

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Одеський національний університет ім. І. І. Мечникова

В. М. АДАМЯН М. Я. СУШКО

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ



INTRODUCTION TO MATHEMATICAL PHYSICS

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів фізико-математичних
та інженерно-фізичних спеціальностей університетів
(Лист 14/18.2-2032 від 04.11.2002)*

Одеса
“Астропринт”
2003

УДК 22.311я73

A283

ББК 53.02:51(075.8)

Посібник створено на базі першої частини лекційного курсу, що неодноразово читався студентам фізичного факультету Одеського національного університету. Він містить виклад основних ідей і методів математичної фізики на прикладі її традиційних задач для необмеженого тривимірного простору. Наводяться контрольні запитання та завдання різного рівня складності для поглибленого вивчення матеріалу.

Український текст супроводжується авторським перекладом (американською) англійською мовою.

Посібник розраховано на студентів та аспірантів фізико-математичних та інженерно-фізичних спеціальностей університетів.

Рецензенти:

М. Л. Горбачук, чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, зав. відділу Інституту математики НАН України;

С. В. Козицький, д-р фіз.-мат. наук, професор, зав. кафедри теоретичної механіки Одеської державної морської академії;

В. В. Новіков, д-р фіз.-мат. наук, професор, зав. кафедри вищої математики Одеського національного політехнічного університету;

О. П. Ножніна, канд. філол. наук, доцент, координатор співпраці з викладачами англійської мови Британської Ради в Одесі.

Друкується за рішенням Вченої ради Одеського національного університету ім. І. І. Мечникова

Протокол №9 від 28 травня 2002 р.

A $\frac{1604010000 - 083}{549 - 2003}$ **Без оголош.**

ISBN 966-549-940-8

© В. М. Адамян, М. Я. Сушко, 2003

Дивовижна придатність мови математики для формулювання законів фізики - це чудовний дар, який ми не в змозі досягнути й не заслуговуємо. Нам слід бути вдячними за нього та сподіватися, що його сила не висчерпається в майбутніх дослідженнях і що, попри все, вона пошириться – радуєчи, хоч, можливо, також і спантеличуючи нас – на широкі галузі знання.

Юджин Вігнер

The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulation of the laws of physics is a wonderful gift which we neither understand nor deserve. We should be grateful for it and hope that it will remain valid in future research and that it will extend, for better or for worse, to our pleasure, even though perhaps also to our bafflement, to wide branches of learning.

Eugene Wigner

Передмова

Незважаючи на видиму різноманітність, більшість проблем сучасного природознавства і досі вдається розробляти за допомогою декількох універсальних математичних моделей, започаткованих при вивченні процесів теплопровідності та дифузії, поширення акустичних і електромагнітних хвиль, руху субатомних частинок. Вивчення цих моделей, поданих у вигляді задач для певних диференціальних рівнянь другого порядку в частинних похідних, і складає предмет математичної фізики в класичному розумінні.

Ця книга охоплює початковий мінімум засобів і прийомів математичної фізики. Увага зосереджується на двох центральних поняттях: лінійній задачі Коші для диференціальних рівнянь у частинних похідних у необмеженому просторі, та функції Гріна, за допомогою якої розв'язування задачі Коші зводиться до квадратур. Також наводяться необхідні елементи теорії узагальнених функцій і теорії інтегральних перетворень Фур'є.

Ми обмежилися розглядом задач для необмеженого тривимірного простору. У порівнянні з крайовими задачами вони більш зрозумілі та простіші для сприйняття – немає потреби задовольняти крайові умови, які зазвичай порушують симетрії, притаманні задачам для необмеженого простору. Крайові задачі, які надзвичайно важливі для опису широкого кола електромагнітних і гідродинамічних явищ, при першому знайомстві з основами теоретичної фізики можна обминути. Тому ми вирішили відкласти їх розгляд до наступного посібника, який сподіваємося завершити в найближчому майбутньому.

Книга зорієнтована на студентів фізичних спеціальностей і ґрунтується на першій частині лекційного курсу з математичної фізики, який традиційно читається на фізичному факультеті Одеського національного університету для студентів другого курсу. Це зумовило деякі її особливості.

Зокрема, матеріал подається в більш розповідному стилі, ніж традиційно прийнято в підручниках з чистої математики. Ми намагалися – наскільки це можливо – не зловживати великою кількістю абстрактних побудов та приділяти більше уваги змісту загальних тверджень і деталям їх практичного застосування.

Оскільки наш потенційний читач вже прослухав трисеместровий курс з математичного аналізу в межах стандартних навчальних університетських програм для фізиків та інженерів, ми також дозволили собі не нагадувати деякі означення та поняття математичного аналізу, або навіть не акцентувати, яка із можливих версій цих понять (наприклад, інтеграл Рімана чи Лебега) мається на увазі. Сприяючи повноті деяких тверджень і побудов, такі застереження небагато б додавали до розв'язування задач, що розглядаються в книзі.

Щоб не заглиблюватися в чисту математику, ми опустили ряд доведень. Попри деякі невизначеності в тексті, ми намагалися бути точними в усіх формулюваннях і доведеннях. Тому нам здається, що книга буде корисною й для студентів, що вивчають класичну або прикладну математику.

Майже всі параграфи містять задачі. Деякі з них наведені лише для того, щоб навчити читача користуватися введеними поняттями, а деякі виступають складовими частинами основного тексту.

Український текст супроводжується його перекладом (американською) англійською. Сподіваємося, що така двомовна книга принесе користь українським студентам та аспірантам з фізики й математики при роботі з професійними англомовними текстами. З іншого боку, англійський переклад робить книгу більш доступною для численної аудиторії іноземних студентів, включаючи й тих, що навчаються в українських університетах.

*Вадим Адамян
Мирослав Сушко*

1. ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ У СИСТЕМАХ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

1.1. Рівняння теплопровідності

Температура різних частин нерівномірно нагрітого тіла може змінюватися внаслідок трьох фундаментальних процесів – теплопровідності, конвекції та випромінювання. **Теплопровідність означається як процес переносу енергії в тілі, спричинений атомно-молекулярними взаємодіями та рухом вільних електронів і не пов'язаний ні з макроскопічним переносом речовини в тілі, ні з макроскопічною роботою.**

Основні риси теплопровідності залишаються однаковими для різноманітних систем – металевого стержня, дерев'яного бруска, чи газу або рідини в посудині. А саме, перенос тепла (енергії) відбувається лише між областями з різними температурами, при цьому відповідні теплові потоки завжди напрямлені із областей з більш високою температурою до областей з більш низькою.

Вважатимемо, що проміжки часу між можливими спостереженнями за тілом є значно довшими за характерний час вільного пробігу його молекул, а відстані між його просторовими точками вимірюються з абсолютною похибкою, значно вищою за середні відстані між молекулами. Тоді процес теплопровідності можна описувати за допомогою однієї скалярної функції $T(\mathbf{r}, t)$, значення якої дорівнюють температурі тіла в точках з координатами $\mathbf{r} = (x, y, z)$ у момент часу t . Окрім спеціальних випадків, коли джерела тепла зосереджуються в малих околах окремих точок, кривих чи поверхонь тіла, або коли існують стрибки температури на межах поділу між його окремими частинами, функція $T(\mathbf{r}, t)$ відносно повільно змінюється у просторі та часі. Якщо не обумовлено супротивне, вважаємо її неперервною скрізь в області визначення, разом з принаймні першими частинними похідними.

Диференціальне рівняння, яке описує зміну температури $T(\mathbf{r}, t)$ в різних точках нерівномірно нагрітого тіла внаслідок теплопровідності, називається рівнянням теплопровідності.

Рівняння теплопровідності можна вивести, розглянувши тепловий баланс для довільної області V тіла.

Нехай область V обмежена поверхнею S . За малий проміжок часу $(t, t + dt)$ кількість тепла в області V змінюється на величину Q , яка дорівнює кількості тепла Q_1 , що проходить через поверхню S , та кількості тепла Q_2 , що вивільняється (поглинається) джерелами (стоками) тепла, що є всередині V :

$$Q = Q_1 + Q_2. \quad (1.1)$$

Щоб виразити Q через $T(\mathbf{r}, t)$, розіб'ємо V на елементарні області, просторове положення яких визначається вектором $\mathbf{r}$ і які мають об'єм (міру) $dV(\mathbf{r})$. Вважаємо, що кожна елементарна область містить достатньо велику кількість точок, щоб її можна було розглядати як макроскопічну, і в той же час має досить малий характерний розмір (діаметр), щоб змінами температури $T(\mathbf{r}, t)$, питомої теплоємності $c(\mathbf{r}, T)$ і густини $\rho(\mathbf{r}, T)$ тіла в її межах можна було знехтувати. Тому кількість тепла, яку потрібно, щоб змінити її температуру на величину $T(\mathbf{r}, t + dt) - T(\mathbf{r}, t)$, дорівнює

$$dQ(\mathbf{r}, t) = c\rho[T(\mathbf{r}, t + dt) - T(\mathbf{r}, t)]dV(\mathbf{r}) = c\rho \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV(\mathbf{r})dt.$$

Тепло Q дорівнює сумі за всіма елементарними областями величин dQ :

$$Q = \left(\int_V c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dV \right) dt.$$

Щоб підрахувати Q_1 , розіб'ємо S на малі ділянки та розглянемо ділянку, що містить деяку точку $\mathbf{r}$, має площу $dA(\mathbf{r})$, і орієнтація якої задається одиничним вектором нормалі $\mathbf{n}$. Кількість тепла, що проходить крізь неї за проміжок часу $(t, t + dt)$, виражається через нормальну складову $j_n(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n})$ вектора густини теплового потоку $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ формулою

$$dQ_1(\mathbf{r}, t) = -j_n(\mathbf{r}, t)dA(\mathbf{r})dt.$$

Від'ємний знак тут вказує на те, що dQ_1 є додатним, коли тепло надходить до області V (потік $\mathbf{j}$ направлений всередину V), і від'ємним, коли V втрачає тепло (потік $\mathbf{j}$ направлений назовні).

Тепло Q_1 дорівнює сумі за всіма елементарними ділянками величин dQ_1 :

$$Q_1 = \left(- \oint_S j_n dA \right) dt.$$

За умови, що компоненти векторного поля $\mathbf{j}$ є неперервно диференційовними, теорема Остроградського-Гаусса дає:

$$Q_1 = \left(- \int_V \operatorname{div} \mathbf{j} dV \right) dt.$$

Позначимо через $F(\mathbf{r}, t)$ густину потужності джерел (стоків) тепла, що діють в області V . Кількість тепла, що виділяється (поглинається) ними в елементарній області з об'ємом $dV(\mathbf{r})$ за проміжок часу $(t, t + dt)$ дорівнює $dQ_2(\mathbf{r}, t) = F(\mathbf{r}, t) dV(\mathbf{r}) dt$. Тепло Q_2 знайдемо, підсумувавши кількості тепла dQ_2 , що генеруються за цей проміжок часу в усіх елементарних областях:

$$Q_2 = \left(\int_V F(\mathbf{r}, t) dV \right) dt.$$

Рівняння теплового балансу (1.1) записується тепер у вигляді

$$\left(\int_V c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dV \right) dt = \left(\int_V \{ -\operatorname{div} \mathbf{j} + F(\mathbf{r}, t) \} dV \right) dt.$$

Ця рівність справджується для довільної області тіла, що можливо лише тоді, коли підінтегральні вирази в обох частинах рівності дорівнюють один одному. У результаті дістаємо рівняння теплового балансу в диференціальній формі:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{j} + F(\mathbf{r}, t). \quad (1.2)$$

Скористаємося тепер **законом Фур'є**, який пов'язує густину потоку тепла $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ з температурою $T(\mathbf{r}, t)$ співвідношенням

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -k \operatorname{grad} T(\mathbf{r}, t), \quad (1.3)$$

де $k(\mathbf{r}, T)$ – коефіцієнт теплопровідності речовини. Підставивши (1.3) в (1.2), приходимо до бажаного **рівняння теплопровідності**:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + F(\mathbf{r}, t). \quad (1.4)$$

Зауваження:

1. Часова залежність коефіцієнтів c , ρ і k зустрічається лише в дуже спеціальних умовах, вивчення яких виходить за рамки цієї книги. Надалі вона не розглядається.

2. Густина потужності $F(\mathbf{r}, t)$ може залежати від температури, оскільки тепло всередині тіла може генеруватися (чи поглинатися) внаслідок хімічних реакцій в ньому, електричним струмом, тощо.

3. Далеко від ліній фазових переходів системи та за умови, що розглядаються не дуже широкі температурні інтервали, коефіцієнти c , ρ і k можна вважати незалежними від температури. Якщо при цьому густина потужності джерел F залежить від температури лінійно, або взагалі не залежить від неї, то рівняння (1.4) стає **лінійним** відносно T .

4. Для однорідної системи, властивості якої скрізь однакові, коефіцієнти c , k і ρ не залежать від координат, тобто вони є сталими. Рівняння теплопровідності в цьому випадку зводиться до **лінійного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами**:

$$\frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = a^2 \Delta T(\mathbf{r}, t) + f(\mathbf{r}, t), \quad (1.5)$$

де $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – **оператор Лапласа**, величина

$a^2 \equiv k / c\rho$ називається **коефіцієнтом температуропровідності**, і $f(\mathbf{r}, t) = F(\mathbf{r}, t) / c\rho$.

5. При відсутності джерел і стоків тепла ($F(\mathbf{r}, t) = 0$) рівняння (1.4) стає **однорідним**. Якщо, крім того, коефіцієнти системи є сталими, відповідне однорідне рівняння набирає вигляду

$$\frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = a^2 \Delta T(\mathbf{r}, t). \quad (1.6)$$

Завдання 1.1.1. Переконайтеся, що вигляд рівняння (1.4) не залежить від вибору початку відліку (тобто вибору нуля) на температурній шкалі.

Завдання 1.1.2. Нехай функції $T_1(\mathbf{r}, t)$ і $T_2(\mathbf{r}, t)$ задовольняють *лінійне* рівняння теплопровідності (1.4). Покажіть, що їх різниця $T_1(\mathbf{r}, t) - T_2(\mathbf{r}, t)$ задовольняє *лінійне однорідне* рівняння (1.4).

Завдання 1.1.3. Нехай $T_1(\mathbf{r}, t)$ – довільна функція, яка задовольняє *лінійне* рівняння (1.4). Покажіть, що всі функції, які задовольняють (1.4), можна подати у вигляді $T_0(\mathbf{r}, t) + T_1(\mathbf{r}, t)$, де $T_0(\mathbf{r}, t)$ перебігає множину всіх функцій, що задовольняють *лінійне однорідне* рівняння (1.4).

Завдання 1.1.4. Запишіть рівняння теплопровідності для випадків, коли із умов задачі випливає, що шукана температура не залежить від однієї або двох просторових координат; іншими словами, запишіть відповідно **двовимірне** та **одновимірне** рівняння теплопровідності.

Контрольні запитання до § 1.1

1. Чим теплопровідність відрізняється від конвективного переносу тепла?
2. За яких умов опис процесу теплопровідності зводиться до дослідження однієї скалярної функції (скалярного поля) $T(\mathbf{r}, t)$?
3. Чи можуть величини c , k , ρ і F у рівнянні теплопровідності (1.4) мати, як функції координат, розриви на деяких множинах точок тіла? Відповідь аргументуйте.

4. *За яких умов справджується теорема Остроградського-Гаусса, на яку робиться посилання при виведенні рівняння (1.2)?*
5. *З яким фундаментальним принципом пов'язана поява знака мінус у правій частині рівності (1.3)?*
6. *За яких умов рівняння (1.4) може вважатися лінійним?*

1.2. Задача Коші для рівняння теплопровідності в необмеженому просторі. Єдиність розв'язку

Початкове значення температури, задане для певного моменту часу t_0 , фізичні умови на границях та функціонування джерел тепла є тими фізичними факторами, які визначають хід процесу теплопровідності в системі. Усі зміни, що відбуваються з температурою після t_0 , підпорядковуються рівнянню теплопровідності (з коефіцієнтами, вираженими через параметри системи, і з неоднорідним членом, відповідальним за вплив джерел) та крайовим умовам.

Загальна проблема про відшукування функції певного класу, яка при $t > t_0$ задовольняє рівняння процесу, який вивчається, і крайові умови, а при $t = t_0$ набуває заданих початкових значень, називається **задачею Коші**.

У подальшому ми розглядатимемо задачі Коші лише для лінійних систем, для яких рівняння процесу та всі додаткові фізичні умови мають вигляд лінійних зв'язків, накладених на значення шуканої функції і її похідних. Якщо не обумовлено супротивне, вважатимемо також, що $t_0 = 0$.

Єдиність розв'язку задачі Коші для лінійного рівняння теплопровідності можна довести як на основі фізично прозорого *принципу максимального (мінімального) значення*, так і за допомогою формально-математичних методів.

Згідно з принципом максимального (мінімального) значення, *температура в довільній замкненій обмеженій області Ω , де немає джерел і стоків тепла, змінюється таким чином на проміжку часу $t \in [0, \tau]$, $0 < \tau < \infty$, що її значення*

$$T_{\min} = \min_{\substack{\mathbf{r} \in \Omega \\ 0 \leq t \leq \tau}} T(\mathbf{r}, t) \quad \text{і} \quad T_{\max} = \max_{\substack{\mathbf{r} \in \Omega \\ 0 \leq t \leq \tau}} T(\mathbf{r}, t) \quad \text{можуть досягатися у}$$

внутрішній точці області Ω лише в момент часу $t = 0$.

Фізичний зміст цього твердження впливає із основних начал термодинаміки: якщо, наприклад, у деякий момент часу максимальне значення температури дорівнює $T_{\max}$ і досягається на границі області Ω , а всередині Ω джерела тепла відсутні, то немає факторів, які б спричиняли температуру стати пізніше вищою за $T_{\max}$ принаймні в одній із внутрішніх точок або точок границі області Ω .

Уявімо тепер, що T_1 і T_2 – два неперервні розв’язки задачі Коші для лінійного рівняння теплопровідності в деякій області. Тоді всюди в цій області їх різниця $T_1 - T_2$ задовольняє лінійне однорідне рівняння теплопровідності і дорівнює нулю в початковий момент часу. Послідовно застосовуючи принцип максимального та принцип мінімального значень, бачимо, що різниця $T_1 - T_2$ тотожно дорівнює нулю і в будь-який інший момент часу, тобто функції T_1 і T_2 збігаються.

Перейдемо тепер до формального доведення єдиності розв’язку задачі Коші для лінійного рівняння теплопровідності в необмеженому просторі. Для цього потрібно згадати деякі поняття та результати математичного аналізу.

Функція $f(\mathbf{r})$, яка визначена в усьому тривимірному просторі E_3 , називається **інтегрованою** по E_3 , якщо

$$\int_{E_3} |f(\mathbf{r})| d\mathbf{r} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y, z)| dx dy dz < \infty^*).$$

Множину всіх таких комплексно-значних функцій традиційно позначатимемо символом L_1 .

*) У подальшому $d\mathbf{r}$ завжди позначає об’єм (міру) нескінченно малого околу точки $\mathbf{r}$.

Завдання 1.2.1. Нехай $f(\mathbf{r})$ і $g(\mathbf{r})$ – функції множини L_1 . Доведіть, що $(f \pm g) \in L_1$.

Вказівка. Для будь-яких комплексних чисел u і v справджується нерівність

$$|u \pm v| \leq |u| + |v|.$$

Завдання 1.2.2. Нехай $f(\mathbf{r}) \in L_1$, і нехай $g(\mathbf{r})$ – неперервна та обмежена функція, тобто існує таке невід'ємне число $C < \infty$, що $\sup |g(\mathbf{r})| \leq C$. Доведіть, що добуток $g \cdot f \in L_1$ і що

$$\left| \int_{E_3} g(\mathbf{r}) \cdot f(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right| \leq C \int_{E_3} |f(\mathbf{r})| d\mathbf{r}. \quad (1.7)$$

Слід зауважити, що функція із множини L_1 у загальному випадку може мати точки розриву на щільній множині точок у просторі E_3 . Дійсно, розглянемо невід'ємну функцію

$$g(\mathbf{r}) = g(r) = \frac{e^{-r}}{4\pi r},$$

де $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Інтеграл

$$J(R) = \int_{|\mathbf{r}| < R} g(r) d\mathbf{r}$$

легко обчислюється у сферичних координатах

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq r < \infty, \quad d\mathbf{r} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Маємо:

$$J(R) = \int_0^R e^{-r} r dr = 1 - (1 + R)e^{-R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 1.$$

Отже, $g(\mathbf{r}) \in L_1$ і

$$\int_{E_3} g(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 1.$$

Для довільної точки $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z) \in E_3$ і довільного числа $\lambda > 0$ заміна змінних

$$x' = \lambda(x - a_x), \quad y' = \lambda(y - a_y), \quad z' = \lambda(z - a_z)$$

дає:

$$\int_{E_3} g(\lambda|\mathbf{r} - \mathbf{a}|) d\mathbf{r} = \lambda^{-3} \int_{E_3} g(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \lambda^{-3}. \quad (1.8)$$

Розглянемо тепер функцію $q(\mathbf{r})$, формально визначену як суму

$$q(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} g(n|\mathbf{r} - \mathbf{a}_n|)$$

ряду невід'ємних функцій $g(n|\mathbf{r} - \mathbf{a}_n|) \in L_1$, де $\{\mathbf{a}_n\}$ – довільна послідовність точок простору E_3 . Відомо, що функціональний

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} h_n(\mathbf{r})$ невід'ємних функцій $h_n(\mathbf{r}) \in L_1$ майже всюди у

просторі E_3 збігається до деякої функції множини L_1 тоді й лише

тоді, коли $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_3} h_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} < \infty$. Оскільки, згідно з (1.8),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_3} g(n|\mathbf{r} - \mathbf{a}_n|) d\mathbf{r} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty,$$

то $q(\mathbf{r})$ – це функція множини L_1 з розривами неперервності другого роду щонайменше в точках послідовності $\{\mathbf{a}_n\}$. Але послідовність $\{\mathbf{a}_n\}$ можна вибрати так, щоб вона була щільною в просторі E_3 .

Завдання 1.2.3. Знайдіть значення показників степеня α і β , при яких функції

$$g(\mathbf{r}) = C \frac{e^{-r}}{r^\alpha} \quad \text{і} \quad h(\mathbf{r}) = C \frac{1}{r^\alpha |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^\beta}$$

належать до множини L_1 .

Називатимемо визначену в просторі E_3 функцію **нескінченно гладкою**, якщо всюди в E_3 вона неперервна та має неперервні частинні похідні будь-якого порядку; **фінітною**, якщо вона набуває ненульових значень лише всередині деякої сфери скінченного радіуса; і позначатимемо через K множину всіх нескінченно гладких фінітних функцій. Очевидно, що $K \subset L_1$.

Незважаючи на те що функція із множини L_1 може мати сингулярності, для будь-якої функції $f(\mathbf{r}) \in L_1$ існує послідовність $\{f_n(\mathbf{r})\}$ функцій множини K , що прямують до функції $f(\mathbf{r})$ майже в усіх точках простору E_3 , і для яких

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_3} |f(\mathbf{r}) - f_n(\mathbf{r})| d\mathbf{r} = 0.$$

Позначимо через $W^{(2)}$ множину всіх двічі диференційовних комплекснозначних функцій $f(\mathbf{r})$ із L_1 , що задовольняють таку умову: для будь-якої $f(\mathbf{r})$ існує послідовність $\{f_n(\mathbf{r})\}$ функцій множини K , рівномірно обмежених разом зі своїми першими похідними, яка має такі властивості:

1) на кожній обмеженій області простору E_3 вона рівномірно збігається до функції $f(\mathbf{r})$ при $n \rightarrow \infty$, а послідовності перших похідних

$$\left\{ \frac{\partial f_n(\mathbf{r})}{\partial x} \right\}, \quad \left\{ \frac{\partial f_n(\mathbf{r})}{\partial y} \right\}, \quad \left\{ \frac{\partial f_n(\mathbf{r})}{\partial z} \right\}$$

— до відповідних перших похідних від $f(\mathbf{r})$;

$$2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_3} |f(\mathbf{r}) - f_n(\mathbf{r})| d\mathbf{r} = 0; \quad (1.9)$$

$$3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_3} \left| \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial x} - \frac{\partial f_n(\mathbf{r})}{\partial x} \right| d\mathbf{r} = 0, \quad (1.10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_3} \left| \frac{\partial^2 f(\mathbf{r})}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f_n(\mathbf{r})}{\partial x^2} \right| d\mathbf{r} = 0, \quad (1.11)$$

і це ж саме справджується для перших та других частинних похідних за змінними y та z .

Зауважимо, що будь-яка функція $f(\mathbf{r}) \in W^{(2)}$ неперервна, оскільки вона є границею послідовності неперервних функцій, що рівномірно збігається на кожній обмеженій області простору E_3 , та обмежена, бо за означенням множини $W^{(2)}$ для кожної такої послідовності $\{f_n(\mathbf{r})\}$ існує така додатна стала $C < \infty$, що $\max |f_n(\mathbf{r})| < C$ для всіх n , а це означає, що модуль границі послідовності $\{f_n(\mathbf{r})\}$ ніде не може перевищити C . Подібні міркування правильні й для перших похідних від $f(\mathbf{r})$.

Лема 1.2.1. Нехай $f(\mathbf{r}) \in W^{(2)}$ і нехай $g(\mathbf{r})$ – обмежена неперервна функція, яка має обмежені неперервні перші похідні. Тоді

$$\int_{E_3} \operatorname{div}(g(\mathbf{r}) \cdot \operatorname{grad} f(\mathbf{r})) d\mathbf{r} = 0. \quad (1.12a)$$

Якщо, крім того, $g(\mathbf{r})$ має обмежені неперервні другі похідні, то

$$\int_{E_3} \operatorname{div}(f(\mathbf{r}) \cdot \operatorname{grad} g(\mathbf{r})) d\mathbf{r} = 0. \quad (1.12b)$$

Доведення. Рівність (1.12a) виконується для будь-якої функції $f(\mathbf{r}) \in K$ та будь-якої функції $g(\mathbf{r})$, що задовольняє умови леми. Справді, інтеграл (1.12a) тоді фактично береться по

деякій кулі $r < R < \infty$, на поверхні якої функція $f(\mathbf{r})$ та її перші похідні тотожно дорівнюють нулю. Застосовуючи теорему Остроградського-Гаусса, дістаємо:

$$\begin{aligned} \int_{E_3} \operatorname{div}(g(\mathbf{r}) \cdot \operatorname{grad} f(\mathbf{r})) d\mathbf{r} &= \int_{r < R} \operatorname{div}(g(\mathbf{r}) \cdot \operatorname{grad} f(\mathbf{r})) d\mathbf{r} = \\ &= \oint_{r=R} g(\mathbf{r})(\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} f(\mathbf{r})) dA(\mathbf{r}) = \oint_{r=R} g(\mathbf{r}) \cdot \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial r} dA(\mathbf{r}) = 0, \end{aligned}$$

де $dA(\mathbf{r})$ – елемент поверхні сфери $r = R$.

Нехай тепер $f(\mathbf{r})$ – довільна функція множини $W^{(2)}$, а $\{f_n(\mathbf{r})\}$ – послідовність функцій множини K , яка збігається до функції $f(\mathbf{r})$ у відповідності з означенням множини $W^{(2)}$. Позначаючи змінні x , y та z через, відповідно, x_1 , x_2 та x_3 , та користуючись попереднім результатом, для довільного члена цієї послідовності можемо записати:

$$\begin{aligned} \left| \int_{E_3} \operatorname{div}(g(\mathbf{r}) \operatorname{grad} f(\mathbf{r})) d\mathbf{r} \right| &= \left| \int_{E_3} \operatorname{div}[g(\mathbf{r}) \operatorname{grad}(f(\mathbf{r}) - f_n(\mathbf{r}))] d\mathbf{r} \right| \leq \\ &\leq \int_{E_3} |g(\mathbf{r})| \left| \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 (f(\mathbf{r}) - f_n(\mathbf{r}))}{\partial x_i^2} \right| d\mathbf{r} + \\ &\quad + \int_{E_3} \left| \sum_{i=1}^3 \frac{\partial g(\mathbf{r})}{\partial x_i} \frac{\partial (f(\mathbf{r}) - f_n(\mathbf{r}))}{\partial x_i} \right| d\mathbf{r} \leq \\ &\leq C_1 \sum_{i=1}^3 \int_{E_3} \left| \frac{\partial^2 (f(\mathbf{r}) - f_n(\mathbf{r}))}{\partial x_i^2} \right| d\mathbf{r} + C_2 \sum_{i=1}^3 \int_{E_3} \left| \frac{\partial (f(\mathbf{r}) - f_n(\mathbf{r}))}{\partial x_i} \right| d\mathbf{r}, \end{aligned} \tag{1.13}$$

де C_1 і C_2 – верхні межі функцій $|g|$ і $|\partial g / \partial x_i|$, відповідно. Згідно з (1.10) та (1.11), права частина формули (1.13) прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$, тоді як ліва не залежить від n і, отже, дорівнює нулю.

Рівність (1.12б) доводиться аналогічно.

Завдання 1.2.4. Знайдіть значення показників степеня α і β , при яких співвідношення (1.13) виконується для функцій

$$f(\mathbf{r}) = \frac{A}{r^\alpha} \quad \text{і} \quad g(\mathbf{r}) = \frac{Br}{1 + Cr^\beta}.$$

Тепер ми спроможні довести єдиність розв'язку задачі Коші для лінійного рівняння теплопровідності в необмеженому просторі.

Вимагатимемо, щоб для кожного значення $t > 0$ шукана температура $T(\mathbf{r}, t)$ була функцією множини $W^{(2)}$, яка в будь-якій фіксованій точці $\mathbf{r} \in E_3$ гладка за змінною t , і яка для довільного $t_1 > 0$ задовольняє умову

$$\int_0^{t_1} dt \int_{E_3} d\mathbf{r} \left| \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right| < \infty. \quad (1.14)$$

Вимагатимемо також, щоб для кожного $t > 0$ густина потужності $F(\mathbf{r}, t)$ в рівнянні теплопровідності (1.4) була функцією з L_1 .

З фізичного погляду умова (1.14) означає, що повна зміна теплової енергії в усіх елементарних об'ємах за час t_1 , яка дорівнює

$$\int_0^{t_1} dt \int_{E_3} d\mathbf{r} c(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t},$$

є скінченною, а умова на функцію $F(\mathbf{r}, t)$ – що скінченною є повна потужність всіх джерел тепла.

Позначимо через $\mathcal{Q}$ клас функцій змінних $\mathbf{r}$ і t , які задовольняють зазначені умови на функцію $T(\mathbf{r}, t)$. Тоді задача Коші для лінійного рівняння теплопровідності ставиться таким чином: *серед функцій $T(\mathbf{r}, t)$ класу $\mathcal{Q}$ відшукати таку, яка задовольняє лінійне рівняння (1.4) і умову*

$$T(\mathbf{r}, 0) = T_0(\mathbf{r}), \quad (1.15)$$

де $T_0(\mathbf{r})$ – довільна інтегровна функція.

Теорема 1.2.2. Нехай коефіцієнти $c(\mathbf{r})$, $\rho(\mathbf{r})$ і $k(\mathbf{r})$ у лінійному рівнянні теплопровідності (1.4) – строго додатні, обмежені та неперервні функції, функція $k(\mathbf{r})$ ще має обмежені неперервні перші похідні, і густина потужності $F(\mathbf{r}, t)$ належить до множини L_1 . Тоді задача Коші (1.4), (1.15) має щонайбільше один розв’язок, належний до класу Q .

Доведення. Припустимо, що $T_1(\mathbf{r}, t)$ і $T_2(\mathbf{r}, t)$ – два розв’язки лінійного неоднорідного рівняння теплопровідності (1.4), які задовольняють однакові початкові умови та належать до класу Q . Тоді функція $T(\mathbf{r}, t) = T_1(\mathbf{r}, t) - T_2(\mathbf{r}, t)$ задовольняє лінійне однорідне рівняння

$$c(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r})\frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \operatorname{div}(k(\mathbf{r}) \cdot \operatorname{grad} T(\mathbf{r}, t)) \quad (1.16)$$

та нульову початкову умову

$$T(\mathbf{r}, 0) = 0. \quad (1.17)$$

Оскільки і рівняння (1.16), і умова (1.17) однорідні, без обмеження загальності можемо припустити, що функція $T(\mathbf{r}, t)$ є дійсною функцією із класу Q . Із умови (1.14) та вимог, висунутих до функцій $T(\mathbf{r}, t)$, $c(\mathbf{r})$ і $\rho(\mathbf{r})$, а також із теореми Фубіні (див. §4.5) випливає, що функція

$$c(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r})\frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} T(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} c(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}) T^2(\mathbf{r}, t) \right)$$

інтегровна за змінною $\mathbf{r}$ по простору E_3 і за змінною t від 0 до $t_1 > 0$, і що виконується рівність

$$\begin{aligned} J(t_1) &\equiv \int_0^{t_1} dt \int_{E_3} d\mathbf{r} \left(c(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}) \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} T(\mathbf{r}, t) \right) = \\ &= \int_{E_3} d\mathbf{r} \int_0^{t_1} dt \left(c(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}) \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} T(\mathbf{r}, t) \right). \end{aligned}$$

Інтегруючи в другому подвійному інтегралі за t , та враховуючи умову (1.17), дістаємо:

$$J(t_1) = \frac{1}{2} \int_{E_3} d\mathbf{r} c(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) T^2(\mathbf{r}, t_1). \quad (1.18)$$

З іншого боку, інтегруючи в першому подвійному інтегралі за просторовими змінними та застосовуючи рівняння (1.16), маємо:

$$\begin{aligned} J(t_1) &= \int_0^{t_1} dt \int_{E_3} d\mathbf{r} T(\mathbf{r}, t) \operatorname{div}(k(\mathbf{r}) \operatorname{grad} T(\mathbf{r}, t)) = \\ &= \int_0^{t_1} dt \int_{E_3} d\mathbf{r} \operatorname{div}(k(\mathbf{r}) T(\mathbf{r}, t) \operatorname{grad} T(\mathbf{r}, t)) - \\ &\quad - \int_0^{t_1} dt \int_{E_3} d\mathbf{r} k(\mathbf{r}) \left[\left(\frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial z} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Записавши (для кожного фіксованого t) $f(\mathbf{r}) = T(\mathbf{r}, t)$ і $g(\mathbf{r}) = k(\mathbf{r})T(\mathbf{r}, t)$, бачимо, що згідно з Лемою 1.2.1 перший інтеграл у правій частині формули (1.19) дорівнює нулю. Другий інтеграл невід'ємний, що приводить до нерівності $J(t_1) \leq 0$. У той же час із формули (1.18) випливає, що $J(t_1) \geq 0$. Отже, $J(t_1) = 0$, і, враховуючи неперервність функції $T(\mathbf{r}, t)$, із формули (1.18) виводимо, що $T(\mathbf{r}, t_1) \equiv 0$ для довільного $t_1 > 0$.

Таким чином, $T_1(\mathbf{r}, t) \equiv T_2(\mathbf{r}, t)$ для всіх $t > 0$.

Контрольні запитання до § 1.2

1. У чому полягає задача Коші для лінійного рівняння теплопровідності?
2. З яких принципів випливає єдиність її розв'язку?
3. Нехай функція $f(\mathbf{r}) \in L_1$. Чи випливає з цього, що вона на

нескінченності спадає до нуля? Що точки розриву неперервності цієї функції не можуть скупчуватися на нескінченності? Відповідь аргументуйте.

4. Нехай функція $T(\mathbf{r}, t)$ із класу Q задовольняє лінійне однорідне рівняння теплопровідності. У який момент часу досягає свого максимуму функція, яка формально задається інтегралом $J(t) = \int_{E_3} \rho(\mathbf{r}) c(\mathbf{r}) T^2(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}$?

5. Який фізичний зміст умови $T_0(\mathbf{r}) \in L_1$ на початковий розподіл температури $T(\mathbf{r}, 0) = T_0(\mathbf{r})$?

