буде ефективною для обох цільових функцій $\varphi(x)$ та $\mu_C(x)$.

Отже, можна побачити, що надаючи різні додатні значення коефіцієнтам ваги ν_1 і ν_2 функцій $\varphi(x)$ та $\mu_C(x)$ і максимізуючи таким чином відповідну функцію $F(x)$, з'являється змога обрати потрібний ОПР в контексті даної задачі набір найкращих альтернатив будь-якого розміру. Вони разом із відповідними їм значеннями функцій $\varphi(x)$ та $\mu_C(x)$, що були отримані при розв’язанні задачі, віддаються ОПР, яка робить вже фінальний вибір щодо розв’язку задачі, ґрунтуючись на своїх суб'єктивних поняттях (або використовуючи інформацію, що не була врахована в контексті даної математичної моделі) про відповідну значущість значень функцій $\varphi(x)$ та $\mu_C(x)$.

4. ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ПРИ НЕЧІТКОМУ ВІДНОШЕННІ ПЕРЕВАГИ НА МНОЖИНІ АЛЬТЕРНАТИВ

Під час розв'язання на практиці реальної проблеми основною метою постає ухвалення оптимального рішення. В такому випадку спочатку треба визначити множину усіх альтернатив, що є допустимими в контексті даної задачі, та, зволікаючи на вигляд отриманої інформації, потрібно описати вищезазначену множину з допустимою в контексті ситуації мірою чіткості.

Припустимо, що нам дана універсальна множина альтернатив X та нечіткий опис множини допустимих альтернатив $\mu_C(x)$, де $x \in X$, що є підмножиною X. В даному випадку саме значення функції $\mu_C(x)$ описує, наскільки альтернативи з універсальної множини X будуть допустимими. При цьому, якщо не існує будь-якої додаткової інформації про альтернативу, яка розглядається, окрім функції $\mu_C(x)$, можна зазначити, що раціонально буде обрати деяку альтернативу з числа описуваних наступною множиною:

$$X^D = \left\{ x \middle| x \in X, \mu_C(x) = \sup_{y \in X} \mu_C(y) \right\}.$$

Таким чином, раціональним вибором буде довільна альтернатива з числа тих, які мають найвищий ступінь прийнятності, так як не має ніякого сенсу обирати інші, які будуть вочевидь гіршими. При додаванні до моделі, що розглядається, додаткової інформації, раціональний вибір може змінитися згідно з новими даними, і тоді вибір альтернатив може здійснюватися з будь-якої підмножини в X^D або навіть з тих альтернатив, що знаходяться поза цією множиною. Також може статися так, що додана інформація може слугувати основою для знаходження однієї альтернативи, яка буде найкращою з усіх.

Також, варто зазначити, що різними способами можуть бути представлені і ті дані, що відображають реальний процес або ситуацію, та підкреслюють перевагу між всіма парами альтернативами. Бувають випадки, коли ці дані наводяться в якості числових нерівностей чи функцій корисності, які описують різні ймовірнісні сценарії, та не завжди можуть бути можливими способами опису. Більш універсальним може бути випадок, коли інформацію надають в якості відношень переваги, тобто у вигляді бінарних відношень на множині альтернатив, але вони можуть бути описані недостатньо чітко для здійснення остаточного вибору. Таким чином, в деяких випадках опис переваг в якості нечітких відношень, тобто коли ці переваги проявляються лише частково, точніше відображатиме модель ситуації. Розглянемо алгоритми прийняття рішень, спираючись на приведені вище умови.

4.1 Нечітка підмножина недомінованих альтернатив

Розглянемо задачу оптимального вибору альтернатив з універсальної множини X, з нечітким відношенням переваги R, та функцією належності $\mu_R : X \times X \to [0;1]$. Якщо це відношення на множині альтернатив описано чітко, то обираємо максимальні або недоміновані альтернативи буде виступати раціональним розв'язком задачі. Застосуємо аналогічний алгоритм пошуку розв'зку задачі прийняття рішень у випадку, коли відношення переваги описано нечітко.

Отже, припустимо, що на чітко описаній множині альтернатив X задане нечітке відношення переваги μ_R. Також задане нечітке відношення строгої переваги μ_R^S. Визначимо нечітку (через нечіткість вихідного відношення переваги) підмножину недомінованих альтернатив множини (X,μ_R). За означенням відношення строгої переваги величина $\mu_R^S(y,x),\ \forall x,y \in X$ є показником того, наскільки альтернатива y домінує над x. Тобто, функція належності $\mu_R^S(y,x)$ нечіткої пімножини альтернатив x , які є строго домінованими деякою фіксованою альтернативою $y \in X$, буде визначена на множині альтернатив X .

Наприклад, візьмемо якусь альтернативу $x_0 \in X$, яка належить до цієї множини з мірою $0,2$, при фіксованій альтернативі y. Інакше кажучи, альтернатива x_0 є домінованою альтернативою y зі ступенем $0,2$, а отже, якщо взяти множину альтернатив x, які не будуть домінуватись альтернативою y, то вона буде являти собою доповнення вищезазначеної множини $\mu_R^S\left(y,x\right)$ в X. Функція належності цієї множини недомінованих альтернатив x матиме наступний вигляд:

$$1-\mu_R^S\left(y,x\right),\ x\in X. \tag{4}$$

Візьмемо, для ілюстрації, значення $\mu_R^S\left(y,x\right)=0,2$. Тоді за формулою (4), альтернатива x *не* буде домінуватись альтернативою y зі ступенем $0,8$. Також, можна побачити, що для знаходження підмножини альтернатив, недомінованих жодною іншою альтернативою з універсальної множини X, треба обчислити перетин заданих виразом (4) нечітких множин для всіх альтернатив $y\in X$.

Отже, **нечітка підмножина недомінованих альтернатив** $\mu_R^{н.д.}\left(x\right)$, де альтернатива $x\in X$, а μ_R це визначене на множині X відношення переваги – це перетин нечітких множин, які мають представлення, задане виразом (4), справедливий для усіх альтернатив $y\in X$, тобто описується наступною формулою:

$$\mu_R^{н.д.}\left(x\right)=\inf_{y\in X}\left[1-\mu_R^S\left(y,x\right)\right],\ x\in X$$

або

$$\mu_R^{н.д.}\left(x\right)=1-\sup_{y\in X}\mu_R^S\left(y,x\right),\ x\in X.$$

Також зазначимо, що значення функції $\mu_R^{н.д.}\left(x\right)$ описує, з якою мірою обрана альтернатива $x\in X$ не буде домінована будь-якою іншою альтернативою із тієї ж множини X. Зауважимо, що якщо $\mu_R^{н.д.}\left(x_0\right)=\alpha$ для деякої фіксованої альтернативи $x_0\in X$, то ця фіксована альтернатива буде домінована деякими іншими альтернативами зі ступенем, який менший або дорівнює значенню $(1-\alpha)$. Отже, враховуючи це, буде справедливою така рівність:

$$\sup_{y \in X} \mu_R^S(y, x_0) = 1 - \alpha,$$

з якої випливає:

$$\mu_R^S(y, x_0) \le 1 - \alpha, \ \forall y \in X.$$

Варто також зазначити, що нечітку множину недомінованих альтернатив також можна записати з використанням функції належності початкового нечіткого відношення переваги μ_R. Покажемо, що

$$\sup_{y \in X} \mu_R^S(y, x) = \sup_{y \in X} \left[\mu_R(y, x) - \mu_R(x, y) \right], \ \forall x \in X. \tag{5}$$

Для довільно обраної альтернативи x із множини альтернатив X позначимо:

$$Y^1(x) = \{ y | y \in X, \mu_R(y, x) > \mu_R(x, y) \},$$

$$Y^2(x) = \{ y | y \in X, \mu_R(y, x) \le \mu_R(x, y) \}. \tag{6}$$

Так як для обох введених множин виконується $Y^1(x) \bigcup Y^2(x) = X$, то можна переписати твердження (5) у виді:

$$\sup_{y \in X} \mu_R^S(y, x) = \max \left\{ \sup_{y \in Y^1(x)} \mu_R^S(y, x), \sup_{y \in Y^2(x)} \mu_R^S(y, x) \right\}, \ \forall x \in X.$$

Тепер, за визначенням μ_R^S маємо:

$$\sup_{y \in X} \mu_R^S(y, x) = \max \left\{ \sup_{y \in Y(x)} \left[\mu_R(y, x) - \mu_R(x, y) \right], 0 \right\} =$$

$$= \max\left\{ \sup_{y \in Y^1(x)} \left[\mu_R(y,x) - \mu_R(x,y) \right], \sup_{y \in Y^2(x)} \left[\mu_R(y,x) - \mu_R(x,y) \right] \right\} =$$

$$= \sup_{y \in X} \left[\mu_R(y,x) - \mu_R(x,y) \right], \ \forall x \in X .$$

Таким чином, ми отримали опис множини недомінованих альтернатив з використанням функції належності початкового нечіткого відношення переваги μ_R, чого ми і прагнули. З урахуванням (5) маємо:

$$\mu_R^{н.д.}(x) = 1 - \sup_{y \in X} \left[\mu_R(y,x) - \mu_R(x,y) \right], \ \forall x \in X .$$

Ця формула буде корисною на практиці, коли інформація виражається нечітким відношенням переваги, а метою розв’язання задачі є знаходження підмножини недомінованих альтернатив в універсальній множині X .

