Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

Факультет математики, фізики та інформаційних технологій

Кафедра

Дипломна работа

бакалавра

на тему: **«Антиплоска задача для впругої півплощини з пересічними тріщиною і тонким включенням»**

«An antiplanar problem for an elastic half-plane with intersecting cracks and a thin inclusion»

Виконав: студент денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика
Саркісян Роман Вадимович

Керівник: доктор фізико-математичних наук,
професор Вайсфельд Наталія Данилівна.
Рецензент: Фесенко Анна Олександрівна

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ ___ від «_____» ________ р.
Завідувач кафедри
_____________ __________________

Захищено на засіданні ЕК № _______
Протокол № _____ від «_____» _____ р.
Оцінка ________ / ________ / ________
Голова ЕК
_____________ ______________________

Одеса — 2021 р.

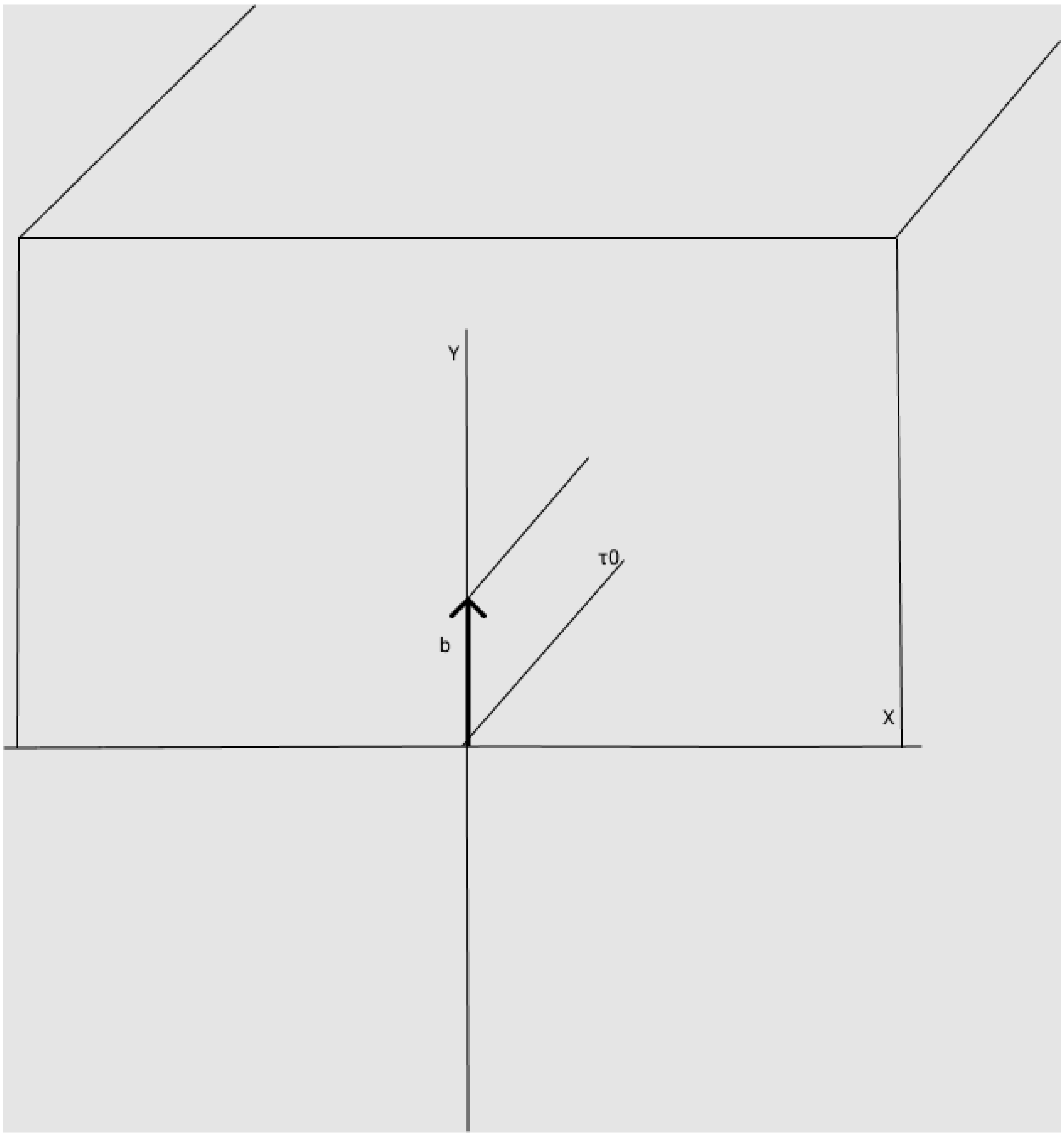
ЗМІСТ

ВСТУП

Дипломна робота присвячена антиплоскій задачі для впругої півплощини з пересічними тріщиною і тонким включенням, за допомогою інтегрального перетворення її рішення зведено до одновимірної. Далі ми шукали рішення одновимірної задачі та отрімували формули для зміщення і напруги. Отримано точне рішення поставленої задачі. Наведено формули для обчислення зсуву і напруження. Проведено розрахунки представлені у вигляді графіка.

ОСНОВНА ЧАСТИНА

Постановка задачі



Нехай у пружному півпросторі $(-\infty < x, z < \infty, y \geq 0)$ з вільною від напружень границею є тонке включення у вигляді смуги: $0 \leq y \leq b, -\infty < z < \infty$ шо розташоване у плошині $x = 0$.