1.3. Лінійне рівняння теплопровідності зі сталими коефіцієнтами в E_3 . Розв'язок задачі Коші

У цьому параграфі мова йтиме про відшукування функції $u(\mathbf{r}, t)$, яка задовольняє рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(\mathbf{r}, t), \quad (1.20)$$

початкову умову

$$u(\mathbf{r}, 0) = T_0(\mathbf{r}), \quad (1.21)$$

і яка належить до певного класу диференційовних функцій.

Почнемо з того, що звернемо увагу на одну властивість симетрії, притаманну однорідному рівнянню

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u. \quad (1.22)$$

Існує досить багатий клас перетворень координат і часу

$$\begin{aligned} x' &= \xi(x, y, z, t), & y' &= \eta(x, y, z, t), & z' &= \zeta(x, y, z, t), \\ t' &= \tau(x, y, z, t), \end{aligned} \quad (1.23)$$

які здійснюються двічі неперервно диференційовними функціями ξ , η , ζ і τ , і які взаємно однозначно відображають простір E_3 і

часову піввісь (t_0, ∞) на простір E_3 і часову піввісь (t'_0, ∞) , залишаючи при цьому рівняння (1.22) *інваріантним*. Останнє означає, що в змінних x', y', z', t' і в змінних x, y, z, t рівняння (1.22) має однаковий вигляд.

Завдання 1.3.1. Користуючись правилами диференціювання складених функцій багатьох змінних, віднайдіть умови, що їх повинні задовольняти функції ξ, η, ζ і τ , щоб при перетвореннях (1.23) вигляд рівняння (1.22) не змінювався.

Вказівка. Для функції $u = u(x', y', z', t')$ маємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} \left(\frac{\partial y'}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z'^2} \left(\frac{\partial z'}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial t'^2} \left(\frac{\partial t'}{\partial x} \right)^2 + \\ &\quad + \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{\partial^2 x'}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y'} \frac{\partial^2 y'}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial z'} \frac{\partial^2 z'}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial t'} \frac{\partial^2 t'}{\partial x^2} + \\ &\quad + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x' \partial y'} \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial y'}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x' \partial z'} \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial z'}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x' \partial t'} \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial t'}{\partial x} + \\ &\quad + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y' \partial z'} \frac{\partial y'}{\partial x} \frac{\partial z'}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y' \partial t'} \frac{\partial y'}{\partial x} \frac{\partial t'}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial z' \partial t'} \frac{\partial z'}{\partial x} \frac{\partial t'}{\partial x}. \end{aligned}$$

Подібним чином знаходимо $\partial^2 u / \partial y^2$ та $\partial^2 u / \partial z^2$. Підставляючи всі ці похідні в рівняння (1.22), вимагаємо далі, щоб коефіцієнти при "штрихованих" похідних функції u в новому рівнянні дорівнювали коефіцієнтам при відповідних "нештрихованих" похідних у рівнянні (1.22). Це дає:

рівняння

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = a^2 \Delta \tau + \varphi(\mathbf{r}, t),$$

де $\varphi(\mathbf{r}, t) > 0$ – довільна функція;

шість умов виду

$$\frac{\partial A}{\partial t} = a^2 \Delta A,$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)^2 = \varphi(\mathbf{r}, t),$$

де A – одна із функцій ξ , η або ζ ;

і шість умов

$$\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial C}{\partial z}\right) = 0,$$

де B і C – одна з функцій ξ , η , ζ або τ , причому $B \neq C$.

Завдання 1.3.2. Користуючись умовами, що їх повинні задовольняти перетворення (1.23) (див. Завдання 1.3.1), переконайтесь, що рівняння (1.22) інваріантне відносно:

а) *зсувів початку координат і початку відліку часу*

$$x' = x - x_0, \quad y' = y - y_0, \quad z' = z - z_0, \quad t' = t - t_0;$$

б) *поворотів відносно координатних осей на довільні кути; прикладом останніх є перетворення*

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \quad y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha, \quad z' = z, \quad t' = t;$$

в) *масштабних перетворень*

$$x' = \lambda x, \quad y' = \lambda y, \quad z' = \lambda z, \quad t' = \lambda^2 t, \quad \lambda > 0.$$

Із інваріантності рівняння (1.22) відносно певного перетворення (1.23) випливає, що якщо деяка функція $u(x, y, z, t)$ задовольняє рівняння (1.22), то його також задовольняє і складена функція

$$\tilde{u}(x, y, z, t) = u(\xi(x, y, z, t), \eta(x, y, z, t), \zeta(x, y, z, t), \tau(x, y, z, t)). \quad (1.24)$$

Функції $u(x, y, z, t)$ і $\tilde{u}(x, y, z, t)$ в загальному випадку різні. Ті ж частинні розв'язки рівняння (1.22), які не змінюються при масштабних перетвореннях і при поворотах відносно координатних осей на довільні кути, називаються **автомоделними**.

Завдання 1.3.3. Знайдіть авто модельні розв'язки рівняння (1.22), а також його двовимірний та одновимірний аналогів.

Вказівка. Авто модельний розв'язок $\tilde{u}$ залежить від координат і часу лише через їх комбінацію

$$\tau = \frac{r}{a\sqrt{t}}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

тобто

$$\tilde{u}(x, y, z, t) = \tilde{u}(\tau). \quad (1.25)$$

Підставивши (1.25) у рівняння (1.22), знайдіть звичайне диференціальне рівняння для $\tilde{u}(\tau)$ та його загальний розв'язок.

Завдання 1.3.4. Переконайтеся, що той авто модельний розв'язок рівняння (1.22), який спадає до нуля на нескінченності, описує розподіл температури навколо точкового джерела, вивільнення тепла з якого починається в момент $t = 0$ і зростає з бігом часу за законом $t^{3/2}$.

При розв'язуванні задачі Коші (1.20), (1.21) істотну роль відіграє інший спеціальний розв'язок рівняння (1.22), який має вигляд

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}}, \quad t > 0, \quad (1.26)$$

де, як і раніше, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Зауважимо, що $G(\mathbf{r}, t) > 0$.

Завдання 1.3.5. Перевірте, що при $t > 0$ функція $G(\mathbf{r}, t)$ задовольняє однорідне рівняння (1.22).

Завдання 1.3.6. Перевірте, що при $t > 0$

$$\int_{E_3} G(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = 1. \quad (1.27)$$

Розв'язання. Потрійний інтеграл (1.27) можна обчислювати як повторний, тобто

$$J = \int_{E_3} G(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4a^2 t}}.$$

Згідно з властивостями експоненціальної функції, співвідношення

$$e^{a+b} = e^a e^b$$

виконується для будь-яких дійсних чи комплексних чисел a і b . Користуючись ним, знаходимо:

$$J = \left[\frac{1}{(4\pi a^2 t)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \right]^3. \quad (1.28)$$

Добре відома формула Пуассона

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-x'^2} = \sqrt{\pi} \quad (1.29)$$

далі дає ($x' = x/\sqrt{4a^2 t}$):

$$\frac{1}{(4\pi a^2 t)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-x'^2} = 1. \quad (1.30)$$

Формулу (1.29) можна довести так. Очевидно, що

$$J_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} > 0,$$

бо підінтегральна функція набуває лише додатних значень.

Запишемо J_0^2 у вигляді

$$J_0^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy e^{-(x^2+y^2)},$$

та зробимо в останньому інтегралі заміну змінних

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta, \quad 0 \leq R < \infty, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Дістаємо:

$$J_0^2 = \int_0^\infty R dR \int_0^{2\pi} d\theta e^{-R^2} = \pi \int_0^\infty d(R^2) e^{-R^2} = \pi.$$

Зауважимо, що внаслідок інваріантності рівняння (1.22) відносно зсувів початку координат і початку відліку часу разом з функцією $G(\mathbf{r}, t)$ його задовольняє (при довільних $\mathbf{r}_0$, t_0 і $t > t_0$) і функція

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t, t_0) = G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|, t - t_0) = \frac{1}{(4\pi a^2 (t - t_0))^{3/2}} e^{-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2}{4a^2 (t - t_0)}},$$

$$\text{де } |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Функція $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t, t_0)$ також задовольняє рівняння

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a^2 \Delta_0 G, \quad \frac{\partial G}{\partial t_0} = -a^2 \Delta_0 G,$$

$$\text{де } \Delta_0 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_0^2}.$$

Функція $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t, t_0)$ називається **фундаментальним розв'язком**, або **функцією Гріна**, рівняння (1.22).

Лема 1.3.1. Нехай довільна інтегровна функція $g(\mathbf{r})$ є неперервною в точці $\mathbf{r}_0$. Тоді

$$\lim_{\substack{t \downarrow t_0 \\ E_3}} \int G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0; t, t_0) g(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = g(\mathbf{r}_0). \quad (1.31)$$

Доведення. Оскільки функція $g(\mathbf{r})$ неперервна в точці $\mathbf{r}_0$, для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що для всіх $\mathbf{r}$ у кулі $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| < \delta$ маємо

$$|g(\mathbf{r}) - g(\mathbf{r}_0)| < \varepsilon. \quad (1.32)$$

Розіб'ємо інтеграл у формулі (1.31) (позначимо його через $J(t)$) при $t > t_0$ на дві частини:

$$J(t) = J_1(t) + J_2(t),$$

де

$$J_1(t) = \int_{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0| > \delta} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0; t, t_0) g(\mathbf{r}') d\mathbf{r}',$$

$$J_2(t) = \int_{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0| < \delta} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0; t, t_0) g(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'.$$

Беручи до уваги явний вигляд функції $G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0; t, t_0)$, бачимо, що при $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0| > \delta$

$$G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0; t, t_0) \leq \frac{1}{(4\pi a^2(t - t_0))^{3/2}} e^{-\frac{\delta^2}{4a^2(t - t_0)}},$$

і для $J_1(t)$ правильна така оцінка:

$$|J_1(t)| \leq \int_{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0| > \delta} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0; t, t_0) |g(\mathbf{r}')| d\mathbf{r}' \leq$$

$$\leq \frac{1}{(4\pi a^2(t - t_0))^{3/2}} e^{-\frac{\delta^2}{4a^2(t - t_0)}} \int_{E_3} |g(\mathbf{r}')| d\mathbf{r}'.$$

Оскільки

$$\lim_{t \downarrow t_0} \frac{1}{(4\pi a^2(t - t_0))^{3/2}} e^{-\frac{\delta^2}{4a^2(t - t_0)}} = 0,$$

дістаємо:

$$\lim_{t \downarrow t_0} J_1(t) = 0.$$

Інтеграл $J_2(t)$ перепишемо у вигляді

$$J_2(t) = J_{21}(t) + J_{22}(t),$$

де

$$J_{21}(t) = g(\mathbf{r}_0) \int_{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0| < \delta} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0; t, t_0) d\mathbf{r}',$$

$$J_{22}(t) = \int_{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0| < \delta} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0; t, t_0) (g(\mathbf{r}') - g(\mathbf{r}_0)) d\mathbf{r}'.$$

Переходячи до нової змінної інтегрування

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2a\sqrt{t-t_0}}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0), \quad d\mathbf{r} = \frac{1}{(4a^2(t-t_0))^{3/2}} d\mathbf{r}',$$

бачимо, що

$$\lim_{t \downarrow t_0} \int_{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0| < \delta} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0; t, t_0) d\mathbf{r}' = \lim_{t \downarrow t_0} \frac{1}{\pi^{3/2}} \int_{|\mathbf{r}| < \frac{\delta}{2a\sqrt{t-t_0}}} e^{-r^2} d\mathbf{r} = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int_{E_3} e^{-r^2} d\mathbf{r} = 1,$$

і тому

$$\lim_{t \downarrow t_0} J_{21}(t) = g(\mathbf{r}_0).$$

Залишок $J_{22}(t)$ при $t \downarrow t_0$ залишається меншим від будь-якого малого числа ε . Справді, з огляду на (1.26) і (1.32), маємо:

$$\begin{aligned} |J_{22}(t)| &\leq \int_{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0| < \delta} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0; t, t_0) |g(\mathbf{r}') - g(\mathbf{r}_0)| d\mathbf{r}' \leq \\ &\leq \varepsilon \int_{E_3} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0; t, t_0) d\mathbf{r}' = \varepsilon. \end{aligned}$$

Зауваження 1.3.1. Вимога, щоб функція $g(\mathbf{r})$ була інтегровна, насправді не є необхідною. Ми користувалися нею лише для того, щоб довести, що інтеграл $J_1(t)$ прямує до нуля при $t \rightarrow 0$. Але він може прямувати до нуля при $t \rightarrow 0$ і у випадку неінтегровних функцій.

Завдання 1.3.7. Доведіть, що співвідношення (1.31) залишається правильним, якщо вимагати, щоб функція $g(\mathbf{r})$ була не інтегровою, а рівномірно обмеженою в усьому просторі E_3 .

Тепер ми спроможні знайти розв'язок задачі Коші (1.20), (1.21).

Нехай двічі диференційовна функція $T(\mathbf{r}, t)$, яка є також

інтегрованою разом зі своїми першими та другими похідними, задовольняє рівняння (1.20) і початкову умову (1.21). Тоді для функції $T(\mathbf{r}, t)$ і функції Гріна $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t')$ при $t > t'$ справджується співвідношення

$$\int_{E_3} [T(\mathbf{r}', t') \Delta' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') \Delta' T(\mathbf{r}', t')] d\mathbf{r}' = 0, \quad (1.33)$$

$$\text{де } \Delta' \equiv \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2}.$$

Дійсно, враховуючи Лему 1.2.1 і те, що при фіксованих значеннях змінних $\mathbf{r}$ і $t > t'$ функція G та її похідні за змінною $\mathbf{r}'$ належать до множини $W^{(2)}$, маємо:

$$\begin{aligned} & \int_{E_3} [T(\mathbf{r}', t') \Delta' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') \Delta' T(\mathbf{r}', t')] d\mathbf{r}' = \\ & = \int_{E_3} \text{div}' [T(\mathbf{r}', t') \text{grad}' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') \text{grad}' T(\mathbf{r}', t')] d\mathbf{r}' = 0. \end{aligned}$$

Далі, користуючись співвідношенням (1.33) та рівняннями для функцій $T(\mathbf{r}, t)$ і $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t')$, можемо записати:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^t dt' \int_{E_3} \left\{ T(\mathbf{r}', t') \left[\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t')}{\partial t'} + a^2 \Delta' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') \right] - \right. \\ & \quad \left. - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') \left[-\frac{\partial T(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} + a^2 \Delta' T(\mathbf{r}', t') + f(\mathbf{r}', t') \right] \right\} d\mathbf{r}' = \\ &= \int_0^t dt' \frac{\partial}{\partial t'} \int_{E_3} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') T(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' - \int_0^t dt' \int_{E_3} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') f(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' = \\ &= \lim_{t' \uparrow t} \int_{E_3} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') T(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' - \lim_{t' \downarrow 0} \int_{E_3} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') T(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' - \\ & \quad - \int_0^t dt' \int_{E_3} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') f(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}'. \end{aligned}$$

Вважатимемо, що при $t \downarrow 0$ розв'язок $T(\mathbf{r}, t)$ прямує до початкового значення $T_0(\mathbf{r})$, тобто

$$\lim_{t \downarrow 0} |T(\mathbf{r}, t) - T_0(\mathbf{r})| = 0.$$

Тоді, враховуючи неперервність та обмеженість функції $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t')$ при $t > t'$, бачимо, що

$$\lim_{t' \downarrow 0} \int_{E_3} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') T(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' = \int_{E_3} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|; t) T_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'.$$

З іншого боку, з огляду на Лему 1.3.1 та рівномірну неперервність $T(\mathbf{r}, t)$ у кожній області зі скінченним об'ємом, маємо:

$$\lim_{t' \uparrow t} \int_{E_3} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') T(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' = T(\mathbf{r}, t).$$

Отже, остаточний результат такий:

$$T(\mathbf{r}, t) = \int_{E_3} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|; t) T_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \int_0^t dt' \int_{E_3} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|; t - t') f(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}'. \quad (1.34)$$

Контрольні запитання до § 1.3

1. Відносно яких перетворень координат і часу рівняння теплопровідності (1.22) є інваріантним?
2. Які розв'язки рівняння (1.22) називаються автомоделними?
3. Чи зберігається тепловміст необмеженого тіла, якщо його температура змінюється з часом як автомоделний розв'язок рівняння (1.22)?
4. Які властивості має функція Гріна рівняння (1.22)?

1.4. Зміст функції Гріна

Нехай у початковий момент часу $t = t_0$ розподіл температури в необмеженому середовищі задається інтегрованою або обмеженою функцією $T_0(\mathbf{r})$. Якщо середовище однорідне та не містить жодних джерел (і стоків) тепла, то його температура $T(\mathbf{r}, t)$ в довільній точці $\mathbf{r}$ у моменти часу $t > t_0$ пов'язана з $T_0(\mathbf{r})$ співвідношенням (див. формулу (1.34))

$$T(\mathbf{r}, t) = \int_{E_3} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t_0) T_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (1.35)$$

де $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t)$ – функція Гріна лінійного рівняння теплопровідності зі сталими коефіцієнтами. Аналогічне співвідношення виконується для лінійних рівнянь теплопровідності зі змінними коефіцієнтами, що описують процес теплопровідності в неоднорідних середовищах, а також для лінійних рівнянь теплопровідності в обмежених просторових областях.

Розглянемо випадок неоднорідних середовищ докладніше. Нехай $t_0 = 0$. За певних, досить загальних, умов існує неперервна функція $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t)$, $t > 0$, яка визначена в просторі E_3 і має такі властивості:

1) за своїми просторовими змінними $\mathbf{r}$ і $\mathbf{r}'$ вона двічі неперервно диференційовна, а також інтегровна (разом з усіма своїми першими та другими частинними похідними) по E_3 ;

2) вона симетрична відносно перестановки змінних $\mathbf{r}$ і $\mathbf{r}'$:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) = G(\mathbf{r}', \mathbf{r}; t); \quad (1.36)$$

3) при фіксованих значеннях змінної $\mathbf{r}'$ вона задовольняє однорідне рівняння

$$c(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r})\frac{\partial G}{\partial t} = \operatorname{div}(k(\mathbf{r})\operatorname{grad} G); \quad (1.37)$$

4) для довільної обмеженої і навіть досить повільно зростаючої на нескінченності функції $g(\mathbf{r})$, неперервної в точці $\mathbf{r}_0$, справджується співвідношення

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_{E_3} G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}'; t) g(\mathbf{r}') c(\mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = g(\mathbf{r}_0). \quad (1.38)$$

При виконанні умов, що забезпечують перераховані властивості функції $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t)$, загальний розв'язок задачі Коші для рівняння теплопровідності (1.4) зі змінними коефіцієнтами та при інтегровних або обмежених функціях $T_0(\mathbf{r})$ і $F(\mathbf{r}, t)$ дається формулою

$$\begin{aligned} T(\mathbf{r}, t) = & \int_{E_3} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) c(\mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') T_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \\ & + \int_0^t dt' \int_{E_3} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t') F(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Нагадаємо, що функції $T_0(\mathbf{r})$ і $F(\mathbf{r}, t)$ визначають відповідно початкову температуру середовища та густину потужності джерел тепла. Коли ж джерела тепла відсутні, розв'язок задачі Коші для відповідного однорідного рівняння зводиться до

$$T(\mathbf{r}, t) = \int_{E_3} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) c(\mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') T_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (1.40)$$

Добуток $c(\mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') T_0(\mathbf{r}')$ під знаком інтеграла (1.40) – це початкова густина теплової енергії в точці $\mathbf{r}'$, тобто тепловміст одиниці об'єму речовини в малому околі точки $\mathbf{r}'$ при $t = 0$.

Припустимо тепер, що при $t = 0$ початкова температура середовища відрізняється від нуля лише в малому околі Ω точки $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0$, і що джерела тепла в середовищі відсутні. Тоді інтеграл (1.40) розповсюджується лише на окіл Ω . Зважаючи на неперервність функції Гріна, можемо записати:

$$T(\mathbf{r}, t) \approx G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t) \int_{E_3} c(\mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') T_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t) Q_0,$$

де Q_0 – кількість тепла, зосередженого в початковий момент часу $t = 0$ в околі Ω або якимось чином у цей момент туди внесеного.

Отже, функція Гріна $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t - t_0)$ дорівнює температурі середовища, яка встановлюється в точці $\mathbf{r}$ у момент часу $t > t_0$ завдяки одиниці кількості тепла, миттєво введеної в нього в точці $\mathbf{r}_0$ в момент часу t_0 , за умови, що температура середовища до моменту t_0 скрізь дорівнює нулю і що інші джерела тепла відсутні.

Функції з подібним змістом з'являються в різноманітних задачах механіки та фізики. Там вони також називаються функціями Гріна, а ще – функціями розповсюдження, функціями впливу або функціями відгуку.

Зауваження. Функція Гріна для рівняння теплопровідності зі сталими коефіцієнтами (1.22) відрізняється від розглянутої вище множником $c\rho$, який дорівнює теплоємності одиниці об'єму однорідного середовища. Якщо в момент часу $t = 0$ в точці $\mathbf{r}_0 = 0$ в однорідне середовище миттєво вводиться одиниця тепла, і якщо температура середовища до цього скрізь дорівнює нулю, то при відсутності інших джерел тепла функція Гріна (фундаментальний розв'язок) (1.26) дорівнює густині теплової енергії середовища в точці $\mathbf{r}$ у момент часу $t > 0$.

Завдання 1.4.1. У момент часу $t_0 = 0$ в нескінченно малий окіл точки $\mathbf{r}_0$ однорідного середовища, яке має нульову температуру, раптово вводиться Q_0 калорій тепла. Проаналізуйте подальші зміни температури середовища з часом у довільній точці $\mathbf{r} \neq 0$. Знайдіть максимальну температуру, яку можна зафіксувати на відстані $r > 0$ від початку координат, та момент часу, коли вона досягається.

Завдання 1.4.2. Знайдіть розв'язок задачі Коші для однорідного рівняння теплопровідності в необмеженому однорідному середовищі, початкова температура якого дорівнює

$$T_0(\mathbf{r}) = T_0 e^{-\alpha |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2}, \quad \alpha > 0.$$

Завдання 1.4.3. Переконайтеся, що для функції Гріна лінійного рівняння теплопровідності зі сталими коефіцієнтами правильна тотожність

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t_1 + t_2) = \int_{E_3} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t_2) G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0; t_1) d\mathbf{r}', \quad t_1, t_2 > 0. \quad (1.41)$$

Вказівка. Скористайтеся результатом попереднього завдання.

1.5. Стационарна температура. Ньютонівський тепловий потенціал

Якщо початкова температура $T_0(\mathbf{r})$ – інтегровна функція, то з бігом часу її внеском у загальне значення температури $T(\mathbf{r}, t)$ у будь-якій точці $\mathbf{r}$ можна знехтувати. Справді, для необмеженого однорідного середовища справджується така рівномірна оцінка:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{3/2}} \int_{E_3} e^{-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}{4a^2 t}} T_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right| &\leq \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{3/2}} \int_{E_3} e^{-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}{4a^2 t}} |T_0(\mathbf{r}')| d\mathbf{r}' \leq \\ &\leq \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{3/2}} \int_{E_3} |T_0(\mathbf{r}')| d\mathbf{r}' \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Отже, при $t \rightarrow \infty$ температура в такому середовищі може змінюватися лише завдяки джерелам тепла. Її граничне значення є

$$T(\mathbf{r}, t) \underset{t \rightarrow \infty}{\cong} \int_0^t dt' \int_{E_3} G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|, t-t') f(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' + O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right), \quad (1.42)$$

де $f(\mathbf{r}, t) \equiv F(\mathbf{r}, t)/c\rho$, $F(\mathbf{r}, t)$ – густина потужності джерел тепла.

Якщо, крім того, густина потужності джерел тепла – інтегровна та незалежна від часу функція $F(\mathbf{r})$, то з часом у кожній точці $\mathbf{r}$ середовища встановлюється стале значення температури. Воно дорівнює ($\tau = 1/\sqrt{4a^2(t-t')}$):

$$\begin{aligned}
 T(\mathbf{r}) &= \lim_{t \rightarrow \infty} T(\mathbf{r}, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{c\rho} \int_0^t dt' \int_{E_3} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t') F(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \\
 &= \frac{1}{2a^2 c \rho \pi^{3/2}} \int_{E_3} \left(\int_0^\infty d\tau e^{-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 \tau^2} \right) F(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \frac{1}{4\pi k} \int_{E_3} \frac{F(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'.
 \end{aligned}
 \tag{1.43}$$

Завдання 1.5.1. Нехай у формулі (1.42)

$$f(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} q_0, & 0 < r < R, \\ 0, & r > R. \end{cases}$$

Знайдіть температуру, яка встановлюється в необмеженому однорідному середовищі при $t \rightarrow \infty$.

Вираз у правій частині рівності (1.43) визначає граничний *стаціонарний* ($\partial T / \partial t = 0$) розв'язок неоднорідного рівняння теплопровідності. Він називається **ньютонівським (тепловим) потенціалом**.

Якщо $F(\mathbf{r})$ – неперервно диференційовна функція, що спадає на нескінченності принаймні як

$$F(\mathbf{r}) = O\left(\frac{1}{r^{2+\varepsilon}}\right), \quad \varepsilon > 0, \tag{1.44}$$

то ньютонівський потенціал є двічі диференційовним розв'язком **диференціального рівняння Пуассона**

$$k \Delta T(\mathbf{r}) = -F(\mathbf{r}), \tag{1.45}$$

який *спадає до нуля на нескінченності* та неперервні перші похідні якого можна дістати, диференціюючи (1.43) під знаком інтеграла.

Рівняння Пуассона (1.45) може мати в E_3 лише один розв'язок, який спадає до нуля на нескінченності, і саме до нього збігається з бігом часу температура необмеженого однорідного середовища при будь-якій інтегровній початковій температурі $T_0(\mathbf{r})$ і будь-якій густині потужності джерел $F(\mathbf{r})$, що задовольняє наведені умови.

Ці твердження доводяться в наступному параграфі.

Підкреслимо, що рівняння Пуассона (1.45) – це рівняння теплопровідності для часткового випадку стаціонарних розподілів температури, спричинених дією джерел і стоків тепла зі сталою потужністю. З точністю до множників, формулою (1.43) і рівнянням (1.45) також визначаються електростатичні та гравітаційні потенціали.

Завдання 1.5.2. Доведіть, що якщо

$$F(\mathbf{r}) = O\left(\frac{1}{r^{3+\varepsilon}}\right), \quad \varepsilon > 0,$$

то ньютонівський потенціал (1.43) спадає на нескінченності до нуля принаймні як $\frac{1}{r}$.

Завдання 1.5.3. Нехай $F(\mathbf{r})$ дорівнює нулю зовні деякої обмеженої області. Знайдіть явний вираз для ньютонівського потенціалу при $r \rightarrow \infty$ з точністю до членів $\sim \frac{1}{r^3}$.

Зауваження. Вимога (1.44) не є обов'язковою для того, щоб при $t \rightarrow \infty$ і довільній інтегровній початковій температурі $T_0(\mathbf{r})$ температура однорідного середовища збігалася до того єдиного розв'язку стаціонарного рівняння теплопровідності (рівняння Пуассона (1.45)), який спадає до нуля на нескінченності. Але вона гарантує, що цей розв'язок можна подати у вигляді ньютонівського потенціалу.

Завдання 1.5.4. Нехай у необмеженому однорідному середовищі густина потужності джерел

$$F(\mathbf{r}) = q \frac{\sin kr}{r},$$

а початкова температура дорівнює нулю. Розв'яжіть відповідне неоднорідне рівняння теплопровідності (1.5) та переконайтеся, що при $t \rightarrow \infty$ його розв'язок дає стаціонарну температуру середовища, яка задовольняє рівняння (1.45) та спадає до нуля при $r \rightarrow \infty$.

1.6. Спадні розв'язки рівняння Пуассона

Той факт, що рівняння Пуассона в просторі E_3 має єдиний розв'язок, який спадає до нуля на нескінченності, впливає з кількох простих, але фундаментальних тверджень.

Лема 1.6.1. *Нехай функція $u(\mathbf{r})$ задовольняє рівняння Пуассона*

$$\Delta u(\mathbf{r}) = -f(\mathbf{r})$$

у деякій області. Якщо функція $f(\mathbf{r})$ є від'ємною (додатною) у деякій внутрішній точці $\mathbf{r}_0$ цієї області, то функція $u(\mathbf{r})$ не може мати максимум (мінімум) у $\mathbf{r}_0$.

Завдання 1.6.1. Згадавши умови, що їх задовольняють другі похідні $\partial^2 u / \partial x^2$, $\partial^2 u / \partial y^2$, $\partial^2 u / \partial z^2$ в точках локального максимуму (мінімуму) функції u , доведіть Лему 1.6.1.

Довільна функція u називається **гармонічною** в деякій області, якщо в цій області вона двічі диференційовна та задовольняє **рівняння Лапласа**

$$\Delta u(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.46)$$

Теорема 1.6.2. Нехай функція $u(\mathbf{r})$ гармонічна в обмеженій області Ω та неперервна в Ω та на її границі S . Тоді ніде всередині Ω вона не може набувати значень, більших за її максимальне значення на S і менших за її мінімальне значення на S .

Доведення. Нехай у деякій внутрішній точці $\mathbf{r}_0$ області Ω

$$u(\mathbf{r}_0) > u_S + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

де u_S – максимальне значення $u(\mathbf{r})$ на S . У силу обмеженості області Ω існує таке число $\eta > 0$, що

$$\max_{\mathbf{r} \in S} \eta |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тому для функції

$$v(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}) + \eta |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2$$

маємо:

$$v_S = \max_{\mathbf{r} \in S} v(\mathbf{r}) \leq u_S + \frac{\varepsilon}{2},$$

звідки

$$v(\mathbf{r}_0) = u(\mathbf{r}_0) > u_S + \varepsilon \geq v_S + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отже, максимальне значення функції $v(\mathbf{r})$ досягається десь всередині Ω . У той же час

$$\Delta v = -(-6\eta) > 0,$$

а це суперечить Лемі 1.6.1.

Аналогічним чином доводимо, що значення, які функція $u(\mathbf{r})$ набуває у внутрішніх точках області Ω , не є меншими від мінімуму функції $u(\mathbf{r})$ на границі S .

Наслідок 1.6.3. *Функція, яка гармонічна скрізь у просторі E_3 і спадає до нуля на нескінченності, є тотожним нулем.*

Завдання 1.6.2. Доведіть Наслідок 1.6.3 та, спираючись на нього, єдиність розв'язку рівняння Пуассона в E_3 у класі функцій, що спадають до нуля на нескінченності.

Завдання 1.6.3. Доведіть теорему Ірншоу: заряджене тіло не може знаходитися в стані стійкої рівноваги під дією лише електростатичних сил.

Вказівка. Стану стійкої рівноваги системи відповідає таке відносне розташування її частинок, при якому її потенціальна енергія має мінімум (необхідна умова стійкої рівноваги системи частинок).

Завдання 1.6.4. Перевірте, що при будь-якому фіксованому значенні $\mathbf{r}'$ вираз $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ – це функція змінної $\mathbf{r}$, яка гармонічна скрізь у просторі E_3 , за винятком точки $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$.

Доведемо тепер, що для неперервно диференційовної функції F , яка задовольняє умову (1.44), той розв'язок рівняння Пуассона (1.45), який спадає на нескінченності до нуля, дається ньютонівським потенціалом. Спершу переконаємося, що ньютонівський потенціал для функції F є двічі диференційовний.

Оскільки функція $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}$ – інтегровна по будь-якій обмеженій області, неважко перевірити, що перші похідні від ньютонівського потенціалу (1.43) можна обчислювати, диференціюючи під знаком інтеграла. Візьмемо, для прикладу, похідну

$$\frac{\partial T(\mathbf{r})}{\partial x} = \frac{1}{4\pi k} \int_{E_3} \frac{x' - x}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} F(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (1.47)$$

Маємо:

$$\left| \frac{\partial T(\mathbf{r})}{\partial x} \right| \leq \frac{1}{4\pi k} \int_{E_3} \left| \frac{x' - x}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} F(\mathbf{r}') \right| d\mathbf{r}' \leq \frac{1}{4\pi k} \int_{E_3} \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2} |F(\mathbf{r}')| d\mathbf{r}' < \infty.$$

Покажемо тепер, що із диференційовності F випливає й диференційовність похідної (1.47).

В окремому випадку, коли функція F не тільки диференційовна, але ще й фінітна, тобто тотожно дорівнює нулю зовні сфери скінченного радіуса, за допомогою заміни змінної $\mathbf{r}'' = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ перепишемо (1.47) у вигляді

$$\frac{\partial T(\mathbf{r})}{\partial x} = \frac{1}{4\pi k} \int_{E_3} \frac{x''}{|\mathbf{r}''|^3} F(\mathbf{r} + \mathbf{r}'') d\mathbf{r}''. \quad (1.48)$$

Вираз (1.48) вже можна диференціювати під знаком інтеграла.

У загальному ж випадку розіб'ємо F на суму $F_1 + F_2$ двох диференційовних доданків, один із яких дорівнює нулю зовні сфери скінченного радіуса R , а другий – всередині сфери радіусом $R_1 < R$. Таке розбиття можна здійснити, наприклад, за допомогою нескінченно диференційовних функцій

$$\varphi_1(\mathbf{r}) = \begin{cases} e^{-\frac{R^2}{R^2-r^2}}, & r < R, \\ 0, & r \geq R, \end{cases} \quad \varphi_2(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & r \leq R_1, \\ e^{-\frac{R_1^2}{r^2-R_1^2}}, & r > R_1, \end{cases} \quad (1.49)$$

якщо покласти

$$F_1(\mathbf{r}) = \frac{\varphi_1(\mathbf{r})F(\mathbf{r})}{\varphi_1(\mathbf{r}) + \varphi_2(\mathbf{r})}, \quad F_2(\mathbf{r}) = \frac{\varphi_2(\mathbf{r})F(\mathbf{r})}{\varphi_1(\mathbf{r}) + \varphi_2(\mathbf{r})}.$$

Тоді внесок

$$\frac{1}{4\pi k} \int_{E_3} \frac{x' - x}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} F_2(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

у похідну $\partial T / \partial x$ від F_2 можна, очевидно, диференціювати під знаком інтеграла при $r < R_1$, а відповідний внесок від F_1 зводиться до інтеграла виду (1.48), який теж можна диференціювати під знаком інтеграла.

Тепер залишається довести, що за наведених умов ньютонівський потенціал (1.43) задовольняє рівняння Пуассона (1.45).

Спочатку зазначимо, що *будь-яку двічі неперервно диференційовну фінітну функцію $\psi(\mathbf{r})$ можна подати у вигляді*

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{E_3} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \Delta' \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (1.50)$$

Справді, позначимо через S_ε поверхню сфери радіусом $\varepsilon > 0$ з центром у довільній точці $\mathbf{r}_0$, а через Ω_ε – зовнішність цієї сфери. Із збіжності інтеграла (1.50) випливає, що

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{E_3} \frac{1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|} \Delta' \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = -\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|} \Delta' \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (1.51)$$

Оскільки в Ω_ε вираз $|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|^{-1}$ – це гармонічна функція змінної $\mathbf{r}'$, підінтегральний вираз у правій частині (1.51) можна перетворити до вигляду

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|} \Delta' \psi(\mathbf{r}') &= \frac{1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|} \Delta' \psi(\mathbf{r}') - \psi(\mathbf{r}') \Delta' \frac{1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|} = \\ &= \operatorname{div} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|} \nabla' \psi(\mathbf{r}') - \psi(\mathbf{r}') \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|} \right). \end{aligned}$$

Далі, користуючись теоремою Остроградського-Гаусса та фінітністю ψ , можемо записати:

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{4\pi} \int_{E_3} \frac{1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|} \Delta' \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \\ & = - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_{S_\varepsilon} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|} \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \psi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|} \right) dS', \end{aligned} \quad (1.52)$$

де інтеграли в правій частині рівності (1.52) беруться по поверхні S_ε , а символ $\partial/\partial n'$ означає компоненту градієнта в напрямі внутрішньої нормалі до S_ε .