Вищезазначена величина $\mu_R^{н.д.}(x)$ показує міру того, наскільки альтернатива x не домінується будь-якими іншими альтернативами з множини X . Тоді при поданій нечіткій інформації раціональним вибором альтернатив для розв’язання задачі буде вибір саме тих альтернатив, що належать до нечіткої множини $\mu_R^{н.д.}(x)$ з найбільшим ступенем належності. Тобто обиратися будуть альтернативи, для яких значення функції $\mu_R^{н.д.}(x)$ буде найближчим до значення, що виражається формулою:

$$\sup_{x \in X} \mu_R^{н.д.}(x) = 1 - \inf_{x \in X} \sup_{y \in X} \left[\mu_R(y,x) - \mu_R(x,y) \right].$$

Отже, максимальні недоміновані альтернативи в множині (X, μ_R) – це ті альтернативи, функція належності $\mu_R^{н.д.}(x)$ котрих буде досягати своєї верхньої границі, тобто це альтернативи, які належать множині:

$$X_{н.д.} = \left\{ x \middle| x \in X, \mu_R^{н.д.}(x) = \sup_{z \in X} \mu_R^{н.д.}(z) \right\}.$$

Нехай на множині альтернатив X задано відношення R, та це відношення або обернене до нього, пов'язує кожні дві альтернативи з множини X, відношення R буде називатись **лінійним**.

З цього випливає, що для лінійного відношення на множині X всі альтернативи є порівняними між собою. В контексті звичайних відношень з лінійності випливає, що:

$$R \bigcup R^{-1} = X \times X,$$

де R^{-1} – це обернене до R відношення, або: $\mu_R(x, y) = 0 \Rightarrow \mu_R(y, x) = 1$.

Якщо ж говорити про нечітке відношення, то може бути виявлена тільки повна відсутність лінійності. З цього випливає, що нечітке відношення μ_R не буде лінійним тільки в тому випадку, коли для двох альтернатив $x, y \in X$ та відповідної їм функції належності заданого нечіткого відношення $\mu_R(x, y)$ буде виконуватись така рівність:

$$\mu_R(x, y) = \mu_R(y, x) = 0.$$

Нечітке відношення μ_R називається λ**-лінійним**, де $\lambda \in [0;1]$, якщо функція належності цього відношення підпорядковується наступній властивості:

$$\min\{\mu_R(x, y), \mu_R(y, x)\} > \lambda, \ \forall x, y \in X.$$

Наприклад, якщо нечіткий порядок це $0,8$-лінійне відношення, то для будь-яких двох альтернатив з універсальної множини маємо, що перша альтернатива буде не гіршою ніж друга зі ступенем, що є більшим, або рівним значенню $0,8$.

Сильно лінійне нечітке відношення – це таке нечітке відношення, чия функція належності буде підпорядковуватись наступній умові:

$$\max\{\mu_R(x, y), \mu_R(y, x)\} = 1, \ \forall x, y \in X, \tag{7}$$

або така властивість може бути визначена у такий спосіб:

$$\mu_R(x,y) \ge \mu_R(y,x) \;\Rightarrow\; \mu_R(x,y)=1,\ \forall x,y \in X\,. \tag{8}$$

Також, варто зауважити, що для випадку сильної лінійності буде справедлива умова:

$$\mu_R(x,y)=1-\mu_R^S(y,x),\ \forall x,y \in X\,,$$

де μ_R^S – це відповідне нечітке відношення строгої переваги.

За означенням нечіткого відношення строгої переваги μ_R^S та при виконанні умови (7) можна побачити, що умова (8) також виконується, тобто: $\mu_R^S(x,y)=1$ та $\mu_R^S(y,x)=0$. Із справедливості виконання умови (8) випливає наступне: $\mu_R^S(y,x)=0$ та $\mu_R(x,y)=1$, а отже наведене твердження вірне.

Сенс сильної лінійності подібний сенсу лінійності звичайного відношення, а саме: якщо альтернатива x є кращою за альтернативу y зі ступенем 1, тобто $x \succ y$, то y в свою чергу не може бути краща від x ніяким позитивним ступенем, або іншими словами $(x,y) \notin R^{-1}$. При зворотній ситуації, тобто $y \underset{1}{\succ} x$, справедливим буде, що $(x,y) \in R^{-1}$. Аналогічно, якщо ступінь буде дорівнювати якомусь параметру $\alpha \in [0;1]$ та x буде кращою за y з цим ступенем α ($x \underset{\alpha}{\succ} y$), то зворотна перевага $y \succ x$ буде виконуватись зі зворотним ступенем $(1-\alpha)$.

Сильно лінійні відношення мають такі властивості:

1) Якщо $\mu_R(x,y)=1$, то $\mu_R(y,x)=0$.
2) Відношення квазіеквівалентності R^e та відношення однаковості R^I, при умові сильно лінійного відношення, будуть збігатися.

Зауважимо, що взявши деяку пару альтернатив (x, y) з множини альтернатив X для яких виконується умова $\mu_R(x, y) \geq \mu_R(y, x)$, то за означенням сильної лінійності справедливо, що: $\mu_R(x, y) = 1$, а за означенням відношення однаковості μ_R^I маємо, що $\mu_R^I(x, y) = \mu_R(x, y)$. При умові, що $\mu_R(x, y) \leq \mu_R(y, x)$ та при тому, що відношення однаковості є симетричним, виконується наступне:

$$\mu_R^I(x, y) = \min\{\mu_R(x, y), \mu_R(y, x)\} = \mu_R^e(x, y),$$

а це демонструє виконання другої властивості на практиці.

В свою чергу, для **слабко лінійного** нечіткого відношення переваги справедливою буде наступна властивість:

$$\mu_R(x, y) = 0 \;\Rightarrow\; \mu_R(y, x) > 0,\ \forall x, y \in X .$$

4.2 Чітко недоміновані альтернативи

На практиці зустрічається такий клас задач, котрим притаманний вигляд множини недомінованих альтернатив в якості нормальної нечіткої підмножини універсальної множини альтернатив X, а для її функції належності буде справедливою властивість:

$$\sup_{x \in X} \mu_R^{н.д.}(x) = 1.$$

Цей випадок характерний тим, що всі альтернативи з множини максимальних недомінованих альтернатив $X^{н.д.}$ будуть недомінованими з мірою 1, або для них буде виконуватись наступна умова:

$$\mu_R^{н.д.}(x) = 1.$$

Також, з означення відношення строгої переваги випливає, що для будь-якої недомінованої альтернативи $x \in X^{н.д.}$ та всілякої альтернативи $y \in X$, жодна альтернатива з початкової множини X не буде домінувати над обраною альтернативою x з додатним ступенем, або: $\mu_R^S\left(y,x\right)=0$.

Спираючись на вищезазначене твердження, можна визначити, що **чітко недоміновані** альтернативи – це альтернативи, над якими жодна інша альтернатива не буде домінувати з позитивним ступенем. Множина цих альтернатив позначається як $X^{ЧНД}$ та зрозуміло, що їй притаманна наступна властивість:

$$X^{ЧНД}=\left\{x \middle| x\in X,\mu_R^{н.д.}\left(x\right)=1\right\}.$$

З цього означення та означення нечіткої підмножини недомінованих альтернатив $\mu_R^{н.д.}$ для будь-якої чітко недомінованої альтернативи $x\in X^{ЧНД}$ буде справедливою наступна рівність:

$$\sup_{y\in X}\mu_R^S\left(y,x\right)=0,$$

де μ_R^S – це нечітке відношення строгої переваги відповідне до нечітке відношення переваги μ_R.

Отже, якщо взяти дві альтернативи x_1 та x_2 з множини $X^{ЧНД}$, для них буде виконуватись наступна умова:

$$\mu_R^S\left(x_1,x_2\right)=\mu_R^S\left(x_2,x_1\right)=0,$$

з якої в свою чергу, з означення множини чітко недомінованих альтернатив, випливає еквівалентна їй рівність:

$$\mu_R\left(x_1,x_2\right)=\mu_R\left(x_2,x_1\right),$$

але при цьому

$$\mu_R^I\left(x_1,x_2\right)=\max\left\{1-\mu_R\left(x_1,x_2\right),\mu_R\left(x_1,x_2\right)\right\}\geq 0,5,$$

що свідчить про те, що дві вільно обрані чітко недоміновані альтернативи завжди будуть пов'язані одна з одною нечітким відношенням байдужості μ_R^I, ступінь якого є не меншою за $0,5$. При цьому відповідне нечітке відношення еквівалентності μ_R^e для двох будь-яких альтернатив $x_1, x_2 \in X^{ЧНД}$ визначається наступним чином:

$$\mu_R^e\left(x_1, x_2\right) = \mu_R\left(x_1, x_2\right) = \mu_R\left(x_2, x_1\right).$$

Зауважимо, що при роботі з нечіткими відношеннями переваги може статися так, що для будь-яких двох альтернатив $x_1, x_2 \in X^{ЧНД}$ буде виконуватись рівність $\mu_R^e\left(x_1, x_2\right) = 0$, що свідчить про те, що обрані альтернативи не є еквівалентними між собою з жодною позитивною мірою. До цього ж вони також не будуть порівняними між собою, тобто $\mu_R\left(x_1, x_2\right) = 0$. Але цей аспект не буде стосуватись лінійних відношень.

5. ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ЗА ІСНУВАННЯ КІЛЬКОХ ВІДНОШЕНЬ ПЕРЕВАГИ НА МНОЖИНІ АЛЬТЕРНАТИВ

Нехай потрібно розв’язати задачу, для якої задано універсальну множину альтернатив X, для всіх альтернатив якої будуть характерні декілька ознак, що пронумеровані як $j=1,2,\ldots,m$. Також задані відповідні відношення переваги R_j, $j=1,2,\ldots,m$, що розкривають інформацію щодо попарного порівняння всіх альтернатив між собою. Отже, за наявності вищезазначених m відношень переваги на початковій множині альтернатив X, метою задачі буде побудова оптимального вибору альтернатив, що належать множині $(X, R_1, R_2, \ldots, R_m)$.

Якщо відношення будуть описуватись числовими функціями корисності $f_j : X \to R^1$, $j=1,2,\ldots,m$ (тут R^1 – це множина дійсних чисел), то саме ці функції будуть вважатись числовими оцінками альтернатив. Тобто для альтернативи $x \in X$ з ознакою j, $j=1,2,\ldots,m$ числовою оцінкою буде значення відповідної функції $f_j(x)$. Отже, раціонально обрати альтернативу x_0, що має максимальні оцінки для кожної з усіх поданих ознак, тобто якій притаманна наступна властивість:

$$f_j(y) \ge f_j(x_0) \;\Rightarrow\; f_j(y) = f_j(x_0),\; j=1,2,\ldots,m. \tag{9}$$

Ці альтернативи, що задовольняють дану умову, називаються **ефективними альтернативами** з точки зору багатокритеріальній оптимізації. При цьому кожна з функцій $f_j(x)$, $j=1,2,\ldots,m$ є виразом звичайного відношення переваги на універсальній множині альтернатив X, тобто:

$$R_j = \{(x,y) \mid x, y \in X,\, f_j(x) \ge f_j(y)\}.$$

Розглянемо множину (X, Q_1), де відношення Q_1 визначається як перетин всіх відношень переваги R_j, тобто: $Q_1 = \bigcap_{j=1}^{m} R_j$, та покажемо, що множина всіх ефективних (чи недомінованих) альтернатив у цій множині буде співпадати з множиною недомінованих альтернатив для сукупності відповідних функцій f_j, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Нехай в множині (X, Q_1) існує недомінована альтернатива x_0, тобто для неї та для будь-якої іншої альтернативи y з тієї ж множини альтернатив виконується наступна умова:

$$(y, x_0) \notin Q_1^S. \tag{10}$$

Q_1^S виступає в ній відношенням строгої переваги, відповідне до відношення Q_1, та має наступний вигляд:

$$Q_1^S = \left\{ (x, y) \middle| x, y \in X,\, f_j(x) \geq f_j(y),\, j = 1, 2, \ldots, m;\ \exists j_0 : f_{j_0}(x) > f_{j_0}(y) \right\}.$$

З огляду на це та на умову (10) можна затвердити, що властивість (9) все ж таки виконується, а звідси x_0 буде ефективною (недомінованою) альтернативою для функції $f_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Справедливим є і зворотнє твердження, тобто якщо будь-яка альтернатива в контексті сукупності функцій $f_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, m$ є ефективною, вона також є і недомінованою в множині (X, Q_1).

Таким чином можна побачити, що пошук множини ефективних альтернатив у множині (X, Q_1) є заміною знаходження цієї «ефективної» множини за допомогою набору відношень переваги R_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, при тому, що Q_1 визначається як перетин цих відношень переваги. Цей перетин можна записати так:

$$\mu_{Q_1}(x, y) = \min\left\{ \mu_1(x, y), \ldots, \mu_m(x, y) \right\},$$

де $\mu_j\left(x,y\right)$ виступає функцією належності відношення переваги $R_j,\ j=1,2,\ldots,m$ та визначається як $\mu_j\left(x,y\right)=\begin{cases}1, \text{ якщо } \left(x,y\right)\in R_j,\\ 0, \text{ якщо } \left(x,y\right)\notin R_j.\end{cases}$

Отже, функція належності $\mu_{Q_1}\left(x,y\right)$ в даному випадку виступає аналогом згортки критеріїв $f_j : F\left(x\right)=\min\limits_{j=1,2,\ldots,m}\lambda_j f_j$, що має місце у випадку звичайних багатокритеріальних задач прийняття рішень, де λ_j – це вагові коефіцієнти, що показують відносну важливість відповідних критеріїв. У випадку, коли $\mu_{Q_1}\left(x,y\right)$ розглядається як згортка критеріїв, всі коефіцієнти $\lambda_j,\ j=1,2,\ldots,m$ дорівнюють одиниці, що свідчить про однакову міру важливості врахування поданих відношень при виборі ефективних альтернатив. Однак на практиці можуть виникати ситуації, коли ці відношення відрізняються між собою за важливістю ознак, які вони представляють та за якими будуть зіставлятися альтернативи. В таких випадках в згортці $\mu_{Q_1}\left(x,y\right)$ використовують різні за значенням ваги λ_j. При цьому треба звертати увагу на нечіткість початкових відношень, а отже у вищезазначеному означенні функції належності $\mu_j\left(x,y\right)$ числа 0 та 1 виступають крайніми точками одиничного відрізку можливих значень ступеня належності.

Таким чином, більш універсальним та приближеним до реальних практичних задач визначенням функції належності нечіткого відношення переваги $\mu_{Q_1}\left(x,y\right)$ буде наступний її вигляд:

$$\mu_{Q_1}\left(x,y\right)=\min\left\{\lambda_1\mu_1\left(x,y\right),\ldots,\lambda_m\mu_m\left(x,y\right)\right\},$$

де λ_j – це коефіцієнти згортки початкових відношень $R_j,\ j=1,2,\ldots,m$, для яких справедлива така умова: $\sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_j=1$. Але, попри всі його позитивні сторони, таке відношення не буде рефлексивним, а отже не буде належати до відношень переваги. З цього випливає незручність застосування отриманої згортки при необхідності врахування важливості початкових відношень.

З огляду на вищезазначену проблему варто розглянути іншу форму запису згортки початкових відношень:

$$\mu_{Q_2}(x,y)=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\mu_j(x,y). \tag{11}$$

Це нечітке відношення є рефлексивним, тому що воно отримане після згортки звичайних відношень R_j (6), де рефлексивними були початкові відношення.

При умові однакової важливості всіх початкових відношень у згортці $\mu_{Q_2}(x,y)$, всі вагові коефіцієнти λ_j, $j=1,2,\ldots,m$ будуть дорівнювати значенню $\frac{1}{m}$. Тому підмножина недомінованих на множині (X,Q_2) альтернатив матиме наступний вигляд:

$$\mu_{Q_2}^{н.д.}(x)=1-\frac{1}{m}\sup_{y\in X}\sum_{j=1}^{m}\left[\mu_j(y,x)-\mu_j(x,y)\right],\ \forall x\in X. \tag{12}$$

Для множин (X,μ_{Q_1}) та (X,μ_{Q_2}) визначимо відповідні підмножини чітко недомінованих альтернатив: $X_1^{ЧНД}$ та $X_2^{ЧНД}$. Покажемо, що для них є справедливою наступна умова: $X_2^{ЧНД}\subset X_1^{ЧНД}$. Для цього спершу оберемо альтернативу $x_0\in X_2^{ЧНД}$. За визначенням чітко недомінованої альтертаниви з урахуванням (12) маємо, що:

$$\sup_{y\in X}\sum_{j=1}^{m}\left[\mu_j(y,x_0)-\mu_j(x_0,y)\right]=0,$$

тобто:

$$\sum_{j=1}^{m}\left[\mu_j\left(y,x_0\right)-\mu_j\left(x_0,y\right)\right]\leq 0,\ \forall y\in X. \tag{13}$$

Нехай виконується умова $x_0 \notin X_1^{ЧНД}$. В такому випадку, беручи до уваги властивість (9) та означення функції належності відношення переваги $\mu_j\left(x,y\right)$, існує така альтернатива $y\in X$, що задовольняє умову $\mu_j\left(y,x_0\right)=1,\ j=1,2,\ldots,m$, а при фіксації деякого індексу j_0 справедливою буде наступна рівність: $\mu_{j_0}\left(x_0,y\right)=0$. Тому нерівність (13) не виконується для альтернативи y, а отже припущення $x_0 \notin X_1^{ЧНД}$ не є вірним, з чого випливає $X_2^{ЧНД}\subset X_1^{ЧНД}$, що і треба було довести.