$$\Delta w(x, y) = 0; \quad \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, -\infty < x < \infty, x \neq 0$$

$$G\left[\omega'(-0, y) - w'(+0, y)\right] = \chi(y), 0 < y < b\ .$$

$$\omega(0, y) = \text{ const}, \ 0 \leq y < b, \chi(y) = 0, y > b$$

Потрібно візначити поле зміщень та напружень якщо до зовнішньогокраюю включення додане рівномірно розподілене зсувне навантаження інтенсивності τ_0

$$\tau_{yz}(x, y) = G\frac{\partial w}{\partial y}(x, y)$$

$$\tau_{xz}(x, y) = G\frac{\partial w}{\partial x}(x, y)$$

Зведення задачі до одномірної за допомогою інтегрального перетворення

Застосовуємо κ рівнянню з урахуванням крайових умов, інтегральне перетворення. Внаслідок приходимо до одновимірної крайової задачі ($y \neq b$)

$$w_\alpha''(y) - \alpha^2 w_\alpha(y) = -G^{-1} x(y), \quad 0 < y < \infty; \quad w_\alpha'(0) = 0$$

с додаванням трансформованого за допомогою перетворення першого з умов на трищіні:

$$\langle w_\alpha(\delta) \rangle = \psi_\alpha = \int_{-c}^{a} e^{i\alpha g} \psi(\xi) d\xi.$$

Рішення розривної крайової задачі запишемо У вигляді

$$w_\alpha(y) = \psi_\alpha G_\alpha'(y, B) - \frac{1}{G} \int_0^b G_*(y, \eta) \psi(\eta) d\eta$$

Тут $G_\alpha(y, \eta)$ - функкція крайової задачі, згідно з якою

$$2G'(y, b) = e^{-|\alpha||y-b|} \operatorname{sg} n(b - y) + e^{-|\alpha|(y+B)}$$

Оскільки в задачах на тріщини зручно олеріровать ні з розкриттям тріщини, а з його похідної, перетворимо формулу для Ψ_α из, проннтегріровав по частинах інтеграл

$$\int_{-c}^{a} \Psi'(\xi) e^{i\alpha\}} d\xi = \left[\psi(\xi) e^{id\xi} \right]_{-0}^{a} - i\alpha \int_{-c}^{a} \psi(\xi) e^{i\alpha\xi} d\xi$$