Якщо ψ — двічі неперервно диференційовна фінітна функція, то існує така додатна стала $M < \infty$, що всюди $|\nabla \psi(\mathbf{r})| < M$ і, отже,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \left| \int_{S_\varepsilon} \frac{1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|} \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial n'} dS' \right| &\leq \frac{1}{4\pi} \int_{S_\varepsilon} \frac{1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|} \left| \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right| dS' \leq \\ &\leq \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{M}{\varepsilon} \cdot 4\pi \varepsilon^2 = M\varepsilon. \end{aligned}$$

Звідси

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_{S_\varepsilon} \frac{1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|} \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial n'} dS' = 0.$$

Уводячи нові змінні $\mathbf{r}'' = \mathbf{r}' - \mathbf{r}_0$ і беручи до уваги, що на S_ε

$$\frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|} = \frac{1}{r''} = \frac{1}{\varepsilon}, \quad \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|} = - \frac{\partial}{\partial r''} \frac{1}{r''} = \frac{1}{\varepsilon^2},$$

для інтеграла, що залишився в правій частині рівності (1.52), дістаємо:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S_\varepsilon} \psi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|} dS' = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{S_\varepsilon^0} \psi(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'') dS'', \quad (1.53)$$

де інтегрування тепер ведеться по поверхні S_ε^0 сфери радіусом ε з центром у точці $\mathbf{r}'' = 0$. Із неперервності ψ випливає, що середнє значення функції $\psi(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'')$ по поверхні S_ε^0 в рівності (1.53) прямує при $\varepsilon \rightarrow 0$ до $\psi(\mathbf{r}_0)$. Отже, для ψ в довільній точці $\mathbf{r}_0$ виконується рівність (1.50).

Візьмемо тепер довільну двічі неперервно диференційовну фінітну функцію ψ , помножимо обидві частини рівності (1.50) на густину потужності джерел тепла $F(\mathbf{r})$, і проінтегруємо так здобуту рівність по всьому простору E_3 . Маємо:

$$\begin{aligned} \int_{E_3} \psi(\mathbf{r}) F(\mathbf{r}) d\mathbf{r} &= -\frac{1}{4\pi} \int_{E_3} \left(\int_{E_3} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \Delta' \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right) F(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \\ &= -\int_{E_3} \left(\int_{E_3} \frac{1}{4\pi k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} F(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right) k \Delta' \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = -\int_{E_3} T(\mathbf{r}') k \Delta' \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \end{aligned}$$

де $T(\mathbf{r})$ – ньютонівський потенціал для густини $F(\mathbf{r})$. Оскільки $T(\mathbf{r})$ і $\psi(\mathbf{r})$ – двічі неперервно диференційовні функції, а $\psi(\mathbf{r})$ до того ж і фінітна, останній інтеграл можна переписати у вигляді

$$\int_{E_3} T(\mathbf{r}') k \Delta' \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \int_{E_3} \psi(\mathbf{r}) k \Delta T(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

Бачимо тепер, що

$$\int_{E_3} \psi(\mathbf{r}) [k \Delta T(\mathbf{r}) + F(\mathbf{r})] d\mathbf{r} = 0.$$

Беручи до уваги довільність функції ψ , остаточно дістаємо:

$$k \Delta T(\mathbf{r}) + F(\mathbf{r}) = 0$$

– рівняння (1.45).

1.7. Вимушені теплові коливання. Рівняння Гельмгольца

Якщо густина потужності джерел змінюється з часом за гармонічним законом

$$F(\mathbf{r}, t) = F_0(\mathbf{r}) \cos(\omega t - \varphi(\mathbf{r})), \quad (1.54)$$

то поступово й температура в усіх точках середовища починає змінюватися гармонічно, з тією ж самою частотою ω .

Справді, нехай густина потужності джерел задається виразом (1.54), де $F_0(\mathbf{r})$ – інтегровна або принаймні обмежена функція. Щоб знайти граничне значення температури $T(\mathbf{r}, t)$ при $t \rightarrow \infty$, перепишемо (1.54) у вигляді

$$F(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \tilde{F}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad \tilde{F}_0(\mathbf{r}) = F_0(\mathbf{r}) e^{i\varphi(\mathbf{r})},$$

та підставимо у формулу (1.34) замість функції $f(\mathbf{r}, t)$ комплекснозначну функцію

$$\tilde{f}(\mathbf{r}, t) = \tilde{f}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad \tilde{f}_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{c\rho} \tilde{F}_0(\mathbf{r}).$$

Обчисливши з нею комплекснозначну функцію ($\tau = t - t'$)

$$\begin{aligned} \tilde{T}(\mathbf{r}, t) &= \int_0^t dt' \int_{E_3} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \tilde{f}(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' = \\ &= \int_0^t d\tau \int_{E_3} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \tau) \tilde{f}(\mathbf{r}', t - \tau) d\mathbf{r}', \end{aligned}$$

далі перейдемо до границі функції $\tilde{T}(\mathbf{r}, t)$ при великих значеннях змінної t , та за допомогою формули

$$\operatorname{Re} e^{i\alpha} = \cos \alpha \quad (\operatorname{Im} \alpha = 0),$$

відокремимо дійсну частину цієї границі. Це і дасть відповідь.

Змінюючи у виразі для $\tilde{T}(\mathbf{r}, t)$ порядок інтегрування за $\mathbf{r}'$ і τ , дістаємо:

$$\begin{aligned}\tilde{T}(\mathbf{r}, t) &\underset{t \rightarrow \infty}{\cong} \int_{E_3} d\mathbf{r}' \int_0^t d\tau \frac{1}{(4\pi a^2 \tau)^{3/2}} e^{-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}{4a^2 \tau}} e^{-i\omega(t-\tau)} \tilde{f}_0(\mathbf{r}') = \\ &= e^{-i\omega t} \int_{E_3} d\mathbf{r}' G_\omega(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) \tilde{F}_0(\mathbf{r}'),\end{aligned}\quad (1.55)$$

де

$$G_\omega(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) = \frac{1}{c\rho(4\pi a^2)^{3/2}} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau^{3/2}} e^{-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}{4a^2 \tau}} e^{i\omega\tau}. \quad (1.56)$$

Щоб знайти елементарний вираз для інтеграла (1.56), розглянемо сім'ю інтегралів виду

$$\Phi_\alpha(z) = \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau^{3/2}} e^{-\frac{\alpha}{\tau} + iz\tau}, \quad (1.57)$$

яка при фіксованому параметрі $\alpha > 0$ є функцією параметра z , визначеною у верхній комплексній півплощині та на дійсній осі. Зазначимо, що під знаком інтеграла (1.57) стоїть функція від z , яка є однозначною, обмеженою та аналітичною в замкненій верхній півплощині й має інтегровну та незалежну від z мажоранту:

$$\left| \frac{1}{\tau^{3/2}} e^{-\frac{\alpha}{\tau} + iz\tau} \right| \leq \frac{e^{-\frac{\alpha}{\tau} - \text{Im} z \tau}}{\tau^{3/2}} \leq \frac{e^{-\frac{\alpha}{\tau}}}{\tau^{3/2}}.$$

З цього випливає, що функція $\Phi_\alpha(z)$ є однозначною та аналітичною у верхній півплощині й має неперервні граничні значення на дійсній осі. Якщо при цьому $\Phi_\alpha(z)$ є елементарною аналітичною функцією, то згідно з теоремою єдиності для аналітичних функцій її можна знайти, обчисливши інтеграл (1.57) при $z = i\beta$, $\beta > 0$, та аналітично продовживши так здобутий вираз на всю верхню півплощину – простіше кажучи, замінивши всюди в цьому виразі β на $-iz$.

Отже, обчислимо $\Phi_\alpha(i\beta)$, $\beta > 0$. Почнемо з заміни змінної

$\tau = u^2 \sqrt{\alpha/\beta}$, яка дає

$$\Phi_{\alpha}(i\beta) = 2\sqrt[4]{\frac{\beta}{\alpha}} \int_0^{\infty} \frac{du}{u^2} e^{-\sqrt{\alpha\beta}\left(\frac{1}{u^2}+u^2\right)}. \quad (1.58)$$

Розіб'ємо тепер інтеграл (1.58) на суму двох інтегралів, один з яких береться від нуля до одиниці, а другий – від одиниці до нескінченності, після чого зробимо в першому інтегралі підстановку $u' = u^{-1}$, перетворюючи його тим самим теж в інтеграл від одиниці до нескінченності. Дістаємо:

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha}(i\beta) &= 2\sqrt[4]{\frac{\beta}{\alpha}} \int_1^{\infty} du \left(\frac{1}{u^2} + 1\right) e^{-\sqrt{\alpha\beta}\left(\frac{1}{u^2}+u^2\right)} = \\ &= 2\sqrt[4]{\frac{\beta}{\alpha}} e^{-2\sqrt{\alpha\beta}} \int_1^{\infty} du \left(\frac{1}{u^2} + 1\right) e^{-\sqrt{\alpha\beta}\left(\frac{1}{u}-u\right)^2}. \end{aligned}$$

Ще одна заміна змінної $w = u - \frac{1}{u}$ в останньому інтегралі остаточно дає:

$$\Phi_{\alpha}(i\beta) = 2\sqrt[4]{\frac{\beta}{\alpha}} e^{-2\sqrt{\alpha\beta}} \int_0^{\infty} dw e^{-\sqrt{\alpha\beta}w^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-2\sqrt{\alpha\beta}}.$$

Відповідно,

$$\Phi_{\alpha}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-2\sqrt{-i\alpha z}}, \quad (1.59)$$

при цьому треба брати ту вітку кореня в показнику експоненти (1.59), яка додатна на уявній осі у верхній півплощині.

Повертаючись до інтеграла (1.56) та враховуючи (1.59), дістаємо:

$$G_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi k} \frac{e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} e^{i\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (1.60)$$

Отже, при $t \rightarrow \infty$ комплекснозначна функція $\tilde{T}(\mathbf{r}, t)$ змінюється за гармонічним законом

$$\tilde{T}(\mathbf{r}, t) = \tilde{A}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \quad (1.61)$$

з частотою ω і комплексною амплітудою

$$\tilde{A}(\mathbf{r}) = \int_{E_3} d\mathbf{r}' G_\omega(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \tilde{F}_0(\mathbf{r}'). \quad (1.62)$$

Звідси випливає, що температура в кожній точці середовища змінюється при $t \rightarrow \infty$ за законом

$$T(\mathbf{r}, t) = |\tilde{A}(\mathbf{r})| \cos(\omega t - \psi(\mathbf{r})), \quad \psi(\mathbf{r}) = \arg \tilde{A}(\mathbf{r}). \quad (1.63)$$

Функція, яка описує усталену температуру системи в режимі вимушених гармонічних коливань, має, звичайно ж, задовольняти рівняння теплопровідності. Підставляючи вираз (1.61) у рівняння

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = a^2 \Delta \tilde{T} + \tilde{f}_0 e^{-i\omega t},$$

дістаємо рівняння для комплексної амплітуди вимушених гармонічних коливань температури:

$$-\Delta \tilde{A}(\mathbf{r}) - \frac{i\omega}{a^2} \tilde{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{k} \tilde{F}_0(\mathbf{r}) \quad (1.64)$$

Взагалі, диференціальне рівняння виду

$$-\Delta u(\mathbf{r}) - zu(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}), \quad (1.65)$$

де z — дійсний або комплексний параметр, називають **(неоднорідним) рівнянням Гельмгольца**. Його можна розглядати як природне узагальнення рівняння Пуассона. За допомогою прийомів, подібних до тих, що використовувалися для аналізу ньютонівських потенціалів, можна довести, що для комплексних або від'ємних значень параметра z і неперервно диференційовної функції $f(\mathbf{r})$, яка в необмеженому просторі E_3 задовольняє умови

$$|f(\mathbf{r})|_{r \rightarrow \infty} = O(r^n), \quad |\nabla f(\mathbf{r})|_{r \rightarrow \infty} = O(r^m), \quad -\infty < n, m < \infty, \quad (1.66)$$

формула

$$u(\mathbf{r}) = \int_{E_3} G_z(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (1.67)$$

де

$$G_z(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\sqrt{z}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad \text{Im}\sqrt{z} \geq 0, \quad (1.68)$$

дає єдиний розв'язок рівняння Гельмгольца в класі двічі неперервно диференційовних функцій, модулі яких разом з модулями їх перших і других похідних можуть зростати при $r \rightarrow \infty$ щонайбільше за степеневим законом. При цьому перші похідні функції $u(\mathbf{r})$ можна обчислювати, диференціюючи (1.67) під знаком інтеграла.

Функція $G_z(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_z(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, наведена формулою (1.68), називається **функцією Гріна рівняння Гельмгольца**.

Завдання 1.7.1. Перевірте, що при фіксованих значеннях змінної $\mathbf{r}'$ функція Гріна (1.68) скрізь у просторі E_3 , за винятком точки $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$, задовольняє однорідне рівняння Гельмгольца

$$-\Delta u(\mathbf{r}) - zu(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.69)$$

Зауваження 1.7.1. Неперервна диференційовність функції $f(\mathbf{r})$ не є обов'язковою умовою для того, щоб розв'язок рівняння (1.65) можна було подати у вигляді (1.67). Зокрема, при довільному комплексному або від'ємному z підстановка у формулу (1.67) будь-якої інтегровної з квадратом функції $f(\mathbf{r})$ дає неперервну та інтегровну з квадратом функцію $u(\mathbf{r})$, яка є єдиним **узагальненим розв'язком** (див. § 4.2) рівняння (1.65) у класі інтегровних з квадратом функцій, що мають інтегровні з квадратом **узагальнені другі похідні**. Звідси випливає, що для функцій $u(\mathbf{r})$ (зокрема, двічі неперервно диференційовних) із цього класу при $\text{Im} z \neq 0$ або при $z < 0$ справджується тотожність

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{E_3} \frac{e^{i\sqrt{z}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} [-\Delta u(\mathbf{r}') - zu(\mathbf{r}')] d\mathbf{r}', \quad \text{Im}\sqrt{z} > 0. \quad (1.70)$$

Зауваження 1.7.2. Єдиність та інтегральні зображення певних розв'язків рівняння Гельмгольца при додатних z потребують

окремого розгляду. Саме випадки з $z > 0$ мають фундаментальне значення для дослідження ряду фізичних процесів – поширення електромагнітних і звукових хвиль, розсіювання атомів і елементарних частинок, тощо. Відповідні задачі розглядаються пізніше.

Зауваження 1.7.3. Згідно з формулою (1.70), інтегральне перетворення (1.67) з ядром (1.68) можна розглядати, при певних застереженнях, як оператор, обернений до диференціального оператора $[-\Delta - z]$, тобто як операцію, що відновлює функцію певного класу після дії на цю функцію оператора $[-\Delta - z]$. Відтак із формального співвідношення

$$[-\Delta - z_1]^{-1} - [-\Delta - z_2]^{-1} = (z_1 - z_2) [-\Delta - z_1]^{-1} [-\Delta - z_2]^{-1}$$

випливає, що при $\text{Im}\sqrt{z_1} > 0$ і $\text{Im}\sqrt{z_2} > 0$ справджується **тотожність Гільберта**:

$$\frac{1}{z_1 - z_2} [G_{z_1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G_{z_2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] = \int_{E_3} G_{z_1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') G_{z_2}(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') d\mathbf{r}''. \quad (1.71)$$

Зокрема,

$$\int_{E_3} G_z(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') G_z(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') d\mathbf{r}'' = \frac{i}{8\pi\sqrt{z}} e^{i\sqrt{z}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (1.72)$$

Завдання 1.7.2. Доведіть формулу (1.71) методом, який ми використали, щоб вивести формулу (1.50), або обчисливши інтеграл у правій частині формули (1.71) безпосередньо. Потім доведіть формулу (1.72).

З наведених міркувань випливає, що при $\omega > 0$ амплітуди (1.62) усталених гармонічних коливань температури, зумовлених гармонічними джерелами тепла з неперервно диференційовною амплітудою густини потужності $\tilde{F}_0$, що задовольняє умови (1.66), справді є єдиними розв'язками рівняння Гельмгольца (1.64) у класі функцій, модулі яких можуть зростати на нескінченності щонайбільше за степеневим законом.

З'ясуємо наприкінці цього параграфа фізичний зміст функції Гріна (1.60).

Нехай деяке джерело тепла загальною потужністю q знаходиться в нескінченно малому околі точки $\mathbf{r}_0$ і виділяє та поглинає тепло за гармонічним законом з частотою ω . Без обмеження загальності можна вважати, що його фаза $\varphi = 0$. Тоді з наведених вище формул випливає, що

$$\tilde{A}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi k} \frac{e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} e^{i\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}, \quad (1.73)$$

і що усталена температура дорівнює

$$T(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi k} \frac{e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|\right). \quad (1.74)$$

Вираз (1.74) називається **сферичною тепловою хвилею**. Порівнюючи формули (1.60) і (1.73), бачимо, що з точністю до множника q функція Гріна $G_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ визначає комплексну амплітуду усталених вимушених теплових коливань, які викликаються в середовищі гармонічним точковим джерелом тепла з частотою ω .

Завдання 1.7.3. Знайдіть амплітуду усталених вимушених коливань температури у випадку, коли густина потужності джерел (1.54) має такі параметри:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\pi}{2}, \quad F_0(\mathbf{r}) = \begin{cases} q_0, & 0 < r < R, \\ 0, & r > R. \end{cases}$$

Завдання 1.7.4. Знайдіть амплітуду усталених вимушених коливань температури у випадку, коли однакові гармонічні джерела тепла рівномірно розподіляються в тонкому шарі $|x| < d$, $d \rightarrow 0$.

2. РІВНЯННЯ ДИФУЗІЇ

2.1. Елементарний вивід рівняння дифузії

Розподіл домішкових частинок у середовищі в довільний момент часу визначається їх концентрацією

$$n(\mathbf{r}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta N(\mathbf{r}, t)}{\Delta V}, \quad (2.1)$$

де $\Delta N(\mathbf{r}, t)$ – кількість домішкових частинок у малому околі точки $\mathbf{r}$ у момент часу t , а ΔV – об'єм цього околу.

Дифузією називається процес вирівнювання концентрації домішкових мікрочастинок у середовищі (газі, рідині або твердому тілі) внаслідок їх зіткнень з молекулами, атомами, іонами або ядрами середовища.

Локальні зміни концентрації домішкових мікрочастинок характеризуються **вектором густини потоку частинок $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$** , напрям якого, за означенням, збігається з напрямом руху домішкових частинок у малому околі точки $\mathbf{r}$ у момент часу t , а модуль дорівнює кількості частинок, що проходять за одиницю часу через поверхню з одиничною площею перпендикулярно до неї. Тому кількість частинок ΔN , що проходять за інтервал часу $(t, t + \Delta t)$ через поверхню з площею ΔS , що є перпендикулярною до потоку $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ і містить точку $\mathbf{r}$, дається числом $|\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)| \Delta S \Delta t$.

Взагалі, вектор густини потоку домішкових частинок $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ є сумою двох векторів $\mathbf{j}_D(\mathbf{r}, t)$ і $\mathbf{j}_d(\mathbf{r}, t)$. Вектор $\mathbf{j}_d(\mathbf{r}, t)$ виникає тоді, коли процес дифузії відбувається в рухомому середовищі. Він описує перенесення домішкових частинок разом з середовищем. Відповідно,

$$\mathbf{j}_d(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) n(\mathbf{r}, t), \quad (2.2)$$

де $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ – вектор швидкості руху середовища в точці $\mathbf{r}$ у момент часу t відносно нерухомого спостерігача.

Вектор $\mathbf{j}_D(\mathbf{r}, t)$ описує перенесення домішкових частинок внаслідок саме міжчастинкових зіткнень. Він називається **вектором густини дифузійного потоку** домішкових частинок. Відповідно до закону Фіка,

$$\mathbf{j}_D(\mathbf{r}, t) = -D(\mathbf{r}) \text{grad } n(\mathbf{r}, t), \quad (2.3)$$

де скалярний додатний коефіцієнт D називають коефіцієнтом дифузії. У випадку неоднорідного середовища він може залежати від координат.

Домішкові частинки можуть також утворюватися чи знищуватися в середовищі внаслідок хімічних або ядерних реакцій. Внесок таких процесів у концентрацію домішкових частинок визначається за допомогою **функції джерел** $f(n(\mathbf{r}, t), \mathbf{r}, t)$, яка має такий зміст: кількість домішкових частинок, що утворюються чи знищуються в малому околі точки $\mathbf{r}$ з об'ємом ΔV за інтервал часу $(t, t + \Delta t)$ дорівнює $f(n(\mathbf{r}, t), \mathbf{r}, t) \Delta V \Delta t$.

Зокрема, для реакцій першого порядку

$$f(n(\mathbf{r}, t), \mathbf{r}, t) = \chi(\mathbf{r}) n(\mathbf{r}, t), \quad (2.4)$$

де $\chi(\mathbf{r})$ – коефіцієнт реакції. Для зовнішніх джерел або поглиначів $f(\mathbf{r}, t)$ може й не залежати від концентрації $n(\mathbf{r}, t)$.

Завдання 2.1.1. Користуючись законом збереження кількості домішкових частинок та аналогією між процесами дифузії та теплопровідності, виведіть узагальнене рівняння дифузії, яке враховує як рух середовища, так і можливе утворення або знищення домішкових частинок внаслідок певних реакцій у ньому.

Відповідь:

$$\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\text{div}[\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) n(\mathbf{r}, t)] + \text{div}[D(\mathbf{r}) \text{grad } n(\mathbf{r}, t)] + \chi(\mathbf{r}) n(\mathbf{r}, t). \quad (2.5)$$

Завдання 2.1.2. Запишіть рівняння (2.5) для випадку, коли дифузія домішкових частинок відбувається в однорідному потоці рідини, що тече вздовж осі x зі швидкістю V_0 .

Завдання 2.1.3. Сформулюйте задачу Коші для процесу вирівнювання концентрації домішкових частинок у необмеженому середовищі, вважаючи, що цей процес описується рівнянням (2.5), а концентрація є функцією класу K . Доведіть єдиність розв'язку цієї задачі.

Вказівка. Зведіть задачу Коші до відповідної задачі для рівняння теплопровідності.

Завдання 2.1.4. Побудуйте розв'язок задачі Коші, сформульованої в *Завданні 2.1.3*, для рівняння (2.5) зі сталими параметрами D , $\mathbf{v}$ і k .

Вказівка. Припускаючи, що вісь x координатної системи напрямлена вздовж вектора $\mathbf{v}$, та користуючись підстановкою

$$n(\mathbf{r}, t) = e^{\alpha x + \beta t} w(\mathbf{r}, t),$$

зведіть рівняння (2.5) до рівняння типу рівняння теплопровідності зі сталими коефіцієнтами.

Контрольні запитання до § 2.1

1. На які складові частини можна розкласти вектор густини потоку домішкових частинок? Як ці складові пов'язані з концентрацією домішкових частинок?
2. На яких законах фізики ґрунтується елементарний вивід рівняння дифузії?
3. Як формулюється задача Коші для лінійного рівняння дифузії?
4. Який вигляд має функція Гріна для рівняння, що описує процес дифузії в нерухомому однорідному середовищі, в якому не відбуваються ні хімічні, ні ядерні реакції?

2.2. Імовірнісний опис руху домішкових частинок. Рівняння Чепмена-Колмогорова

Спостерігатимемо за пересуванням окремої домішкової частинки в деякому середовищі. Якщо проміжок часу між двома послідовними фіксуваннями її положення в просторі є значно довшим за характерний час між зіткненнями цієї частинки з частинками середовища, то її рух буде видаватися випадковим процесом, який характеризується не гладкою траєкторією, а ймовірностями знайти частинку в певні моменти часу в певних областях простору.

Виділимо малий окіл Ω деякої точки $\mathbf{r}$ з об'ємом ΔV і розглядатимемо як сприятливу таку подію, коли домішкова частинка в момент часу t спостерігається в Ω . Нехай спостереження проводяться одночасно за N абсолютно тотожними домішковими частинками, що ніяк не впливають одна на одну, і дослід показує, що в момент часу t в Ω знаходиться N' частинок із N . Тоді, за означенням, імовірністю $\Delta w(\mathbf{r}, t)$ знайти домішкову частинку в Ω в момент часу t називається границя частки $\frac{N'}{N}$ при $N \rightarrow \infty$. Будемо також вважати, що коли Ω стягується в точку $\mathbf{r}$, існує ще й границя

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta w(\mathbf{r}, t)}{\Delta V} = p(\mathbf{r}, t). \quad (2.6)$$

Функція $p(\mathbf{r}, t)$, визначена таким чином для довільної точки простору E_3 і довільного моменту часу, називається **густиною ймовірності** знайти домішкову частинку в околі точки $\mathbf{r}$ у момент часу t , або просто густиною ймовірності. Із умови, що частинка існує десь у просторі E_3 , випливає, що при будь-якому t густина ймовірності повинна бути невід'ємною інтегровною функцією, яка задовольняє умову

$$\int_{E_3} p(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = 1. \quad (2.7)$$

Якщо в середовищі знаходиться всього N домішкових частинок, то густина ймовірності $p(\mathbf{r}, t)$ і концентрація домішкових частинок $n(\mathbf{r}, t)$ пов'язані очевидним співвідношенням

$$n(\mathbf{r}, t) = Np(\mathbf{r}, t). \quad (2.8)$$

Якщо в момент часу t частинку, за якою ведеться спостереження, зафіксовано в точці $\mathbf{r}$, то **густина умовної ймовірності** $p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; t', t)$ знайти її в околі якоїсь іншої точки $\mathbf{r}'$ у подальший момент часу t' у загальному випадку залежить від координат точок $\mathbf{r}$ і $\mathbf{r}'$ та моментів часу t і t' . Функцію $p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; t', t)$ називають також **густиною ймовірності переходу** домішкової частинки з точки $\mathbf{r}$, де вона перебувала в момент часу t , в окіл точки $\mathbf{r}'$ за проміжок часу $t' - t$. Очевидно, що $p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; t', t)$ – інтегровна функція, яка задовольняє умову

$$\int_{E_3} p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; t', t) d\mathbf{r}' = 1. \quad (2.9)$$

Умова (2.9) стверджує, що в момент часу t частинка справді є десь у просторі E_3 .

Якщо густина ймовірності переходу не залежить від того, як частинка блукала до моменту часу t , а лише від різниці $t' - t$, тобто $p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; t', t) = p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; t' - t)$, то процес називається **марковським**. Вважатимемо, що процес випадкового блукання домішкової частинки в середовищі внаслідок багатьох зіткнень її з частинками середовища є марковським.

При марковському процесі перебування частинки в малому околі Ω точки $\mathbf{r}$ з об'ємом ΔV в момент часу t та її подальший перехід із Ω у малий окіл Ω' точки $\mathbf{r}'$ з об'ємом $\Delta V'$ за час $t' - t$ є *незалежними подіями*. Ймовірності цих подій відповідно $\Delta w(\mathbf{r}, t) = p(\mathbf{r}, t)\Delta V$ і $\Delta w(\mathbf{r}', \mathbf{r}; t' - t) = p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; t' - t)\Delta V'$. Тому ймовірність знайти домішкову частинку в околі Ω' в момент часу t' після того, як вона побувала в околі Ω в момент часу t , має дорівнювати добуткові $\Delta w(\mathbf{r}', \mathbf{r}; t' - t)\Delta w(\mathbf{r}, t)$ ймовірностей цих послідовних незалежних подій.

Розіб'ємо весь простір E_3 (чи область, яку займає середовище) на сукупність нескінченно малих неперетинних областей з координатами $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_j, \dots$ і, відповідно, об'ємами $\Delta V_1, \dots, \Delta V_j, \dots$, і розглянемо суму

$$\sum_j \Delta w(\mathbf{r}', \mathbf{r}_j; t' - t) \Delta w(\mathbf{r}_j, t) = \left(\sum_j p(\mathbf{r}', \mathbf{r}_j; t' - t) p(\mathbf{r}_j, t) \Delta V_j \right) \Delta V'. \quad (2.10)$$

Оскільки частинка спостерігається в околі точки $\mathbf{r}'$ у момент t' після того, як у момент t вона безумовно знаходилася в одній з цих областей, сума в лівій частині формули (2.10) повинна дорівнювати ймовірності $p(\mathbf{r}', t') \Delta V'$. З іншого боку, коли діаметр кожної із областей прямує до нуля, а функції $p(\mathbf{r}, t)$ і $p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; t' - t)$ задовольняють певні вимоги, то сума в правій частині рівності (2.10) прямує до інтеграла

$$\int_{E_3} p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; t' - t) p(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}.$$

Тому при $t' > t$ справджується така рівність:

$$p(\mathbf{r}', t') = \int_{E_3} p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; t' - t) p(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}. \quad (2.11)$$

Формула (2.11), яка пов'язує густину ймовірності знайти частинку в околі певної точки з густиною умовної ймовірності переходу в цей окіл з інших точок за певний час, називається **рівнянням Чепмена-Колмогорова**.

2.3. Рівняння Ейнштейна-Смолуховського

У реальних експериментах з вивчення молекулярного руху реєстраційні прилади не здатні, як правило, фіксувати положення досліджуваних частинок безпосередньо, даючи здебільшого лише середні значення деяких функцій від їх координат. Якщо координати $\mathbf{r}$ домішкової частинки в якомусь середовищі є випадковими величинами, то, взагалі, випадковими будуть і значення довільної функції $\varphi(\mathbf{r})$ від цих координат.

Вважатимемо далі, що $\varphi(\mathbf{r})$ – довільна гладка функція, яка дорівнює нулю зовні сфери досить великого радіуса. Як і раніше, функції з такою властивістю називатимемо фінітними. Якщо густина ймовірності $p(\mathbf{r}, t)$ знайти домішкову частинку в околі довільної точки простору в будь-який момент часу відома, то середнє значення $\bar{\varphi}_t$ випадкової величини $\varphi(\mathbf{r})$, знайдене в результаті вимірів над багатьма тотожними системами, що в момент часу t перебувають в однакових зовнішніх умовах, тобто математичне сподівання $\bar{\varphi}_t$ величини $\varphi(\mathbf{r})$, дається виразом

$$\bar{\varphi}_t = \int_{E_3} \varphi(\mathbf{r}) p(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}. \quad (2.12)$$

Звичайно, $\bar{\varphi}_t$ може змінюватися з часом завдяки тому, що густина ймовірності $p(\mathbf{r}, t)$ залежить від часу. Відповідний приріст функції $\bar{\varphi}_t$ можна знайти, надаючи малого приросту Δt часовій змінній t . Згідно з рівнянням Чепмена-Колмогорова (2.11) можемо тоді записати:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_{t+\Delta t} &= \int_{E_3} \varphi(\mathbf{r}') p(\mathbf{r}', t + \Delta t) d\mathbf{r}' = \\ &= \int_{E_3} \varphi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \int_{E_3} p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; t + \Delta t, t) p(\mathbf{r}; t) d\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

де $p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; t + \Delta t, t) \equiv p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; \Delta t)$ – густина ймовірності переходу домішкової частинки за час Δt із точки $\mathbf{r}$, де вона знаходилася в

момент часу t , у точку $\mathbf{r}'$. Оскільки функції $p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; \Delta t)$ і $p(\mathbf{r}, t)$ – невід’ємні, а функція $\varphi(\mathbf{r}')$ – гладка та фінітна, в останньому з інтегралів у (2.13) можна змінити порядок інтегрування. Дістаємо:

$$\overline{\varphi}_{t+\Delta t} = \int_{E_3} \Phi(\mathbf{r}, \Delta t) p(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}, \quad (2.14)$$

де

$$\Phi(\mathbf{r}, \Delta t) = \int_{E_3} p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; \Delta t) \varphi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (2.15)$$

Як свідчить дослід, траєкторія домішкової частинки при випадковому русі – це неперервна, хоч і не обов’язково гладка, крива. Тому ймовірність того, що частинка за короткий проміжок часу Δt помітно зміститься з того положення, яке вона займає в момент часу t , є досить мала. Чим менший проміжок Δt , тим швидше $p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; \Delta t)$ прямує до нуля при зростанні відстані $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$. Внаслідок цього головний внесок в інтеграл (2.13) при $\Delta t \rightarrow 0$ дає нескінченно малий окіл точки $\mathbf{r}$. Знайдемо цей внесок, користуючись формулою Тейлора для функції трьох змінних x_1 , x_2 , x_3 (що тимчасово позначають змінні x , y , z) та вважаючи, що процес відбувається таким чином, що для величин

$$\overline{\Delta x_i} = \int_{E_3} (x'_i - x_i) p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; \Delta t) d\mathbf{r}', \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\overline{\Delta x_i \Delta x_j} = \int_{E_3} (x'_i - x_i)(x'_j - x_j) p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; \Delta t) d\mathbf{r}', \quad i, j = 1, 2, 3,$$

існують скінченні границі

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta x_i}}{\Delta t} = V_i(\mathbf{r}), \quad (2.16)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta x_i \Delta x_j}}{\Delta t} = 2D_{ij}(\mathbf{r}), \quad (2.17)$$

і, по-друге,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{E_3} |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3 p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; \Delta t) d\mathbf{r}' = 0. \quad (2.18)$$

Якщо умови (2.16)–(2.18) задовольняються, то випадковий рух домішкової частинки називається **броунівським рухом**, а вона сама – **броунівською**.

У відповідності з формулою Тейлора запишемо функцію $\varphi(\mathbf{r})$ в околі точки $\mathbf{r}$ у вигляді

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}') &= \varphi(\mathbf{r}) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial x_i} (x'_i - x_i) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r})}{\partial x_i \partial x_j} (x'_i - x_i)(x'_j - x_j) + R(\mathbf{r}', \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (2.19)$$

з залишковим членом $R(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ у вигляді

$$R(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \frac{1}{3!} \sum_{i,j,l=1}^3 \frac{\partial^3 \varphi(\mathbf{r} + \theta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}))}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l} (x'_i - x_i)(x'_j - x_j)(x'_l - x_l), \quad (2.20)$$

де множник θ набуває значень між нулем та одиницею і в загальному випадку залежить від $\mathbf{r}'$.

Підставимо тепер вираз (2.19) в інтеграл (2.15) і винесемо всі залежні лише від $\mathbf{r}$ величини за знак інтеграла. Приймаючи до уваги формулу (2.9), дістаємо:

$$\Phi(\mathbf{r}, \Delta t) = \varphi(\mathbf{r}) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial x_i} \overline{\Delta x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r})}{\partial x_i \partial x_j} \overline{\Delta x_i \Delta x_j} + \overline{R(\mathbf{r}', \mathbf{r})}, \quad (2.21)$$

де

$$\overline{R(\mathbf{r}', \mathbf{r})} = \int_{E_3} R(\mathbf{r}', \mathbf{r}) p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; \Delta t) d\mathbf{r}'.$$

Враховуючи співвідношення (2.16) та той факт, що функція $\varphi(\mathbf{r})$ є обмеженою разом із своїми похідними, тобто існує така додатна стала $C < \infty$, що

$$\max_{\mathbf{r}} \left| \frac{\partial^3 \varphi(\mathbf{r})}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l} \right| < C, \quad i, j, l = 1, 2, 3,$$

бачимо, що

$$\begin{aligned} \overline{|R(\mathbf{r}', \mathbf{r})|} &\leq \int_{E_3} |R(\mathbf{r}', \mathbf{r})| p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; \Delta t) d\mathbf{r}' \leq \\ &\leq \frac{1}{3!} C \sum_{i,j,l=1}^3 \int_{E_3} |\Delta x_i| |\Delta x_j| |\Delta x_l| p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; \Delta t) d\mathbf{r}' \leq \\ &\leq \frac{9C}{2} \int_{E_3} |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3 p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; \Delta t) d\mathbf{r}' = o(\Delta t). \end{aligned}$$

Далі, зважаючи на співвідношення (2.16) і (2.17), можемо записати:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta x_i} &= V_i(\mathbf{r}) \Delta t + o(\Delta t), \\ \overline{\Delta x_i \Delta x_j} &= 2D_{ij}(\mathbf{r}) \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Знаходимо, таким чином, що

$$\Phi(\mathbf{r}, \Delta t) = \varphi(\mathbf{r}) + \left[\sum_{i=1}^3 V_i(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^3 D_{ij}(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r})}{\partial x_i \partial x_j} \right] \Delta t + o(\Delta t).$$

Отже,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} [\overline{\varphi}_{t+\Delta t} - \overline{\varphi}_t] &= \int_{E_3} d\mathbf{r} \varphi(\mathbf{r}) \frac{1}{\Delta t} [p(\mathbf{r}, t + \Delta t) - p(\mathbf{r}, t)] = \\ &= \int_{E_3} d\mathbf{r} \left[\sum_{i=1}^3 V_i(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^3 D_{ij}(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r})}{\partial x_i \partial x_j} \right] p(\mathbf{r}, t) + o(1). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Вважатимемо далі, що густина ймовірності $p(\mathbf{r}, t)$, а також усі коефіцієнти $V_i(\mathbf{r})$ і $D_{ij}(\mathbf{r})$ – неперервні функції, що мають неперервні перші частинні похідні за всіма своїми змінними, а $p(\mathbf{r}, t)$ і всі $D_{ij}(\mathbf{r})$ мають ще й неперервні другі частинні похідні за просторовими змінними.