Зауважимо, що хоча $X_2^{ЧНД}$ не збігається з множиною $X_1^{ЧНД}$, тобто не містить у собі всілякі ефективні альтернативи стосовно функцій $f_j,\ j=1,2,\ldots,m,$ але кожна ефективна альтернатива $x\in X_1^{ЧНД}$ належить множині $\mu_{Q_2}^{н.д.}$ із додатним ступенем належності, або справедлива наступна умова: $X_1^{ЧНД}\subseteq \operatorname{supp}\mu_{Q_2}^{н.д.}$. Це можна продемонструвати, якщо взяти таку альтернативу $y\in X$, що для деякої іншої альтернативи $x\in X$ буде справедливою умова $\mu_{Q_2}^{н.д.}\left(x\right)=0$, та з урахуванням означення (12) виконується:

$$\mu_j\left(y,x\right)-\mu_j\left(x,y\right)=1\ \Rightarrow\ \mu_j\left(y,x\right)=1\ \wedge\ \mu_j\left(x,y\right)=0,\ j=1,2,\ldots,m.$$

Тобто, це показує, що подана альтернатива $y\in X$ буде домінувати над будь-якою альтернативою $x\in X$, звідки випливає, що $f_j\left(y\right)>f_j\left(x\right),\ j=1,2,\ldots,m$. Це свідчить про те, що альтернатива x не є ефективною для набору функцій $f_j,\ j=1,2,\ldots,m$.

Важливою властивістю функції $\mu_{Q_2}^{н.д.}$ є впорядкування альтернатив в залежності від ступеня їх недомінованості, або ефективності. Наприклад, якщо є дві альтернативи $x, y \in X$ і для них справедливі наступні значення функції $\mu_{Q_2}^{н.д.}$:

$$\mu_{Q_2}^{н.д.}(x) = 3/4 \text{ та } \mu_{Q_2}^{н.д.}(y) = 1/2,$$

то можна сказати, що альтернатива x є більш ефективною за альтернативу y та на практиці не можна буде замінити x на y, тому що x має кращі показники за всіма, або більшістю критеріїв.

Отже, якщо взяти перетин множин $X_1^{ЧНД}$ та $\mu_{Q_2}^{н.д.}$, можна отримати впорядкування множини ефективних альтернатив за їх ступенем недомінованості, на основі якого можна буде обрати найкращу серед альтернатив.

Таким чином, задля пошуку розв'язку задачі прийняття рішень, на множині функцій можна застосувати згортку початкових звичайних відношень (11). Це звузить клас раціональних виборів для розв'язку, тому що буде надана додаткова інформація про ступінь недомінованості ефективних альтернатив відносно кожної з них. Тобто буде отримана така множина:

$$X^{ЧНД} = \left\{ x \middle| x \in X, \mu_{Q_2}^{н.д.}(x) = \sup_{x' \in X_2^{н.д.}} \mu_{Q_2}^{н.д.}(x') \right\}.$$

Якщо розглядати більш загальний варіант задачі прийняття рішень, де на універсальній множині альтернатив подані нечіткі відношення переваги $R_j,\ j = 1, 2, \ldots, m$ та відповідні їм коефіцієнти відносної ваги $\lambda_j,\ j = 1, 2, \ldots, m$, то розглянута вище ситуація буде справедливою і для такого випадку.

Сформулюємо алгоритм прийняття рішень для задачі, де задано декілька відношень переваги на універсальній множині альтернатив:

1) Спочатку будується перетин всіх початкових відношень, тобто нечітке відношення Q_1, за наступною формулою:

$$\mu_{Q_1}(x,y) = \min\{\lambda_1\mu_1(x,y),\ldots,\lambda_m\mu_m(x,y)\}.$$

Далі треба визначити відповідне відношення строгої переваги:

$$\mu_{Q_1}^S(x,y) = \begin{cases} \mu_{Q_1}(x,y) - \mu_{Q_1}(y,x), & \text{якщо } \mu_{Q_1}(x,y) > \mu_{Q_1}(y,x), \\ 0, & \text{якщо } \mu_{Q_1}(x,y) \le \mu_{Q_1}(y,x). \end{cases}$$

Тепер у множині (X, μ_{Q_1}) треба визначити нечітку підмножину недомінованих, чи ефективних, альтернатив:

$$\mu_{Q_1}^{н.д.}(x) = 1 - \sup_{y \in X}\left[\mu_{Q_1}^S(y,x) - \mu_{Q_1}^S(x,y)\right].$$

2) Наступним кроком буде створення нечіткого відношення Q_2, тобто згортки відношень типу (11):

$$\mu_{Q_2}(x,y) = \sum_{j=1}^{m}\lambda_j\mu_j(x,y).$$

Далі також визначається відповідне вже до Q_2 відношення строгої переваги:

$$\mu_{Q_2}^S(x,y) = \begin{cases} \mu_{Q_2}(x,y) - \mu_{Q_2}(y,x), & \text{якщо } \mu_{Q_2}(x,y) > \mu_{Q_2}(y,x), \\ 0, & \text{якщо } \mu_{Q_2}(x,y) \le \mu_{Q_2}(y,x). \end{cases}$$

А також у множині (X, μ_{Q_2}) треба аналогічно визначити нечітку підмножину ефективних альтернатив:

$$\mu_{Q_2}^{н.д.}(x) = 1 - \sup_{y \in X}\left[\mu_{Q_2}^S(y,x) - \mu_{Q_2}^S(x,y)\right].$$

3) Після цього знаходиться перетин вищезнайдених множин $\mu_{Q_1}^{н.д.}$ та $\mu_{Q_2}^{н.д.}$, при цьому використовується таке правило:

$$\mu^{н.д.}(x) = \min\left\{\mu_{Q_1}^{н.д.}(x), \mu_{Q_2}^{н.д.}(x)\right\}.$$

4) Наприкінці визначається оптимальний вибір альтернатив з множини:

$$X^{н.д.} = \left\{x \middle| x \in X, \mu^{н.д.}(x) = \sup_{x' \in X}\mu^{н.д.}(x')\right\}.$$

Зауважимо, що залежно від типу та умови задачі, раціональним вибором можуть слугувати не тільки альтернативи з «недомінованої» множини $X^{н.д.}$, але й ті, що належать множині недомінованих альтернатив $\mu^{н.д.}$ з меншим ступенем, аніж зазначений. Це можливо, якщо в тому чи іншому сенсі слабко, чи не дуже сильно, доміновані альтернативи також можуть підпадати під допустимі умови оптимального вибору задачі.

6. ПРИКЛАДИ ПРАКТИЧНИХ ЗАДАЧ

Розглянемо декілька прикладів використання вищеописаних методів розв’язання задач прийняття рішень на основі теорії нечітких множин.

Задача 1

Транспортна компанія-дистриб’ютор, яка також має ліцензію на реалізацію лікарських засобів та медичних виробів, закуповує ліки одного й того ж виду у кількох постачальників, займається їх транспортуванням і подальшою реалізацією аптекам. Припустимо, що у співробітництві беруть участь M постачальників і N аптек. Відомі обмеження постачання кожного постачальника та потреби кожної аптеки, але ці дані описані нечітко, з певною невизначеністю в обсягах поставок і попиту.

Також дистриб’ютору відома наступна інформація:

- $t_i,\ i=1,2,\ldots,M$ – це ціна, за якою можна придбати одиницю лікарського засобу в кожного з M постачальників;
- $s_j,\ j=1,2,\ldots,N$ – це ціна, за якою можна продати одиницю лікарського засобу в кожній з N аптек;
- $c_{ij},\ i=1,2,\ldots,M;\ j=1,2,\ldots,N$ – це грошові витрати при транспортуванні медичних засобів від *i*-го постачальника *j*-тій аптеці;
- $p_i,\ i=1,2,\ldots,M$ – це обов’язковий обсяг лікарських засобів, що закуповується у кожного постачальника, згідно з контрактом, тобто пропозиція;
- $q_j,\ j=1,2,\ldots,N$ – це обов’язковий обсяг лікарських засобів, що реалізуються у кожній аптеці, згідно з контрактом, тобто попит;
- $k_i,\ i=1,2,\ldots,M$ – це ціна, за якою можна придбати одиницю лікарського засобу поза встановленим контрактом у кожного з M постачальників;
- $r_j,\ j=1,2,\ldots,N$ – це ціна, за якою можна продати одиницю лікарського засобу поза встановленим контрактом у кожній з N аптек.