Внеінтегральний член тут зникає, так як розкриття тріщини по краях одно нуло, і тому

$$\psi_\alpha = -\frac{1}{i\alpha} \int_{-c}^{a} \psi'(\xi) e^{i2\xi} d\xi.$$

З огляду на це, маємо

$$w_\alpha = \frac{1}{G} \int_{-1}^{b} x(\eta) \frac{e^{-k-11y-n!}}{21\alpha \mid} d\eta - \int_{-c}^{a} \frac{\dot{\psi}'(\xi) e^{i\alpha} d\xi}{2i\alpha} \times$$

$$\times \left[e^{-1\alpha||y-8|} \operatorname{sgn}(8 - \eta) + e^{-1\alpha(y+8)} \right]$$

Тут функція $\chi(\eta)$ парним чином продовжена на негативні значення аргументу з використанням формули. За отриманою трансформанта з помощию формули звернення знайдемо

$$w(x,y) = \tfrac{1}{G}\int_{-6}^{b} x(\eta)d\eta \tfrac{1}{2\pi}\int_0^\infty \tfrac{\cos\alpha x e^{-\alpha|y-\eta|}}{\alpha}d\alpha +$$
$$+\int_{-c}^{a}\psi'(\xi)d\xi \tfrac{1}{2\pi}\int_0^\infty \tfrac{\sin\alpha(x-\xi)}{d}\left[\tfrac{\operatorname{sgn}(b-y)}{e^{\alpha 16-y1}} + e^{-\alpha(y+b)}\right]d\alpha$$

Далі працюємо з невласними інтеграли

$$w(x,y) = \frac{1}{4G\pi}\int_{-b}^{B}\ln\frac{1}{x^2+(y-\eta)^2}\chi(\eta)d\eta +$$

$$+\int_{-0}^{\infty}\varphi'(\xi)\left[\operatorname{arctg}\frac{x-\xi}{b-y} + \operatorname{arctg}\frac{x-\xi}{b+y}\right]d\xi + \text{ const },$$

$$w^\circ = -\frac{1}{2G\pi}\int_{-6}^{b}\frac{y-\eta}{x^2+(y-\eta)^2}x(\eta)d\eta -$$
$$-\int_{-c}^{a}\left[\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+(b-y)^2} + \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+(b+y)^2}\right]\psi'(\xi)d\xi.$$

Після того як нерівномірно сходяться інтеграли перетворені в потенціали або їх похідні, причому видається зручним замінити умову на наступне: $\dot{\omega}(0,y) = 0, 0 \le y \le b$. У результаті отримуємо систему сингулярних інтегральњих рівнянь

$$\int_{-b}^{b}\frac{x(\eta)d\eta}{\eta-y} + \int_{-c}^{a}\left[\frac{2G\pi\xi}{\xi^2+(b-y)^2} + \frac{2G\pi\xi}{\xi^2+(b+y)^2}\right]\Psi'(\xi)dz = 0,\ -b \le y \le b$$

$$\int_{-b}^{b}\frac{(b-\eta)x(\eta)d\eta}{x^2+(b-\eta)^2} - \int_{-c}^{a}\left[\frac{2G\pi}{\xi-x} + \frac{2G\pi(\xi-x)}{(\xi-x)^2+4b^2}\right]\psi'(\xi)d\xi = 0,$$

$$-c \le x \le a.$$

Цю систему заміною змінних і розбиттям інтервалу (-c, a) на два: $(-0{,}0)+(0,\alpha)$,можна привести до системи з трьох сінгулярних інтегральних рівнянь, задавних на інтервалі (0,1).

ДОДАНОК(ЗАГАЛЬНА СХЕМА УЗАГАЛЬНЕНОГО МЕТОДУ ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ПРИ НАЯВНОСТІ ОДНОГО ДЕФЕКТУ)

Загальна схема методу інтегральних перетворень

Викладений метод є одним з ефективних засобів розв'язання крайових та початково-крайових задач математичної фізики, що описуються диференціальними рівняннями у частинних похідних.

