

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра диференціальних рівнянь, геометрії та топології

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти "магістр"

на тему: «Особливості F-планарних відображень симплектичних многовидів»

«Peculiarities of F-planar mappings of symplectic manifolds»

Виконала: здобувачка денної форми
навчання

Спеціальності 111 Математика

Освітня програма «Математика»

ХАБАРОВА ЮЛІЯ ВОЛОДИМИРІВНА

Керівник

к.ф. - м.н., доцент, Курбатова І. М.

(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали, підпис)

Рецензент

к.ф. - м.н., доцент, Покась С. М.

(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали, підпис)

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ ____ від _____ р.

Захищено на засіданні ЕК №

протокол № ____ від _____ р.

Оцінка _____ / _____ / _____

(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)

Завідувач кафедри

Голова ЕК

Євтухов В.М.

(підпис)

(прізвище, ініціали)

(підпис)

(прізвище, ініціали)

Одеса – 2022

ЗМІСТ

1. Вступ	3
2. Основні поняття і визначення	7
3. НР-відображення келерових просторів	11
4. Поняття F-планарного відображення просторів афінної зв'язності	14
5. F-планарні відображення узагальнено симплектичних многовидів та майже келерових просторів (Н-просторів)	16
6. Зведення основних рівнянь FПВ узагальнено симплектичних многовидів та майже келерових просторів (Н-просторів) до лінійної форми	18
7. Спеціальне перетворення пари узагальнено симплектичних многовидів та майже келерових просторів (Н-просторів) , що знаходяться у FПВ.	21
8. Особливості інваріантного перетворення узагальнено симплектичних многовидів та майже келерових просторів (Н-просторів) , що знаходяться в FПВ.	26
9. Застосування Г-перетворення до НР- відповідних келерових просторів.	30
10. Існування узагальнено симплектичних просторів, що допускають нетривіальні FПВ і відмінні від келерових просторів Ейнштейна.	38
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	46

1. Вступ

В роботі вивчається спеціальний вид дифеоморфізмів многовидів з афінорною структурою.

З 60-х років минулого століття активно розвивається теорія відображень афінно-связних і ріманових просторів, забезпечених афінорними структурами різних типів. Так, докладно досліджувалися голоморфно-проективні відображення келерових просторів зі збереженням комплексної структури. Основні результати в цьому напрямку містяться в роботах Т.Оцукі і Я.Тасіро [13] Я.Тасіро [10], К.Яно [14], С.Ісіхара [7], Й.Мікеша [9], Й.Мікеша і В.Домашева [1]. Самі ж голоморфно-проективні відображення є природним узагальненням геодезичних відображень, які увійшли в класику дифеоморфізмів афіннозв'язних і ріманових просторів [5].

Багатьма авторами з різних точок зору були запропоновані й інші узагальнення теорії геодезичних відображень. Найбільш відомі конціркулярна геометрія К.Яно [14], голоморфно проективні відображення різноманіть майже добутку і гіперболічних келерових просторів М.Првановіч [11], Б.Б.Сінха [12].

Широким узагальненням теорії геодезичних відображень стала розроблена Н.С.Синюковим теорія майже геодезичних відображень афіннозв'язних просторів без скруту [5]. Потім С.Г.Лейко продовжив дослідження в цьому напрямку, увівши в розгляд 3-геодезичні і r -геодезичні відображення просторів афінної зв'язності [3]. Узагальнення теорії майже геодезичних відображень у випадку афіннозв'язних просторів з скрутом присвячена робота Н.В.Яблонской [6]. Різні спеціальні типи майже геодезичних відображень вивчалися Й.Мікешем [5] і І.М.Курбатовою [2].

Й.Мікешем і Н.С.Синюковим введені в розгляд найбільш загальні в порівнянні з вищевказаними відображення афіннозв'язних просторів без скруту - так звані F -планарні відображення [6]. Дослідження, пов'язані з F -планарними відображеннями можна знайти в наступних роботах. [15][16][17][18]

У даній роботі досліджуються відображення просторів афінної зв'язності без скруту з афінорною структурою, що включають в себе в якості окремого випадку вищевказані відображення або пересічні з ними. Тому тема даної роботи є актуальною.