Метою задачі буде мінімізувати витрати на транспортування лікарських препаратів та максимізувати загальний прибуток транспортної компанії-дистриб’ютора. Також, з огляду на вищезазначену умову, треба визначити обсяг продукції, що перевозиться від кожного постачальника кожній аптеці, позначимо його як x_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, M;\ j = 1, 2, \ldots, N$.

Спочатку побудуємо модель класичної транспортної задачі, спираючись на умови, що були описані вище та на умову $\sum_{i=1}^{M} p_i = \sum_{j=1}^{N} q_j$, що свідчить про те, що тип цієї транспортної задачі є закритим. Сумарні витрати на перевезення лікарських засобів від кожного постачальника кожній аптеці буде виражатись так: $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} c_{ij} \cdot x_{ij}$. Обмеження моделі стосуються:

- обов’язкового обсягу лікарських препаратів, що закуповується у кожного постачальника: $\sum_{j=1}^{N} x_{ij} = p_i,\ i = 1, 2, \ldots, M,\ x_{ij} \ge 0$.
- обов’язкового обсягу лікарських препаратів, що продається кожній аптеці: $\sum_{i=1}^{M} x_{ij} = q_j,\ j = 1, 2, \ldots, N,\ x_{ij} \ge 0$.

Далі визначимо:

- сумарна вартість закупки медичних засобів у всіх постачальників: $\sum_{i=1}^{M} t_i \cdot \sum_{j=1}^{N} x_{ij}$.
- сумарний дохід від продажу всіх медичних засобів всім аптекам: $\sum_{j=1}^{N} s_j \cdot \sum_{i=1}^{M} x_{ij}$.

Отже, можна побачити, що функцією максимізації є функція, що виражає загальний прибуток дистриб’ютора від реалізації лікарських засобів:

$$\max\left\{\sum_{j=1}^{N} s_j \cdot \sum_{i=1}^{M} x_{ij} - \sum_{i=1}^{M} t_i \cdot \sum_{j=1}^{N} x_{ij} - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} c_{ij} \cdot x_{ij}\right\}.$$

Зауважимо, що в ситуації незакритої транспортної задачі, тобто коли $\sum_{i=1}^{M} p_i \neq \sum_{j=1}^{N} q_j$, можна розглядати або випадок профіциту товару, тобто коли $\sum_{i=1}^{M} p_i > \sum_{j=1}^{N} q_j$, або випадок дефіциту товарів: $\sum_{i=1}^{M} p_i < \sum_{j=1}^{N} q_j$.

При побудові цієї математичної моделі не були застосовані позаконтрактні товари. Їх обсяг, що закуповується у кожного постачальника і транспортується кожній аптеці позначимо наступним чином: $y_{ij},\ i = 1, 2, \ldots, M;\ j = 1, 2, \ldots, N$. Тоді сумарна кількість лікарських засобів, доставлена від *i*-го постачальника *j*-тій аптеці буде виражатись як $x_{ij} + y_{ij}$, а загальна вартість закупки медичних засобів за контрактом і поза ним у всіх постачальників буде мати наступний вигляд:

$$\sum_{i=1}^{M} t_i \cdot \sum_{j=1}^{N} x_{ij} + \sum_{i=1}^{M} k_i \cdot \sum_{j=1}^{N} y_{ij}.$$

Відповідно загальний дохід від продажу всіх медичних засобів всім аптекам – це:

$$\sum_{j=1}^{N} s_j \cdot \sum_{i=1}^{M} x_{ij} + \sum_{j=1}^{N} r_j \cdot \sum_{i=1}^{M} y_{ij}.$$

Тепер можна переписати функцію максимізації з урахуванням введених умов:

$$\max\left\{\sum_{j=1}^{N} s_j \cdot \sum_{i=1}^{M} x_{ij} + \sum_{j=1}^{N} r_j \cdot \sum_{i=1}^{M} y_{ij} - \sum_{i=1}^{M} t_i \cdot \sum_{j=1}^{N} x_{ij} - \sum_{i=1}^{M} k_i \cdot \sum_{j=1}^{N} y_{ij}. - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} c_{ij} \cdot x_{ij}\right\}.$$

Так як в умові задачі зазначено, що обмеження постачання та потреби описані нечітко, змінимо їх відповідно. Нехай запаси кожного постачальника p_i та попит кожної аптеки q_j будуть представлені нечіткими множинами, тобто ці значення лежать у деяких довірчих інтервалах: $-\xi_i \le p_i \le +\xi_i$ та $-\delta_j \le q_j \le +\delta_j$. Іншими словами, припустимо, що значення обсягу ліків, що закупаються, може лежати від мінімального до максимального можливого значення на відрізку $\left[-\xi_i;+\xi_i\right]$. Аналогічно, значення обсягу попиту може знаходитись в межах відповідного відрізка $\left[-\delta_j;+\delta_j\right]$. Таким чином попередні обмеження приймають нечіткий вигляд і можуть бути записані наступним чином:

- обмеження на обсяг пропозиції: $\sum_{j=1}^{N} x_{ij} \in \left[p_i - \xi_i; p_i + \xi_i\right],\ i = 1, 2, \ldots, M$;
- обмеження на обсяг попиту: $\sum_{i=1}^{M} x_{ij} \in \left[q_j - \delta_j; q_j + \delta_j\right],\ j = 1, 2, \ldots, N$.

Тобто можна ввести функції належності, які будуть відображати виконання цих обмежень. Позначимо їх як $\mu_{\left[p_i-\xi_i;p_i+\xi_i\right]}\left(\sum_{j=1}^{N} x_{ij}\right)$ та $\mu_{\left[q_j-\delta_j;q_j+\delta_j\right]}\left(\sum_{i=1}^{M} x_{ij}\right)$ відповідно.

Їх сенс можна означити наступними виразами для обсягу пропозиції:

- якщо $\mu_{\left[p_i-\xi_i;p_i+\xi_i\right]}\left(\sum_{j=1}^{N} x_{ij}\right) = 0$ то $\sum_{j=1}^{N} x_{ij} \notin \left[p_i - \xi_i; p_i + \xi_i\right],\ i = 1, 2, \ldots, M$;
- якщо $\mu_{\left[p_i-\xi_i;p_i+\xi_i\right]}\left(\sum_{j=1}^{N} x_{ij}\right) = 1$ то $\sum_{j=1}^{N} x_{ij} \in \left[p_i - \xi_i; p_i + \xi_i\right],\ i = 1, 2, \ldots, M$;
- якщо $\mu_{\left[p_i-\xi_i;p_i+\xi_i\right]}\left(\sum_{j=1}^{N} x_{ij}\right) \in (0;1)$ то відрізок $\left[p_i - \xi_i; p_i + \xi_i\right]$ було скорочено

  і не всі суми $\sum_{j=1}^{N} x_{ij}$ потрапляють у нього.

Аналогічно розглядається варіант з обмеженням на обсяг попиту.

Щодо методу розв'язку задачі, він буде полягати у зведенні цієї задачі до чіткої постановки, тобто у позбавленні від нечіткості, як це будо описано у [підрозділі 2.2]. Наприклад, можна скористатися такими методами:

1) Можна знайти середні значення на відрізках обсягу лікарських засобів, що закуповуються, тобто $\left[-\xi_i;+\xi_i\right]$ та обсягу попиту в аптеках $\left[-\delta_j;+\delta_j\right]$. Це призведе до повернення задачі до звичайної транспортної задачі, де усі умови будуть чіткими.
2) Також можна скорочувати відрізки обсягів до тих пір, поки всі відповідні суми $\sum_{j=1}^{N} x_{ij}$ та $\sum_{i=1}^{M} x_{ij}$ не будуть належати їм, тобто їх функція належності буде дорівнювати 1, що також зводить задачу до аналогічної у чітких множинах.

Задача 2

Біотехнологічна лабораторія на кількох стелажах вирощує мікроклони різних рослин. Кожний вид рослин вимагає певної кількості світла в одиницю часу (люксів) ($L_1, L_2, \ldots, L_m$). Для кожного стелажа потрібно встановити деякий єдиний тип освітлення, з урахуванням його площі та коефіцієнту поглинання світла. Різні типи джерел характеризуються різними потужностями освітлювальних елементів, що буде впливати на вартість їх використання. Тобто критерієм вибору джерела світла для кожного стелажа постає мінімізація вартості їх використання.

Припустимо, що у лабораторії знаходяться M стелажів площею $s_1, s_2, \ldots, s_m$ (м^2) та на вибір маємо N різних типів освітлення. Потреби в кількості світла в люксах для кожного стелажу позначимо через $L_1, L_2, \ldots, L_m$. Також відомі потужність кожного джерела світла $W_1, W_2, \ldots, W_n$ (Вт) та світлова віддача $e_1, e_2, \ldots, e_n$ (Лм/Вт), добуток яких буде визначати величину світлового потоку для кожного джерела світла: $e_j \cdot W_j$, $j = 1, 2, \ldots, N$ (Лм).