Переходячи до границі виразу (2.22) при $\Delta t \rightarrow 0$, дістаємо:

$$\begin{aligned} \int_{E_3} d\mathbf{r} \varphi(\mathbf{r}) \frac{\partial p(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \\ = \int_{E_3} d\mathbf{r} \left[\sum_{i=1}^3 V_i(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^3 D_{ij}(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r})}{\partial x_i \partial x_j} \right] p(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Оскільки, за припущенням, функція $\varphi(\mathbf{r})$ – гладка й фінітна, інтеграли в рівності (2.23) розповсюджуються лише на обмежену область. Можна вважати, що область інтегрування в правій частині рівності (2.23) є кубом з центром у початку координатної системи, який цілком містить кулю, всередині якої $\varphi(\mathbf{r})$ відмінна від нуля. Розглядаючи інтеграл у правій частині рівності (2.23) по такому кубу як повторний, застосовуючи інтегрування частинами, та беручи далі до уваги той факт, що $\varphi(\mathbf{r})$ разом із своїми похідними дорівнює на поверхні куба нулю, можемо переписати (2.23) у вигляді

$$\begin{aligned} \int_{E_3} d\mathbf{r} \left[\frac{\partial p(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (V_i(\mathbf{r}) p(\mathbf{r}, t)) - \right. \\ \left. - \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (D_{ij}(\mathbf{r}) p(\mathbf{r}, t)) \right] \varphi(\mathbf{r}) = 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Підкреслимо, що рівність (2.24) справджується для довільної гладкої фінітної функції $\varphi(\mathbf{r})$. Звідси випливає, що густина ймовірності $p(\mathbf{r}, t)$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial p(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\text{div}(\mathbf{V}(\mathbf{r}) p(\mathbf{r}, t)) + \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (D_{ij}(\mathbf{r}) p(\mathbf{r}, t)), \quad (2.25)$$

де $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ – векторна функція з компонентами $V_1(\mathbf{r})$, $V_2(\mathbf{r})$, $V_3(\mathbf{r})$.

Рівняння (2.25) називається **рівнянням Ейнштейна-Смолуховського**. Оскільки концентрація домішкових частинок $n(\mathbf{r}, t)$ пропорційна густині ймовірності $p(\mathbf{r}, t)$, бачимо, що функція $n(\mathbf{r}, t)$ теж задовольняє рівняння (2.25).

Рівняння для концентрації $n(\mathbf{r}, t)$ можна переписати у вигляді

$$\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\operatorname{div}\left(\tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{r})n(\mathbf{r}, t)\right) + \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_{ij}(\mathbf{r}) \frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial x_j} \right), \quad (2.26)$$

де $\tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{r})$ – вектор з компонентами $\tilde{V}_i(\mathbf{r}) = V_i(\mathbf{r}) - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial D_{ij}(\mathbf{r})}{\partial x_j}$,

$i = 1, 2, 3$.

Рівняння (2.26) збігається зі знайденим раніше рівнянням дифузії, що описує рух домішкових частинок у неоднорідному рухомому середовищі. Якщо рух домішкових частинок відбувається в однорідному середовищі, густина ймовірності переходу $p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; \Delta t)$ може залежати лише від різниці $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$ координат $\mathbf{r}'$ і $\mathbf{r}$. Для нерухомого ізотропного середовища, в якому відсутні виділені напрями, $p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; \Delta t)$ може залежати лише від модуля $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$ цієї різниці.

Завдання 2.3.1. Доведіть, що для однорідного середовища вектор $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ і матриця $D_{ij}(\mathbf{r})$ не залежать від просторових координат.

Завдання 2.3.2. Доведіть, що для однорідного ізотропного середовища $D_{ij}(\mathbf{r}) = D\delta_{ij}$, де δ_{ij} – символ Кронекера

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Завдання 2.3.3. Перевірте, що матриця коефіцієнтів дифузії для неізотропного середовища позитивно визначена, тобто для будь-яких дійсних чисел k_1, k_2, k_3 , таких, що $|k_1| + |k_2| + |k_3| > 0$,

значення квадратичної форми $\sum_{i,j=1}^3 D_{ij} k_i k_j$ додатні.

2.4. Зміст функції Гріна для рівняння дифузії

Концентрація $n(\mathbf{r}, t)$ домішкових частинок, що перебувають у процесі дифузії, і густина ймовірності $p(\mathbf{r}, t)$ знайти мічену домішкову частинку в околі даної точки простору пов'язані рівністю (2.8). Тому рівняння для $p(\mathbf{r}, t)$ і рівняння дифузії для $n(\mathbf{r}, t)$ мають однаковий вигляд. Порівнюючи їх, бачимо, що коефіцієнт $D(\mathbf{r})$ (або матриця коефіцієнтів $D_{ij}(\mathbf{r})$), який неминуче виникає при виведенні рівняння для густини ймовірності $p(\mathbf{r}, t)$, має збігатися з коефіцієнтом дифузії (або матрицею коефіцієнтів дифузії).

Завдання 2.4.1. Нехай $n(\mathbf{r}, t)$ – концентрація домішкових частинок в ізотропному середовищі, а $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = (j_1(\mathbf{r}, t), j_2(\mathbf{r}, t), j_3(\mathbf{r}, t))$ – вектор густини їх дифузійного потоку. Не посилаючись на закон Фіка, знайдіть співвідношення між $\mathbf{j}$ і $n(\mathbf{r}, t)$.

Розглянемо для простоти процес дифузії, що відбувається в необмеженому просторово-однорідному ізотропному середовищі. Рівняння для $p(\mathbf{r}, t)$ у цьому випадку набирає вигляду

$$\frac{\partial p(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = D \Delta p(\mathbf{r}, t). \quad (2.27)$$

Задача Коші для знаходження $p(\mathbf{r}, t)$ полягає в побудові функції, яка задовольняє як рівняння (2.27), так і початкову умову $p(\mathbf{r}, 0) = p_0(\mathbf{r})$.

Нехай у початковий момент часу $t = 0$ всі частинки, що беруть участь у процесі дифузії, зосереджено в малому околі Ω точки $\mathbf{r}_0$. Це означає, що початкова густина ймовірності $p_0(\mathbf{r})$ відрізняється від нуля лише в області Ω . Якщо розмір області Ω набагато менший від характерної дифузійної довжини $\sqrt{Dt}$, то, враховуючи зв'язок між $p(\mathbf{r}, t)$ і $n(\mathbf{r}, t)$, а також між $p_0(\mathbf{r})$ і

$n(\mathbf{r}, 0) = n_0(\mathbf{r})$, можемо записати

$$\begin{aligned} p(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{N} n(\mathbf{r}, t) = \int_{\Omega} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) \frac{1}{N} n_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \approx \\ &\approx G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t) \int_{\Omega} p_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t), \end{aligned} \quad (2.28)$$

де $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t)$ – функція Гріна для рівняння (2.27):

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} e^{-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2}{4Dt}}, \quad t > 0. \quad (2.29)$$

Наближення (2.28) тим краще, чим менший розмір області Ω . Коли ж область Ω стягується в точку, формула (2.28) стає точною.

Таким чином, функція Гріна $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t)$ для рівняння дифузії дорівнює густині ймовірності переходу $p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t)$ броунівської частинки із точки $\mathbf{r}_0$ в окіл точки $\mathbf{r}$ за проміжок часу t .

Це твердження залишається істинним і для випадку, коли броунівський рух та дифузія відбуваються в просторово-неоднорідному середовищі.

Контрольні запитання до §§ 2.2–2.4

1. Як означається густина ймовірності знайти броунівську частинку в околі даної точки простору? Які властивості має ця функція?
2. Як означається густина ймовірності переходу домішкової частинки з однієї точки простору в інші його точки за визначений проміжок часу? Які властивості має ця функція взагалі і для марковських процесів зокрема?
3. Чому дорівнює ймовірність того, що домішкова частинка, яка спочатку знаходиться в точці $\mathbf{r}_0$, перейде за проміжок часу Δt_1 у малий окіл точки $\mathbf{r}_1$ з об'ємом ΔV_1 , а далі за проміжок

- Δt_2 – у малий окіл точки $\mathbf{r}_2$ з об'ємом ΔV_2 , якщо процес блукання частинки марковський?
4. Яке співвідношення пов'язує значення густини ймовірності координат броунівської частинки в послідовні моменти часу?
 5. Як визначається математичне сподівання неперервної функції від випадкових величин з відомою густиною ймовірності?
 6. Чому дорівнює приріст математичного сподівання гладкої фінітної функції від координат броунівської частинки за час Δt ?
 7. За яких умов правильне рівняння Ейнштейна–Смолуховського?
 8. Як виглядає рівняння Ейнштейна–Смолуховського для броунівської частинки, яка рухається в однорідному, ізотропному, нерухомому середовищі?
 9. Який зв'язок існує між компонентами поля швидкостей однорідної ізотропної рідини і коефіцієнтом дифузії в ній певних домішок з, відповідно, математичним сподіванням приросту координат і квадратами приросту координат домішкової частинки?
 10. Який зміст має функція Гріна для рівняння дифузії?

3. ХВИЛЬОВЕ РІВНЯННЯ^{*)}

3.1. Рівняння малих коливань рідини та газу

На відміну від необоротних процесів типу теплопровідності або дифузії, поширення хвиль у середовищі є суто динамічним процесом, який керується фундаментальними рівняннями механіки або теорії поля. Вивчення більшості лінійних хвильових процесів здійснюється за допомогою хвильового рівняння, яке ми виводимо далі на прикладі малих коливань рідини (або газу).

Розглянемо всередині рідини деяку її масу, яка має об'єм V і обмежена гладкою поверхнею S . Сили, які діють на виділену масу з боку решти рідини, є короткодіючими і тому зводяться лише до поверхневих. Вважатимемо також, що рідина є ідеальною. Це означає, що сили, які діють на будь-яку малу ділянку поверхні S , перпендикулярні до цієї ділянки, напрямлені протилежно до вектора зовнішньої нормалі $\mathbf{n}$ до неї (всередину маси), а їх величина пропорційна площі ділянки dS . Іншими словами, вони зводяться тільки до нормального тиску $p(\mathbf{r}, t)$ на ділянку – зсувних напружень, як у твердому тілі, не виникає. Більше того, величина тиску $p(\mathbf{r}, t)$ не залежить від орієнтації цієї ділянки.

Розбиваючи виділену масу на нескінченно малі частини з об'ємами dV , рівняння руху для неї можемо записати у вигляді

$$\int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{dt} = \mathbf{F}, \quad (3.1)$$

де $\rho(\mathbf{r}, t)$ – густина рідини, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ – векторна функція, значення якої в кожній точці збігається з вектором миттєвої швидкості потоку рідини в цій точці, $\mathbf{F}$ – рівнодійна сил, прикладених до

^{*)} У цьому розділі суттєво використовуються поняття і результати теорії інтегрального перетворення Фур'є та теорії узагальнених функцій. Обидві теорії входять до складу найважливіших математичних інструментів теоретичної фізики. Щоб не порушувати логічну схему цієї книги, їх виклад в обсязі, достатньому для фізичних та інженерних застосувань, винесено в останній розділ.

виділеної маси. Рівняння (3.1) означає, що векторна сума всіх сил, які діють на речовину в об'ємі V , включно з силами інерції, що виникають при прискореному русі окремих частин виділеної маси, дорівнює нулю.

Нехай, крім поверхневих, діють також об'ємні сили, наприклад, сила тяжіння. Тоді

$$\mathbf{F} = -\oint_S p(\mathbf{r}, t) \mathbf{n} dS + \int_V \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) dV, \quad (3.2)$$

де $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ – об'ємна сила, яка діє на одиничну масу, розташовану в точці $\mathbf{r}$.

Зауважимо, що для будь-якої гладкої функції $p(\mathbf{r}, t)$ і будь-якого скінченного об'єму V , обмеженого кусково-гладкою поверхнею S ,

$$\oint_S p(\mathbf{r}, t) \mathbf{n} dS = \int_V (\nabla p(\mathbf{r}, t)) dV. \quad (3.3)$$

Користуючись формулами (3.2) і (3.3), перепишемо рівняння руху (3.1) у вигляді

$$\int_V \left(\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \rho \mathbf{f} + \nabla p \right) dV = 0.$$

Оскільки ця рівність правильна для будь-якого об'єму V , то з неї випливає, що

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p. \quad (3.4)$$

Рівняння (3.4) є наслідком другого закону Ньютона, або принципу Д'Аламбера. Похідна $d\mathbf{v}/dt$ в ньому характеризує рух малих частинок рідини, з яких складається об'єм V . Для того щоб переписати рівняння (3.4) для поля швидкостей, зазначимо, що приріст $\Delta \mathbf{v}$ швидкості малої частинки рідини є сумою двох внесків: зумовленого зміною швидкості потоку рідини у фіксованій точці простору та зумовленого переносом цієї частинки потоком рідини з одного місця в інше. Для приросту x – компоненти швидкості такої частинки рідини за нескінченно малий проміжок часу Δt маємо:

$$\begin{aligned}\Delta v_x &= v_x(x + v_x \Delta t, y + v_y \Delta t, z + v_z \Delta t; t + \Delta t) - v_x(x, y, z; t) = \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial t} \Delta t + \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \Delta t + o(\Delta t).\end{aligned}$$

Таким чином,

$$\frac{d}{dt} v_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) v_x, \quad (3.5)$$

де символом $(\mathbf{v} \nabla)$ позначено скалярний диференціальний оператор

$$v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Вирази, подібні до (3.5), мають місце й для “матеріальних” похідних компонент v_y і v_z . Враховуючи їх, перепишемо рівняння (3.4) у вигляді

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \rho \mathbf{f}. \quad (3.6)$$

Система із трьох рівнянь (3.6) містить, у загальному випадку, п’ять невідомих функцій – v_x , v_y , v_z , ρ і p . Дві з них – ρ і p – пов’язані між собою функціональним співвідношенням

$$p = p(\rho), \quad (3.7)$$

явний вигляд якого визначається рівнянням стану речовини середовища. Отже, потрібен ще один фізичний закон, і ним є закон збереження маси.

Якщо в об’єм V втікає або з нього витікає рідина, то зміна її маси в ньому за одиницю часу визначається виразом

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV = - \oint_S \rho(\mathbf{r}, t) (\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}) dS.$$

Звідси, на підставі теореми Остроградського-Гаусса

$$\oint_S \rho(\mathbf{r}, t) (\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}) dS = \int_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV$$

і враховуючи довільність V , дістаємо рівняння неперервності:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}).$$

Отже, маємо таку систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla p + \rho \mathbf{f}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0, \\ p &= p(\rho). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Оскільки система (3.8) нелінійна, загальні методи її розв'язування досі залишаються за межами можливостей сучасної науки. Проте відомі її стаціонарні (незалежні від часу) розв'язки, що відповідають стійким станам спокою або стаціонарного руху рідини. Стійкість розв'язку системи (3.8) означає, що малі збурення при $t = t_0$ функцій, що становлять її розв'язок, не ведуть до виходу значень цих функцій при $t > t_0$ за певні межі.

Нехай $\mathbf{v}_0(x, y, z)$, $\rho_0(x, y, z)$, $p_0(x, y, z)$ – стійкий стаціонарний розв'язок системи (3.8) при наявності стаціонарної зовнішньої сили $\mathbf{f}_0$. Розглядатимемо лише ті розв'язки, які при $t \geq t_0$ досить мало відрізняються від $\mathbf{v}_0$, ρ_0 , p_0 . Покладемо

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{v}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t), \\ \rho(\mathbf{r}, t) &= \rho_0(\mathbf{r}) + \rho_1(\mathbf{r}, t), \\ p(\mathbf{r}, t) &= p_0(\mathbf{r}) + p_1(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (3.9)$$

і підставимо ці вирази в систему (3.8). Нехтуючи членами другого порядку відносно малих величин $\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t)$, $\rho_1(\mathbf{r}, t)$ і $p_1(\mathbf{r}, t)$, знаходимо для цих величин таку наближену систему лінійних рівнянь:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + \rho_0(\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}_1 + \rho_0(\mathbf{v}_1 \nabla) \mathbf{v}_0 &= \frac{\rho_1}{\rho_0} \nabla p_0 - \nabla \left(\frac{dp_0}{d\rho_0} \rho_1 \right), \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_1 \mathbf{v}_0) + \operatorname{div}(\rho_0 \mathbf{v}_1) &= 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Завдання 3.1.1. Виходячи із системи (3.8), виконайте всі зазначені вище перетворення та отримайте систему лінійних рівнянь (3.10).

Рівняння (3.10) описують малі коливання рідини або газу на фоні стійкого стаціонарної потоку. Підкреслимо, що ці рівняння лінійні. Вони називаються лінеаризованими рівняннями гідродинаміки, а описана вище процедура для їх знаходження – лінеаризацією. Якщо й на зовнішню об’ємну силу накладається збурення $\mathbf{f}_1(\mathbf{r}, t)$ того ж порядку, що й шукані функції $\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t)$, $\rho_1(\mathbf{r}, t)$ і $p_1(\mathbf{r}, t)$, то в правій частині першого рівняння в (3.10) з’являється додатковий член $\rho_0 \mathbf{f}_1(\mathbf{r}, t)$.

Розглянемо найпростіший випадок, коли вивчаються малі відхилення від стану спокою однорідної рідини. Тоді

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \rho_0(\mathbf{r}) = \text{const}, \quad p_0(\mathbf{r}) = \text{const},$$

і якщо зовнішня сила $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ досить мала, система (3.10) набирав вигляду

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} &= -a^2 \nabla \rho_1 + \rho_0 \mathbf{f}, \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v}_1 &= 0, \end{aligned} \tag{3.11}$$

де $a^2 \equiv dp_0/d\rho_0$.

Зауважимо, що похідна $dp_0/d\rho_0$ для термодинамічно стійких систем є додатною величиною і має розмірність квадрата швидкості. Звукові та ультразвукові коливання рідини або газу – це відносно швидкі процеси, в яких конвективна теплопередача не відіграє помітної ролі. Тому рівняння, що пов’язує p і ρ , повинно узгоджуватися з умовою адіабатності процесу.

Вважатимемо, що об’ємна сила $\mathbf{f}$ у системі (3.11) відсутня, або що принаймні існує така функція W , що

$$-\nabla W = \mathbf{f}. \tag{3.12}$$

Іншими словами, для об’ємної сили $\mathbf{f}$ існує потенціал W .

Припустимо також, що в початковий момент часу $t = t_0$ поле швидкостей є потенціальним:

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}_1 = 0. \quad (3.13)$$

Тоді існує потенціал швидкості $\psi_0(\mathbf{r})$, тобто

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t_0) = -\nabla \psi_0(\mathbf{r}). \quad (3.14)$$

Із першого рівняння (3.11) за умови (3.12) дістаємо:

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t_0) - \nabla \left\{ \int_{t_0}^t \left[W(\mathbf{r}, t') + \frac{a^2}{\rho_0} \rho_1(\mathbf{r}, t') \right] dt' \right\},$$

або, з урахуванням співвідношення (3.14),

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t) = -\nabla \left\{ \psi_0(\mathbf{r}) + \int_{t_0}^t \left[W(\mathbf{r}, t') + \frac{a^2}{\rho_0} \rho_1(\mathbf{r}, t') \right] dt' \right\}.$$

Остання рівність означає, що при виконанні умов (3.12) і (3.14) течія рідини залишається потенціальною у будь-який момент часу, і існує потенціал швидкості $\psi(\mathbf{r}, t)$, такий, що

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t) = -\nabla \psi(\mathbf{r}, t). \quad (3.15)$$

Відтак із першого рівняння (3.11) знаходимо:

$$\frac{1}{a^2} \rho_0 \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} - W \right] - \rho_1 = \chi(t), \quad (3.16)$$

де $\chi(t)$ – деяка функція, яка залежить лише від часу. Оскільки потенціал швидкості взагалі визначено лише з точністю до такої ж функції, то $\chi(t)$ завжди можна вибрати таким чином, що замість (3.16) виконується рівність

$$\rho_1(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{a^2} \rho_0 \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} - W \right]. \quad (3.17)$$

Підставивши вираз (3.17) у друге рівняння в (3.11), бачимо, що

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial W}{\partial t} + a^2 \operatorname{div}(\operatorname{grad} \psi) = \frac{\partial W}{\partial t} + a^2 \Delta \psi. \quad (3.18)$$

У випадках, коли $\partial W / \partial t = 0$, потенціал швидкості задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \psi. \quad (3.19)$$

Це рівняння називається **хвильовим рівнянням**.

Завдання 3.1.2. Виразіть через потенціал швидкості $\psi(\mathbf{r}, t)$ відхилення тиску $p_1(\mathbf{r}, t)$, які виникають при малих коливаннях рідини або газу в гравітаційному полі Землі.

Завдання 3.1.3. Зведіть систему рівнянь (3.11) до хвильового рівняння для відхилень масової густини $\rho_1(\mathbf{r}, t)$.

Контрольні запитання до § 3.1

1. До якої сили зводяться всі сили, що діють в ідеальній рідині на будь-яку виділену всередині неї частину з боку оточення?
2. Яким рівнянням стану слід користуватися для опису процесу поширення акустичних коливань у рідинах та газах?
3. Які члени в системі рівнянь гідродинаміки ідеальної рідини (3.8) зумовлюють її нелінійність?
4. Як за допомогою потенціалу швидкості можна визначити відхилення швидкості, масової густини і тиску, які виникають при малих коливаннях рідини або газу?

3.2. Задача Коші для хвильового рівняння. Єдиність розв'язку

Згідно з формулами (3.15) і (3.17), відхилення швидкості та масової густини, які виникають при малих коливаннях рідини або газу, повністю визначаються через потенціал швидкості ψ . Сам же потенціал ψ можна відтворити для довільного моменту часу $t > t_0$, якщо відомі його значення та значення його часової похідної для деякого моменту часу t_0 .

Отже, дослідження малих коливань рідини або газу природно зводиться до задачі, яка називається **задачею Коші для хвильового рівняння**: у просторі E_3 і для $t > t_0$ знайти функцію $\psi(\mathbf{r}, t)$, яка задовольняє рівняння (3.19) і початкові умови

$$\psi(\mathbf{r}, t_0) = u(\mathbf{r}), \quad \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t_0)}{\partial t} = v(\mathbf{r}). \quad (3.20)$$

Перш ніж перейти до побудови розв'язку цієї задачі $\psi(\mathbf{r}, t)$, перевіримо його єдиність та окреслимо клас функцій, до якого він належить.

Теорема 3.2.1. Нехай двічі неперервно диференційовна функція $\Psi(\mathbf{r}, t)$ задовольняє хвильове рівняння (3.19) при $t > t_0$ і також умови

$$\Psi(\mathbf{r}, t_0) = 0, \quad \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t_0)}{\partial t} = 0. \quad (3.21)$$

Тоді

$$\Psi(\mathbf{r}, t) \equiv 0, \quad t > t_0.$$

Доведення. Оскільки рівняння (3.19) інваріантне відносно зсувів початку відліку часу та відносно зміни напрямку плину часу $t \rightarrow -t$, можна вважати, без обмеження загальності, що $t_0 = 0$. Крім того, із лінійності й однорідності рівняння (3.19) та умов (3.21) випливає, що їх задовольняють і дійсна, і уявна частини функції $\Psi(\mathbf{r}, t)$. Тому можемо вважати, що $\Psi(\mathbf{r}, t)$ – дійсна функція.

Позначаючи тимчасово координати (at, x, y, z) через (x_0, x_1, x_2, x_3) , перепишемо таку очевидну тотожність

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \frac{2}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{a^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) = \\ &= \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)^2 \right] - \\ &- 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi}{a \partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Psi}{a \partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Psi}{a \partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

у вигляді

$$\operatorname{div} \mathbf{A} \equiv \frac{\partial A_0}{\partial x_0} + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} = 0, \quad (3.22)$$

де $\mathbf{A} = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ – чотиривимірний вектор з компонентами

$$\begin{aligned} A_0 &= \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \right)^2, \\ A_j &= -2 \frac{\partial \Psi}{\partial x_0} \frac{\partial \Psi}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Розглянемо тепер у чотиривимірному просторі зрізаний “світловий” конус D^* , який визначимо як геометричне місце точок, координати яких задовольняють співвідношення

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 \leq (x_0 - a_0)^2, \quad 0 \leq x_0 \leq a'_0 < a_0,$$

де (a_0, a_1, a_2, a_3) – вершина конуса – є довільною точкою чотиривимірного півпростору $x_0 > 0$.

Позначимо через σ_0 і σ_1 відповідно нижню та верхню основи

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 \leq a_0'^2,$$

*) Назва “світловий” йде від задач релятивістської фізики, де у відповідних хвильових рівняннях a – швидкість світла у вакуумі.

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 \leq (a'_0 - a_0)^2$$

конуса D і через Γ – його бокову поверхню

$$(x_0 - a_0)^2 - (x_1 - a_1)^2 - (x_2 - a_2)^2 - (x_3 - a_3)^2 = 0,$$

$$0 \leq x_0 \leq a'_0 < a_0.$$

Інтегрування обох частин рівності (3.22) по об'єму конуса D та застосування чотирирівимірного варіанта теореми Остроградського-Гаусса дають:

$$\int_D \operatorname{div} \mathbf{A} dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\Gamma} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{\sigma_0} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{\sigma_1} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) dS = 0, \quad (3.24)$$

де $\mathbf{n} = (n_0, n_1, n_2, n_3)$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до відповідного елемента поверхні конуса D , і $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) \equiv A_0 n_0 + A_1 n_1 + A_2 n_2 + A_3 n_3$.

Користуючись явним виглядом компонент вектора $\mathbf{A}$, перепишемо підінтегральний вираз в інтегралі по поверхні Γ в (3.24) у вигляді

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) &= n_0 \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \right)^2 \right] \\ &\quad - \sum_{j=1}^3 2n_j \frac{\partial \Psi}{\partial x_0} \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} = \quad (3.25) \\ &= \frac{n_0^2 - n_1^2 - n_2^2 - n_3^2}{n_0} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_0} \right)^2 + \frac{1}{n_0} \sum_{j=1}^3 \left(n_j \frac{\partial \Psi}{\partial x_0} - n_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \right)^2. \end{aligned}$$

На поверхні Γ , яка є геометричним місцем точок, що задовольняють рівняння

$$F(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0 + \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2} - a_0 = 0, \quad 0 \leq x_0 \leq a'_0 < a_0,$$

згідно із загальним означенням вектора нормалі до гладкої поверхні маємо:

$$n_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial x_0} \right) \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_3} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$n_j = \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} \right) \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_3} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x_j - a_j}{\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2}}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Отже, на поверхні Γ

$$n_0^2 - n_1^2 - n_2^2 - n_3^2 = 0,$$

і тому, згідно з формулою (3.25), $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) \geq 0$. Відповідно,

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) dS \geq 0. \quad (3.26)$$

На нижній основі σ_0 в силу початкових умов (3.21) маємо $\mathbf{A} = 0$, і тому

$$\int_{\sigma_0} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) dS = 0. \quad (3.27)$$

На верхній основі σ_1 , яка є частиною площини $x_0 = a'_0$, маємо $\mathbf{n} = (1, 0, 0, 0)$. Тоді, згідно з формулою (3.25),

$$\int_{\sigma_1} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_{\sigma_1} A_0 dS =$$

$$= \int_{\sigma_1} \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \right)^2 \right] dS \geq 0. \quad (3.28)$$

Внаслідок співвідношень (3.24), (3.26) і (3.27) знак нерівності у формулі (3.28) треба опустити. А це означає, що на поверхні σ_1

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_0} = \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} = \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} = 0. \quad (3.29)$$

Оскільки a'_0 може набувати довільних значень з інтервалу $(0, a_0)$, рівності (3.29) справджуються в усіх точках конуса D . Спрямовуючи a'_0 до a_0 і враховуючи, що за припущенням Ψ – неперервно диференційовна функція, приходимо до висновку, що рівності (3.29) правильні й у вершині конуса, яка може знаходитися в будь-якій точці півпростору $x_0 > 0$. Тому для довільної точки $\mathbf{r}$ простору E_3 і довільного моменту часу $t > 0$ (або $t > t_0$) $\Psi \equiv \text{const}$. Більше того, враховуючи умови (3.21), маємо: $\Psi \equiv 0$.

Наслідок 3.2.2. Задача Коші для хвильового рівняння в необмеженому просторі має єдиний розв’язок у класі двічі неперервно диференційовних функцій.

Справді, припустивши існування двох розв’язків цієї задачі, відразу ж приходимо до висновку, що їх різниця дорівнює нулю, тобто вони збігаються.

Контрольні запитання до § 3.2

1. Чи завжди течія рідини або газу при відсутності зовнішніх сил є потенціальною?
2. Яке рівняння задовольняють координати точок бокової поверхні верхньої та нижньої частин чотиривимірною “світлового” конуса з вершиною в точці $(a_0, 0, 0, 0)$?
3. Як знайти компоненти одиничного вектора нормалі до поверхні тіла, точки якої задовольняють рівняння $F(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$, де F – гладка функція?
4. Чому дорівнює потенціал $\psi(\mathbf{r}, t)$ поля швидкостей при $t > t_0$, якщо зовнішні сили відсутні і

$$\psi(\mathbf{r}, t_0) = u_0(\mathbf{r}), \quad \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t_0)}{\partial t} = 0,$$

де $u_0(\mathbf{r})$ – гармонічна функція?

3.3. Розв'язок задачі Коші для хвильового рівняння в E_3 . Формула Пуассона

Перейдемо тепер до відшукування розв'язку задачі Коші (3.19), (3.20). Вважатимемо спочатку, що початкові функції $u(\mathbf{r})$ і $v(\mathbf{r})$ нескінченно диференційовні, і що для будь-яких цілих чисел $s_1, s_2, s_3 \geq 0$ і $n > 1$ вони задовольняють умови

$$\left| \frac{\partial^{s_1+s_2+s_3} u(\mathbf{r})}{\partial x^{s_1} \partial y^{s_2} \partial z^{s_3}} \right| = o(|\mathbf{r}|^{-n}), \quad \left| \frac{\partial^{s_1+s_2+s_3} v(\mathbf{r})}{\partial x^{s_1} \partial y^{s_2} \partial z^{s_3}} \right| = o(|\mathbf{r}|^{-n}). \quad (3.30)$$

За таких умов єдиний двічі неперервно диференційований розв'язок $\psi(\mathbf{r}, t)$ нашої задачі є функцією, яка нескінченно диференційовна за всіма змінними, а також інтегровна разом з усіма своїми частинними похідними. Справді, припускаючи існування $\psi(\mathbf{r}, t)$, розглянемо перетворення Фур'є цієї функції за просторовими змінними:

$$\hat{\psi}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{E_3} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \psi(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}. \quad (3.31)$$

Виходячи із рівняння (3.19) і початкових умов (3.20) та користуючись співвідношеннями

$$\frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial t^2}(\mathbf{k}, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{\psi}(\mathbf{k}, t), \quad \Delta \hat{\psi}(\mathbf{k}, t) = -k^2 \hat{\psi}(\mathbf{k}, t),$$

знаходимо, що $\hat{\psi}(\mathbf{k}, t)$ є розв'язком такої елементарної задачі:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{\psi}(\mathbf{k}, t) = -a^2 k^2 \hat{\psi}(\mathbf{k}, t),$$

$$\hat{\psi}(\mathbf{k}, 0) = \hat{u}(\mathbf{k}), \quad \frac{\partial \hat{\psi}(\mathbf{k}, 0)}{\partial t} = \hat{v}(\mathbf{k}),$$

де $\hat{u}(\mathbf{k})$, $\hat{v}(\mathbf{k})$ – Фур'є-образи функцій $u(\mathbf{r})$, $v(\mathbf{r})$. Звідси знаходимо, що

$$\hat{\psi}(\mathbf{k}, t) = \hat{u}(\mathbf{k}) \cos akt + \hat{v}(\mathbf{k}) \frac{\sin akt}{ak}. \quad (3.32)$$

Користуючись властивостями Фур'є-образів та беручи до уваги властивості функцій $u(\mathbf{r})$ і $v(\mathbf{r})$, а також співвідношення (3.20), бачимо, що функції $\hat{u}(\mathbf{k})$ і $\hat{v}(\mathbf{k})$ нескінченно диференційовні за змінними k_x , k_y , k_z , і що для будь-яких цілих чисел $s_1, s_2, s_3 \geq 0$ і $n > 1$

$$\left| \frac{\partial^{s_1+s_2+s_3} \hat{u}(\mathbf{k})}{\partial k_x^{s_1} \partial k_y^{s_2} \partial k_z^{s_3}} \right| = o(|\mathbf{k}|^{-n}), \quad \left| \frac{\partial^{s_1+s_2+s_3} \hat{v}(\mathbf{k})}{\partial k_x^{s_1} \partial k_y^{s_2} \partial k_z^{s_3}} \right| = o(|\mathbf{k}|^{-n}). \quad (3.33)$$

Функції $\cos akt$ і $\sin akt/ak$ у формулі (3.32) нескінченно диференційовні за змінними k_x , k_y , k_z , та обмежені, як і їх похідні, при дійсних значеннях цих змінних. Тому функція $\hat{\psi}(\mathbf{k}, t)$ також нескінченно диференційовна за k_x , k_y , k_z і для будь-яких цілих чисел $s_1, s_2, s_3 \geq 0$ і $n > 1$ задовольняє умови (3.33). Звідси, знову ж з огляду на властивості Фур'є-образів, випливає, що функція

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) = & \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{E_3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \hat{u}(\mathbf{k}) \cos akt d\mathbf{k} + \\ & + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{E_3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \hat{v}(\mathbf{k}) \frac{\sin akt}{ak} d\mathbf{k} \end{aligned} \quad (3.34)$$

задовольняє рівняння (3.19) та умови (3.20), і при цьому нескінченно диференційовна за всіма своїми змінними, спадаючи разом зі своїми частинними похідними до нуля при $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ швидше від будь-якого степеня $|\mathbf{r}|$.

Виразимо тепер цей розв'язок через функції $u(\mathbf{r})$ і $v(\mathbf{r})$. Спочатку розглянемо випадок, коли $u(\mathbf{r}) \equiv 0$, $v(\mathbf{r}) \neq 0$, виконаємо всі розрахунки для функції

$$v_{\tau}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(4\pi\tau)^{3/2}} \int_{E_3} e^{-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}{4\tau}} v(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (3.35)$$

замість $v(\mathbf{r})$, а потім, враховуючи, що $v_{\tau}(\mathbf{r}) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} v(\mathbf{r})$, спрямуємо τ до нуля.