Слід зауважити, шо саме наявність диференціального оператора в частинних похідних складає основну трудність розв'язання зменшених задач, так як методів побудови загальних розв'язків багатомірних диференціальних рівнянь, аналогічних методам побудови загальних розв'язків звичайних диференціальних рівнянь, не існує. Метод інтегральних перетворень базується на взаємно обернених формулах:

$$f_\lambda = \int_{a_0}^{a_1} f(x)K(x,\lambda)dx$$

$$f(x) = \int_1 f_\lambda R(x,\lambda)d\sigma(x)$$

перша з яких визначає трансформанту f_λ функції f(x), що задана на інтервалі $a_0 < x < a_1$, а друга відновлює оригінал функції $f(x)$ за його трансформантою. Функції $K(x,\lambda)$ та $R(x,\lambda)$ називаються ядрами прямого та оберненого перетворення. В другій формулі λ може приймати комплексні значення. У відповідності з цим інтегрування проводиться по контуру l у комплексній площині. Пояснимо схему методу інтегральних перетворень на прикладі крайової задачі

$$r(x)\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] - q(x)u + \sum_{k=0}^{n} P_k(y)\frac{\partial^{n-k}u}{\partial y^{n-k}} = f(x,y)$$

$$u = u(x,y), a_0 < x < a, p_0 < v < b_1$$

$$U_j[u] \equiv \alpha_{j0} u\left(a_j, y\right) + \alpha_{j1} \frac{\partial u}{\partial x}\left(a_j, y\right) = A_j(y),$$
$$j = 0{,}1, b_0 < y < b_1,$$
$$V_k[u] \equiv \sum_{s=0}^{n-1}\left[\beta_{ks}^{(0)} \frac{\partial^s u}{\partial y^s}\left(x, b_0\right) + \beta_{ks}^{(1)} \frac{\partial^s u}{\partial y^s}\left(x, b_1\right)\right] = B_k(x),$$
$$k = \overline{0, n-1}, a_0 < x < a_1$$

Тут $r(x), p(x), q(x), P_k(y), f(x,y), A_j(y), B_k(x), j = 0{,}1,\ k = 0, \ldots, n-1$ - задані функції, $u(x,y)$ - невідома функція. Ідея методу інтегральних перетворень стосовно до поставленої задачі міститься у переході до відшукування трансформанти

$$u_\lambda(y) = \int_{a_0}^{a_1} r^{-1}(x) K(x, \lambda) u(x, y) dx$$

шукаємої функції по змінній x .

Перший етап. При цьому ядро інтегрального перетворення $K(x,\lambda)$ повинно бути підібрано так, щоб вихідна двовимірна задача трансформувалася до одномірної крайової задачі для $u_\lambda(y)$. Звичайно, розв'язання задачі методом інтегральних перетворень розділяють на три етапи. перший етап. Підбір ядра інтегрального перетворення та зведення вихідної крайової задачі до одномірної.

Підбір здійснюється слідуючим чином. Рівняння помножують на $r^{-1}(x)K(x,\lambda)$ та інтегрують його по частинам на відрізку (a_0, a_1). У результаті, перший додаток рівняння прийме вигляд:

$$\int_{a_0}^{a_1} K(x, \lambda) \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x) \frac{\partial u}{\partial x}\right] dx = N(y) + \int_{a_0}^{a_1} u \frac{d}{dx}\left[p(x) \frac{dK}{dx}\right] dx$$
$$N(y) = \left[K p \frac{\partial u}{\partial x} - u p \frac{\partial K}{\partial x}\right]_{x=a_0}^{x=a_1}$$

Якщо тепер враховувати, що ядро $K(x,\lambda)$ задовільняє диферннціальному рівнянню

$$r(x) \frac{d}{dx}\left[p(x) \frac{dK}{dx}\right] - q(x) K = -\lambda K, a_0 < x < a_1,$$

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(y)\frac{d^{n-k}u_\lambda}{dy^{n-k}} - \lambda u_\lambda = f_\lambda(y) - N(y),$$
$$f_\lambda(y) = \int_{a_0}^{a_1} r^{-1}(x)K(x,\lambda)f(x,y)dx$$