Позначимо через x_{ij}, $i=1,2,\ldots,M$, $j=1,2,\ldots,N$ закріплення *j*-го джерела світла за *i*-м стелажем, причому $x_{ij}=1$, якщо тип освітлення j встановлюється на стелажі номер i, та $x_{ij}=0$, якщо не встановлюється, отже справедливий такий вираз: $0\le x_{ij}\le 1,\ x_{ij}\in\mathbb{Z},\ i=\overline{1,M},\ j=\overline{1,N}$.

Таким чином, кількість світла (Лк), яке потрапляє на одиницю площі *i*-го стелажа при використанні *j*-го джерела світла визначається такою формулою: $\sum_{j=1}^{N}\frac{e_j\cdot W_j}{s_j}\cdot x_{ij},\ i=1,2,...,M$. З огляду на те, що цю величину потрібно порівнювати із потребами в кількості світла для рослин, справедливими будуть такі рівняння:

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{e_j\cdot W_j}{s_j}\cdot x_{ij}=L_i,$$

де $0\le x_{ij}\le 1,\ x_{ij}\in\mathbb{Z},\ i=\overline{1,M},\ j=\overline{1,N}$.

Отже, метою задачі буде розподіл наявних джерел світла так, щоб задовольнити потреби в кількості світла для кожного стелажа, а її модель в чітких умовах буде мати такий вигляд:

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{e_j\cdot W_j}{s_j}\cdot x_{ij}=L_i,$$
$$0\le x_{ij}\le 1,\ x_{ij}\in\mathbb{Z},\ i=\overline{1,M},\ j=\overline{1,N}.$$

Нехай відома вартість використання джерела світла j на стелажі i, яку позначимо c_{ij} (грн). Тоді сумарна вартість встановленого освітлення по всій лабораторії буде виражатись такою формулою:

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}\cdot x_{ij}.$$

Таким чином, ця задача стає задачею мінімізації сумарної вартості встановленого освітлення, а її математична модель в чітких умовах буде мати такий вигляд:

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} c_{ij}\cdot x_{ij} \to \min, \tag{I}$$

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{e_j\cdot W_j}{s_j}\cdot x_{ij} = L_i, \tag{II}$$

$$0 \le x_{ij} \le 1,\ x_{ij}\in\mathbb{Z},\ i=\overline{1,M},\ j=\overline{1,N}. \tag{III}$$

Нехай додатково треба врахувати сумарні витрати електроенергії при проектування освітлення стелажів в лабораторії біотехнологій, тоді $W_j\cdot\sum_{i=1}^{M} x_{ij}$ – кількість Вт, які будуть спожиті j-м джерелом освітлення, яке буде застосовано на стелажах лабораторії, а $\sum_{j=1}^{N} W_j\cdot\sum_{i=1}^{M} x_{ij}$ – сумарні енергетичні витрати за всіма видами джерел освітлення, що може бути ще одним критерієм, яким доповнюється задача (I) – (III) :

$$\sum_{j=1}^{N} W_j\cdot\sum_{i=1}^{M} x_{ij} \to \min. \tag{IV}$$

Тепер визначимо три випадки, в котрих математична модель та розв’язок задачі будуть розглядатись в умовах нечіткості.

Коли світлова віддача кожного джерела є нечіткою величиною.

В цьому випадку значення коефіцієнтів світлової віддачі $e_1, e_2, \ldots, e_n$ будуть варіюватись в межах 75 – 117 (Лм/Вт), що буде залежати від виробника джерел освітлення. Таким чином ми отримуємо двокритеріальну задачу математичного програмування зі звичайною цільовою функцією та нечітко визначеними параметрами обмежень.

Коли потреби в кількості світла є нечіткими.

В цьому випадку значення параметрів $L_1, L_2, \ldots, L_m$ виступають нечіткими множинами, що може свідчити про те, що потреби в кількості світла варіюються в залежності від багатьох різних факторів, як наприклад вологість приміщення, кількість сонячного світла, що потрапляє до приміщення лабораторії, тощо. Тобто задача перетворюється на двокритеріальну задачу математичного програмування з нечітко визначеними значеннями обмежень.

Коли світлова віддача та потреби в кількості світла є нечіткими.

Цей випадок є комбінацією двох попередніх, тобто описує ситуацію, коли у задачі нечіткими будуть як параметри обмежень, так і їх значення.

Способи розв’язання цих видів задач були розглянуті у [підрозділі 2.2].

Задача 3

На посаду технічного директора у компанії керівництву потрібно призначити одного з трьох можливих кандидатів. Умовами відбору будуть слугувати такі критерії: вік кандидата, досвід роботи, наявність вищої освіти, лідерські якості та комунікабельні навички. Також відомо, що після співбесід кандидатів з HR командою, останні зробили рейтинг цих кандидатів. Треба обрати найкращого за всіма критеріями кандидата на посаду технічного директора.

3.A) Варіант задачі досягнення нечітко визначеної мети

В цьому варіанті побудови моделі задачі припустимо, що на посаду претендують кандидати Іваненко І., Петренко П. та Коваленко К. Тобто кількість елементів у початковій множині альтернатив X становить 3. Також з умов задачі можна побачити, що критерії вибору кандидатів виступають нечіткими обмеженнями. А в свою чергу рейтинг кандидатів від HR команди являє собою нечітку мету задачі досягнення нечітко визначеної мети. Отже, за описанням постановки такого типу задач, що було приведено у [розділі 2], будемо мати наступну математичну модель:

- універсальна множина альтернатив $X = \{x_I, x_П, x_К\}$ – це трійка кандидатів, де x_I – Іваненко І., $x_П$ – Петренко П., $x_К$ – Коваленко К. ;
- нечітка мета G_{HR} – це рейтинг, складений HR командою;
- обмеження $C_В$, $C_Д$, $C_О$, $C_Л$, $C_К$ – це критерії вибору, тобто вік кандидата, досвід роботи, наявність вищої освіти, лідерські якості та комунікабельні навички відповідно.

Отже, відповідні функції належності множин мети та обмежень можуть бути задані у таблиці 1.

Таблиця 1

Функції належності множини мети та множини обмежень

	x_I	$x_П$	$x_К$
$\mu_{G_{HR}}(x)$	0,61	0,91	0,63
$\mu_{C_В}(x)$	0,37	0,07	0,76
$\mu_{C_Д}(x)$	0,29	0,75	0,94
$\mu_{C_О}(x)$	0,73	0,95	0,81
$\mu_{C_Л}(x)$	0,39	0,97	0,59
$\mu_{C_К}(x)$	0,38	0,88	0,58

Таким чином, згідно з підходом Беллмана-Заде, функція належності нечіткого розв’язку $\mu_D(x)$ поданої задачі досягнення нечітко визначеної мети набуває значень, що представлені у таблиці 2.

Таблиця 2

Функція належності нечіткого розв’язку

	x_I	$x_П$	$x_К$
$\mu_D(x)$	0,29	0,07	0,58

Однак це все ще невизначений розв’язок, отже нам треба взяти максимальне з цих значень: $\max_{x \in X} \mu_D(x) = 0,58$, що і буде раціональним розв’язком задачі. Іншими словами, кандидат $x_К$, тобто Коваленко К., найкраще підходить на посаду технічного директора з огляду на всі вищезазначені умови.

Також для реалізації побудови моделі та розв’язання цієї задачі був написан код на мові програмування Java v.17.0.9, що знаходиться в [Додатку А].

Загальний час роботи програми дорівнює в середньому 0.017 секунд за 30 прогонів. Ці розрахунки були проведені на ноутбуці GIGABYTE AORUS 15 9KF з процесором Intel(R) Core(TM) i5-12500H 2.50 GHz та розміром оперативної пам'яті (RAM) 32,0 ГБ.

3.Б) Варіант задачі вибору за нечіткими відношеннями переваги

В цьому варіанті побудови моделі задачі буде використовуватись підхід, що базується на використанні нечітких відношень переваги. Отже, залишимо трьох кандидатів та всі критерії, однак три з них, а саме досвід роботи, лідерські якості та комунікабельні навички представимо в якості нечітких відношень переваги $R_Д$, $R_Л$, $R_К$ відповідно. Для побудови математичної моделі будемо використовувати її опис, приведений у [розділі 5], а для розв’язку ми застосуємо комбінацію алгоритму розв’язання задач вибору за нечіткими відношеннями переваги та алгоритму розв’язання задач досягнення нечітко визначеної мети, задля того, щоб включити до розв’язку всі критерії.