Оскільки $v_{\tau}(\mathbf{r})$ – згортка двох інтегровних функцій, її Фур'є-образ дорівнює

$$\hat{v}_{\tau}(\mathbf{k}) = e^{-\tau k^2} \hat{v}(\mathbf{k}),$$

звідки випливає, що $\hat{v}_{\tau}(\mathbf{k}) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \hat{v}(\mathbf{k})$. Формула (3.34) набирає вигляду

$$\psi_{\tau}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{E_3} d\mathbf{k} \frac{\sin akt}{ak} e^{-\tau k^2} \hat{v}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (3.36)$$

Підставляючи у формулу (3.36) вираз для $\hat{v}(\mathbf{k})$:

$$\hat{v}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{E_3} d\mathbf{r}' e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}'} v(\mathbf{r}'),$$

та змінюючи порядок інтегрування за змінними $\mathbf{k}$ і $\mathbf{r}'$, приходимо до інтегрального зображення

$$\psi_{\tau}(\mathbf{r}, t) = \int_{E_3} d\mathbf{r}' G_{\tau}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; t) v(\mathbf{r}'), \quad (3.37)$$

де

$$\begin{aligned} G_{\tau}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{E_3} d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} e^{-\tau k^2} \frac{\sin akt}{ak} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} dk k^2 \frac{\sin akt}{ak} e^{-\tau k^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta e^{ikr \cos \theta} = \\ &= \frac{1}{2\pi^2 ar} \int_0^{\infty} dk \sin akt \sin kre^{-\tau k^2}. \end{aligned}$$

Застосування формули

$$\sin akt \sin kr = \frac{1}{2} [\cos k(r - at) - \cos k(r + at)]$$

дає:

$$G_{\tau}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi^2 ar} \int_0^{\infty} dk [\cos k(r - at) - \cos k(r + at)] e^{-\tau k^2}.$$

Враховуючи далі, що

$$\int_0^{\infty} dk \cos k(r \pm at) e^{-\tau k^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(r \pm at)} e^{-\tau k^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} e^{-\frac{(r \pm at)^2}{4\tau}},$$

дістаємо:

$$G_{\tau}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi ar \sqrt{4\pi\tau}} \left[e^{-\frac{(r-at)^2}{4\tau}} - e^{-\frac{(r+at)^2}{4\tau}} \right].$$

Згадаємо тепер, що

$$\lim_{\tau \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{(r \pm at)^2}{4\tau}} = \delta(r \pm at).$$

Оскільки $r > 0$, $a > 0$ і $t > 0$, то $\delta(r + at) = 0$. Отже, розглядаючи границю послідовності функцій $G_{\tau}(\mathbf{r}, t)$ як узагальнену функцію просторових координат, маємо:

$$\lim_{\tau \downarrow 0} G_{\tau}(\mathbf{r}, t) = \frac{\delta(r - at)}{4\pi ar}, \quad t > 0. \quad (3.38)$$

Шуканий розв'язок має вигляд

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \lim_{\tau \downarrow 0} \psi_{\tau}(\mathbf{r}, t) = \int_{E_3} d\mathbf{r}' \frac{\delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - at)}{4\pi a |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} v(\mathbf{r}'). \quad (3.39)$$

Тепер у формулі (3.39) покладемо $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}$, $d\mathbf{r}' = d\boldsymbol{\rho}$, і перейдемо до сферичної системи координат. Дістаємо:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int_0^{\infty} d\rho \rho^2 \frac{\delta(\rho - at)}{4\pi a \rho} \int_{|\mathbf{n}|=1} v(\mathbf{r} + \rho \mathbf{n}) d\mathbf{n},$$

де інтеграл за $\mathbf{n}$ береться по сфері одиничного радіуса. Згідно з властивостями δ -функції, інтеграл за змінною ρ дорівнює значенню підінтегральної функції в точці $\rho = at$. Тому

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{t}{4\pi} \int_{|\mathbf{n}|=1} v(\mathbf{r} + at\mathbf{n}) d\mathbf{n}. \quad (3.40)$$

Для довільної неперервної функції $w(\mathbf{r}, t)$ позначимо:

$$M[w](\mathbf{r}, t) \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{|\mathbf{n}|=1} w(\mathbf{r} + at\mathbf{n}) d\mathbf{n}. \quad (3.41)$$

Тоді формула

$$\psi(\mathbf{r}, t) = tM[v](\mathbf{r}, t) \quad (3.42)$$

дає розв'язок задачі Коші (3.19), (3.20) у випадку, коли $u(\mathbf{r}) = 0$, $v(\mathbf{r}) \neq 0$. Щоб дістати відповідний розв'язок для випадку, коли $u(\mathbf{r}) \neq 0$, звернемо увагу на те, що перший інтеграл у правій частині формули (3.34) можна записати у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{E_3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \hat{u}(\mathbf{k}) \frac{\sin akt}{ak} d\mathbf{k} \right).$$

Повторюючи для цього інтеграла ті ж самі перетворення, що привели до співвідношення (3.40), робимо висновок, що початкова функція $u(\mathbf{r})$ дає внесок

$$\frac{\partial}{\partial t} tM[u](\mathbf{r}, t).$$

Отже, розв'язок задачі Коші (3.19), (3.20), з початковими функціями $u(\mathbf{r}) \neq 0$, $v(\mathbf{r}) \neq 0$, безпосередньо виражається через ці функції так:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} tM[u](\mathbf{r}, t) + tM[v](\mathbf{r}, t). \quad (3.43)$$

Формула (3.43) називається **формулою Пуассона**. Ми вивели її, припустивши, що функції $u(\mathbf{r})$ і $v(\mathbf{r})$ нескінченно диференційовні, і що при $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ вони та всі їх похідні є

величинами вищого порядку малості в порівнянні з будь-яким степенем $|\mathbf{r}|^{-1}$. За таких умов розв'язок (3.43) і сам є функцією, нескінченно диференційовною за всіма змінними, включно з часом t , яка при $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ спадає до нуля разом з усіма своїми похідними.

Зауважимо, однак, що інтеграл у перетворенні (3.41) береться лише по компактній множині. Згідно з властивостями інтегралів, що залежать від параметрів, перетворення (3.41) при $t > 0$ переводить кожен неперервну функцію, яка має неперервні частинні похідні до n -го порядку включно, в n -кратно неперервно диференційовну функцію за всіма змінними, включаючи й t . Враховуючи тепер, що перетворення (3.42) при застосуванні до нескінченно диференційовних функцій, що разом з похідними досить швидко спадають до нуля на нескінченності, дає функції, які задовольняють хвильове рівняння (3.19), і що зазначеними нескінченно диференційовними функціями та їх відповідними похідними можна в кожній обмеженій області наближати з довільною точністю будь-яку двічі неперервно диференційовну функцію разом з її похідними, приходимо до висновку, що перетворення (3.42) переводить будь-які двічі неперервно диференційовні функції у функції, що задовольняють хвильове рівняння (3.19).

Завдання 3.3.1. За допомогою безпосередніх розрахунків перевірте, що при довільній двічі неперервно диференційовній функції $v(\mathbf{r})$ формула (3.42) дає функцію, яка задовольняє рівняння (3.19) і початкові умови

$$\psi(\mathbf{r}, 0) = 0, \quad \psi_t(\mathbf{r}, 0) = v(\mathbf{r}).$$

Вказівка. Інтеграл

$$\frac{at}{4\pi} \int_{|\mathbf{n}|=1} (\mathbf{n} \cdot \text{grad } v(\mathbf{r} + at\mathbf{n})) d\mathbf{n} = \frac{1}{4\pi at} \int_{|\mathbf{n}|=1} (\mathbf{n} \cdot \text{grad } v(\mathbf{r} + at\mathbf{n})) a^2 t^2 d\mathbf{n},$$

який з'являється у виразі для $\psi_t(\mathbf{r}, t)$, зведіть до інтеграла від нормальної складової $\text{grad } v(\mathbf{r})$ по поверхні сфери з радіусом at і центром у точці $\mathbf{r}$, і потім для його обчислення скористайтеся формулою Остроградського-Гаусса.

Беручи далі до уваги те, що якщо деякі тричі диференційовні функції задовольняють хвильове рівняння (3.19), то його задовольняють і їх перші похідні, вже не багато залишається додати, щоб зробити такий висновок:

Для будь-якої тричі неперервно диференційовної функції $u(\mathbf{r})$ і будь-якої двічі неперервно диференційовної функції $v(\mathbf{r})$ формула (3.43) дає єдиний двічі неперервно диференційовний розв'язок тривимірної задачі Коші (3.19), (3.20) для хвильового рівняння.

Припустимо тепер, що при $t = 0$ початкове збурення в середовищі відрізняється від нуля лише в деякій області Ω навколо початку координат. Згідно з формулою (3.43), значення хвильового поля $\psi(\mathbf{r}, t)$ в точці $\mathbf{r}$ у момент часу $t > 0$ обчислюється за допомогою інтегралів по поверхні (позначимо її через S) сфери з радіусом at і центром у точці $\mathbf{r}$. Оскільки ці інтеграли залежать лише від значень початкових функцій $u(\mathbf{r})$ і $v(\mathbf{r})$ на поверхні S , поле $\psi(\mathbf{r}, t)$ відрізняється від нуля лише тоді, коли поверхня S перетинає область Ω , тобто на інтервалі часу

$$\frac{d}{a} < t < \frac{D}{a},$$

де d і D – відповідно найменша та найбільша відстань від точки $\mathbf{r}$ до області Ω .

Це є свідченням того факту, що хвильове рівняння описує процес поширення збурень зі сталою швидкістю a . Початкове збурення в області Ω не впливає на середовище в точці $\mathbf{r}$, поки не мине проміжок часу d/a . Саме стільки часу потрібно хвилям, які виходять із області Ω , щоб дійти до цієї точки. Після моменту часу D/a вплив початкового збурення у точці $\mathbf{r}$ припиняється.

У граничному випадку, коли область Ω стягується в точку (початок координат), вплив початкового збурення відчувається у точці $\mathbf{r}$ лише в момент часу $t = r/a$. Цей факт відомий як **принцип Гюйгенса** для хвильового рівняння: початкове збурення, яке локалізоване у просторі, пізніше проявляється в кожній точці як явище, локалізоване в часі.

Контрольні запитання до § 3.3

1. Яке рівняння задовольняє Фур'є-образ $\hat{\psi}(\mathbf{k}, t)$ функції $\psi(\mathbf{r}, t)$, яка сама задовольняє хвильове рівняння (3.19) і двічі диференційовна та інтегровна разом з усіма своїми похідними до другого порядку включно?
2. Чому дорівнюють внески функцій $u(\mathbf{r})$ і $v(\mathbf{r})$, що входять у початкові умови (3.20), у Фур'є-образ розв'язку задачі Коші для рівняння (3.19), якщо ці функції двічі диференційовні та інтегровні, разом зі своїми першими та другими похідними?
3. Внесок від початкової функції $v(\mathbf{r})$ у розв'язок задачі Коші (3.19), (3.20) при $t > 0$ можна подати у вигляді інтегрального перетворення $\int_{E_3} d\mathbf{r}' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) v(\mathbf{r}')$. Чому дорівнює ядро $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t)$ цього перетворення?
4. У момент часу $t = 0$ тиск у рідині відрізняється від рівноважного лише всередині сфери з радіусом R і центром у деякій точці. За який найменший час рідина в центрі цієї сфери прийде в рівноважний стан? На її поверхні?
5. У чому полягає принцип Гюйгенса?

3.4. Розв'язок задачі Коші для хвильового рівняння у двовимірному та одновимірному просторах

Двовимірна задача Коші для хвильового рівняння виникає тоді, коли в силу заданих фізичних умов хвильове поле та інші шукані функції залишаються незмінними при зміщеннях у певному напрямі. Вважаючи, без обмеження загальності, що цей напрям паралельний осі z , можемо записати її у вигляді

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = a^2 \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right], \quad (3.44)$$

$$\psi|_{t=0} = u_0(x, y), \quad \partial \psi / \partial t|_{t=0} = v_0(x, y). \quad (3.45)$$

Для знаходження розв'язку задачі (3.44), (3.45) у класі двічі неперервно диференційовних функцій розглянемо розв'язок $\psi = \psi(x, y, z, t)$ тривимірного хвильового рівняння (3.19) при початкових умовах (3.45), вважаючи при цьому, що незалежні від змінної z функції $u_0(x, y)$ і $v_0(x, y)$ відповідно тричі та двічі неперервно диференційовні. Оскільки в рівняння (3.19) входять лише похідні від функції ψ , його задовольняє й функція $\tilde{\psi} = \psi(x, y, z + h, t)$, де h – довільне дійсне число. Крім того, функція $\tilde{\psi}$ задовольняє й початкові умови (3.45), що впливає із незалежності цих умов від змінної z . Іншими словами, обидві функції $\psi(x, y, z, t)$ і $\tilde{\psi}(x, y, z, t)$ є розв'язками тривимірної задачі Коші (3.19), (3.45). Внаслідок єдиності розв'язку останньої вони мають дорівнювати одна одній: $\psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z + h, t)$. Це означає, що функція ψ від змінної z не залежить: $\psi = \psi(x, y, t)$.

Тим самим ми довели, що двічі неперервно диференційовний розв'язок тривимірної задачі Коші для однорідного хвильового рівняння не залежить від певної змінної, якщо від цієї змінної не залежать початкові функції. Для розв'язування двовимірної задачі (3.44), (3.45) можна скористатися формулою Пуассона для відповідної тривимірної задачі (3.19), (3.45).

Нехай спочатку $u_0(x, y) = 0$, $v_0(x, y) \neq 0$. Тоді, згідно з формулою (3.40),

$$\psi(x, y, t) = \frac{t}{4\pi} \int_{|\mathbf{n}|=1} v_0(x + atn_x, y + atn_y) d\mathbf{n}. \quad (3.46)$$

Інтегрування в (3.46) ведеться по поверхні тривимірної одиничної сфери, що не характерно для двовимірних задач. Щоб це усунути, перетворимо інтеграл (3.46) в інтеграл по колу, який є проекцією цієї сфери на площину (xOy) . Беручи до уваги, що у формулі (3.46)

$$n_x = \sin \theta \cos \varphi, \quad n_y = \sin \theta \sin \varphi, \quad n_z = \cos \theta,$$

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

а площа елемента поверхні одиничної сфери

$$d\mathbf{n} = \sin \theta \, d\theta d\varphi ,$$

перейдемо до нових змінних

$$\xi = \sin \theta \cos \varphi , \quad \eta = \sin \theta \sin \varphi , \quad \zeta = \cos \theta ; \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 .$$

Формули оберненого перетворення для точок верхньої півсфери мають вигляд

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi} , \quad \theta = \arcsin \sqrt{\eta^2 + \xi^2} , \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} . \quad (3.47)$$

Оскільки підінтегральний вираз у (3.46) не залежить від змінної z , інтеграли по верхній та нижній півсферах збігаються. Елемент поверхні $d\mathbf{n}$ у нових координатах дорівнює

$$d\mathbf{n} = \sin \theta \, J d\xi d\eta , \quad (3.48)$$

де $\sin \theta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ і J – якобіан перетворення (3.47):

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} & \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}} . \quad (3.49)$$

Інтеграл (3.46) (подвійний інтеграл по верхній півсфері) набирає вигляду

$$\psi(x, y, t) = \frac{2t}{4\pi} \iint_{\xi^2 + \eta^2 \leq 1} \frac{v_0(x + a\xi t; y + a\eta t)}{\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}} d\xi d\eta . \quad (3.50)$$

Ще одна заміна змінних

$$\begin{aligned} x + a\xi t &= x', & \xi &= \frac{x' - x}{at}, \\ y + a\eta t &= y', & \eta &= \frac{y' - y}{at}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

остаточно дає:

$$\psi(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \iint_{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}| \leq at} \frac{v_0(x', y')}{\sqrt{a^2 t^2 - (x' - x)^2 - (y' - y)^2}} dx' dy' . \quad (3.52)$$

Позначимо

$$\tilde{M}[w](x, y, t) \equiv \frac{1}{2\pi a} \iint_{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}| \leq at} \frac{w(x', y')}{\sqrt{a^2 t^2 - (x' - x)^2 - (y' - y)^2}} dx' dy'. \quad (3.53)$$

На підставі формул (3.41), (3.43), (3.52) і (3.53) приходимо до висновку, що *двічі неперервно диференційовний розв'язок двовимірної задачі Коші (3.44), (3.45), з тричі неперервно диференційовною функцією $u_0(x, y)$ і двічі неперервно диференційовною функцією $v_0(x, y)$, обчислюється за формулою*

$$\psi(x, y, t) = \tilde{M}[v_0](x, y, t) + \frac{\partial}{\partial t} \tilde{M}[u_0](x, y, t). \quad (3.54)$$

Розглянемо за допомогою формул (3.53) і (3.54) деякі особливості процесу поширення хвиль у середовищі у випадку, коли його опис можна здійснювати за допомогою двовимірної задачі Коші.

Нехай початкове збурення двовимірного хвильового поля зосереджено в малій області Ω площини (xOy) , і нехай P – деяка точка цієї площини на відстані d від Ω . Поки $t < d/a$, середовище в точці P залишається у стані спокою, бо інтеграли у формулі (3.54) беруться по кругах з радіусами $at < d$ і центрами у точці P , на яких початкові функції дорівнюють нулю. Коли ж $t > d/a$, стан спокою середовища в точці P порушується, оскільки тепер інтеграли беруться по кругах, які спочатку перетинають, а потім, починаючи з деякого моменту часу t_1 , повністю покривають область початкового збурення Ω . Фактично тільки область Ω і дає внески в ці інтеграли. Останні в загальному випадку не дорівнюють нулю при $t > t_1$, що означає, що у двовимірному випадку хвиля, спричинена просторово локалізованим збуренням, не має заднього фронту, хоч і має чіткий передній фронт – принцип Гюйгенса порушується.

Фізична причина цього стає зрозумілою, якщо звернути увагу на таку обставину. Зазначена вище двовимірна задача, з початковими функціями, відмінними від нуля в обмеженій плоскій

області Ω , породжуються тими задачами для тривимірного хвильового рівняння, у яких початкові функції відмінні від нуля в нескінченному циліндрі, перпендикулярному площині (xOy) , і мають однакові значення на всіх його поперечних перерізах, паралельних цій площині. Середовище зовні циліндра залишається незбуреним у точці P до тих пір, поки сфера з радіусом at і центром у точці P не перетне циліндр (див. формулу (3.43)). У цей момент від найближчої точки циліндричної області у точку P приходить хвиля. Вона має передній фронт, але не матиме заднього: починаючи з цього моменту, в точку P продовжуватимуть надходити збурення від інших точок циліндричної області, все більш і більш віддалених (сфера достатньо великого радіуса і нескінченний циліндр мають непустий переріз).

Завдання 3.4.1. Нехай функція $u_0(x, y)$ дорівнює нулю, а функція $v_0(x, y)$ невід’ємна та дорівнює нулю зовні деякого круга радіусом $R < \infty$. Знайдіть головний член асимптотичного розкладу розв’язку задачі Коші (3.44), (3.45) при $t \rightarrow \infty$ в довільній точці простору.

Розглянемо наприкінці задачу Коші для хвильового рівняння в одновимірному просторі:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad (3.55)$$

$$\psi|_{t=0} = u_0(x), \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{t=0} = v_0(x). \quad (3.56)$$

Як і у випадку двовимірної задачі, розв’язок можна відшукати, застосувавши формули (3.43), (3.46) до початкових функцій, що залежать лише від змінної x . Якщо $u_0(x) = 0$ і $v_0(x) \neq 0$, це дає:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} v_0(x') dx'. \quad (3.57)$$

У загальному ж випадку двічі диференційовний розв'язок задачі (3.55), (3.56), з початковими функціями $u_0(x)$ і $v_0(x)$, відповідно, двічі диференційовною та диференційовною, обчислюється за формулою

$$\psi(x, t) = \frac{u_0(x + at) + u_0(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} v_0(x') dx'. \quad (3.58)$$

Цей вираз відомий як **формула Д'Аламбера**.

Завдання 3.4.2. Виведіть формулу Д'Аламбера, виходячи із формул (3.53) і (3.54).

Із формули (3.58) випливає, що для одновимірного хвильового рівняння принцип Гюйгенса порушується навіть тоді, коли початкові функції відрізняються від нуля лише на скінченному інтервалі. У цьому можна переконатися, підставивши у формулу (3.57) замість $v_0(x)$ будь-яку невід'ємну функцію.

Нехай $v_0(x) = aw'(x)$, де $w(x)$ – двічі диференційовна функція. Поклавши

$$f_{1,2}(x) = \frac{u_0(x) \pm w(x)}{2},$$

розв'язок (3.58) можемо подати у вигляді

$$\psi(x, t) = f_1(x + at) + f_2(x - at). \quad (3.59)$$

З іншого боку, беручи до уваги, що для будь-якої двічі диференційовної функції $f(x)$ функції $f(x \pm at)$ задовольняють одновимірне хвильове рівняння (3.55), можемо стверджувати, що формула (3.59), де $f_{1,2}(x)$ – довільні двічі диференційовні функції, дає загальний розв'язок рівняння (3.55).

Із формули (3.59) випливає, що якщо початкові функції в задачі Коші (3.55), (3.56) дорівнюють нулю зовні деякого інтервалу, то її розв'язок є сумою, тобто суперпозицією двох хвиль, одна з яких (f_1) рухається зі сталою швидкістю a вліво, а друга (f_2) – з цією ж швидкістю вправо.

Завдання 3.4.3. Виведіть загальний розв'язок (3.59) одновимірного хвильового рівняння та формулу Д'Аламбера, не посилаючись на тривимірну та двовимірну задачі Коші.

Вказівка. Скористайтесь тим, що заміна змінних

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at$$

перетворює одновимірне хвильове рівняння на рівняння

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Контрольні запитання до § 3.4

1. Як за допомогою формули Пуассона можна знайти розв'язок задачі Коші для хвильового рівняння в необмеженому двовимірному просторі?
2. Чому у двовимірному просторі хвилі, спричинені просторово локалізованим збуренням, не мають заднього фронту?
3. Чи справджується принцип Гюйгенса для хвильового рівняння в одновимірному просторі?
4. Яка залежність від координати та часу є характерною для функцій, які задовольняють одновимірне хвильове рівняння?
5. За якої умови на початкові функції розв'язок задачі Коші (3.55), (3.56) має вигляд хвилі, яка, не змінюючи своєї форми, рухається зі сталою швидкістю вправо?

3.5. Неоднорідне хвильове рівняння

Розглянемо тепер хвилі, які породжуються в необмеженому однорідному середовищі деякими джерелами з густиною потужності $f(\mathbf{r}, t)$. Вважатимемо, що $f(\mathbf{r}, t)$ – неперервна функція всіх своїх змінних.

При наявності джерел задача Коші для хвильового рівняння набирає вигляду

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \psi + f(\mathbf{r}, t), \quad t > 0, \quad (3.60)$$

$$\psi(\mathbf{r}, 0) = u_0(\mathbf{r}), \quad \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, 0)}{\partial t} = v_0(\mathbf{r}). \quad (3.61)$$

Її розв'язок можна подати у вигляді суми

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_1(\mathbf{r}, t) + \psi_2(\mathbf{r}, t), \quad (3.62)$$

де $\psi_1(\mathbf{r}, t)$ – розв'язок однорідного хвильового рівняння при заданих початкових умовах (3.61), а $\psi_2(\mathbf{r}, t)$ – функція, яка підпорядковується неоднорідному хвильовому рівнянню (3.60) і яка вибирається так, щоб задовольняти нульові початкові умови

$$\psi_2(\mathbf{r}, 0) = 0, \quad \frac{\partial \psi_2(\mathbf{r}, 0)}{\partial t} = 0. \quad (3.63)$$

З фізичного погляду, $\psi_1(\mathbf{r}, t)$ описує хвилі, спричинені початковим збуренням, а $\psi_2(\mathbf{r}, t)$ – хвилі, викликані джерелами.

Розв'язок $\psi_1(\mathbf{r}, t)$ виражається через початкові функції $u_0(\mathbf{r})$ і $v_0(\mathbf{r})$ за допомогою формули Пуассона (3.43). Якщо ці функції фінітні, їх вплив на середовище в довільній точці триває, згідно з принципом Гюйгенса, лише протягом обмеженого проміжку часу. Згодом коливальний процес у цій точці визначається виключно джерелами, і тому описується функцією $\psi_2(\mathbf{r}, t)$.

Щоб знайти явний вираз для функції $\psi_2(\mathbf{r}, t)$ через $f(\mathbf{r}, t)$, спершу розглянемо дещо формальний випадок, коли

$$f(\mathbf{r}, t) = f_\tau(\mathbf{r}) \delta(t - \tau), \quad \tau > 0,$$

де $f_\tau(\mathbf{r})$ – деяка двічі диференційовна функція, а $\delta(t - \tau)$ – дельта-функція Дірака. Припускаючи, що й у цьому випадку рівняння (3.60) має єдиний неперервний розв'язок $\psi_2(\mathbf{r}, t; \tau)$, який задовольняє умови (3.63), та виходячи із єдиності розв'язку задачі Коші для хвильового рівняння, можемо стверджувати, що $\psi_2(\mathbf{r}, t; \tau) = 0$ до моменту $t = \tau$, коли “вмикаються” джерела. Із неперервності розв'язку випливає, що й $\psi_2(\mathbf{r}, \tau; \tau) = 0$.

Беручи до уваги ці властивості розв'язку $\psi_2(\mathbf{r}, t; \tau)$, проінтегруємо обидві частини рівняння

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} = a^2 \Delta \psi_2 + f_\tau(\mathbf{r}) \delta(t - \tau)$$

за змінною t в межах від $\tau - \varepsilon$ до $\tau + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, а потім спрямуємо ε до нуля. Дістаємо:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[\frac{\partial \psi_2(\mathbf{r}, \tau + \varepsilon; \tau)}{\partial t} - \frac{\partial \psi_2(\mathbf{r}, \tau - \varepsilon; \tau)}{\partial t} \right] = \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, \tau + 0; \tau)}{\partial t} = f_\tau(\mathbf{r}). \quad (3.64)$$

Отже, при $t > \tau$ функція $\psi_2(\mathbf{r}, t; \tau)$ задовольняє однорідне хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} = a^2 \Delta \psi_2, \quad (3.65)$$

а у граничному випадку $t \rightarrow \tau$ – умови

$$\psi_2(\mathbf{r}, \tau + 0; \tau) = 0, \quad \frac{\partial \psi_2(\mathbf{r}, \tau + 0; \tau)}{\partial t} = f_\tau(\mathbf{r}). \quad (3.66)$$

Іншими словами, в інтервалі (τ, ∞) функція $\psi_2(\mathbf{r}, t; \tau)$ дорівнює розв'язку однорідного хвильового рівняння (3.65) при початкових умовах (3.66). Беручи до уваги формулу (3.42), дістаємо:

$$\psi_2(\mathbf{r}, t; \tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ (t - \tau) M[f_\tau](\mathbf{r}, t - \tau), & t > \tau. \end{cases} \quad (3.67)$$

Тепер скористаємося тим, що густину потужності джерел $f(\mathbf{r}, t)$ завжди можна записати у вигляді

$$f(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty \delta(t - \tau) f(\mathbf{r}, \tau) d\tau.$$

Оскільки рівняння (3.60) лінійне, щоб отримати розв'язок $\psi_2(\mathbf{r}, t)$, досить проінтегрувати формулу (3.67) за параметром τ від нуля до нескінченності, замінивши в ній $f_\tau(\mathbf{r})$ на $f(\mathbf{r}, \tau)$. Внаслідок (3.67), при $t > 0$ цей інтеграл береться лише в межах

від нуля до t . Отже,

$$\psi_2(\mathbf{r}, t) = \int_0^t (t - \tau) M[f(\mathbf{r}, \tau)](\mathbf{r}, t - \tau) d\tau. \quad (3.68)$$

Завдання 3.5.1. Користуючись тим, що для двічі неперервно диференційовних функцій $u(\mathbf{r})$ перетворення $M[u](\mathbf{r}, t)$, $t > 0$, дає двічі неперервно диференційовні функції, які задовольняють однорідне хвильове рівняння та умову $M[u](\mathbf{r}, 0) = 0$, перевірте, що для будь-якої двічі неперервно диференційовної функції $f(\mathbf{r}, t)$ функція (3.68) – це єдиний двічі неперервно диференційовний розв’язок неоднорідного рівняння (3.60), підпорядкований умовам (3.63).

Увівши у формулі (3.68) нову змінну інтегрування $\rho = a(t - \tau)$ та скориставшись явним виглядом перетворення M , дістанемо:

$$\psi_2(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{at} \frac{1}{\rho} \left(\int_{|\mathbf{n}|=1} f\left(\mathbf{r} + \rho \mathbf{n}, t - \frac{\rho}{a}\right) d\mathbf{n} \right) \rho^2 d\rho. \quad (3.69)$$

Поклавши далі $\rho = \rho \mathbf{n}$, бачимо, що

$$\psi_2(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{|\rho| < at} \frac{1}{|\rho|} f\left(\mathbf{r} + \rho, t - \frac{|\rho|}{a}\right) d\rho.$$

У змінних $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \rho$ цей вираз набирає вигляду

$$\psi_2(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| < at} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} f\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{a}\right) d\mathbf{r}'. \quad (3.70)$$

За аналогією з ньютонівським потенціалом вираз (3.70) називається **загаювальним потенціалом**. Із (3.70) видно, що в однорідному середовищі швидкість поширення сигналів або збурень від будь-якого джерела не залежить від напрямку поширення і є обмеженою сталою $a > 0$.

Завдання 3.5.2. Знайдіть потенціал швидкості для вимушених акустичних коливань однорідного середовища, викликаних джерелами, локалізованими в нескінченно малому околі початку координат.

Розглянемо тепер важливий випадок, коли густина потужності $f(\mathbf{r}, t)$ змінюється з часом відповідно до гармонічного закону, з амплітудою $p(\mathbf{r})$ і частотою ω :

$$f(\mathbf{r}, t) = p(\mathbf{r}) \sin \omega t. \quad (3.71)$$

Оскільки хвильове рівняння лінійне відносно шуканої функції, а функція $f(\mathbf{r}, t)$ – дійсна, то подальший аналіз сильно спрощується, якщо $f(\mathbf{r}, t)$ подати в комплексному вигляді

$$f(\mathbf{r}, t) = p(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad (3.72)$$

обчислити відповідний комплексний потенціал $\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t)$, а потім відокремити уявну частину $\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t)$.

Припустимо, що функція $p(\mathbf{r})$ дорівнює нулю зовні деякої сфери досить великого радіуса R . Підставляючи (3.72) у формулу (3.70), бачимо, що в цьому випадку кожна точка середовища приводиться з плином часу в гармонічні коливання з тією ж самою частотою ω . Потенціал швидкості для цих коливань дорівнює

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t) = A_+(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad at > R + r, \quad (3.73)$$

де комплексна амплітуда

$$A_+(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{E_3} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} p(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad k = \frac{\omega}{a}. \quad (3.74)$$

Зокрема, точкове джерело з $p(\mathbf{r}) = d_0 \delta(\mathbf{r})$, розташоване в початку координат, породжує з часом гармонічні коливання у формі **розбіжної сферичної хвилі**

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t) = \frac{d_0}{4\pi a^2} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}, \quad at > r. \quad (3.75)$$

Якщо функція $p(\mathbf{r})$ не є фінітною, а спадає на нескінченності щонайменше як

$$|p(\mathbf{r})|_{r \rightarrow \infty} = O\left(\frac{1}{r^{3+\varepsilon}}\right), \quad (3.76)$$

то

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t) = A_+(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + O\left(\frac{1}{t^{1+\varepsilon}}\right), \quad (3.77)$$

Справді, для $f(\mathbf{r}, t)$ у вигляді (3.72) за допомогою формул (3.70) і (3.74) можемо записати

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t) = A_+(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + R(\mathbf{r}, t),$$

де

$$R(\mathbf{r}, t) = -\frac{e^{-i\omega t}}{4\pi a^2} \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|>at} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} p(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'.$$

Згідно з формулою (3.76), існує таке додатне число $C < \infty$, що

$$|p(\mathbf{r})| \leq \frac{C}{r^{3+\varepsilon}}.$$

Тому при $at > 2r$, враховуючи співвідношення

$$\{\mathbf{r}' : |\mathbf{r}-\mathbf{r}'| > at\} \subset \{\mathbf{r}' : r' > at - r\},$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}} = \frac{2}{r'}, \quad r' > r,$$

одержуємо:

$$\begin{aligned} |R(\mathbf{r}, t)| &\leq \frac{1}{4\pi a^2} \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|>at} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} |p(\mathbf{r}')| d\mathbf{r}' \leq \\ &\leq \frac{1}{4\pi a^2} \int_{r'>at-r} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} |p(\mathbf{r}')| d\mathbf{r}' \leq \frac{C}{4\pi a^2} \int_{r'>at-r} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| r'^{(3+\varepsilon)}} d\mathbf{r}' = \\ &= \frac{C}{a^2} \int_{at-r}^\infty \frac{dr'}{r'^{(2+\varepsilon)}} = \frac{C}{a^2 (1+\varepsilon)(at-r)^{1+\varepsilon}} \underset{t \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{1}{t^{1+\varepsilon}}\right). \end{aligned}$$

Крім того, умова (3.76) гарантує, що

$$A_+(\mathbf{r}) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{d_0(\mathbf{n})}{4\pi a^2} \frac{e^{ikr}}{r} + o\left(\frac{1}{r}\right), \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (3.78)$$

$$d_0(\mathbf{n}) = \int_{E_3} e^{-ik(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')} p(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') = n_x x' + n_y y' + n_z z'.$$

Щоб довести це, візьмемо деяке додатне число $r_0 \ll r$ і запишемо інтеграл у формулі (3.74) як суму двох інтегралів: J_1 по кулі радіусом $\sqrt{r_0 r}$ і J_2 по решті простору E_3 . У свою чергу, $J_2 = J_{21} + J_{22}$, де інтеграл J_{21} береться по сферичному шарі $\sqrt{r_0 r} < r' < r$, а інтеграл J_{22} – по області $r' > r$. Для J_{21} маємо:

$$|J_{21}| \leq \int_{\sqrt{r_0 r} < r' < r} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} |p(\mathbf{r}')| d\mathbf{r}' \leq C \int_{\sqrt{r_0 r} < r' < r} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| r'^{(3+\varepsilon)}} d\mathbf{r}' =$$

$$= \frac{4\pi C}{r} \int_{\sqrt{r_0 r}}^r \frac{dr'}{r'^{(1+\varepsilon)}} = \frac{4\pi C}{r\varepsilon} \left(\frac{1}{(r_0 r)^{\varepsilon/2}} - \frac{1}{r^\varepsilon} \right) \underset{r \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{1}{r^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \right).$$

Подібним же чином

$$|J_{22}| \leq \int_{r' > r} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} |p(\mathbf{r}')| d\mathbf{r}' \underset{r \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{1}{r^{1+\varepsilon}} \right).$$

Отже,

$$|J_2| \underset{r \rightarrow \infty}{=} o\left(\frac{1}{r} \right). \quad (3.79)$$

Далі, при $r \gg r'$ маємо:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')} = r - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') + O\left(\frac{r'}{r} \right),$$

$$\frac{e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{e^{ikr}}{r} e^{-ik(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')} \left(1 + O\left(\frac{r'}{r} \right) \right), \quad (3.80)$$

Підстановка оцінки (3.80) в інтеграл J_1 дає:

$$J_1 = \frac{e^{ikr}}{r} \left(\int_{r' < \sqrt{r_0 r}} e^{-ik(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')} p(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + o\left(\sqrt{\frac{r_0}{r}}\right) \right).$$

Враховуючи, що

$$\left| \int_{r' > \sqrt{r_0 r}} e^{-ik(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')} p(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right| \leq \int_{r' > \sqrt{r_0 r}} |p(\mathbf{r}')| d\mathbf{r}' \leq \frac{4\pi C}{\varepsilon(r_0 r)^{\varepsilon/2}},$$

можемо записати:

$$J_1 = \frac{e^{ikr}}{r} (d_0(\mathbf{n}) + o(1)).$$

Разом з (3.79) це дає (3.78).

Отже, усталені коливання точок середовища, спричинені гармонічним джерелом, густина потужності якого описується формулою (3.72), з амплітудою $p(\mathbf{r})$, що задовольняє умову (3.76), набувають на далеких відстанях від початку координат форми розбіжної сферичної хвилі, зумовленої гармонічним точковим джерелом з амплітудою $d_0(\mathbf{n})\delta(\mathbf{r})$.