Метою даної роботи є вивчення F -планарного відображення симплектичних про-

сторів і деяких його властивостей, а також розробка ефективного способу побудови пар симплектичних многовидів, що знаходяться в F -планарном відображенні.

Основні результати його можуть бути використані для подальшого розвитку теорії дифеоморфізмів просторів з афінорними структурами. З іншого боку, вони можуть бути застосовані в різних додатках: в питаннях моделювання фізичних полів, оптимізації рухів механічних систем, а також динамічних процесів, що протікають в гравітаційних і електромагнітних полях, в суцільному середовищі. Дослідження ведуться локально, в класі досить гладких функцій з використанням тензорних методів.

Дана робота і її окремі частини були докладені на:

- International Online Conference Algebraic and Geometric Methods of Analysis Odesa, Ukraine May 24-29, 2022

Публікації:

- Ю. Хабарова, І. Курбатова, А. Соловйов F -планарні відображення майже симплектичних многовидів. - Тез.доп. Міжнародної конференції «Алгебраїчні і геометричні методи аналізу» Одеса, 2022.
- А.Соловйов, І.Курбатова, Ю.Хабарова Про $3F$ -планарні відображення псевдоріманових просторів. - Тез.доп. Міжнародної конференції «Алгебраїчні і геометричні методи аналізу» Одеса, 2022.

Структура і обсяг роботи.

Данна робота складається з вступу, двох розділів (десяти параграфів) та списку літератури. У роботі застосовується наскрізна нумерація параграфів. Для формул застосовується подвійна індексація, де перша цифра означає номер параграфа, а друга - номер формули у цьому параграфі.

Короткий зміст.

1-4 параграфи присвячені основним поняттям і визначенням, які будуть в подальшому використовуватися в даній роботі, таким як рімановий простір, афінорна структура, келеровий простір, голоморфна кривизна, симплектична структура та ін.

У другому параграфі розглядається поняття конформного відображення, дається визначення, ряд властивостей даного відображення, також залежність між тензорами Рімана і Річчі просторів $\overline{V}_n$ і V_n , що знаходяться в даному відображенні.

У третьому параграфі дається визначення і основні властивості голоморфних проектованого відображення, залежність між тензорами Рімана і Річчі, просторів, що знаходяться в зазначеному відображенні.

У четвертому параграфі розглядається поняття F-планарного відображення просторів афінної зв'язності. Всі ці параграфи носять реферативний характер і потрібні для подальшого використання. Всі інші дослідження носять самостійний характер.

У п'ятому і шостому параграфах вже розглядається F-планарне відображення узагальнено симплектичних многовидів. Отримана нова форма основних рівнянь F-планарного відображення узагальнено симплектичних многовидів. Ця нова форма була отримана мною раніше в дипломній роботі бакалавра 2021 року. [17]

У сьомому параграфі будується інваріантне перетворення пари узагальнено симплектичних просторів, що знаходяться в F-планарному відображенні (так зване Г-перетворення), в результаті якого виходить нова пара узагальнено симплектичних просторів, що також знаходяться в F-планарному відображенні. Цей метод було запропоновано Н. С. Синюковим у теорії геодезичних риманових просторів [5]. Ми узагальнили його для розглянутих відображень.

У восьмому параграфі ми вивчаємо закономірності Г-перетворення. При цьому з пари узагальнено симплектичних просторів S_n і $\overline{S}_n$, зокрема майже келерових просторів (Н-просторів), що знаходяться в F-планарному відповідності, будується послідовність пар симплектичних просторів, що також знаходяться в F-планарному відображенні. Доводиться, що ця послідовність нескінченна, інакше вихідне відображення тривіально.

У дев'ятому параграфі вивчається Г-перетворення голоморфно-проективно відповідних келерових просторів. Теорія голоморфно-проективних відображень келерових просторів вже стала класичним розділом сучасної диференціальної геометрії.

Оскільки келерові простори є підкласом симплектичних, а голоморфно-проективне відображення — окремий випадок F -планарного, ми застосовуємо Γ -перетворення до пари келерових просторів еліптичного, гіперболічного або параболічного типу K_n і $\overline{K}_n$, що знаходяться в голоморфно-проективній відповідності. Показано, що в результаті цього отримуємо пару вже некелерових, але водночас узагальнено симплектичних просторів, пов'язаних з F -планарним відображенням.