Отже, нехай нечіткі відношення переваги $R_Д$, $R_Л$, $R_К$ виглядають наступним чином:

$$R_Д = \begin{array}{c|ccc} & x_I & x_П & x_К \\ \hline x_I & 1 & 0,5 & 0,2 \\ x_П & 0,9 & 1 & 0,6 \\ x_К & 0,7 & 1 & 1 \end{array}, \quad R_Л = \begin{array}{c|ccc} & x_I & x_П & x_К \\ \hline x_I & 1 & 0,1 & 0,3 \\ x_П & 1 & 1 & 0,9 \\ x_К & 0,8 & 0,4 & 1 \end{array}, \quad R_К = \begin{array}{c|ccc} & x_I & x_П & x_К \\ \hline x_I & 1 & 0,4 & 0,1 \\ x_П & 0,8 & 1 & 1 \\ x_К & 0,6 & 0,9 & 1 \end{array}.$$

Зазначимо, що так як вони мають однакову значущість, коефіцієнти відносної ваги λ_i будуть дорівнювати $\frac{1}{3}$. Також не забуваємо про критерії, що залишились:

Таблиця 3

Функції належності множини мети та множини обмежень

	x_I	$x_П$	$x_К$
$\mu_{G_{HR}}(x)$	0,61	0,91	0,63
$\mu_{C_B}(x)$	0,37	0,07	0,76
$\mu_{C_O}(x)$	0,73	0,95	0,81

Спочатку розв'яжемо частину задачі, що базується на заданих відношеннях переваги.

Спершу потрібно побудувати відношення $Q_1 = \lambda_Д R_Д \cap \lambda_Л R_Л \cap \lambda_К R_К$:

$$\mu_{Q_1}(x_i, x_j) = \begin{pmatrix} 0,33 & 0,03 & 0,03 \\ 0,27 & 0,33 & 0,2 \\ 0,2 & 0,13 & 0,33 \end{pmatrix},$$

а також відповідне відношення строгої переваги:

$$\mu_{Q_1}^S(x_i, x_j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0,24 & 0 & 0,07 \\ 0,17 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тепер визначимо підмножину недомінованих альтернатив для множини $\left(X, \mu_{Q_1}\right)$:

$$\mu_{Q_1}^{н.д.}\left(x_i\right)=\frac{x_I \;\;|\;\; x_П \;\;|\;\; x_К}{0,76 \;\;|\;\; 1 \;\;|\;\; 0,93}.$$

Далі будуємо відношення $\mu_{Q_2}\left(x_i, x_j\right)=\frac{1}{3}\left(\mu_Д\left(x_i, x_j\right)+\mu_Л\left(x_i, x_j\right)+\mu_К\left(x_i, x_j\right)\right)$:

$$\mu_{Q_2}\left(x_i, x_j\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,9 & 1 & 0,83 \\ 0,7 & 0,77 & 1 \end{pmatrix},$$

а також відповідне відношення строгої переваги:

$$\mu_{Q_1}^{S}\left(x_i, x_j\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,06 \\ 0,5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тепер визначимо підмножину недомінованих альтернатив для множини $\left(X, \mu_{Q_2}\right)$:

$$\mu_{Q_2}^{н.д.}\left(x_i\right)=\frac{x_I \;\;|\;\; x_П \;\;|\;\; x_К}{0,4 \;\;|\;\; 1 \;\;|\;\; 0,94}.$$

Наприкінці цієї частини задачі знайдемо перетин множин $\mu_{Q_1}^{н.д.}$ та $\mu_{Q_2}^{н.д.}$, що і буде являти собою множину недомінованих альтернатив:

$$\mu_{R_Д, R_Л, R_К}^{н.д.}\left(x_i\right)=\frac{x_I \;\;|\;\; x_П \;\;|\;\; x_К}{0,4 \;\;|\;\; 1 \;\;|\;\; 0,93}.$$

Якщо б на цьому етапі були використані всі умови задачі, тобто вона складалася лише з нечітких відношень переваги, ми могли б однозначно сказати що другий кандидат, а саме Петренко П. вочевидь виграє серед своїх суперників та стає новим технічним директором. Але, так як в задачі ще є наявні невикористані умови, такі як висновок HR команди та критерії віку й вищої освіти розглянемо їх також.

Тепер повернемося до таблиці 3 та додамо до неї отриману множину недомінованих альтернатив для нечітких відношень переваги $R_Д$, $R_Л$, $R_К$:

Таблиця 4

Функції належності множини мети, множини обмежень та недомінованої множини альтернатив

	x_I	$x_П$	$x_К$
$\mu_{G_{HR}}(x)$	0,61	0,91	0,63
$\mu_{C_B}(x)$	0,37	0,07	0,76
$\mu_{C_O}(x)$	0,73	0,95	0,81
$\mu^{н.д.}_{R_Д,R_Л,R_К}(x)$	0,4	1	0,93

Аналогічно із алгоритмом підходу Беллмана-Заде, що був застосований у [задачі 3.А] знайдемо функцію належності нечіткого розв'язку $\mu_D(x)$, та запишемо у таблиці 5.

Таблиця 5

Функція належності нечіткого розв'язку

	x_I	$x_П$	$x_К$
$\mu_D(x)$	0,37	0,07	0,63

Тепер знайдемо максимальне з цих значень: $\max\limits_{x \in X} \mu_D(x) = 0,63$, що і буде раціональним розв'язком задачі. Не зважаючи на те, що з огляду на очевидну перемогу кандидата $x_П$ при розв'язанні частини задачі, що відповідає нечітким відношенням переваги, в кінці ми бачимо що все ж таки третій кандидат вийшов переможцем у цьому змаганні. Отже знову кандидат x_K, тобто Коваленко К., потрапляє на посаду технічного директора.

Також для реалізації побудови моделі та розв’язання цієї задачі був написан код на мові програмування Java v.17.0.9, що знаходиться в [Додатку В].

Загальний час роботи програми дорівнює в середньому 0.0307 секунд за 30 прогонів. Ці розрахунки були проведені на ноутбуці GIGABYTE AORUS 15 9KF з процесором Intel(R) Core(TM) i5-12500H 2.50 GHz та розміром оперативної пам'яті (RAM) 32,0 ГБ.

ВИСНОВКИ

Таким чином, в кваліфікаційній роботі вивчено можливості використання нечітких множин для розв’язання задач прийняття рішень, особливо в тих випадках, коли інформація є розмитою або неповною.

Зокрема, висвітлено різні постановки задач прийняття рішень, коли параметри задачі обираються із нечіткої множини, обговорено методи розв’язання задач вибору в різних постановках.

Головним завданням було підібрати конкретні задачі вибору, побудувати для них математичні моделі в чіткій і не чіткій постановках, нечіткі задачі запропонувати в різних постановках, для яких можна застосувати відповідні методи розв’язання. Разом з цим були розроблені програмні реалізації методів розв’язання конкретних задач.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій: підручник. 7-ме видання, перероблене та доповнене. Київ : Видавничий Дім «Слово», 2006. 816 с.

2. Ус С.А., Коряшкіна Л.С. Моделі й методи прийняття рішень: навчальний посібник / Міністерство освіти і науки України, Національний технічний університет «Дніпровська політехніка». – 2-ге вид. випр. Дніпро : НТУ «ДП», 2018. 300 с.

3. A generalized and unified approach to the approximation of fuzzy numbers and its arithmetic and characteristics. / M.I. Berenguer, D. Gámez, A.I. Garralda-Guillem, M. Ruiz Galán // Fuzzy Sets and Systems – University of Granada, Granada, Spain, 2023. – vol. 473.

4. Boixader D., Recasens J. On the degree of transitivity of a fuzzy relation // Fuzzy Sets and Systems. – 2022. – vol. 440, p. 1-20.

5. Fuzzy closure relations. / Manuel Ojeda-Hernández, Inma P. Cabrera, Pablo Cordero, Emilio Muñoz-Velasco // Fuzzy Sets and Systems. – 2022. – vol. 450, p. 118-132.

6. Keeney R.L., Raiffa H. Decision with Multiple Objectives: Preference and Value Tradeoffs. Cambridge University Press, New York, 1993.

7. Negoita C.V., Ralescu D.A. Applications of fuzzy sets to systems analysis. – New York, Toronto: John Wiley and Sons, 1975.

8. Saaty T. L. Multicriteria Decision Making: The Analytic Hierarchy Process. McGraw-Hill, New York, 1980.

9. Taha, Hamdy A. Operations research: an introduction / Hamdy A. Taha – 8th ed. Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, New Jersey, 2007.

10. Zadeh L.A., Ali M. Abbasov, Shahnaz N. Shahbazova. Fuzzy-Based Techniques in Human-Like Processing of Social Network Data / International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 2015.

11. Zadeh L.A., Bellman R.E. Decision-making in a fuzzy environment. / Management Science. – 1970. – Vol. 17, № 4. – P. B-141 – B-164.

12. Zadeh L.A. Fuzzy sets / Inform. Control. – 1965. – № 8. – P. 338 – 353.

13. Zadeh L.A., King-Sun F., Konichi T. Fuzzy logic and beyond – a new look / Fuzzy Sets and their applications to cognitive and decision processes: Proceedings of the US-Japan seminar on fuzzy sets and their applications, held at university of California, Berkeley, California, 2014.