Завдання 3.5.3. Доведіть, що гармонічне джерело зі сферично симетричною амплітудою $p(\mathbf{r}) = p(r)$, яка задовольняє умову (3.76), викликає на далеких відстанях від початку координат розбіжну сферичну хвилю.

Повернімося до формул (3.73) і (3.74) ((3.77)).

Завдання 3.5.4. Вважаючи, що функція $p(\mathbf{r})$ неперервно диференційовна та інтегровна, та користуючись властивостями ньютонівського потенціалу, покажіть, що комплексна амплітуда (3.74) задовольняє рівняння Гельмгольца

$$-\Delta u(\mathbf{r}) - k^2 u(\mathbf{r}) = \frac{1}{a^2} p(\mathbf{r}). \quad (3.81)$$

Потенціал швидкості (3.73) для усталених коливань середовища можна було би також знайти, розглянувши так звану задачу без початкових умов, яка включає неоднорідне хвильове

рівняння (3.60) з густиною потужності джерел у вигляді (3.72). Підставивши (3.73) у це рівняння, ми би дістали для $A_+(\mathbf{r})$ рівняння (3.81).

Слід зазначити, що якщо $k^2 > 0$, а функція $p(\mathbf{r})$ – неперервна та фінітна, або неперервна та задовольняє умову (3.76), то існує нескінченно багато функцій, які задовольняють рівняння (3.81) і умову

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.82)$$

Легко перевірити, що крім функції $A_+(\mathbf{r})$, наведеної формулою (3.74), рівняння (3.81) та умову (3.82) задовольняє функція

$$A_-(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{E_3} \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} p(\mathbf{r}') d\mathbf{r}',$$

а також будь-яка опукла комбінація

$$\alpha A_+(\mathbf{r}) + (1-\alpha) A_-(\mathbf{r}), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Зокрема, у граничному випадку ізотропного точкового джерела розв'язком хвильового рівняння (3.60), який задовольняє умову (3.82), є не тільки розбіжна сферична хвиля, але й **збіжна сферична хвиля**

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t) = \frac{d_0}{4\pi a^2} \frac{e^{-i(kr + \omega t)}}{r},$$

а також будь-яка опукла комбінація цих хвиль.

Але якщо джерело почало діяти в деякий момент часу в минулому, то існує єдиний розв'язок рівняння Гельмгольца (3.81), який задовольняє умову (3.82), і ним є функція $A_+(\mathbf{r})$.

З-поміж функцій, що задовольняють рівняння (3.81) і умову (3.82), цей єдиний розв'язок можна відібрати за допомогою наступної крайової умови на нескінченності:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial r} - iku(\mathbf{r}) \right) = 0. \quad (3.83)$$

Вона називається **умовою випромінювання Зоммерфельда**.

Контрольні запитання до § 3.5

1. На які незалежні частини можна розбити задачу Коші для неоднорідного хвильового рівняння?
2. Як за відомою густиною потужності джерел визначити потенціал швидкості для спричинених ними вимушених акустичних коливань рідини або газу?
3. Які джерела породжують розбіжні сферичні хвилі?
4. Які вимоги повинні задовольняти густина потужності джерел, що змінюються в часі за гармонічним законом, а також початкові умови, щоб розв'язок задачі Коші для неоднорідного хвильового рівняння асимптотично трансформувався при $t \rightarrow \infty$ і $r \rightarrow \infty$ в розбіжну сферичну хвилю?
5. Яке рівняння задовольняє амплітуда потенціалу швидкості для усталених коливань рідини або газу, спричинених гармонічним джерелом?
6. Яка умова на нескінченності дає можливість з-поміж функцій, що задовольняють рівняння Гельмгольца з параметром $k^2 > 0$, відібрати ту єдину, яка описує акустичні хвилі від гармонічного джерела, увімкненого в деякий момент часу в минулому?

4. ДОДАТКОВІ ВІДОМОСТІ ІЗ ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ

4.1. Узагальнені функції. Дельта-функція Дірака

Якщо броунівський рух у системі здійснюється лише однією домішковою частинкою, то роль концентрації $n(\mathbf{r}, t)$ переходить до густини ймовірності $p(\mathbf{r}, t)$. При цьому, однак, постає питання, як визначити початкову густину ймовірності, якщо задано, що при $t = 0$ частинка знаходилася в деякій точці $\mathbf{r}_0$.

Потреба розширити поняття густини на випадок, коли розподіл фізичної величини створюється точковими об'єктами, виникає у фізичних задачах досить часто. Спробуємо, наприклад, визначити густину $\rho(\mathbf{r})$, яка створюється в довільній точці $\mathbf{r}$ точковою одиничною масою $m = 1$, розташованою в точці $\mathbf{r}_0$. Для цього розглянемо послідовність вкладених одна в одну областей Ω_j , з об'ємами ΔV_j , які поступово стягуються в точку $\mathbf{r}$. Позначимо через ΔM_j загальну масу, що міститься в області Ω_j . У нашому випадку:

$$\Delta M_j = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \mathbf{r}_0 \notin \Omega_j, \\ 1, & \text{якщо } \mathbf{r}_0 \in \Omega_j. \end{cases}$$

Згідно з означенням густини маємо:

$$\rho(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V_j \rightarrow 0} \frac{\Delta M_j}{\Delta V_j}.$$

Якщо $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$, то, очевидно, починаючи з деякого номера j_0 , усі області Ω_j не міститимуть точку $\mathbf{r}_0$, і тому $\Delta M_j = 0$ при $j \geq j_0$. Відповідно,

$$\rho(\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0) = 0.$$

Якщо ж $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, то $\Delta M_j = 1$ при усіх j , і тому

$$\rho(\mathbf{r} = \mathbf{r}_0) = \lim_{\Delta V_j \rightarrow 0} \frac{\Delta M_j}{\Delta V_j} = \lim_{\Delta V_j \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V_j} = +\infty.$$

У той же час ньютонівський потенціал φ , створений згаданим точковим “розподілом” маси, залишається скінченним у будь-якій точці $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$. Дійсно, розбиваючи весь простір E_3 на малі області з об’ємами ΔV_j навколо точок $\mathbf{r}_j$, серед яких є й $\mathbf{r}_0$, маємо:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= -\gamma \int_{E_3} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = -\gamma \lim_{\Delta V_j \rightarrow 0} \sum_j \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} \rho(\mathbf{r}_j) \Delta V_j = \\ &= -\gamma \lim_{\Delta V_j \rightarrow 0} \sum_j \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} \Delta M_j = -\frac{\gamma}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}, \end{aligned}$$

де γ – універсальна гравітаційна стала.

Таким чином, густина $\rho(\mathbf{r})$, що формально відповідає точковій одиничній масі, розташованій у точці $\mathbf{r}_0$, дорівнює нулю всюди, крім самої точки $\mathbf{r}_0$, де вона дорівнює “ $+\infty$ ”. У той же час інтеграл від густини $\rho(\mathbf{r})$ по будь-якій області, що містить точку $\mathbf{r}_0$, дорівнює одиниці.

Ці властивості функції $\rho(\mathbf{r})$ несумісні з класичними означеннями функції та інтеграла. При розв’язуванні конкретних фізичних задач, однак, такі величини як густини, що відповідають точковим масам або зарядам, зустрічаються, як правило, лише на проміжних етапах. В остаточній відповіді вони або відсутні, або з’являються під знаком інтеграла у вигляді добутків з деякими “добрими” функціями. Отже, немає нагальної потреби давати відповідь на питання, що означає подібна сингулярна функція. Досить лише визначити зміст інтеграла від добутку сингулярної та “доброї” функцій.

Прояснимо спершу, що мається на увазі під “добрими” функціями – називатимемо їх надалі **основними**. Зауважимо, що вибір певного класу основних функцій визначається потребами конкретної задачі. Якщо не зазначено інше, розумітимемо під

основними фінітні функції, які мають неперервні похідні всіх порядків. Основні функції можна додавати одна до одної, множити на дійсні та комплексні числа, при цьому новоутворені функції залишаються основними. Іншими словами, основні функції утворюють **лінійну множину**, або **лінійний простір**.

Означення 4.1.1. Множина L об'єктів – елементів – будь-якої природи (нехай букви f, g, h позначають будь-які з них, а букви λ, μ – довільні числа) називається лінійним простором, якщо на ній визначені такі операції:

А) операція додавання елементів, яка кожній парі елементів f, g ставить у відповідність єдиний елемент, що позначається $f + g$, множини L , і яка задовольняє аксіоми 1) – 4):

- 1) $f + g = g + f$ (переставний закон додавання);
- 2) $(f + g) + h = f + (g + h)$ (сполучний закон додавання);
- 3) існує єдиний нульовий елемент " θ ", такий, що $f + \theta = f$;
- 4) для кожного елемента f існує єдиний обернений елемент " $-f$ ", такий, що $f + (-f) = (-f) + f = \theta$;

Б) операція множення елементів на числа, яка кожному елементу f і кожному числу λ ставить у відповідність єдиний елемент, що позначається λf , множини L , і яка задовольняє аксіоми 5) – 8):

- 5) $0f = \theta$;
- 6) $1f = f$;
- 7) $\lambda(\mu f) = (\lambda\mu)f$ (сполучний закон множення)
- 8) $\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g$ (розподільний закон множення).

Зауважимо, що коли йдеться про лінійний простір, елементами якого є числові функції, зазначені вище операції додавання та множення на числа можна розуміти як звичайні арифметичні операції над числовими функціями.

Надалі буквою K позначатимемо лінійний простір, елементами якого є нескінченно диференційовні фінітні функції.

Означення 4.1.2. Кажуть, що послідовність основних функцій $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$ прямує до нуля в просторі K , якщо всі ці функції дорівнюють нулю зовні деякої сфери досить великого радіуса, а всередині неї вони та всі їх похідні рівномірно прямують до нуля (у звичайному розумінні) при $n \rightarrow \infty$.

Означення 4.1.3. Кажуть, що на деякій множині функцій визначено **функціонал** “ F ”, якщо задано правило, за яким кожному елементу цієї множини ставиться у відповідність певне число.

Отже, F – це функція, область визначення якої сама є множиною функцій, а не множиною чисел.

Означення 4.1.4. Нехай на просторі K визначено функціонал F , тобто вказано правило, за яким кожній основній функції $\varphi \in K$ ставиться у відповідність певне число $F(\varphi)$. Функціонал F називається **лінійним** і **неперервним**, якщо задовольняються такі умови:

а) для будь-яких основних функцій $\varphi, \psi \in K$ і будь-яких чисел λ, μ ,

$$F(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda F(\varphi) + \mu F(\psi) \quad (\text{лінійність функціонала } F);$$

б) якщо послідовність основних функцій $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots \in K$ прямує до нуля в просторі K , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(\varphi_n) = 0 \quad (\text{неперервність функціонала } F).$$

Нехай, наприклад, функція $f(\mathbf{r})$ інтегровна по будь-якій обмеженій області простору E_3 (такі функції називаються локально інтегровними). За допомогою f будь-якій основній функції $\varphi(\mathbf{r})$ можна поставити у відповідність число

$$F(\varphi) = \int_{E_3} f(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (4.1)$$

Інтегрування в (4.1) фактично ведеться по скінченній області, бо функція φ фінітна. Функціонали такого вигляду, де функція f – локально-інтегровна, називаються **регулярними**.

Існують функціонали й іншого типу. Розглянемо, наприклад, лінійний функціонал, який будь-якій основній функції $\varphi(\mathbf{r})$ ставить у відповідність її значення у фіксованій точці $\mathbf{r}_0$, тобто $F_{\mathbf{r}_0}(\varphi) = \varphi(\mathbf{r}_0)$. Він лінійний і неперервний, але його не можна подати у вигляді (4.1), з інтегрованою функцією f . Справді, припустимо, що існує така локально-інтегровна функція $f_0(\mathbf{r})$, що для будь-якої основної функції

$$\varphi(\mathbf{r}_0) = \int_{E_3} f_0(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (4.2)$$

Зокрема, для основної функції

$$\varphi_\varepsilon(\mathbf{r}) = \begin{cases} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2}}, & |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| < \varepsilon, \\ 0, & |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \geq \varepsilon, \end{cases}$$

згідно з формулою (4.2) маємо:

$$\varphi_\varepsilon(\mathbf{r}_0) = e^{-1} = \int_{E_3} f_0(\mathbf{r}) \varphi_\varepsilon(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| < \varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2}} f_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (4.3)$$

Ліва частина рівності (4.3), яка дорівнює e^{-1} , не залежить від ε . На відміну від цього, інтеграл справа, з огляду на інтегровність функції f_0 , прямує до нуля при зменшенні ε , оскільки

$$\left| \int_{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| < \varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2}} f_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right| \leq \int_{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| < \varepsilon} |f_0(\mathbf{r})| d\mathbf{r}.$$

Означення 4.1.5. Функціонал, який будь-якій основній функції $\varphi(\mathbf{r})$ ставить у відповідність її значення в точці $\mathbf{r}_0$, символічно записується у вигляді

$$\varphi(\mathbf{r}_0) = \int_{E_3} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (4.4)$$

де символ $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ називається **δ -функцією Дірака**, чи просто **дельта-функцією**.

Взагалі, будь-який неперервний лінійний функціонал, визначений на множині K , формально записується у вигляді (4.1), і при цьому символ f називається **узагальненою функцією**, або **розподілом**.

Функціонали, які визначені на просторі K , можна іноді розповсюдити на більш широкі класи функцій.

Розглянемо, наприклад, простір “ C ” функцій, неперервних у будь-якій замкненій області Ω простору E_3 . Очевидно, що він лінійний. Якщо збіжність послідовності неперервних функцій $\psi_1(\mathbf{r}), \dots, \psi_n(\mathbf{r}), \dots$, $\mathbf{r} \in \Omega$, до нуля в просторі C означається як виконання умови

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\mathbf{r} \in \Omega} |\psi_n(\mathbf{r})| = 0,$$

то функціонал, який кожній неперервній функції $\psi(\mathbf{r}) \in C$ ставить у відповідність її значення в точці $\mathbf{r}_0 \in \Omega$ (і якому відповідає узагальнена функція $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$), є лінійним і неперервним на просторі C .

При визначенні узагальнених функцій замість простору K досить часто використовується простір S , який також складається із нескінченно диференційовних функцій, але таких, що не обов’язково фінітні, а лише прямують до нуля при $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ швидше від будь-якого степеня $1/|\mathbf{r}|$. Прикладом такої функції є $e^{-\gamma^2}$, $\gamma > 0$.

За означенням, послідовність функцій $\chi_1(\mathbf{r}), \dots, \chi_n(\mathbf{r}), \dots$ простору S прямує до нуля, якщо для будь-яких невід'ємних чисел l_1, l_2, l_3 і p

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\mathbf{r} \in E_3} |\mathbf{r}|^p \left| \frac{\partial^{l_1+l_2+l_3} \chi_n(\mathbf{r})}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2} \partial z^{l_3}} \right| = 0.$$

Лінійність простору S очевидна. Як і у випадку простору K , узагальненим функціям відповідають будь-які функціонали, які є лінійними та неперервними на просторі S . Зрозуміло, що кожна функція простору K належить і простору S .

Зауважимо, що розширення класу основних функцій до більш широкого веде до звуження класу лінійних функціоналів, які є визначеними й залишаються неперервними на ширшому класі неперервних функцій.

Означення 4.1.6. Кажуть, що послідовність неперервних лінійних функціоналів $F_n(\varphi) = \int_{E_3} f_n(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$, яким відповідають звичайні або узагальнені функції $f_n(\mathbf{r})$, прямує до функціонала $F(\varphi)$, якщо для будь-якої основної функції $\varphi(\mathbf{r})$ існує границя

$$F(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_3} f_n(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (4.5)$$

Вираз (4.5) задає лінійний функціонал, який визначений на множині основних функцій. Можна довести, що він неперервний. Записавши його у вигляді

$$F(\varphi) = \int_{E_3} f(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r},$$

ми вважаємо, що узагальнена функція $f(\mathbf{r})$ є границею послідовності функцій $f_n(\mathbf{r})$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 4.1.1. Будь-який **сингулярний** функціонал, заданий на множині основних функцій, тобто такий функціонал, який неможливо подати у вигляді

$$F(\varphi) = \int_{E_3} f(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} ,$$

де $f(\mathbf{r})$ – локально інтегровна функція, є границею послідовності регулярних функціоналів $F_n(\varphi)$, яким відповідають локально інтегровні функції.

Завдання 4.1.1. Доведіть, що функція $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ є границею інтегровних функцій

$$f_n(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \begin{cases} \frac{3n^3}{4\pi a^3}, & |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \leq \frac{a}{n}, \\ 0, & |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| > \frac{a}{n}. \end{cases}$$

Завдання 4.1.2. Доведіть, що

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{3/2}}{\pi^{3/2}} e^{-|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2 n}.$$

Завдання 4.1.3. Доведіть для випадку функцій однієї змінної, що

$$\delta(x - x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 n(x - x_0)}{\pi n(x - x_0)^2}.$$

Послідовності звичайних інтегровних функцій, що прямують до дельта-функції, до певної міри характеризуються наступною теоремою:

Теорема 4.1.2. Нехай $\{f_n(\mathbf{r})\}$ – послідовність інтегровних функцій, яка задовольняє такі умови:

- а) $f_n(\mathbf{r}) \geq 0$;
- б) для довільного числа $\Delta > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| \leq \Delta} f_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| > \Delta} f_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 0.$$

Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Доведення. Щоб довести, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_3} f_n(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \varphi(\mathbf{r}_0)$$

для будь-якої основної функції $\varphi(\mathbf{r})$, подамо $F_n(\varphi)$ у вигляді

$$\begin{aligned} F_n(\varphi) = \varphi(\mathbf{r}_0) \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| \leq \Delta} f_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| \leq \Delta} [\varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}_0)] f_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + \\ + \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| > \Delta} f_n(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Згідно з умовою б), перший доданок у правій частині формули (4.6) прямує до $\varphi(\mathbf{r}_0)$ при $n \rightarrow \infty$.

Оскільки всі основні функції обмежені, маємо $\max_{\mathbf{r}} |\varphi(\mathbf{r})| < C < \infty$, і для третього доданка умови а) і б) тепер дають:

$$\left| \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| > \Delta} f_n(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right| \leq C \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| > \Delta} f_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

І, нарешті, завдяки неперервності функції $\varphi(\mathbf{r})$ другий доданок у формулі (4.6) стає як завгодно близьким до нуля при $n \rightarrow \infty$. Це впливає із оцінки

$$\begin{aligned} \left| \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| \leq \Delta} [\varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}_0)] f_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right| &\leq \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| \leq \Delta} |\varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}_0)| f_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \leq \\ &\leq \max_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| \leq \Delta} |\varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}_0)| \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| \leq \Delta} f_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

де множник $\max_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| \leq \Delta} |\varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}_0)|$ є як завгодно близьким до нуля, а інтеграл $\int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| \leq \Delta} f_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ – як завгодно близьким до одиниці для, відповідно, достатньо малого числа Δ і достатньо великого n .

Зауважимо, що вимоги попередньої теореми не є необхідними для того, щоб послідовність функцій $f_n(\mathbf{r})$ прямувала до $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ при $n \rightarrow \infty$. Пізніше, наприклад, буде показано, що послідовність функцій однієї змінної $f_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin nx}{x}$ також прямує до функції $\delta(x)$.

Завершимо обговорення властивостей дельта-функції розглядом узагальнених функцій, що відповідають складеній функції $\delta(h(x))$. Правильна така

Теорема 4.1.3. Нехай функція $h(x)$ неперервно диференційовна на всій осі і задовольняє наступні умови:

- а) якщо множина $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ всіх коренів рівняння $h(x) = 0$ нескінченна, то існує таке число $\delta > 0$, що для будь-яких двох коренів x_i і x_j виконується нерівність $|x_i - x_j| > \delta$;
- б) $h'(x_j) \neq 0$ в усіх точках x_j .

Тоді

$$\delta(h(x)) = \sum_j \frac{\delta(x - x_j)}{|h'(x_j)|}. \quad (4.8)$$

Доведення. Зазначивши, що послідовність функцій $f_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2}$ прямує при $n \rightarrow \infty$ до функції $\delta(x)$, розглянемо послідовність функціоналів

$$F_n(\varphi) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nh^2(x)} \varphi(x) dx. \quad (4.9)$$

Вважатимемо спочатку, що рівняння $h(x) = 0$ має лише один корінь x_0 . Оскільки функція $h(x)$ має неперервну похідну і $h'(x_0) \neq 0$, то існує таке число $\Delta > 0$, що $h'(x) \neq 0$ і на відрізку $[x_0 - \Delta, x_0 + \Delta]$. Розіб'ємо інтеграл (4.9) на три по таких інтервалах: $(-\infty, x_0 - \Delta)$, $[x_0 - \Delta, x_0 + \Delta]$ і $(x_0 + \Delta, +\infty)$. Оскільки функція $\varphi(x)$ фінітна, усі інтеграли існують. При цьому існує таке число $\varepsilon > 0$, що скрізь на інтервалах $(-\infty, x_0 - \Delta)$ і $(x_0 + \Delta, +\infty)$, де $\varphi(x) \neq 0$, виконується нерівність $|h(x)| > \varepsilon$. Дійсно, у протилежному разі функція $h(x)$ дорівнювала б нулю ще в деяких, крім x_0 , точках, приналежних або інтервалу $(-\infty, x_0 - \Delta)$, або інтервалу $(x_0 + \Delta, +\infty)$, або обом цим інтервалам, а це суперечить нашому припущенню. Отже,

$$\left| \int_{-\infty}^{x_0 - \Delta} f_n(x) \varphi(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{x_0 - \Delta} f_n(x) |\varphi(x)| dx \leq \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)| dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Подібним же чином пересвідчуємося, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0 + \Delta}^{\infty} f_n(x) \varphi(x) dx = 0.$$

В інтегралі по відрізку $[x_0 - \Delta, x_0 + \Delta]$ зробимо заміну змінної, поклавши $s = h(x)$. Оскільки $ds = h'(x)dx$, цей інтеграл переписується у вигляді

$$\int_{x_0 - \Delta}^{x_0 + \Delta} f_n(x) \varphi(x) dx = \int_{h(x_0 - \Delta)}^{h(x_0 + \Delta)} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-ns^2} \varphi(x(s)) \frac{ds}{h'(x(s))}, \quad (4.10)$$

де $x = x(s)$ – функція, обернена до функції $s = h(x)$. Зауважимо, що $x(0) = x_0$.

Якщо $h'(x_0) > 0$, то враховуючи, що $h(x_0) = 0$, маємо:
 $h(x_0 + \Delta) \equiv b > 0$, $h(x_0 - \Delta) \equiv a < 0$. Роблячи в інтегралі (4.10)
 заміну змінної $w = \sqrt{ns}$, дістаємо:

$$\int_{x_0 - \Delta}^{x_0 + \Delta} f_n(x) \varphi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{a\sqrt{n}}^{b\sqrt{n}} e^{-w^2} \varphi\left(x(w/\sqrt{n})\right) \frac{dw}{h'(x(w/\sqrt{n}))}.$$

Звідси, з огляду на неперервність функцій φ і h' , маємо:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0 - \Delta}^{x_0 + \Delta} f_n(x) \varphi(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{a\sqrt{n}}^{b\sqrt{n}} e^{-w^2} \varphi\left(x(w/\sqrt{n})\right) \frac{dw}{h'(x(w/\sqrt{n}))} = \\ &= \frac{\varphi(x_0)}{h'(x_0)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{a\sqrt{n}}^{b\sqrt{n}} e^{-w^2} dw = \frac{\varphi(x_0)}{h'(x_0)}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Якщо ж $h'(x_0) < 0$, то $h(x_0 + \Delta) \equiv b < 0$,
 $h(x_0 - \Delta) \equiv a > 0$, і останній інтеграл у формулі (4.11) прямує до

інтеграла $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\infty}^{-\infty} e^{-w^2} dw = -1$. У цьому випадку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\varphi) = -\frac{\varphi(x_0)}{h'(x_0)}.$$

Обидва випадки об'єднуються однією формулою:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\varphi) = \frac{\varphi(x_0)}{|h'(x_0)|}. \quad (4.12)$$

Припустимо тепер, що в інтервал, по якому фактично ведеться інтегрування у формулі (4.9), попадає декілька коренів функції $h(x)$. Тоді внесок у граничне значення функціонала $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\varphi)$ від малого околу кожного такого кореня x_j дорівнює $\varphi(x_j)/|h'(x_j)|$, тоді як внески від решти інтервалів дорівнюють нулю.

Таким чином, у загальному випадку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\varphi) = \sum_j \frac{\varphi(x_j)}{|h'(x_j)|},$$

тобто

$$\delta(h(x)) = \sum_j \frac{\delta(x - x_j)}{|h'(x_j)|}.$$

Завдання 4.1.4. Покажіть, що:

а) $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x);$

б) $\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a} \delta(x - a) + \frac{1}{2a} \delta(x + a), \quad a > 0;$

в) $\delta(\sin kx) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|k|} \delta\left(x - \frac{\pi n}{k}\right).$

Вирази для складених функцій $\delta(h(\mathbf{r}))$ багатьох змінних виводитимуться, коли виникатиме потреба.

Завдання 4.1.5. Покажіть, що функції Гріна $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t)$, $t > 0$, є розв'язками задач Коші для однорідних рівнянь теплопровідності та дифузії у випадках, коли початкові значення температури та концентрації дорівнюють $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$.

4.2. Диференціювання узагальнених функцій. Узагальнені розв'язки лінійних диференціальних рівнянь

Відомо, що звичайні функції можна продиференціювати не завжди: існують неперервні функції, які не мають похідних у жодній точці своєї області визначення. Прикладом є функції, які задають координати броунівської частинки. На противагу до цього, узагальнені функції мають похідні всіх порядків, які, у свою чергу, теж є узагальненими функціями.

Якщо неперервна функція $f(\mathbf{r})$ локально інтегровна та має неперервні локально інтегровні перші похідні, то можна, наприклад, побудувати неперервний функціонал

$$\int_{E_3} \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial x} \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \equiv F_x(\varphi).$$

Розглядаючи цей інтеграл як повторний та обчислюючи його частинами, дістаємо:

$$F_x(\varphi) = - \int_{E_3} f(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial x} d\mathbf{r} = F \left(- \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right).$$

Цей вираз можна покласти в основу означення похідної від узагальненої функції. А саме: якщо узагальнена функція $f(\mathbf{r})$ відповідає деякому функціоналу $F(\varphi)$, то частинною похідною за змінною x від функції $f(\mathbf{r})$ називається узагальнена функція, яка відповідає функціоналу $F(-\partial\varphi/\partial x)$. Для позначення цієї похідної зберігається символ $\partial f(\mathbf{r})/\partial x$. Зокрема, похідна $\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)/\partial x$ – це узагальнена функція, яка відповідає функціоналу, що кожній основній функції $\varphi(\mathbf{r})$ ставить у відповідність число $(-\partial\varphi/\partial x)(\mathbf{r}_0)$.

Аналогічним чином означаються частинні похідні $\partial f(\mathbf{r})/\partial y$ і $\partial f(\mathbf{r})/\partial z$.

Завдання 4.2.1. Доведіть таке: нехай узагальнені функції $f_n(\mathbf{r})$ неперервні та мають неперервні локально інтегровні перші частинні похідні. Якщо послідовність $\{f_n(\mathbf{r})\}$ збігається до узагальненої функції $f(\mathbf{r})$, то кожна з послідовностей перших похідних від функцій $f_n(\mathbf{r})$ збігається до відповідної частинної похідної від функції $f(\mathbf{r})$.

Із попереднього випливає, що результатом диференціювання узагальненої функції f знову є узагальнена функція. Продовжуючи диференціювати функцію f далі, можна ввести інші частинні похідні: $\partial^2 f / \partial x^2$, $\partial^2 f / \partial x \partial y$, ..., $\partial^3 f / \partial x^3$, $\partial^3 f / \partial x^2 \partial y$, Наприклад, похідна $\partial^2 f / \partial x \partial y$ означається як узагальнена функція, що відповідає функціоналу

$$F_{xy}(\varphi) = \int_{E_3} f(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r})}{\partial x \partial y} d\mathbf{r} = F\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right).$$

Отже, у певному розумінні всі узагальнені функції нескінченно диференційовні.

Змішані похідні узагальнених функцій зберігають притаманну звичайним неперервно диференційовним функціям властивість не залежати від порядку диференціювання. Так, зокрема,

$$\begin{aligned} F_{xy}(\varphi) &= \int_{E_3} \frac{\partial^2 f(\mathbf{r})}{\partial x \partial y} \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_{E_3} f(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r})}{\partial x \partial y} d\mathbf{r} = \\ &= \int_{E_3} f(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r})}{\partial y \partial x} d\mathbf{r} = F\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}\right) = F_{yx}(\varphi). \end{aligned}$$

Розглянемо декілька прикладів, починаючи з функцій однієї змінної.

Завдання 4.2.2. Східчастою функцією Хевісайда називається вираз

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Розглядаючи її як узагальнену функцію однієї змінної, переконайтеся, що

$$\theta'(x) = \delta(x).$$

Завдання 4.2.3. Знайдіть узагальнену першу похідну знакової функції

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } x < 0, \\ +1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Відповідь:

$$\text{sign}'(x) = 2\delta(x).$$

Згідно з формулою (1.50), будь-яку основну функцію $\varphi(\mathbf{r})$ у довільній точці $\mathbf{r}_0$ можна подати у вигляді

$$\varphi(\mathbf{r}_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_{E_3} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \Delta \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (4.13)$$

Із формули (4.13) і означення узагальнених частинних похідних випливає, що узагальнені другі частинні похідні функції

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$$

пов'язані рівністю

$$-\Delta G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (4.14)$$

Розглянемо таке лінійне диференціальне рівняння порядку n відносно функції u зі сталими або нескінченно диференційовними коефіцієнтами a_{ijk} :

$$\sum_{0 \leq i+j+k \leq n} a_{ijk}(\mathbf{r}) \frac{\partial^{i+j+k} u(\mathbf{r})}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k} = f(\mathbf{r}), \quad (4.15)$$

де $f(\mathbf{r})$ – узагальнена функція. За допомогою диференціального оператора

$$L\left(\mathbf{r}; \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \equiv \sum_{0 \leq i+j+k \leq n} a_{ijk}(\mathbf{r}) \frac{\partial^{i+j+k}}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k}$$

перепишемо його у вигляді

$$L\left(\mathbf{r}; \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) u(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}).$$

Інтегруючи, неважко перевірити, що для основних функцій $\varphi(\mathbf{r})$ і $\psi(\mathbf{r})$ виконується рівність

$$\int_{E_3} \psi(\mathbf{r}) L\left(\mathbf{r}; \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_{E_3} \varphi(\mathbf{r}) L\left(\mathbf{r}; \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)^* \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r},$$

де, за означенням,

$$L\left(\mathbf{r}; \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)^* \equiv \sum_{0 \leq i+j+k \leq n} (-1)^{i+j+k} \frac{\partial^{i+j+k}}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k} a_{ijk}(\mathbf{r})$$

– спряжений оператор.

Узагальненим розв'язком рівняння (4.15) з узагальненою правою частиною $f(\mathbf{r})$ називається будь-яка узагальнена функція $u(\mathbf{r})$, яка задовольняє це рівняння в узагальненому розумінні, тобто така узагальнена функція $u(\mathbf{r})$, що для будь-якої основної функції $\varphi(\mathbf{r})$ справджується рівність

$$\int_{E_3} u(\mathbf{r}) L\left(\mathbf{r}; \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)^* \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_{E_3} f(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (4.16)$$

Із цього означення та співвідношень (4.13), (4.14) випливає, що функція $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ – узагальнений розв'язок рівняння Пуассона (4.14). Аналогічно, функція Гріна для рівняння Гельмгольца

$$G_z(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\sqrt{z}|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \quad (4.17)$$

є узагальненим розв'язком неоднорідного рівняння^{*)}

$$-\Delta u(\mathbf{r}) - zu(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (4.18)$$

Завдання 4.2.4. Для z , відмінних від невід'ємного числа, знайдіть узагальнений розв'язок рівняння

$$-u''(x) - zu(x) = \delta(x - x_0) \quad (4.19)$$

у класі інтегровних на всій дійсній осі функцій.

Вказівка. Перевірте, що сформульовані умови задовольняються функцією

$$g_z(x, x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz G_z(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{i}{2\sqrt{z}} e^{i\sqrt{z}|x-x_0|}. \quad (4.20)$$

Поняття узагальненого розв'язку лінійного диференціального рівняння дозволяє узагальнити постановку типових задач математичної фізики. Наприклад, **узагальненою задачею Коші** для однорідного рівняння теплопровідності називається така задача: відшукати узагальнену функцію $u(\mathbf{r}, t)$, яка дорівнює нулю при $t < 0$ і яка є узагальненим розв'язком рівняння

$$\frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - a^2 \Delta u(\mathbf{r}, t) = \delta(t) u_0(\mathbf{r}), \quad (4.21)$$

де $u_0(\mathbf{r})$ – узагальнена функція, тобто таку функцію $u(\mathbf{r}, t)$, що для будь-якої основної функції $\varphi(\mathbf{r}, t)$ змінних $\mathbf{r}$ і t справджується рівність

$$\int_0^{\infty} dt \int_{E_3} d\mathbf{r} \left[\frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + a^2 \Delta \varphi(\mathbf{r}, t) \right] u(\mathbf{r}, t) = - \int_{E_3} d\mathbf{r} \varphi(\mathbf{r}, 0) u_0(\mathbf{r}). \quad (4.22)$$

Можна довести, що в класі функцій, обмежених у кожному шарі $0 \leq t \leq T < \infty$, єдиний розв'язок узагальненої задачі Коші (4.21) існує, якщо функція $u_0(\mathbf{r})$ обмежена. Зрозуміло, що у випадках, коли обмежений розв'язок задачі (4.21) виявляється функцією, двічі неперервно диференційовною за просторовими

^{*)} Див. також Завдання 1.7.1.

координатами й неперервно диференційовною за часовою змінною, він задовольняє однорідне рівняння теплопровідності у звичайному розумінні.

Фундаментальним розв'язком рівняння теплопровідності називається розв'язок $G(\mathbf{r}, t)$ узагальненої задачі Коші (4.21) для випадку, коли функція $u_0(\mathbf{r})$ дорівнює $\delta(\mathbf{r})$. Зазначимо, що при такій правій частині вигляд рівняння (4.21) не змінюється при будь-якій зміні напрямів осей x, y, z координатної системи. Це означає, що функція $G(\mathbf{r}, t)$ залежить лише від модуля вектора $\mathbf{r}$. Крім того, з урахуванням співвідношення (4.16) та формули

$$\delta(\lambda x) = \frac{1}{\lambda} \delta(x), \quad \lambda > 0,$$

(див. *Завдання 4.1.4*), із рівняння (4.21) у цьому випадку випливає, що при масштабному перетворенні

$$\mathbf{r}' = \lambda \mathbf{r}, \quad t' = \lambda^2 t$$

виконується рівність

$$G(\lambda \mathbf{r}, \lambda^2 t) = \lambda^{-3} G(\mathbf{r}, t).$$

Тому фундаментальний розв'язок при $t > 0$ доцільно шукати у вигляді

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{t^{3/2}} g(\xi), \quad \xi = \frac{r}{a\sqrt{t}}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (4.23)$$

Вважаючи далі, що на інтервалі $0 < \xi < \infty$ функція $g(\xi)$ двічі диференційовна, із рівняння (4.21) знаходимо, що при $t > 0$ вона задовольняє звичайне диференціальне рівняння

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} \xi^3 g(\xi) = \frac{d}{d\xi} \xi^2 \frac{dg(\xi)}{d\xi}. \quad (4.24)$$

Завдання 4.2.5. Виведіть рівняння (4.24) і покажіть, що його загальний розв'язок має вигляд

$$g(\xi) = C_1 e^{-\frac{\xi^2}{4}} + C_0 \left[\frac{1}{\xi} - \frac{1}{2} e^{-\frac{\xi^2}{4}} \int_0^\xi e^{\frac{s^2}{4}} ds \right], \quad (4.25)$$

де C_0, C_1 – довільні сталі.