У здобутому диференціальному рівнянні тільки останній додаток має замість трансформанти саму шукаему функцію. Шоб виключити іі з рівняння, перетворимо вираз

$$N(y) = \left[Kp\frac{\partial u}{\partial x} - up\frac{\partial K}{\partial x}\right]_{x=a_0}^{x=a_1}$$

до вигляду

$$N(y) = \frac{\alpha_{01}u_x\left(a_1,y\right) - \alpha_{11}u\left(a_1,y\right)}{{\alpha_{01}}^2 + \alpha_{11}^2}p\left(a_1\right)U_1[K] -$$

$$- \frac{\alpha_{00}u'_x\left(a_0,y\right) - \alpha_{10}u\left(a_0,y\right)}{{\alpha_{00}}^2 + \alpha_{10}^2}p\left(a_0\right)U_0[K] =$$
$$- \frac{\alpha_{01}K'_x\left(a_1,\lambda\right) - \alpha_{11}K\left(a_1,\lambda\right)}{{\alpha_{01}}^2 + \alpha_{11}^2}p\left(a_1\right)U_1[u] +$$
$$+ \frac{\alpha_{00}K'_x\left(a_0,\lambda\right) - \alpha_{10}K\left(a_0,\lambda\right)}{{\alpha_{00}}^2 + \alpha_{10}^2}p\left(a_0\right)U_0[u].$$

Звідки бачимо, що останній додаток в рівнянні не містить невідому функцію $u(x,y)$, якщо ядро інтегрального перетворення буде задовольняти граничним умовам:

$$U_j[K] \equiv \alpha_{j0}K\left(\alpha_j,\lambda\right) + \alpha_{j1}\frac{dK}{dx}\left(a_j,\lambda\right) = 0, j = 0{,}1$$

Таким чином, ядро інтегрального перетворення повинно бути розв'язком задачі Штурма-Ліувилля. Нехай тепер $K(x,\lambda)$ - власна функція задачі Штурма-ліувилля. Помножимо на $r^{-1}(x)K(x,\lambda)$ граничні умови та проінтегруємо по x у межах від a_0 до a_1. Отримаємо:

$$V_k\left[u_\lambda\right] = \bar{B}_k(\lambda), k = \overline{0, n-1},$$

де

$$\bar{B}_k(\lambda) = \int_{a_0}^{a_1} r^{-1}(x)K(x,\lambda)B_k(x)dx$$

Таким чином, трансформанта $u_\lambda(y)$ є розв'язком одномірної. крайової задачі в якій

$$N(y) = \frac{\alpha_{01}K'_x\left(a_0,\lambda\right) - \alpha_{10}K\left(a_0,\lambda\right)}{\alpha_{00}^2+\alpha_{10}^2} p\left(a_0\right)A_0(y) -$$

$$- \frac{\alpha_{01}K'_x\left(a_1,\lambda\right) - \alpha_{11}K\left(a_1,\lambda\right)}{\alpha_{01}^2+\alpha_{11}^2} p\left(a_1\right)A_1(y)$$

Другий етап. Розв'язання задачі у трансформантах. Якщо відомі фундаментальна базисна система розв'язків $\psi_j(y), j = 0, n-1$ та функція Грина $G_\lambda(y,\eta)$ крайової задачі, то трансформанту $u_\lambda(y)$ отримаемо за формулою:

$$u_\lambda(y) = \sum_{j=0}^{n-1} \bar{B}_j(\lambda)\Psi_j(y) + \int_{b_0}^{b_1} \left[f_\lambda(\eta) - N(\eta)\right] G_\lambda(y,\eta)d\eta$$