Додаток А

Код побудови моделі та розв’язку задачі досягнення нечітко визначеної мети

```
import java.util.Random;

public class task3A {
    public static void main(String[] args) {
        long startTime = System.nanoTime();

        // Кількість стовпців (альтернатив) та рядків (критеріїв)
        int rows = 6;
        int columns = 3;

        double[][] belongingFunctions = new double[rows][columns];
        Random random = new Random();
        for (int i = 0; i < rows; i++)
            for (int j = 0; j < columns; j++)
                belongingFunctions[i][j] = random.nextDouble();

        System.out.println("Двовимірний масив:");
        for (int i = 0; i < rows; i++) {
            for (int j = 0; j < columns; j++)
                System.out.printf("%.2f ", belongingFunctions[i][j]);
            System.out.println();
        }

        // Знаходження функції належності нечіткого розв'язку
        double[] minimumValues = new double[columns];
        for (int j = 0; j < columns; j++) {
            double minimum = belongingFunctions[0][j];
            for (int i = 1; i < rows; i++)
                if (belongingFunctions[i][j] < minimum)
                    minimum = belongingFunctions[i][j];
            minimumValues[j] = minimum;
        }

        // Знаходження раціонального розв'язку
        double maxOfMins = minimumValues[0];
        for (int i = 1; i < minimumValues.length; i++)
            if (minimumValues[i] > maxOfMins)
                maxOfMins = minimumValues[i];

        System.out.println("\nФункція належності нечіткого розв'язку:");
        for (int j = 0; j < columns; j++)
            System.out.printf("Стовпець %d: %.2f\n", j + 1, minimumValues[j]);

        System.out.println("\nРаціональний розв'язок: " + maxOfMins);

        long endTime = System.nanoTime();
        long duration = endTime - startTime;
        double seconds = duration / 1_000_000_000.0;
        System.out.println("\nЧас виконання програми: " + seconds + " секунд");
    }
}
```

Додаток В

Код побудови моделі та розв'язку задачі вибору за нечіткими відношеннями переваги

```
import java.util.Random;

public class task3B {
    public static void main(String[] args) {
        long startTime = System.nanoTime();

        // Кількість стовпців (альтернатив) та рядків (критеріїв)
        int rows = 3;
        int columns = 3;

        // Створення масивів нечітких відношень переваги
        double[][] R_1 = generateRandomMatrix(rows, columns);
        double[][] R_2 = generateRandomMatrix(rows, columns);
        double[][] R_3 = generateRandomMatrix(rows, columns);

        // Коефіцієнти ваги лямбда
        double L_1 = (double) 1/3;
        double L_2 = (double) 1/3;
        double L_3 = (double) 1/3;

        // Створення відношення Q_1
        double[][] Q_1 = new double[rows][columns];
        for (int i = 0; i < rows; i++)
            for (int j = 0; j < columns; j++)
                Q_1[i][j] = Math.min(Math.min(L_1 * R_1[i][j], L_2 * R_2[i][j]),
L_3 * R_3[i][j]);

        // Відповідне до Q_1 відношення строгої переваги
        double[][] Q_1_S = new double[rows][columns];
        for (int i = 0; i < rows; i++)
            for (int j = 0; j < columns; j++)
                if (Q_1[i][j] > Q_1[j][i]) {
                    Q_1_S[i][j] = Q_1[i][j] - Q_1[j][i];
                } else {
                    Q_1_S[i][j] = 0;
                }

        // Підмножина недомінованих альтернатив для Q_1
        double[] Q_1_ND = new double[columns];
        for (int i = 0; i < columns; i++) {
            double maxDiff = Double.NEGATIVE_INFINITY;
            for (int j = 0; j < rows; j++)
                maxDiff = Math.max(maxDiff, Q_1_S[j][i] - Q_1_S[i][j]);
            Q_1_ND[i] = 1 - maxDiff;
        }

        // Створення відношення Q_2
        double[][] Q_2 = new double[rows][columns];
        for (int i = 0; i < rows; i++)
            for (int j = 0; j < columns; j++)
                Q_2[i][j] = L_1 * R_1[i][j] + L_2 * R_2[i][j] + L_3 * R_3[i][j];

        // Відповідне до Q_2 відношення строгої переваги
        double[][] Q_2_S = new double[rows][columns];
        for (int i = 0; i < rows; i++)
```

```
            for (int j = 0; j < columns; j++)
                if (Q_2[i][j] > Q_2[j][i]) {
                    Q_2_S[i][j] = Q_2[i][j] - Q_2[j][i];
                } else {
                    Q_2_S[i][j] = 0;
                }

        // Підмножина недомінованих альтернатив для Q_2
        double[] Q_2_ND = new double[columns];
        for (int i = 0; i < columns; i++) {
            double maxDiff = Double.NEGATIVE_INFINITY;
            for (int j = 0; j < rows; j++)
                maxDiff = Math.max(maxDiff, Q_2_S[j][i] - Q_2_S[i][j]);
            Q_2_ND[i] = 1 - maxDiff;
        }

        // Множина недомінованих альтернатив
        double[] u_ND = new double[columns];
        for (int i = 0; i < u_ND.length; i++)
            u_ND[i] = Math.min(Q_1_ND[i], Q_2_ND[i]);

        // Пошук максимального значення, тобто раціонального розв'язку
        double maxU = u_ND[0];
        int maxIndex = 0;
        for (int i = 1; i < columns; i++)
            if (u_ND[i] > maxU) {
                maxU = u_ND[i];
                maxIndex = i;
            }

        // Створення масиву з урахуванням всіх умов задачі
        double[][] belongingFunctions = new double[rows + 1][columns];
        for (int i = 0; i < rows; i++)
            belongingFunctions[i] = new double[]{Math.random(), Math.random(),
Math.random()};
        belongingFunctions[rows] = u_ND;

        // Створення функції належності нечіткого розв'язку
        double[] u_D = new double[columns];
        for (int i = 0; i < columns; i++)
            u_D[i] = Math.min(belongingFunctions[0][i],
Math.min(belongingFunctions[1][i], belongingFunctions[2][i]));

        // Пошук максимального значення, тобто раціонального розв'язку
        double maxUD = u_D[0];
        int maxIndexU = 0;
        for (int i = 1; i < columns; i++)
            if (u_D[i] > maxUD) {
                maxUD = u_D[i];
                maxIndexU = i;
            }

        // Виведення всіх масивів з описом
        System.out.println("Перше нечітке відношення переваги R_1:");
        printMatrix(R_1);
        System.out.println("Друге нечітке відношення переваги R_2:");
        printMatrix(R_2);
        System.out.println("Третє нечітке відношення переваги R_3:");
        printMatrix(R_3);
        System.out.println("Відношення Q_1:");
        printMatrix(Q_1);
        System.out.println("Відповідне до Q_1 відношення строгої переваги:");
        printMatrix(Q_1_S);
```

```
        System.out.println("Підмножина недомінованих альтернатив для Q_1:");
        printArray(Q_1_ND);
        System.out.println("Відношення Q_2:");
        printMatrix(Q_2);
        System.out.println("Відповідне до Q_2 відношення строгої переваги:");
        printMatrix(Q_2_S);
        System.out.println("Підмножина недомінованих альтернатив для Q_2:");
        printArray(Q_2_ND);
        System.out.println("Множина недомінованих альтернатив:");
        printArray(u_ND);
        // Виведення розв'зку
        System.out.println("Раціональний розв'язок: " + maxU);
        System.out.println("Номер альтернативи, яка буде оптимальним вибором: "
+ (maxIndex + 1));
        System.out.println("Функції належності зі всіма умовами:");
        printMatrix(belongingFunctions);
        System.out.println("Функція належності нечіткого розв'язку:");
        printArray(u_D);
        // Виведення розв'зку
        System.out.println("Раціональний розв'язок: " + maxUD);
        System.out.println("Номер альтернативи, яка буде оптимальним вибором: "
+ (maxIndexU + 1));

        // Обчислення часу виконання
        long endTime = System.nanoTime();
        long duration = endTime - startTime;
        double seconds = duration / 1_000_000_000.0;
        System.out.println("\nЧас виконання програми: " + seconds + " секунд");
    }

    // Метод для генерації випадкових значень у масиві
    public static double[][] generateRandomMatrix(int rows, int columns) {
        double[][] matrix = new double[3][3];
        Random rand = new Random();
        for (int i = 0; i < rows; i++)
            for (int j = 0; j < columns; j++)
                if (i == j) {
                    matrix[i][j] = 1;  // Основна діагональ
                } else {
                    matrix[i][j] = rand.nextDouble();  // Рандомні значення від
0 до 1
                }
        return matrix;
    }

    // Метод для друку двовимірного масиву з описом
    public static void printMatrix(double[][] matrix) {
        for (double[] doubles : matrix) {
            for (double aDouble : doubles) System.out.printf("%.2f \t",
aDouble);
            System.out.println();
        }
    }

    // Метод для друку одновимірного масиву з описом
    public static void printArray(double[] array) {
        for (double v : array)
            System.out.printf("%.2f \t", v);
        System.out.println();
    }
}
```