Завдання 4.2.6. Переконайтеся, що функція $g(r)$ інтегровна в просторі E_3 лише за умови $C_0 = 0$.

Розв'язання. Оскільки перший доданок у правій частині виразу (4.25) – інтегровна функція, досить показати, що функція

$$g(r) = -\frac{1}{r} + \frac{1}{2} e^{-\frac{r^2}{4}} \int_0^r e^{\frac{s^2}{4}} ds$$

неінтегровна. Користуючись рівністю

$$\frac{1}{2} \int_0^r e^{\frac{s^2}{4}} ds = \int_0^r d e^{\frac{s^2}{4}} = e^{\frac{r^2}{4}} - 1,$$

перепишемо $g(r)$ у вигляді

$$g(r) = \frac{1}{2} e^{-\frac{r^2}{4}} \int_0^r e^{\frac{s^2}{4}} \left(1 - \frac{s}{r}\right) ds - \frac{1}{r} e^{-\frac{r^2}{4}}.$$

Скористаємося далі нерівністю

$$0 \leq x(1+x) \leq 2, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

згідно з якою

$$\left(1 - \frac{s}{r}\right) \geq \frac{1}{2} \frac{s}{r} \left(1 + \frac{s}{r}\right) \left(1 - \frac{s}{r}\right) = \frac{1}{2} \left[\frac{s}{r} - \left(\frac{s}{r}\right)^3 \right].$$

Звідси знаходимо, що

$$\begin{aligned} g(r) &\geq \frac{1}{4} e^{-\frac{r^2}{4}} \int_0^r e^{\frac{s^2}{4}} \left[\frac{s}{r} - \left(\frac{s}{r}\right)^3 \right] ds - \frac{1}{r} e^{-\frac{r^2}{4}} = \\ &= \frac{2}{r^3} - \frac{2}{r^3} e^{-\frac{r^2}{4}} - \frac{3}{2r} e^{-\frac{r^2}{4}} \underset{r \rightarrow \infty}{=} \frac{2}{r^3} + O\left(\frac{1}{r} e^{-\frac{r^2}{4}}\right). \end{aligned}$$

Оскільки для $r > R$

$$\int_{r>R} \frac{1}{r^3} dr = +\infty,$$

то функція $g(r)$ справді неінтегровна.

Отже, фундаментальний розв'язок рівняння теплопровідності має вигляд

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{C_1}{t^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}} + \frac{C_0}{t^{3/2}} \left[\frac{a\sqrt{t}}{r} - \frac{1}{2} e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}} \int_0^{\frac{r}{a\sqrt{t}}} e^{\frac{s^2}{4}} ds \right]. \quad (4.26)$$

Нам залишається знайти значення сталих C_0 і C_1 .

Для фундаментального розв'язку $G(\mathbf{r}, t)$ рівність (4.22) набуває вигляду

$$\int_0^\infty dt \int_{E_3} d\mathbf{r} \left[\frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + a^2 \Delta \varphi(\mathbf{r}, t) \right] G(\mathbf{r}, t) = -\varphi(\mathbf{0}, 0). \quad (4.27)$$

Щоб ця рівність виконувалася для довільної основної функції $\varphi(\mathbf{r}, t)$ змінних $\mathbf{r}$ і t , функція $G(\mathbf{r}, t)$ повинна бути принаймні інтегрованою в кожному шарі $0 \leq t \leq T < \infty$. Згідно з результатом Завдання 4.2.6, це означає, що коефіцієнт $C_0 = 0$. Вимагаючи далі, щоб $G(\mathbf{r}, t)$ задовольняла умову (1.27), знаходимо, що

$$C_1 = \frac{1}{(4\pi a^2)^{3/2}},$$

і тоді, згідно з Лемою 1.3.1, рівність (4.27) справді виконується.

Отже,

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}}.$$

Контрольні запитання до §§ 4.1, 4.2

1. Які аксіоми повинні виконуватися для визначених на деякій множині операцій додавання елементів і множення їх на комплексні числа для того, щоб цю множину можна було вважати лінійним простором?

2. Чи утворюють основні функції лінійний простір?
3. Як означаються неперервні лінійні функціонали, визначені на множині основних функцій?
4. Чи утворюють лінійний простір неперервні лінійні функціонали, які визначені на множині основних функцій?
5. У чому полягає різниця між регулярними та сингулярними функціоналами?
6. Чи є неперервним і регулярним функціонал, який кожній основній функції ставить у відповідність її значення в певній точці?
7. Чи можна довільну узагальнену функцію наблизити звичайними локально інтегровними функціями? Про що йдеться, коли кажуть, що послідовність регулярних функціоналів збігається до сингулярного?
8. Як дельта-функції двох і трьох змінних формально виражаються через дельта-функцію однієї змінної?
9. Як, за певних умов, обчислюється функціонал, якому відповідає складена узагальнена функція з дельта-функцією в якості зовнішньої функції?
10. Як означаються частинні похідні узагальненої функції?
11. Чому дорівнюють узагальнені похідні від дельта-функції однієї змінної і функції Хевісайда?
12. Як для лінійних диференціальних операторів означаються спряжені оператори?
13. Що називається узагальненим розв'язком лінійного диференціального рівняння? Зокрема, як означаються узагальнені розв'язки рівнянь Пуассона і Гельмгольца?
14. Що називається розв'язком узагальненої задачі Коші для рівняння теплопровідності?

4.3. Метод Фур'є

Метод Фур'є, або **метод відокремлення змінних**, є одним з найбільш універсальних методів дослідження й розв'язування лінійних рівнянь математичної фізики. За його допомогою задачі для рівнянь з частинними похідними можна звести до звичайних диференціальних рівнянь.

Згідно з методом Фур'є розв'язок шукається у вигляді добутку двох функцій, одна з яких залежить від часової змінної, а друга – від просторових координат. У випадку рівняння теплопровідності такі функції відповідають тим режимам нагрівання або остигання, при яких відношення значень температури в будь-яких двох довільно вибраних точках середовища залишається сталим. У випадку рівняння дифузії вони відповідають таким змінам концентрації домішкових частинок, при яких не залежить від часу відношення значень концентрації, також взятих у будь-яких двох точках середовища.

Отже, для однорідного рівняння теплопровідності (чи дифузії)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u \quad (4.28)$$

відповідний клас функцій складається із обмежених або інтегровних функцій, які задовольняють рівняння (4.28) і мають вигляд

$$u(\mathbf{r}, t) = S(t)\Phi(\mathbf{r}). \quad (4.29)$$

Підставляючи вираз (4.29) у рівняння (4.28) та ділячи обидві частини так здобутої рівності на цей же вираз, дістаємо:

$$\frac{\left(\frac{dS(t)}{dt}\right)}{S(t)} = \frac{a^2 \Delta \Phi(\mathbf{r})}{\Phi(\mathbf{r})}. \quad (4.30)$$

Ліва частина рівняння (4.30), яка залежить від часової змінної t , та права, яка залежить від просторових координат $\mathbf{r}$, дорівнюють одна одній при довільних значеннях t і $\mathbf{r}$ лише за умови, що вони обидві дорівнюють одній і тій же сталій. Якщо позначити її через $-\lambda$, то рівняння (4.30) зводиться до таких двох рівнянь:

$$S'(t) = -\lambda S(t), \quad (4.31)$$

$$a^2 \Delta \Phi(\mathbf{r}) + \lambda \Phi(\mathbf{r}) = 0. \quad (4.32)$$

Загальний розв'язок рівняння (4.31) дорівнює

$$S(t) = Ce^{-\lambda t}, \quad (4.33)$$

що дає:

$$u(\mathbf{r}, t) = e^{-\lambda t} \Phi(\mathbf{r}), \quad (4.34)$$

де функція $\Phi(\mathbf{r})$ підпорядковується рівнянню (4.32).

Функції виду (4.34) є дійсними та рівномірно обмеженими відносно змінної t , а, отже, мають фізичний зміст лише при $\lambda > 0$.

Позначивши $k^2 \equiv \lambda/a^2$, перепишемо рівняння (4.32) у вигляді

$$\Delta \Phi(\mathbf{r}) + k^2 \Phi(\mathbf{r}) = 0. \quad (4.35)$$

Рівняння (4.35), з додатним параметром k^2 , – це найбільш поширений випадок рівняння Гельмгольца.

Розглянемо множину функцій, що залежать від змінних x , y , z лише через комбінацію $n_x x + n_y y + n_z z$, де $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$. Вони мають вигляд

$$\Phi(x, y, z) = \varphi(n_x x + n_y y + n_z z).$$

Кожна функція цього типу набуває того ж самого значення в усіх точках довільної площини, нормаль до якої паралельна вектору $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$.

Завдання 4.3.1. Переконайтеся, що серед функцій $\Phi(x, y, z)$ лише ті задовольняють рівняння Гельмгольца (4.35), які мають вигляд

$$\Phi(x, y, z) = A \sin k(\mathbf{n}\mathbf{r}) + B \cos k(\mathbf{n}\mathbf{r}), \quad (\mathbf{n}\mathbf{r}) = n_x x + n_y y + n_z z,$$

або, що рівносильно, вигляд

$$\Phi(x, y, z) = C_+ e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r})} + C_- e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r})},$$

де $\mathbf{k} = (kn_x, kn_y, kn_z)$.

Дужки (...), що позначають скалярний добуток двох векторів, надалі опускаються.

Частинні розв'язки рівняння Гельмгольца виду $e^{\pm i\mathbf{k}\mathbf{r}}$, $\mathbf{k}\mathbf{k} = k^2$, називаються **плоскими хвилями**. Розв'язки рівняння (4.35) у вигляді плоских хвиль формально існують і тоді, коли параметр k^2 є від'ємним або навіть комплексним. Однак у цих випадках компоненти вектора $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ у показниках експоненти є уявними або комплексними величинами, і тому функції $e^{\pm i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ стають необмеженими в усьому просторі E_3 .

Завдання 4.3.2. Переконайтеся, що функції $e^{\pm i\mathbf{k}\mathbf{r}}$, де $\mathbf{n}$ – одиничний вектор, а k – комплексне число, є обмеженими в усьому просторі E_3 лише при $k^2 \geq 0$.

Завдання 4.3.3. Знайдіть загальний розв'язок рівняння Гельмгольца в класі двічі диференційовних сферично симетричних функцій.

Розв'язання. Шуканий загальний розв'язок має вигляд

$$\Phi(r) = A \frac{\sin kr}{r}. \quad (4.36)$$

Щоб його дістати, перейдемо до сферичних координат та врахуємо, що для сферично симетричних функцій

$$\Delta\Phi(r) = \Phi''(r) + \frac{2}{r}\Phi'(r).$$

Тоді рівняння (4.35) набуває вигляду

$$\Phi''(r) + \frac{2}{r}\Phi'(r) + k^2\Phi(r) = 0. \quad (4.37)$$

Зробивши підстановку

$$\Phi(r) = \frac{\chi(r)}{r}, \quad (4.38)$$

для функції $\chi(r)$ дістаємо рівняння

$$\chi''(r) + k^2\chi(r) = 0,$$

загальний розв'язок якого

$$\chi(r) = A \sin kr + B \cos kr. \quad (4.39)$$

Для того щоб функція $\Phi(r)$ була диференційовною в точці $r = 0$, необхідно, щоб $B = 0$.

Зауваження 4.3.1. Якщо обмежена двічі диференційовна функція $\Phi(\mathbf{r})$ задовольняє рівняння Гельмгольца (4.35), то розв'язок рівняння (4.28) при початковій умові $u(\mathbf{r}, 0) = \Phi(\mathbf{r})$ має вигляд $u(\mathbf{r}, t) = e^{-a^2 k^2 t} \Phi(\mathbf{r})$. Це твердження безпосередньо випливає із єдиності розв'язку задачі Коші для рівняння (4.28).

Завдання 4.3.4. Покажіть, що розв'язок рівняння (4.28) при початковій умові

$$u(\mathbf{r}, 0) = \sum_{l=1}^N a_l e^{i\mathbf{k}_l \mathbf{r}}, \quad (4.40)$$

де $\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N$ – будь-які вектори з дійсними компонентами, а $a_1, \dots, a_N$ – довільні числа, має вигляд

$$u(\mathbf{r}, t) = \sum_{l=1}^N a_l e^{i\mathbf{k}_l \mathbf{r} - a^2 k_l^2 t}, \quad k_l^2 = \mathbf{k}_l \mathbf{k}_l = |\mathbf{k}_l|^2. \quad (4.41)$$

Вказівка. Скористайтеся **принципом суперпозиції**: будь-яка лінійна комбінація $u(\mathbf{r}, t) = \sum_{l=1}^N a_l u_l(\mathbf{r}, t)$ частинних розв'язків лінійного однорідного рівняння, що задовольняють умови $u_l(\mathbf{r}, 0) = u_l^0(\mathbf{r})$, де $u_l^0(\mathbf{r})$ – задані функції відповідного класу, є розв'язком цього рівняння при початковій умові

$$u(\mathbf{r}, 0) = \sum_{l=1}^N a_l u_l^0(\mathbf{r}). \quad (4.42)$$

Подальше використання принципу суперпозиції веде до такого узагальнення результату *Завдання 4.3.4*:

Теорема 4.3.2. Нехай функцію $u_0(\mathbf{r})$ можна подати у вигляді інтеграла

$$u_0(\mathbf{r}) = \int_{E_3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \hat{u}_0(\mathbf{k}) d\mathbf{k}, \quad (4.43)$$

де $\hat{u}_0(\mathbf{k})$ – деяка інтегровна функція. Тоді розв'язок задачі Коші для рівняння (4.28) при $t > 0$ і початковій умові $u(\mathbf{r}, 0) = u_0(\mathbf{r})$ дорівнює

$$u(\mathbf{r}, t) = \int_{E_3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - a^2 k^2 t} \hat{u}_0(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \quad (4.44)$$

Доведення цієї теореми наводиться в § 4.7.

Виникає питання, наскільки широким є клас функцій, що допускають зображення (4.43). Почнемо з'ясовувати це питання з випадку функцій однієї змінної.

Контрольні запитання до § 4.3

1. Частинні розв'язки якого вигляду використовуються, коли застосовують метод відокремлення змінних?
2. Який фізичний зміст мають частинні розв'язки рівняння теплопровідності у вигляді добутку двох функцій, одна з яких залежить лише від часу, а інша – лише від координат? Який вигляд має функція, що описує часову залежність? Якому рівнянню підпорядковується координатно-залежний множник?
3. Які частинні розв'язки рівняння Гельмгольца називаються плоскими хвилями? Чому?
4. Чому дорівнює розв'язок задачі Коші для рівняння теплопровідності, якщо початкова температура має вигляд суперпозиції плоских хвиль?

4.4. Інтегральне перетворення Фур'є

За означенням, **перетворенням Фур'є** або **Фур'є-образом** довільної інтегровної функції $f(x)$, $-\infty < x < +\infty$, називається функція $\hat{f}(k)$, яка визначена на всій осі $-\infty < k < +\infty$ і задається інтегралом

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx. \quad (4.45)$$

Із цього означення випливає, що Фур'є-образ будь-якої інтегровної функції – це функція, рівномірно обмежена на всій осі. Справді, для $k \in (-\infty, \infty)$ правильна така оцінка:

$$\left| \hat{f}(k) \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1, \quad (4.46)$$

де символ $\|f\|_1$ позначає функціонал

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx. \quad (4.47)$$

Крім того, Фур'є-образ будь-якої інтегровної функції є функцією, яка неперервна на всій осі. Щоб це довести, візьмемо довільне число k_0 , $-\infty < k_0 < \infty$, надамо йому малого приросту

k' та розглянемо різницю $\hat{f}(k_0 + k') - \hat{f}(k_0)$. Маємо:

$$\begin{aligned} \left| \hat{f}(k_0 + k') - \hat{f}(k_0) \right| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-ik'x} - 1) e^{-ik_0x} f(x) dx \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-ik'x} - 1| |f(x)| dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sin \frac{k'x}{2} \right| |f(x)| dx. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Для всіх значень x маємо:

$$\left| \sin \frac{k'x}{2} \right| \leq 1, \quad \lim_{k' \rightarrow 0} \left| \sin \frac{k'x}{2} \right| = 0.$$

Тоді, щоб довести, що

$$\lim_{k' \rightarrow 0} \left| \hat{f}(k_0 + k') - \hat{f}(k_0) \right| = 0, \quad (4.49)$$

досить згадати такий відомий факт із теорії інтегрування:

Теорема Лебега. Нехай для послідовності інтегровних функцій $g_n(x)$ існує така інтегровна функція $g_0(x) \geq 0$, що при всіх n (майже) всюди на осі x справджується нерівність

$$|g_n(x)| \leq g_0(x).$$

Крім того, нехай при (майже) всіх x

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = 0.$$

Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) dx = 0.$$

Операція, яка кожній інтегровній функції ставить у відповідність її Фур'є-образ, є лінійною: якщо $f_1(x)$ і $f_2(x)$ – довільні інтегровні функції, а α і β – довільні дійсні або комплексні числа, то перетворення Фур'є лінійної комбінації $g(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x)$ дається формулою

$$\hat{g}(k) = \alpha \hat{f}_1(k) + \beta \hat{f}_2(k). \quad (4.50)$$

Співвідношення (4.50) безпосередньо випливає із означення перетворення Фур'є та властивостей визначеного інтеграла.

Характеристичною функцією інтервалу (a, b) , $-\infty < a, b < \infty$, називається функція

$$\chi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & a < x < b, \\ 0, & x < a, \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

Скінченнозначною або східчастою функцією називається лінійна комбінація скінченного числа характеристичних функцій скінченних інтервалів; її можна подати у вигляді скінченної суми

$$\sum_{s=1}^N c_s \chi_{(a_s, b_s)}(x),$$

де $\min_s a_s > -\infty$, $\max_s b_s < +\infty$, а c_s – довільні дійсні або комплексні числа.

Завдання 4.4.1. Знайдіть Фур'є-образ функції $\chi_{(a,b)}(x)$.

Відповідь:

$$\hat{\chi}_{(a,b)}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-ika} - e^{-ikb}}{ik}. \quad (4.51)$$

Завдання 4.4.2. Доведіть, що Фур'є-образ будь-якої скінченнозначної функції $\varphi(x)$ має таку властивість:

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \hat{\varphi}(k) = 0. \quad (4.52)$$

Оскільки для будь-якої інтегровної функції $f(x)$ існує така послідовність скінченнозначних функцій $\varphi_n(x)$, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \varphi_n\|_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f - \varphi_n| dx \right) = 0,$$

то з результату *Завдання 4.4.2* випливає

Теорема Рімана-Лебега. Для будь-якої інтегровної $f(x)$

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(k) = 0.$$

Згідно з теоремою Рімана-Лебега, Фур'є-образ будь-якої сумовної функції $f(x)$ спадає до нуля, коли параметр k прямує до $\pm\infty$. Однак жодних універсальних оцінок щодо швидкості

спадання Фур'є-образу інтегровної функції не існує. Якщо ж функція $f(x)$ задовольняє певні додаткові умови, то такі оцінки можна навести.

Припустимо, що функцію $f(x)$ можна записати у вигляді

$$f(x) = f(0) + \int_0^x h(s) ds, \quad (4.53)$$

де $h(x)$ – функція, інтегровна на будь-якому скінченному інтервалі. Функція $f(x)$, яка дозволяє таке зображення, називається **абсолютно неперервною**.

Абсолютно неперервна функція є неперервною у звичайному розумінні. Більше того, вона диференційовна майже в кожній точці дійсної осі, і при цьому, як це впливає з виразу (4.53), майже всюди $f'(x) = h(x)$. Можна сказати, що та й тільки та функція є абсолютно неперервною, яка майже всюди має локально інтегровну першу похідну і яку (з точністю до сталого доданка) можна відновити за допомогою її похідної.

Теорема 4.4.1. Нехай інтегровна функція $f(x)$ є абсолютно неперервною і має інтегровну на всій осі першу похідну $f'(x)$.

Тоді Фур'є-образ $\hat{f}'(k)$ похідної $f'(x)$ і Фур'є-образ $\hat{f}(k)$ функції $f(x)$ пов'язані співвідношенням

$$\frac{d\hat{f}}{dk}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f'(x) dx = ik \hat{f}(k). \quad (4.54)$$

Доведення. У кожній точці x дійсної осі функцію $f(x)$ можна подати у вигляді

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(s) ds.$$

Оскільки похідна $f'(x)$ – інтегровна функція, існують скінченні границі

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(s) ds \equiv \alpha, \quad (4.55)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = f(0) - \int_{-\infty}^0 f'(s) ds \equiv \beta.$$

Перша із формул (4.55) означає, що для довільного малого числа $\delta > 0$ існує відповідне скінченне число x_0 , починаючи з якого нерівність $|f(x) - \alpha| < \delta$ виконується для всіх $x > x_0$. Зміст другої формули аналогічний.

Покажемо тепер, що обидві границі (4.55) дорівнюють нулю. Справді, інтегровність функції $f(x)$ означає, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty,$$

звідки випливає, що

$$\int_0^{+\infty} |f(x)| dx = \int_0^{x_0} |f(x)| dx + \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{x_0}^N |f(x)| dx < \infty,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{x_0}^N |f(x)| dx < \infty.$$

Беручи $\delta < |\alpha|/2$, для належного x_0 маємо:

$$|f(x)| = |\alpha + (f(x) - \alpha)| \geq |\alpha| - |f(x) - \alpha| \geq \frac{|\alpha|}{2}.$$

Отже, при $N \rightarrow \infty$ і для цього x_0 дістаємо:

$$\int_{x_0}^N |f(x)| dx \geq \frac{|\alpha|}{2} (N - x_0).$$

Внаслідок інтегровності функції $f(x)$ цей інтеграл залишається обмеженим зверху при $N \rightarrow \infty$, що можливо лише при $\alpha = 0$. Аналогічно $\beta = 0$.

Беручи це до уваги та інтегруючи частинами, дістаємо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f'(x) dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} f(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \\ &+ \frac{ik}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx = ik \hat{f}(k). \end{aligned}$$

Наслідок 4.4.2. Якщо функція $f(x)$ інтегровна, абсолютно неперервна та має інтегровну першу похідну $f'(x)$, то

$$\hat{f}(k) \underset{k \rightarrow \pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{|k|}\right). \quad (4.56)$$

Справді, із формули (4.54) бачимо, що $\hat{f}(k) = \hat{f}'(k)/ik$. Застосовуючи до Фур'є-образу похідної $f'(x)$ теорему Рімана-Лебега, приходимо до оцінки (4.56).

Теорему 4.4.1 і Наслідок 4.4.2 можна узагальнити так:

Теорема 4.4.3. Якщо інтегровна функція $f(x)$ є абсолютно неперервною, має абсолютно неперервні та інтегровні $(n-1)$ -перші похідні та інтегровну n -ту похідну, то Фур'є-образ $\hat{f}^{(n)}(k)$ n -тої похідної $f^{(n)}(x)$ і Фур'є-образ $\hat{f}(k)$ функції $f(x)$ пов'язані співвідношенням

$$\hat{f}^{(n)}(k) = (ik)^n \hat{f}(k). \quad (4.57)$$

Наслідок 4.4.4. Якщо функція $f(x)$ задовольняє умови Теорему 4.4.3, то

$$\hat{f}(k) \underset{k \rightarrow \pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{|k|^n}\right). \quad (4.58)$$

Завдання 4.4.3. Доведіть *Теорему 4.4.3* і *Наслідок 4.4.4*.
Вказівка. Скористайтеся методом математичної індукції.

Завдання 4.4.4. Доведіть таке твердження: нехай функція $f(x)$ і функція $x^n f(x)$, $n \geq 1$, інтегровні. Тоді Фур'є-образ $\hat{f}(k)$ має n неперервних похідних, і при цьому

$$\frac{d^n}{dk^n} \hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} (-ix)^n f(x) dx. \quad (4.59)$$

Іншими словами, Фур'є-образ функції $x^n f(x)$ дорівнює $i^n \left(\hat{f}(k) \right)^{(n)}$.

Із *Наслідку 4.4.4* випливає, що чим більше інтегровних похідних має функція $f(x)$, тим швидше її Фур'є-образ спадає за модулем при $k \rightarrow \pm\infty$. З іншого боку, із результату *Завдання 4.4.4* видно, що чим швидше спадає функція $f(x)$, тим гладшим є її Фур'є-образ.

Важливе значення має той факт, що при перетворенні Фур'є, у відповідності з *Теоремами 4.4.1* і *4.4.3*, операція диференціювання функції зводиться до операції множення Фур'є-образу цієї функції на ik . Зокрема, лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами переходять (у випадку скалярних функцій) у лінійні алгебраїчні рівняння.

Розглянемо, наприклад, рівняння

$$a_0 y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = g(x), \quad (4.60)$$

де $g(x)$ – інтегровна функція, а $a_0, \dots, a_n$ – сталі.

Якщо функція $y(x)$ відшукується в класі функцій, що є неперервними та неперервно диференційовними разом зі своїми $(n-1)$ -першими похідними, мають абсолютно неперервні $(n-1)$ -перші похідні, та є інтегровними разом зі своїми n -першими похідними, то Фур'є-образ функції $y(x)$ задовольняє (див. *Теорему 4.4.1* і *4.4.3*) рівняння

$$L(ik) \hat{y}(k) = \hat{g}(k),$$

де

$$L(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n.$$

Звідси

$$\hat{y}(k) = \frac{\hat{g}(k)}{L(ik)}. \quad (4.61)$$

Якщо многочлен $L(z)$ має нулі на уявній осі, то розв'язок із зазначеними властивостями може існувати лише за умови, що $\hat{g}(k)$ дорівнює нулю при всіх тих k , що відповідають нулям функції $L(ik)$. Справді, як Фур'є-образ інтегрованої функції, $\hat{y}(k)$ є неперервною функцією при всіх k . Права ж частина формули (4.61) неперервна лише тоді, коли многочлен $L(ik)$ не має нулів на дійсній осі, або ж коли нулі знаменника у формулі (4.61) компенсуються нулями чисельника. При виконанні цих умов можна сподіватися, що права частина формули (4.61) справді буде Фур'є-образом інтегрованої функції, яка має n інтегровних похідних.

Щоб відновити цю функцію і показати, що вона єдина, треба пересвідчитися, що будь-яка інтегровна функція однозначно визначається за її Фур'є-образом, а також відшукати *формулу обернення*.

Теорема 4.4.7. Якщо $\hat{f}(k)$ – Фур'є-образ інтегрованої функції $f(x)$, то для всіх точок неперервності x функції $f(x)$ справджується співвідношення

$$f(x) = \lim_{\tau \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} e^{-\tau k^2} \hat{f}(k) dk. \quad (4.62)$$

Більше того, якщо Фур'є-образ $\hat{f}(k)$ є інтегровою функцією, то функція $f(x)$ неперервна, і для всіх точок x

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \hat{f}(k) dk. \quad (4.63)$$

Формула (4.63) та її точніший варіант (4.62) – шукані формули обернення.

Доведення. Доведення формули (4.62), а тим самим і (4.63), почнемо із вже знайденого співвідношення

$$f(x) = \lim_{\tau \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-x')^2}{4\tau}} f(x') dx', \quad (4.64)$$

правильного в усіх точках неперервності інтегрованої $f(x)$.

Далі доводимо, що

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{x^2}{4\tau}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} e^{-\tau k^2} dk. \quad (4.65)$$

Для цього покладемо $y = \sqrt{\tau} k$, $p = x/\sqrt{\tau}$ і перепишемо праву частину формули (4.65) у вигляді

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} I\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right),$$

де

$$I(p) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipy} e^{-y^2} dy. \quad (4.66)$$

Беручи до уваги, що e^{-y^2} – парна функція, користуючись формулою Ейлера для e^{ipy} та інтегруючи частинами, дістаємо:

$$\begin{aligned} I(p) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \cos py e^{-y^2} dy = \frac{2}{\sqrt{\pi}} y \cos py e^{-y^2} \Big|_0^{\infty} - \\ &- \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} y (\cos py e^{-y^2})' dy = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} y^2 \cos py e^{-y^2} dy + \end{aligned}$$

$$+ \frac{2p}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} y \sin py e^{-y^2} dy = -2I''(p) - pI'(p),$$

звідки

$$2I''(p) + pI'(p) + I(p) = 0. \quad (4.67)$$

Розглядаючи (4.67) як диференціальне рівняння відносно $I(p)$, бачимо, що

$$2I'(p) + pI(p) = \text{const}. \quad (4.68)$$

Згідно з формулою (4.66), $I(p)$ – це Фур’є-образ інтегрованої функції e^{-y^2} , яка має інтегровну похідну $-2ye^{-y^2}$. Враховуючи *Наслідок 4.4.4* та результат *Завдання 4.4.4*, маємо

$$\lim_{p \rightarrow \pm\infty} pI(p) = 0, \quad \lim_{p \rightarrow \pm\infty} I'(p) = 0,$$

тобто стала в правій частині рівняння (4.68) дорівнює нулю. Тому

$$2I'(p) + pI(p) = 0.$$

Звідси знаходимо, що

$$I(p) = C_0 e^{-\frac{p^2}{4}}.$$

Оскільки

$$C_0 = I(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = 1,$$

дістаємо:

$$I(p) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \cos py e^{-y^2} dy = e^{-\frac{p^2}{4}}. \quad (4.69)$$

Таким чином, справді

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} e^{-\tau k^2} dk = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} I\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{x^2}{4\tau}}.$$

Перепишучи підінтегральну функцію в (4.64) за допомогою формули (4.65) та змінюючи порядок інтегрування^{*)}, для точок неперервності функції $f(x)$ маємо:

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{\tau \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')} e^{-\tau k^2} dk \right\} f(x') dx' = \\ &= \lim_{\tau \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau k^2} e^{ikx} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx'} f(x') dx' \right\} dk = \\ &= \lim_{\tau \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau k^2} e^{ikx} \hat{f}(k) dk. \end{aligned}$$

Завдання 4.4.5. Доведіть, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin nx}{\pi x} = \delta(x),$$

де $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака.

Розв'язання. Згідно з формулою обернення (4.63), для довільної основної функції $\varphi(x)$ маємо:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(k) dk = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^n \hat{\varphi}(k) dk = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^n \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \varphi(x) dx \right\} dk = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n e^{-ikx} dk \right\} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin nx}{\pi x} \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

^{*)} Така зміна можлива на підставі *теорема Фубіні*, яка розглядається в наступному параграфі.

Завдання 4.4.6. Знайдіть Фур'є-образ функції

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{2T}, & |x| < 2T, \quad T > 0, \\ 0, & |x| > 2T, \end{cases}$$

і перевірте, що

$$\frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 Tx}{Tx^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-2T}^{2T} \left(1 - \frac{|k|}{2T}\right) e^{ikx} dk. \quad (4.70)$$

Завдання 4.4.7. Знайдіть Фур'є образ функції

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x}, & x > 0, \quad \alpha > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

Відокремивши дійсну та уявну частини функції $\hat{f}(k)$, переконайтеся, що

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos kx dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + k^2}, \quad (4.71)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin kx dx = \frac{k}{\alpha^2 + k^2}. \quad (4.72)$$

Завдання 4.4.8. Доведіть, що

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin px}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} p.$$

Вказівка. Проінтегруйте рівність (4.71) за змінною k від нуля до p , після чого спрямуйте α до нуля.

Завдання 4.4.9. Доведіть, що при $k > 0$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin kx}{x} e^{ipx} dx = \begin{cases} 0, & |p| > k, \\ 1, & |p| < k. \end{cases}$$

(Розривний множник Діріхле.)

4.5. Згортка інтегровних функцій. Рівність Парсеваля

Нехай $f(x)$ і $g(x)$ – довільні інтегровні функції. Тоді майже при всіх x існує інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt, \quad -\infty < x < \infty. \quad (4.73)$$

Функція, значення якої задаються формулою (4.73), називається **згорточною функцій** $f(x)$ і $g(x)$. Згортка позначається символом $(f * g)(x)$.

Як і раніше, користуємося символом $\|f\|_1$ для позначення інтеграла

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx,$$

де $f(x)$ – довільна інтегровна функція.

Теорема 4.5.1. Згортка будь-яких інтегровних функцій $f(x)$ і $g(x)$ є інтегровою функцією. При цьому справджується нерівність

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1. \quad (4.74)$$

Доведення. Із означення згортки випливає, що

$$\|f * g\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)| |g(t)| dt. \quad (4.75)$$

Згадаємо далі, що якщо функція двох змінних $\varphi(x, t)$ – неінтегровна, то може статися так, що один із інтегралів

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, t) dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, t) dx$$

існує, тоді як інший – ні; або обидва інтеграли існують та мають скінченні значення, але ці значення не збігаються.

Завдання 4.5.1. Перевірте, що

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dt \frac{x^2 - t^2}{(x^2 + t^2)^2} = \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^1 dt \int_0^1 dx \frac{x^2 - t^2}{(x^2 + t^2)^2} = -\frac{\pi}{4}.$$

У теорії інтегрування, однак, доводиться така фундаментальна теорема:

Теорема Фубіні. Якщо для функції $\varphi(x, t)$, або для будь-якої функції $\psi(x, t) \geq |\varphi(x, t)|$ один з інтегралів

$$\iint_{E_2} |\varphi(x, t)| dx dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x, t)| dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x, t)| dx \quad (4.76)$$

має скінченне значення, то всі інтеграли (4.76) мають скінченні значення, і ці значення збігаються. За наведеної умови

$$\iint_{E_2} \varphi(x, t) dx dt = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, t) dx. \quad (4.77)$$

Змінюючи порядок інтегрування в правій частині формули (4.75), бачимо, що функція

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)| |g(t)| dt,$$

(яка є мажорантою для $|(f * g)(x)|$) інтегровна, і що справджується нерівність (4.74):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)| |g(t)| dt &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)| dx \right\} dt = \\ &= (x' = x - t) = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt \int_{-\infty}^{\infty} |f(x')| dx' = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Згідно з теоремою Фубіні це означає, що згортка $(f * g)(x)$ інтегровна.

Якщо кожна із функцій $f(x)$ і $g(x)$ дійсна та невід'ємна (або недодатна), знак нерівності у формулі (4.74) можна опустити.

Завдання 4.5.2. Нехай $f(x)$ і $g(x)$ – інтегровні функції. Користуючись теоремою Фубіні, перевірте, що майже при всіх x

$$(f * g)(x) = (g * f)(x). \quad (4.79)$$

Знайдемо тепер Фур'є-образ згортки інтегровних функцій. Із означення перетворення Фур'є та теореми Фубіні випливає, що

$$\begin{aligned} (\hat{f * g})(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt g(t) e^{-ikt} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ik(x-t)} f(x-t) = (x' = x-t) = \\ &= \sqrt{2\pi} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-ikt} g(t) \right\} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-ikx'} f(x') \right\} = \\ &= \sqrt{2\pi} \hat{f}(k) \hat{g}(k). \end{aligned} \quad (4.80)$$

Таким чином, з точністю до множника $\sqrt{2\pi}$ Фур'є-образ згортки двох інтегровних функцій дорівнює добутку їх Фур'є-образів.

Припустимо, що функції $f(x)$ і $g(x)$ не тільки інтегровні, але й інтегровні з квадратом, тобто

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx < \infty.$$

Можна показати, що за цієї додаткової умови згортка функцій $f(x)$ і $g(x)$ є неперервною функцією. У відповідності з формулою обернення для перетворення Фур'є, у кожній точці дійсної осі тоді виконується рівність

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t) dt &= \lim_{\tau \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} e^{-\tau k^2} (\hat{f} * \hat{g})(k) dk = \\ &= \lim_{\tau \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} e^{-\tau k^2} \hat{f}(k) \hat{g}(k) dk.\end{aligned}$$

Зокрема, при $x = 0$ маємо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(-t)g(t) dt = \lim_{\tau \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau k^2} \hat{f}(k) \hat{g}(k) dk. \quad (4.81)$$

Замінімо функцію $f(x)$ у формулі (4.81) ермітрово-спряженою функцією $f_*(x) = \overline{f(-x)}$. Оскільки

$$\hat{f}_*(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \overline{f(-x)} dx = (x' = -x) = \overline{\hat{f}(k)}, \quad (4.82)$$

дістаємо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_*(-t)g(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)}g(t) dt = \lim_{\tau \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau k^2} \overline{\hat{f}(k)} \hat{g}(k) dk. \quad (4.83)$$

Зокрема, якщо $g(x) = f(x)$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \lim_{\tau \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau k^2} \left| \hat{f}(k) \right|^2 dk. \quad (4.84)$$

Підінтегральний вираз у правій частині формули (4.84) монотонно зростає, коли параметр τ прямує до нуля. Тому під знаком інтеграла можна перейти до границі. Дістаємо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{f}(k) \right|^2 dk. \quad (4.85)$$

Це співвідношення називається **рівністю Парсеваля** (або **Парсеваля-Планшереля**).