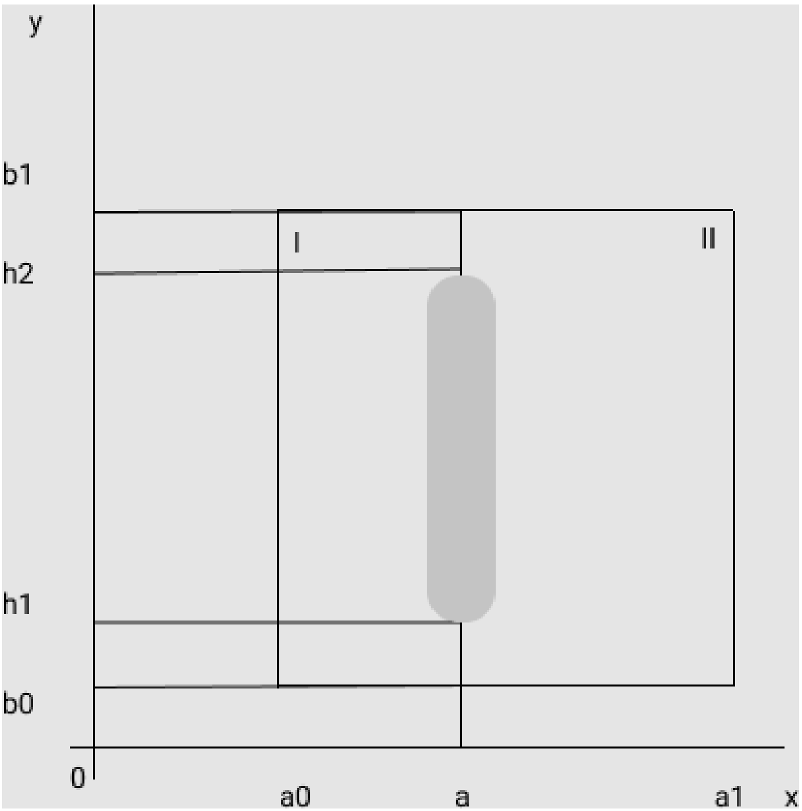
Третій етап. Обернення інтегрального перетворення. Щоб завершити розв'язання поставленої крайової задачі, залишається тепер обернути інтегральне рівняння. Це обернення прямо пов'язано з проблемою розкладення по власним функціям задачі Штурма-ліувилля. В загальному вигляді воно записується так:

$$u(x,y) = \int_I R(x,\lambda)u_\lambda(y)d\sigma(\lambda)$$

Підстановка цього виразу до трансформатни та обчислення отриманих слабозбіжних рядів та інтегралів складає заключний етап розв'язання задачі.

Загальна схема методу інтегральних перетворень при наявності одного дефекту

Під дефектом будемо розуміти лінію або поверхню, на якій терпить розрив або сама функція $u(x, y)$, або її нормальна до зазначеної лінії (поверхні) похідна, або і те, і інше. Нехай на координатної ліні $x = a$ при $h_1 \leqslant y \leqslant h_2$ є такий дефект (мал. 1).



Для визначеності розглянемо випадки: 1) коли терпить розрив шукана функція, але задана (однакова на обох берегах) нормальна до цієї лінії похідна, тобто

$$\langle u(a, y)\rangle \equiv u(a-0, y) - u(a+0, y) = x(y)$$
$$u'(a+0, y) = u'(a-0, y) = g(y), \quad h_2 \leqslant y \leqslant h_2$$

2)коли терпить розрив нормальна похідна, але задані значення шуканої функціонально, тобто

$$\langle u'(a, y)\rangle = x(y), \quad u(a+0, y) = u(a-0, y) = g(y),$$
$$h_1 \leqslant y \leqslant h_2 \ .$$

В обох випадках невідома функція $\chi(y) \equiv 0, y\bar{\epsilon}\left(h_1, h_2\right)$. Щоб застосувати викладену вище стандартну схему методу інтегральнuх перетворень, слід область, в якій поставлена задача розбити на дві підобласті I и $\mathbb{I}$ (мал. 1)з спільним кордоном по лінії $x = a$, на якій распоkожен дефект. Якщо побудовано інтегральне перетворення

$$u_\beta(x) = \int_b^{b_1} K_2(y, \beta) r_2^{-1}(y) u(x, y) dy,$$
$$u(x, y) = \int_{\ell_2} R_2(y, \beta) u_\beta(x) d\sigma_2(\beta)$$