У десятому параграфі доводиться, що існують узагальнено симплектичні простори, відмінні від просторів Ейнштейна, що допускають нетривіальне F -планарне відображення. Знайдено внутрішню тензорну характеристику таких просторів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Домашев В.В., Мікеш Й. До теорії голоморфно-проективних відображень келе-
рових просторів // Мат. замітки, 1978, 28, №2. С.297-303.
2. Курбатова І.М. НР-відображення Н-просторів // Укр.геом.сб., 1984, вип.24. С.75-
82.
3. Лейко С.Г. Спеціальні р-геодезичні відображення просторів афінної зв'язності//
Revue Roumaine de Mathematiques pures et appliquees. Academie la Republique
socialiste de Roumanie. Tome XXVII, №10, p.1003-1026.
4. Мікеш Й., Сінюков Н.С. Про квазіпланарних відображеннях просторів афінної
зв'язності // Изв.вишів, Матем., 1983. - №3. С.55-61.
5. Сінюков Н.С. Геодезичні відображення ріманових просторів // М.: Наука, 1979.
275с.
6. Яблонська Н.В. Майже геодезичні відображення просторів афінної зв'язності з
крутом//Деп. в ВИНІТИ, №2190-79 Деп.
7. Ishihara S. Holomorphically projective changes and their groups in an almost complex
manifold// Tohoku Math. J.,1957, 9, №3, p.273-294.
8. Jano K. Differential Geometry of Complex and Almost Complex Spaces// Pergamon
Press, 1965.
9. Mikes J., Vanzurova A., Hinterleitner I. Geodesic Mappings and Some
Generalizations// Palacky University, Olomouc, Faculty of Science, Olomouc,
2009.
10. Otsuki T., Tashiro J. On curves in Kahlerian spaces//Math.J.Okayama Univ., 1954, 4,
№1. p.57-78.
11. Prvanovich M. Holomorphically projective transformations in an a locally product
space//Math. Balkan, 1971, №1, p.195-213.

12. Sinha B.B. Pas G. General F-connections and H-projectively related connections in almost product spaces//Riv.mat.Univ.Parma, 1972, №1, p.221-230.
13. Tashiro J. On holomorphically projective correspondences in an almost complex spaces// Math.J.Okayama Univ., 1957, 6, №2. p.142-152.
14. Yano K. Conircular Geometry I-IV//Proc. Imp. Acad. Tokyo, 1940, 16. P.p.195-200; 354-360; 442-448; 505-511.
15. Josef Mikeš, Volosdymyr Kiosak, Alena Vanzurova. Geodesic Mappings of Manifolds with affine connection. Palacky University Press, 2008.
16. Josef Mikeš, Elena Stepanova Alena Vanžurová et al. Differential Geometry of Special Mappings. - Palacky University Press, 2015.
17. Курбатова И.Н., Добік М.В. Закономірності теорії F-планарних відображень риманових просторів із квазі-симплектичною структурою. - Збірник матеріалів 11-тої Відкритої наукової конференції ІМФН 13-14 червня 2013 року (Львів). Інститут прикладної математики та фундаментальних наук Нац.університету “Львівська політехніка “. Львів, 2013.
18. Petrov A.Z. Modeling of the paths of test particles in gravitation theory. (Russian) Gravit. and the Theory of Relativity. 4-5, 7-21, 1968.
19. Ю. Хабарова, І. Курбатова, А. Соловйов F-планарні відображення майже симплектичних многовидів//Тез.докл. Міжнародної конференції «Алгебраїчні і геометричні методи аналізу» Одеса, 2022
20. А.Соловйов, І.Курбатова, Ю.Хабарова Про 3F-планарні відображення псевдоріманових просторів//Тез.доп. Міжнародної конференції «Алгебраїчні і геометричні методи аналізу» Одеса, 2022
21. Ю.Хабарова «F-планарні відображення псевдоріманових просторів»// ОНУ ім. Мечникова, Одеса, 2021, с 1-19