Із рівності (4.85) випливає, що Фур'є-образ від інтегровної та інтегровної з квадратом функції є інтегровною з квадратом

функцією. Тому для двох таких функцій $\overline{f(x)}$ і $g(x)$ добуток їх Фур'є-образів $\widehat{f(k)} \widehat{g(k)}$ виявляється, як показує нерівність Коші-Буняковського

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f(k)}} \widehat{g(k)} dk \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \widehat{f(k)} \right| \left| \widehat{g(k)} \right| dk \leq \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \widehat{f(k)} \right|^2 dk \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \widehat{g(k)} \right|^2 dk \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (4.86)$$

інтегровною функцією. Виконуючи граничний перехід у формулі (4.83), приходимо до такого узагальнення рівності Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} g(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f(k)}} \widehat{g(k)} dk. \quad (4.87)$$

Рівності (4.85) і (4.87) відіграють, зокрема, важливу роль при з'ясуванні принципів квантової теорії та при вивченні її найпростіших проблем.

При доведенні рівностей (4.85) і (4.87) ми вважали обидві функції $f(x)$ і $g(x)$ інтегровними та інтегровними з квадратом. Інтегровність цих функцій була необхідною для того, щоб існували їх Фур'є-образи. У загальному випадку можна довести, що навіть у тому разі, коли функції $f(x)$ і $g(x)$ є лише інтегровними з квадратом, їх Фур'є-образи існують, у певному розумінні, майже при всіх значеннях k , і що ці Фур'є-образи є інтегровними з квадратом функціями. При цьому й далі виконуються рівності (4.85) і (4.87).

Завдання 4.5.3. Доведіть, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 ax}{x^2} dx = \pi |a|.$$

Вказівка. Покажіть, що функція $\sin|a|x/x$ є Фур'є-образом функції

$$f(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, & |t| < |a|, \\ 0, & |t| > |a|, \end{cases}$$

а потім скористайтесь рівністю Парсеваля (4.85).

Завдання 4.5.4. Запишіть рівність Парсеваля (4.85) для функції

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{2}, & |x| < 2, \\ 0, & |x| > 2, \end{cases}$$

та її Фур'є-образу і покажіть, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 \xi}{\xi^4} d\xi = \frac{2\pi}{3}.$$

Завдання 4.5.5. Обчисліть інтеграли:

$$I_1(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ka}{k^2 + b^2} \frac{dk}{k} = \frac{\pi}{b^2} (1 - e^{-ab}),$$

$$I_2(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ka}{k^2 + b^2} dk = \frac{\pi}{b} e^{-ab},$$

де a, b – додатні числа.

Вказівка. Достатньо обчислити інтеграл $I_1(a, b)$, оскільки $I_2(a, b) = \frac{\partial I_1(a, b)}{\partial a}$. Щоб обчислити $I_1(a, b)$, знайдіть Фур'є-образ характеристичної функції $\chi_{[-a, a]}(x)$ відрізка $[-a, a]$ та Фур'є-образ функції $e^{-b|x|}$, а потім скористайтесь рівністю Парсеваля (4.87).

Завдання 4.5.6. Знайдіть розв'язок рівняння

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} + \gamma^2 y = C e^{-b|x|}, \quad \gamma, b > 0,$$

у класі двічі неперервно диференційовних функцій, що спадають до нуля при $x \rightarrow \pm\infty$.

Вказівка. Застосувавши перетворення Фур'є до обох частин рівняння, зведіть його до алгебраїчного рівняння відносно Фур'є-образу шуканої функції, знайдіть цей Фур'є-образ, а потім скористайтесь формулою обернення.

Завдання 4.5.7. Вважаючи, що права частина рівняння

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} + \gamma^2 y = f(x) \quad (4.88)$$

є довільною інтегрованою функцією, знайдіть його розв'язок у класі неперервних функцій, що мають абсолютно неперервні перші похідні та спадають до нуля при $x \rightarrow \pm\infty$. Подайте цей розв'язок у вигляді згортки функції $f(x)$ з деякою функцією $G_{-\gamma^2}(x)$, тобто за допомогою функції Гріна рівняння (4.88).

4.6. Перетворення Фур'є узагальнених функцій

Грунтуючись на формулі (4.87), можна означити перетворення Фур'є узагальнених функцій.

Вважатимемо, що узагальненим функціям відповідають неперервні лінійні функціонали, які визначені на множині нескінченно гладких функцій, що разом зі своїми похідними спадають до нуля при $x \rightarrow \pm\infty$ швидше від будь-якого степеня $1/|x|$. Ми вже знаємо, що Фур'є-образи таких основних функції є функціями з того ж самого класу. Дійсно, якщо основна функція

$\varphi(x)$ та її похідні швидко спадають до нуля, то Фур'є-образ $\hat{\varphi}(k)$ виявляється нескінченно гладким; і якщо функція $\varphi(x)$ і її похідні нескінченно гладкі, то Фур'є-образ $\hat{\varphi}(k)$ швидко спадає до нуля.

Запишемо зазначені лінійні функціонали у вигляді

$$F(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} \varphi(x) dx. \quad (4.89)$$

Якщо узагальнена функція $f(x)$, якій відповідає функціонал F , є інтегрованою з квадратом звичайною функцією, то згідно з рівністю (4.87) цей функціонал можна також подати у вигляді

$$F(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(k)} \hat{\varphi}(k) dk. \quad (4.90)$$

З іншого боку, інтегровній з квадратом функції $\hat{f}(k)$ відповідає лінійний функціонал $\hat{F}$, значення якого для будь-якої основної функції $\varphi(x)$ визначається інтегралом

$$\hat{F}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(x)} \varphi(x) dx. \quad (4.91)$$

Внаслідок рівності (4.87) функціонали $F(\varphi)$ і $\hat{F}(\hat{\varphi})$ пов'язані співвідношенням

$$F(\varphi) = \hat{F}(\hat{\varphi}), \quad (4.92)$$

тобто значення функціонала $\hat{F}$ для Фур'є-образу довільної основної функції збігається зі значенням функціонала F для самої функції.

Формулу (4.92) можна вважати означенням перетворення Фур'є для узагальнених функцій.

Нехай узагальненій функції $f(x)$ відповідає неперервний лінійний функціонал F , визначений на множині основних функцій. Тоді *Фур'є-образом функції $f(x)$* називається узагальнена функція $\hat{f}(k)$, якій відповідає лінійний неперервний функціонал $\hat{F}$, визначений на цій же множині основних функцій і такий, що для будь-якої основної функції $\varphi(x)$ справджується рівність (4.92).

Оскільки кожна узагальнена функція є границею послідовності звичайних неперервних функцій, то вона однозначно визначається своїм Фур'є-образом.

Приведене означення не виглядає, на перший погляд, ясним та конструктивним. Та наступні приклади переконують, що підрахувати Фур'є-образи узагальнених функцій не так вже й важко.

Розглянемо, наприклад, дельта-функцію $\delta(x)$. Їй відповідає функціонал F_δ , який задається формулою

$$F_\delta(\varphi) = \varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi(x) dx, \quad (4.93)$$

де $\varphi(x)$ – довільна основна функція. Користуючись формулою обернення для інтеграла Фур'є, можемо записати

$$\varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{\varphi}(k) dk = \hat{F}_\delta(\hat{\varphi}). \quad (4.94)$$

Функціонали (4.93) та (4.94) пов'язані співвідношенням (4.92). Тому, за означенням, Фур'є-образ дельта-функції $\delta(x)$ є звичайною функцією, що дорівнює сталій:

$$\hat{\delta}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \quad (4.95)$$

Аналогічно, функціонал $F_{\delta'}$, який визначається похідною дельта-функції $\delta'(x)$, можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} F_{\delta'}(\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) \varphi(x) dx = -\varphi'(0) = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ik \hat{\varphi}(k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{ik}{\sqrt{2\pi}} \right) \hat{\varphi}(k) dk, \end{aligned}$$

звідки

$$\hat{\delta}'(k) = \frac{ik}{\sqrt{2\pi}}. \quad (4.96)$$

Таким чином, Фур'є-образи узагальнених функцій, яким відповідають сингулярні функціонали, можуть бути звичайними функціями, які мають лише ту неприємну особливість, що вони можуть зростати на нескінченності.

Завдання 4.6.1. Знайдіть Фур'є-образи функцій $\delta(x - x_0)$ і $\delta'(x - x_0)$.

4.7. Перетворення Фур'є функцій багатьох змінних

Почнемо з випадку функцій двох змінних. Нехай $f(x, y)$ – довільна гладка функція, що досить швидко спадає до нуля при $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow +\infty$. Розглянемо перетворення Фур'є цієї функції за змінною x при фіксованому значенні іншої змінної y . Маємо:

$$\hat{f}(k_x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ik_x x} f(x, y), \quad (4.97)$$

при цьому формула обернення набирає вигляду

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{ik_x x} \hat{f}(k_x, y). \quad (4.98)$$

Розглядаючи k_x як параметр, запишемо тепер перетворення Фур'є функції $\hat{f}(k_x, y)$ за змінною y . Враховуючи формулу (4.97), дістаємо:

$$\begin{aligned} \hat{\hat{f}}(k_x, k_y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-ik_y y} \hat{f}(k_x, y) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i(k_x x + k_y y)} f(x, y), \end{aligned} \quad (4.99)$$

Підстановка формули обернення

$$\hat{f}(k_x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_y e^{ik_y y} \hat{f}(k_x, k_y) \quad (4.100)$$

у формулу (4.98) дає:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{ik_x x} \int_{-\infty}^{\infty} dk_y e^{ik_y y} \hat{f}(k_x, k_y). \quad (4.101)$$

Якщо функція $f(x, y)$ досить гладка і швидко спадає на нескінченності, то значення повторних інтегралів (4.99) і (4.101) не залежать від порядку інтегрування. Відповідно, перетворення Фур'є функції двох змінних задається формулою

$$\hat{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi} \int_{E_2} e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r})} f(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (4.102)$$

де $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$, $(\mathbf{k}\mathbf{r}) = k_x x + k_y y$ і $d\mathbf{r} = dx dy$, а формула обернення має (при певних застереженнях) вигляд

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{E_2} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r})} \hat{f}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \quad (4.103)$$

Аналогічно, перетворення Фур'є інтегровної функції $f(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} = (x_1, \dots, x_n)$, n змінних означається формулою

$$\hat{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{E_n} e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r})} f(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (4.104)$$

де $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$, $(\mathbf{k}\mathbf{r}) = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n$ і $d\mathbf{r} = dx_1 \dots dx_n$; формула ж обернення набирає (при певних застереженнях) вигляду

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{E_n} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r})} \hat{f}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \quad (4.105)$$

Результати та співвідношення, отримані для Фур'є-образів функцій однієї змінної, відповідним чином переносяться на випадок Фур'є-образів функцій n змінних. Так, наприклад, Фур'є-

образ $\hat{f}(\mathbf{k})$ довільної інтегровної функції n змінних є обмеженою неперервною функцією, що задовольняє умову

$$\lim_{|\mathbf{k}| \rightarrow \infty} \hat{f}(\mathbf{k}) = 0. \quad (4.106)$$

Співвідношення (4.106) – це багатовимірний варіант теореми Рімана-Лебега.

Розглядаючи інтеграл (4.104) як повторний, для гладких функцій з інтегровними частинними похідними можна дістати формули

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_1}(\mathbf{k}) = ik_1 \hat{f}(\mathbf{k}), \dots, \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_n}(\mathbf{k}) = ik_n \hat{f}(\mathbf{k}). \quad (4.107)$$

Більше того,

$$\frac{\partial^{s_1+s_2+\dots+s_n} \hat{f}}{\partial x_1^{s_1} \partial x_2^{s_2} \dots \partial x_n^{s_n}}(\mathbf{k}) = i^{s_1+s_2+\dots+s_n} k_1^{s_1} k_2^{s_2} \dots k_n^{s_n} \hat{f}(\mathbf{k}),$$

$$0 \leq s_1, s_2, \dots, s_n < \infty. \quad (4.108)$$

Зокрема, для Фур'є образу $\hat{\Delta}f(\mathbf{k})$ n -вимірною лапласіана

$$(\Delta f)(\mathbf{r}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \quad (4.109)$$

функції $f(\mathbf{r})$ справджується така формула:

$$(\hat{\Delta}f)(\mathbf{k}) = -k^2 \hat{f}(\mathbf{k}), \quad k^2 = k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_n^2. \quad (4.110)$$

Також виконуються багатовимірний аналог формули для Фур'є-образу згортки

$$(f * g)(\mathbf{r}) = \int_{E_n} f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') g(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \quad (4.111)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_1' \dots dx_n' f(x_1 - x_1', x_2 - x_2', \dots, x_n - x_n') g(x_1', x_2', \dots, x_n')$$

двох функцій $f(\mathbf{r})$ і $g(\mathbf{r})$, а саме

$$(\hat{f} * \hat{g})(\mathbf{k}) = (2\pi)^{n/2} \hat{f}(\mathbf{k}) \hat{g}(\mathbf{k}), \quad (4.112)$$

та багатовимірний варіант формули Парсеваля:

$$\int_{E_n} \overline{\hat{f}(\mathbf{r})} \hat{g}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_{E_n} \overline{\hat{f}(\mathbf{k})} \hat{g}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \quad (4.113)$$

Формули (4.106) – (4.113) відображають найважливіші властивості Фур'є-образів функцій багатьох змінних. За їх допомогою задачі для лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами в необмеженому багатовимірному просторі можна звести до лінійних алгебраїчних рівнянь, або до лінійних звичайних диференціальних рівнянь.

Повернемося ще раз до задачі Коші для рівняння теплопровідності (дифузії) в просторі E_3 :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u, \quad (4.114)$$

$$u(\mathbf{r}, 0) = u_0(\mathbf{r}).$$

Вважаючи, що функція $u_0(\mathbf{r})$ інтегровна, шукатимемо розв'язок задачі (4.114) при $t > 0$ в класі двічі неперервно диференційовних функцій, що інтегровні разом зі своїми першими та другими похідними за просторовими координатами та першими похідними за часом. Переходячи від шуканої функції $u(\mathbf{r}, t)$ до її

Фур'є-образу $\hat{u}(\mathbf{k}, t)$ за просторовими змінними, замість рівняння (4.114) дістаємо

$$\frac{\partial \hat{u}(\mathbf{k}, t)}{\partial t} = -a^2 k^2 \hat{u}(\mathbf{k}, t),$$

звідки

$$\hat{u}(\mathbf{k}, t) = C(\mathbf{k}) e^{-a^2 k^2 t}. \quad (4.115)$$

Стала інтегрування $C(\mathbf{k})$ знаходиться за допомогою початкової умови і дорівнює Фур'є-образу $\hat{u}_0(\mathbf{k})$ початкової функції $u_0(\mathbf{r})$. Отже,

$$\hat{u}(\mathbf{k}, t) = \hat{u}_0(\mathbf{k}) e^{-a^2 k^2 t}, \quad (4.116)$$

і тому

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{E_3} d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} e^{-a^2 k^2 t} \hat{u}_0(\mathbf{k}), \quad (4.117)$$

$$\hat{u}_0(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{E_3} d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} u_0(\mathbf{r}).$$

Тепер вже безпосередньо можна перевірити, що функція $u(\mathbf{r}, t)$, наведена формулою (4.117), при $t > 0$ має частинні похідні всіх порядків, задовольняє рівняння (4.114) і при $t \rightarrow 0$ рівномірно збігається до $u_0(\mathbf{r})$.

Інтегровність частинних похідних функції $u(\mathbf{r}, t)$ при $t > 0$ можна перевірити, переписавши перший інтеграл у формулі (4.117) у вигляді згортки функції $u_0(\mathbf{r})$ з функцією

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{E_3} d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} e^{-a^2 k^2 t} = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}}. \quad (4.118)$$

Завдання 4.7.1. Покажіть, що у просторі E_3 Фур'є-образ інтегровної сферично-симетричної функції $f(\mathbf{r}) = f(r)$ залежить лише від модуля k вектора $\mathbf{k}$ і дорівнює

$$\hat{f}(\mathbf{k}) = \hat{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dr r f(r) \frac{\sin kr}{k}. \quad (4.119)$$

Вказівка. При обчисленні інтеграла Фур'є за змінною $\mathbf{r}$ перейдіть до сферичних координат з полярною віссю, напрямленою вздовж вектора $\mathbf{k}$.

Завдання 4.7.2. Знайдіть Фур'є-образи таких функцій:

$$\text{а) } f(r) = A \frac{e^{-\gamma r}}{r}; \quad \text{б) } f(r) = \begin{cases} V_0, & 0 \leq r \leq R, \\ 0, & r > R. \end{cases}$$

ЛІТЕРАТУРА

1. *Арсенин В. Я.* Математическая физика. Основные уравнения и специальные функции. – М.: Наука, 1966. – 368 с.
2. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
3. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1979. – 392 с.
4. *Гончаренко В. М.* Основы теории уравнений с частными производными. – К.: Вища школа, 1985. – 312 с.
5. *Кошляков С. Н., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 710 с.
6. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. В 2 т. – М.: Гостехиздат, 1951. – Т. 1, 476 с; Т. 2, 544 с.
7. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 830 с.
8. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. – М.: Высшая школа, 1977. – 432 с.
9. *Перестюк М. О., Маринець В. В.* Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 2001. – 336 с.
10. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: Физматгиз, 1961. – 300 с.
11. *Положий Г. Н.* Уравнения математической физики. – М.: Высшая школа, 1964. – 560 с.
12. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. В 4 т. – М.: Наука, 1981. – Т. 1, 656 с.; Т. 4, 550 с.
13. *Смирнов М. М.* Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. – Минск: Изд-во БГУ, 1974. – 232 с.
14. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 444 с.
15. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 724 с.
16. *Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа. В 2 т. – М.: Наука, 1968. – Т. 2, 404 с.
17. *Шварц Л.* Математические методы для физических наук. – М.: Мир, 1965. – 412 с.
18. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 327 с.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК. АНГЛІЙСЬКІ ЕКВІВАЛЕНТИ ТЕРМІНІВ

Аксіоми	Axioms:
– додавання елементів лінійного простору 102	of addition of elements of a linear space
– множення елементів лінійного простору на числа 102	of multiplication of elements of a linear space by numbers
Амплітуда комплексна	Complex amplitude:
– – , вимушені коливання середовища 94	forced oscillations in a medium
– – , вимушені коливання температури 46	forced oscillations of temperature
Аналітичне продовження, 44	Analytic continuation
Вектор густини дифузійного потоку 51	Diffusion current density
– – теплового потоку 7	Heat current density
Випромінювання 6	Radiation
Густина 7	Density
Густина ймовірності	Probability density:
– – знайти домішкову частинку 53	of finding an impurity particle
– – переходу домішкової частинки 54	of transition of an impurity particle
– – умовна знайти домішкову частинку 54	conditional, of finding an impurity particle
– потужності гармонічного джерела тепла 43	Power density, of a harmonic heat source
– – – хвиль 94	of a harmonic source of waves
– – джерела (стоку) тепла 8	of a heat source (sink)
– – хвиль 90	of a source of waves
– точкової маси 100	Density of a point mass
Джерело гармонічне точкове	Harmonic point source:
– тепла 49	of heat
– хвиль 94	of waves
Дифузія 50	Diffusion
– в однорідному потоці рідини 52	in a uniform stream of liquid
– в рухомому середовищі 50	within a moving medium
– при наявності хімічних або ядерних реакцій 51	in the presence of chemical or nuclear reactions
Елемент	Element:
– множини 102	of a set
– нульовий 102	zero
– обернений 102	inverse
Єдиність розв’язку задачі Коші для рівняння теплопровідності 19	Uniqueness of the solution to the Cauchy problem, for the heat equation
– – – – хвильового рівняння 76	for the wave equation

Задача без початкових умов 97	Problem without initial conditions
Задача Коші 11	Cauchy problem
— для густини ймовірності знайти домішкову частинку 62	for the probability density of finding an impurity particle
— для рівняння дифузії 52	for the diffusion equation
— теплопровідності 18	for the heat equation
— узагальнена 117	generalized, for the heat equation
— хвильового рівняння 72	Cauchy problem for the wave equation
—, двовимірна 84	two-dimensional
—, одновимірна 88	one-dimensional
Закон додавання переставний 102	Law of addition, commutative
— сполучний 102	associative
— збереження маси 67	Law of conservation of mass
— множення розподільний 102	Law of multiplication, distributive
— сполучний 102	associative
— Фіка 51	Nernst's law
— Фур'є 9	Fourier's law
Збіжність послідовності основних функцій <i>див.</i> Послідовність основних функцій	Convergence of a sequence of test- functions: <i>see</i> Sequence of test-functions
Згортка інтегровних функцій 139	Convolution of integrable functions
Зміст функції Гріна	Meaning of the Green's function:
— рівняння Гельмгольца 49	for the Helmholtz equation
— дифузії 63	for the diffusion equation
— теплопровідності 33	for the heat equation
Інваріантність рівняння теплопровідності	Invariance of the heat equation:
— відносно зсувів 23	under translations
— масштабних перетворень 23	under scaling transformations
— перетворень координат і часу 22	under transformations of coordinates and time
— поворотів 23	under rotations
Клас Q 18	Class Q
Коефіцієнт	Coefficient (of):
— дифузії 51	diffusion
— питомої теплоємності, 7	specific heat capacity
— реакції 51	reaction
— температуропровідності 9	heat conduction
Коливання акустичні вимушені 94	Forced acoustic oscillations
— усталені 94, 97	steady-state
— малі рідини (газу) 65	Small-amplitude oscillations in a fluid
—, коливання густини 70	density variations
—, коливання тиску 71	pressure variations
— усталені температури 46	Steady-state oscillations of temperature
Конвекція 6	Convection
Конус світловий зрізаний 73	Frustum of a light cone
Концентрація домішкових частинок 50	Concentration of impurity particles

Лінеаризація 69

Матриця коефіцієнтів дифузії 57, 62

Метод відокремлення змінних 122

– Фур'є 122

Множина

– K (нескінченно гладких фінітних функцій) 15, 102

– лінійна 102

– L_1 (інтегровних комплексно-значних функцій) 12

– $W^{(2)}$ 15

Множник розривний Діріхле 138

Нерівність Коші-Буняковського 143

Оператор Лапласа 9

– обернений 48

– спряжений 116

Перетворення Фур'є (інтегральне)

– інтегрованої функції 127

– лінійного диференціального рівняння 133

– обернене 134

– функції багатьох змінних 149

– функції двох змінних 149

– узагальненої функції 146

– функції багатьох змінних 149

– функції двох змінних 149

Події незалежні 54

Поле швидкості потенціальне 70

Послідовність основних функцій

– збіжність до нуля в просторі C 105

– в просторі K 103

– в просторі S 106

– що прямує до дельта-функції Дірака 107

– до узагальненої функції 106

Потенціал

– для зовнішньої об'ємної сили 69

– електростатичний 36

– загальний 93

– комплексний для вимушених коливань 94

– ньютонівський гравітаційний 36, 101

– тепловий 35

– швидкості 70, 94

Linearization

Matrix of diffusion coefficients

Method of separation of variables

Fourier method

Set:

K (of infinitely smooth, compactly supported functions)

linear

L_1 (of integrable complex-valued functions)

$W^{(2)}$

Dirichlet's discontinuous factor

Cauchy-Schwarz inequality

Laplace operator

Operator, inverse

adjoint

Fourier (integral) transform:

of an integrable function

of a linear differential equation

inverse

inverse, of a function of many variables

inverse, of a function of two variables

of a generalized function

of a function of many variables

of a function of two variables

Independent events

Potential velocity field

Sequence of test-functions:

convergence to zero in space C

convergence to zero in space K

convergence to zero in space S

tending to the Dirac delta function

tending to a generalized function

Potential:

for an external bulk force

electrostatic

retarded

complex, for forced oscillations

Newton's gravitational

Newton's heat

velocity

Похідна
 – матеріальна 67
 – узагальнена 113
 Принцип Гюйгенса
 ––, двовимірний випадок 87
 ––, одновимірний випадок 89
 ––, тривимірний випадок 83
 Принцип максимального (мінімального) значення 11
 – суперпозиції 125
 Простір (*також див.* Множина)
 – C (функцій, неперервних у будь-якій замкненій області простору E_3) 105
 – E_3 (необмежений тривимірний) 12
 – K 102
 – лінійний 102
 – S 105
 Процес
 – адиабатний 69
 – лінійний 11
 – марковський 54

Реакції першого порядку 51
 Рівність Парсеваля (-Планшереля) 142
 ––, багатовимірний аналог 151
 –– узагальнена 143
 Рівняння Гельмгольца 43, 97, 123
 –– неоднорідне 46
 –––, розв'язок 47
 –––, узагальнений розв'язок 47
 –– однорідне 47
 –––, розв'язок 123
 –––, сферично симетричний розв'язок 124
 – гідродинаміки ідеальної рідини 68
 –––– лінеаризовані 69
 – дифузії 51
 ––, елементарний вивід 51
 Рівняння для комплексної амплітуди
 ––––, вимушені коливання середовища 97
 ––––, –– температури 46
 – Ейнштейна-Смолуховського 60
 ––, вивід 56
 – Лапласа 37
 – малих коливань рідини (газу) 65

Derivative:
 material
 generalized
 Huygens' principle:
 two-dimensional case
 one-dimensional case
 three-dimensional case
 Maximum (minimum) value principle

Superposition principle
 Space (*also see* Set):
 C (of functions continuous on any closed region in E_3)
 E_3 (infinite three-dimensional)
 K
 linear
 S

Process:
 adiabatic
 linear
 Markovian

First-order reactions
 Parseval's equality
 multi-dimensional analogue of
 generalized
 Helmholtz equation
 inhomogeneous
 inhomogeneous, solution of
 inhomogeneous, generalized solution of
 homogeneous
 homogeneous, solution of
 homogeneous, spherically-symmetric
 solution of
 Equations of ideal liquid hydrodynamics
 linearized
 Diffusion equation
 elementary derivation of
 Equation for the complex amplitude:
 forced oscillations in a medium
 forced oscillations of temperature
 Einstein-Smoluchowski equation
 derivation of
 Laplace's equation
 Equation for small-amplitude oscillations in a fluid

Рівняння неперервності 67	Continuity equation
– Пуассона 35	Poisson's equation
–, спадний на нескінченності розв'язок 35, 37	vanishing-at-infinity solution of
–, узагальнений розв'язок 116	generalized solution of
Рівняння руху ідеальної рідини 65, 66	Equation, of motion for an ideal fluid
– стану 67	of state
– теплового балансу 7, 8	of heat balance
– в диференціальній формі 8	of heat balance in the differential form
– теплопровідності 6, 9	Heat (conduction) equation
–, автомодельний розв'язок 23	similarity solution of
–, вивід 7	derivation of
– двовимірне 10	two-dimensional
– зі сталими коефіцієнтами 9, 21	with constant coefficients
– лінійне 9	linear
– неоднорідне, стаціонарний розв'язок 35	inhomogeneous, stationary solution of
– одновимірне 10	one-dimensional
– однорідне 10	homogeneous
–, фундаментальний розв'язок 26, 118, 120	fundamental solution of
Рівняння хвильове 71	Wave equation
– двовимірне 84	two-dimensional
– одновимірне 88	one-dimensional
–, загальний розв'язок 89	one-dimensional, general solution of
– Чепмена-Колмогорова 55	Chapman-Kolmogorov equation
Рідина ідеальна 65	Ideal fluid (<i>or</i> liquid)
Розв'язок задачі Коші	Solution to the Cauchy problem:
– для неоднорідного хвильового рівняння 91, 93	for the inhomogeneous wave equation
– однорідного рівняння теплопровідності 151	for the homogeneous heat equation
– хвильового рівняння 81, 83	for the homogeneous wave equation
– в двовимірному просторі 87	for the homogeneous wave equation in 2-space
– в одновимірному просторі 89	for the homogeneous wave equation in 1-space
– рівняння теплопровідності 21, 30	for the heat equation
– стійкий системи рівнянь 68	Stable solution of a system of equations
– узагальнений диференціального рівняння 116	Generalized solution of a differential equation
Розподіл 105	Distribution
Рух	Motion:
– броунівський 58	Brownian
– випадковий 57	random
– (рідини) стаціонарний 68	(of a fluid) steady
Символ Кронекера 61	Kronecker delta
Сподівання математичне випадкової величини 56	Mathematical expectation of a random quantity

Температура	Temperature:
–, скалярна функція 6	scalar function of
– стаціонарна 34	stationary
– усталена 46	steady-state
Теорема єдиності для аналітичних функцій 44	Uniqueness theorem for analytic functions
– Ірншоу 38	Earnshaw's theorem
– Лебега 128	Lebesgue's theorem
– Остроградського-Гаусса 8, 17, 67, 74	Divergence theorem
– Рімана-Лебега 129	Riemann-Lebesgue theorem
– –, багатовимірний варіант 150	multi-dimensional version of
– Фубіні 140	Fubini's theorem
Теплопровідність 6	Heat conduction
Течія потенціальна 70	Potential flow
Тотожність Гільберта 48	Hilbert identity
Умова	Condition:
– випромінювання Зоммерфельда 98	radiation
– крайова 11	boundary
– початкова 11	initial
– стійкої рівноваги системи частинок 38	for stable equilibrium of a system of particles
Форма квадратична позитивно визначена 61	Quadratic form, positive definite
Формула Д'Аламбера 89	D'Alembert's Formula
Формула обернення перетворення Фур'є 135	Inversion formula for the Fourier transform
– – – – функції багатьох змінних 149	of a function of many variables
– – – – функції двох змінних 149	of a function of two variables
– Пуассона 81	Poisson's relation
– Тейлора 57	Taylor's Formula
Функціонал 103	Functional
– лінійний 103	linear
– неперервний 103	continuous
– регулярний 104	regular
– сингулярний 107	singular
Функція	Function:
– абсолютно неперервна 130	absolutely continuous
– відгуку 33	response
– впливу 33	of influence
– гармонічна 37	harmonic
– Гріна, зміст <i>див. Зміст...</i>	Green's function, meaning of, <i>see</i> Meaning of...
– – рівняння Гельмгольца 47, 116	of the Helmholtz equation
– – – дифузії 63, 112	of the diffusion equation
– – – теплопровідності 26, 31, 32, 112	of the heat equation
– дельта Дірака 105	Function, Dirac delta
– – – складена 109	composite, of Dirac delta
– джерела домішкових частинок 51	of a source of impurity particles

Функція (*Продовження*)

- ермітово-спряжена 142
 - звичайна 106
 - знакова 115
 - інтегровна 12
 - інтегровна з квадратом 47, 141
 - локально інтегровна 103
 - нескінченно гладка 15
 - обмежена 13
 - основна 101 (*також див.* Послідовність)
 - розповсюдження 33
 - скалярна (температури) 6
 - скінченнозначна *або* східчаста 129
 - східчаста Хевісайда 115
 - узагальнена 105
 - фінітна 15
 - характеристична 128
- Фур'є-образ
- вищих похідних функції 132
 - дельта-функції Дірака 147
 - згортки 141
 - функцій багатьох змінних 150
-
- інтегровної функції 127
 - та інтегровної з квадратом функції 142
 - лапласіана 150
 - похідної дельта-функції Дірака 147
 - функції 130
 - сферично симетричної функції 152
 - частинних похідних функції 150

Хвиля

- плоска 124
- сферична збіжна 98
- сферична розбіжна 94
- сферична теплова 49

Частинка броунівська 58

- , траєкторія 57

Function (*Continued*):

- Hermitian conjugate
- true
- signum
- integrable
- square-integrable
- locally integrable
- infinitely smooth
- bounded

test- (*also see* Sequence of)

Propagator

Function, scalar (of temperature)

- step
- Heaviside
- generalized
- compactly supported
- characteristic

Fourier transform:

- of higher derivatives of a function
- of the Dirac delta function
- of the convolution
- of the convolution of functions of many variables
- of an integrable function
- of an integrable and square-integrable function
- of the Laplacian
- of the derivative of the Dirac delta function
- of the derivative of a function
- of a spherically symmetric function
- of partial derivatives of a function

Wave:

- plane
- converging spherical
- diverging spherical
- spherical heat

Brownian particle

- trajectory of

ЗМІСТ

Передмова.....	4
1. ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ У СИСТЕМАХ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ	
1.1. Рівняння теплопровідності.....	6
1.2. Задача Коші для рівняння теплопровідності в необмеженому просторі. Єдиність розв'язку.....	11
1.3. Лінійне рівняння теплопровідності зі сталими коефіцієнтами в E_3 . Розв'язок задачі Коші.....	21
1.4. Зміст функції Гріна.....	31
1.5. Стационарна температура. Ньютонівський тепловий потенціал.....	34
1.6. Спадні розв'язки рівняння Пуассона.....	37
1.7. Вимушені теплові коливання. Рівняння Гельмгольца.....	43
2. РІВНЯННЯ ДИФУЗІЇ	
2.1. Елементарний вивід рівняння дифузії.....	50
2.2. Імовірнісний опис руху домішкових частинок. Рівняння Чепмена-Колмогорова.....	53
2.3. Рівняння Ейнштейна-Смолуховського.....	56
2.4. Зміст функції Гріна для рівняння дифузії.....	62
3. ХВИЛЬОВЕ РІВНЯННЯ	
3.1. Рівняння малих коливань рідини та газу.....	65
3.2. Задача Коші для хвильового рівняння. Єдиність розв'язку.....	72
3.3. Розв'язок задачі Коші для хвильового рівняння в E_3 . Формула Пуассона.....	77
3.4. Розв'язок задачі Коші для хвильового рівняння у двовимірному та одновимірному просторах.....	84
3.5. Неоднорідне хвильове рівняння.....	90
4. ДОДАТКОВІ ВІДОМОСТІ ІЗ ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ	
4.1. Узагальнені функції. Дельта-функція Дірака.....	100
4.2. Диференціювання узагальнених функцій. Узагальнені розв'язки лінійних диференціальних рівнянь.....	113
4.3. Метод Фур'є.....	122
4.4. Інтегральне перетворення Фур'є.....	127
4.5. Згортка інтегровних функцій. Рівність Парсеваля.....	139
4.6. Перетворення Фур'є узагальнених функцій.....	145
4.7. Перетворення Фур'є функцій багатьох змінних.....	148
ЛІТЕРАТУРА.....	153
ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК. АНГЛІЙСЬКІ ЕКВІВАЛЕНТИ ТЕРМІНІВ..	154

Адамян В. М., Сушко М. Я.

**A283 Вступ до математичної фізики: Навчальний посібник. –
Одеса: Астропринт, 2003. – 320 с.
Укр. та англ. мовами
ISBN 966-549-940-8**

Посібник створено на базі першої частини лекційного курсу, що неодноразово читався студентам фізичного факультету Одеського національного університету. Він містить виклад основних ідей і методів математичної фізики на прикладі її традиційних задач для необмеженого тривимірного простору. Наводяться контрольні запитання та завдання різного рівня складності для поглибленого вивчення матеріалу.

Український текст супроводжується авторським перекладом (американською) англійською мовою.

Посібник розраховано на студентів та аспірантів фізико-математичних та інженерно-фізичних спеціальностей університетів.

A 1604010000 – 083
Без оголош.
529 – 2003

ББК 22.311я73

УДК 53.02 : 51(075.8)

Навчальне видання

АДАМЯН Вадим Мовсесович
СУШКО Мирослав Ярославович

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Навчальний посібник

Українською та англійською мовами

Книга видана в авторській редакції

Зав. редакцією Т. М. Забанова
Технічний редактор О. М. Петренко