с ядром перетворення $K_2(y, \beta)$,є рішенням такой задачі Штурма - Ліувілля:

$$r_2 \left(p_2 K_2'\right)' - q_2 K_2 = -\beta K_2, \quad b_0 < y < b_1;$$
$$V_i \left[K_2\right] = 0, \quad i = 0{,}1$$

то для кожної з підобласті (мал.1) застосовується інтегральне перетворення і задовольняються відповідні граничні умови тоді побудовані таким чином рішення для зазначених подобластей потім зшиваються з урахуванням умов на дефекті. В результаті виходять пари інтегральні рівняння. Однак такий традиційний шлях виявляється непридатним, якщо відсутня перетворення. Ускладнення виникають і якщо таке є, але

$$\mathrm{B}_i \neq 0.$$

Матеріал, що викладає нижче узагальнений варіант методу інтегральних их перетворень не вимагає розбиття на подобнасті і нали чия інтегрального перетворення, Він базується на інтегральному перетворенні по змінної х, що змінюється в напрямку, що перетинає дефект, і полягає у виконанні наступних операцій. Помножимо рівняння на $r_1{}^{-1}(x) K_1(x, \alpha)$, але інтегрування по чвстям проведемо нема на всьому інтервалі відразу, а після попереднього розбиття інтервалу інтегрування на два:

$$\int_0^{a_1} K_1 \left(p_1 u'\right)' dx = \int_{a_0}^{a} K_1 \left(p_1 u'\right)' dx + \int_{a}^{a_1} K_1 \left(p_1 u'\right)' dx =$$
$$= N_a + \int_{a_0}^{a_1} u \left(p_1 K_1'\right)' dx + n_0 \left[u'(a-0,y) - u'(a+0,y)\right] -$$
$$- n_1[u(a-0,y) - u(a+0,y)], \quad b_0 \leqslant y \leqslant b_1$$
$$n_0 \equiv n_0(a) = p_1(a) K_1(a,\alpha), n_1 \equiv n_1(a) = p_1(a) K'(a,\alpha)$$

Тут N_a визначаєтьcя колишньої формулою Якщо для визначеності вважати, що на дефекті реалізовано умова (1.12) ($\mathrm{N}_a = 0$), то матимемо

$$L_2 u_\alpha = -z_2^{-1} \left(f_2 - n_1 x\right), \quad b_0 < y < b_1.$$

Це рівняння разом з граничними умовами і буде визначати одновимірну крайову задачу для трансформанти $u_\alpha(y)$. Формула для вирішення цієї крайової задачі, тепер прийме такий вигляд:

$$-u_\alpha(y) = n_1 \int_{h_0}^{h_1} \frac{G_\alpha(y,\eta)\chi(\eta) d\eta}{r_2(\eta)} + \int_{b_0}^{b_2} \frac{G_\alpha(y,\eta) f_\alpha(\eta) d\eta}{r_2(\eta)} - \sum_{j=0}^{1} \psi_j B_{j\omega}.$$

Користуючись, далі формулою, знайдемо представлевіе пскомой функції $u(\boldsymbol{x}, y)$ через невідому функцію $\chi(y)$. За тим слід виділити містяться в цій виставі нерівномірно сходяться інтеграли і ряди і отримати для них замкнуті вирази, після чого отримати вираз для $u'(x,y)$. Последугщая підстановка отриманої похідною в що не реалізовано ще друга умова з (1.12) на дефекті призведе до інтегрального (як правило, сингулярного) рівняння для визначення функції $\chi(y)$.

ВИСНОВКИ

Інтегральне перетворення допомогло мені звести задачу до одномірної та знайти напругу та переміщення в антиплоскої задачі для впругої півплощини з пересічними тріщиною і тонким включенням.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Концентрація пружних напружень біля штампів розрізів тонких включень і підкріплень. Г.Я. Попов 1982.
2. Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень. Г.Я.Попов, В.В Реут, Н.Д.Вайсфельд 1999.