

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені І. І. МЕЧНИКОВА
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФІЗИКИ І ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

М. С. Таїрова, З. Ю. Журавльова

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

*МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ
ДЛЯ КОНТРОЛЬНИХ І САМОСТІЙНИХ РОБІТ*

*з дисципліни «МЕТОДИ ОБЧИСЛЕНЬ»
для здобувачів освіти 4 курсу спеціальності 111 «математика»*

ОДЕСА
ОНУ
2019

УДК 519.6(072)
Т145

Рекомендовано до друку Вченою радою ФМФІТ
ОНУ імені І. І. Мечникова.
Протокол № 1 від 25 жовтня 2018 р.

Рецензенти:

Н. Д. Вайсфельд, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри методів математичної фізики Одеського національного університету імені І. І. Мечникова;

Є. М. Страхов, кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедри оптимального керування та економічної кібернетики Одеського національного університету імені І. І. Мечникова.

Таїрова М. С.

Т145 Чисельні методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь: методичні вказівки та варіанти завдань для контрольних і самостійних робіт з дисципліни «Методи обчислень» / М. С. Таїрова, З. Ю. Журавльова. – *Одеса : Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова*, 2019. – 82 с.

Методичні вказівки містять основні теоретичні відомості до тем: векторні і матричні норми, прямі та ітераційні методи розв'язання СЛАР, та приклади розв'язання типових задач по названим темам. Кожна тема супроводжується контрольним завданням, яке передбачає самостійну роботу студентів при вивченні даного курсу.

Для студентів спеціальності ІІІ «математика».

УДК 519.6(072)

З М І С Т

ВСТУП	4
ТЕМА 1. ВЕКТОРНІ ТА МАТРИЧНІ НОРМИ. ЧИСЛО ОБУМОВЛЕНОСТІ	5
1.1. Векторні та матричні норми.....	5
1.2. Число обумовленості матриці.....	8
ТЕМА 2. ПРЯМІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ	11
2.1. Метод LU - розкладу.....	14
2.2. Метод Гауса.....	19
2.3. Компактна схема методу Гауса (модифікація Краута).....	21
2.4. Метод PLU - розкладу.....	25
2.5. Метод Гауса з частковим вибором головного елемента.....	30
2.6. Метод Гауса з повним вибором головного елемента.....	34
2.7. Метод $LD\bar{U}$ - розкладу.....	38
2.8. Метод Холеського.....	41
2.9. Метод обернень.....	44
2.10. Метод відображень.....	47
2.11. Ітераційне уточнення.....	51
ТЕМА 3. ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ	53
3.1. Метод простої ітерації (метод Якобі).....	54
3.2. Метод простої ітерації з параметром.....	60
3.3. Метод Зейделя.....	60
3.4. Метод Річардсона.....	68
3.5. Метод найшвидшого градієнтного спуску.....	69
3.6. Метод спряжених напрямків.....	71
3.7. Метод спряжених градієнтів.....	73
Варіанти контрольних завдань.....	78
<i>Тема 1. Векторні та матричні норми. Число обумовленості.</i>	78
<i>Тема 2. Прямі методи розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь</i>	78
<i>Тема 3. Ітераційні методи розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь</i>	79
Список використаної літератури.....	80

ВСТУП

Задача розв'язання лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) зустрічається в механіці, фізиці, хімії, інших галузях науки та техніки. До цієї задачі, взагалі, зводиться багато задач чисельного аналізу. Тому розв'язок систем є важливою проблемою в обчислювальній математиці. Потрібно відмітити, що при розв'язку систем ЕОМ доводиться мати справу як з великими масивами чисел(елементами матриць), які потребують великого об'єму пам'яті, так і з великим об'ємом обчислень. Крім того, на результат розв'язку можуть сильно вплинути помилки округлення, які допускаються при обчисленні на ЕОМ. Таким чином, у задачі розв'язку СЛАР з'єднується більшість проблем і особливостей як математичного, так і програмного характеру, що властиві взагалі чисельним методам. А завдяки широкому застосуванню СЛАР, питання ефективності і надійності алгоритмів та програм є важливим пунктом при розв'язку СЛАР.

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$Ax = b$$

де $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матриця системи, $b \in \mathbb{R}^n$ – вектор правої частини, $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор невідомих. Якщо $\det A \neq 0$, то система однозначно розв'язувана.

Для розв'язку СЛАР існують два основних класів методів

- **Прямі (точні) методи.** До прямих відносяться метод виключення Гауса, його модифікації, а також методи, пов'язані з ортогональними перетвореннями, та інші. Такі методи називають точними так як вони дають точний розв'язок, при умові, що розрахунки робити точно без використання усічення або округлення.
- **Ітераційні методи.** До ітераційних методів відносять такі як, метод Зейделя, метод простої ітерації та різні його модифікації, метод спряжених напрямків, градієнтів та інші. В цих методах розв'язок отримуємо наближено, як границю послідовності $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^*$.

Тема 1. Векторні та матричні норми.

Число обумовленості

1.1. Векторні та матричні норми

Означення 1. Нехай X – дійсний лінійний простір. *Нормою* на X називається функція $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ з властивостями:

- 1) $\|x\| \geq 0$,
- 2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- 3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,
- 4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

для всіх елементів $x, y \in X$ та для будь-яких $\alpha \in \mathbb{R}$.

Означення 1.2. Дві норми $\|\cdot\|_\alpha$ та $\|\cdot\|_\beta$ називаються *еквівалентними*, якщо існують такі сталі $c_1, c_2 > 0$, що

$$c_1 \|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq c_2 \|x\|_\alpha$$

для усіх $x \in X$.

У скінченномірному просторі всі норми є еквівалентні.

Означення 1.3. Якщо X – це простір векторів $\mathbb{R}^n$, то норму називають *векторною*.

Означення 1.4. *p-нормою* називається норма, що визначається наступним чином

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1$$

Найбільш поширеними векторними нормами є наступні:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \text{ - октаедрична норма,}$$

$$\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = x^T x \text{ - сферична або евклідова норма,}$$

$\|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ - **кубічна норма**.

Приклад 1.1. Для вектора $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ обчислити його 1, 2 та ∞ норми.

$$\|x\|_1 = 2 + |-1| + 5 = 8;$$

$$\|x\|_2^2 = 2^2 + (-1)^2 + 5^2 = 4 + 1 + 25 = 30;$$

$$\|x\|_{\infty} = \max \{2; |-1|; 5\} = 5.$$

Означення 1.5. Якщо X – це простір матриць $\mathbb{R}^{m \times n}$, то норму називають **матричною**.

Означення 1.6. Матрична норма називається **мультиплікативною**, якщо вона задовольняє наступну властивість

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m \times p}, \forall B \in \mathbb{R}^{p \times n}$$

Далі будемо розглядати лише мультиплікативні матричні норми.

Найбільш поширеними є наступні матричні норми:

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \text{ - норма по нескінченності}$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|, \text{ - перша норма}$$

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \text{ - норма Фробеніуса,}$$

$\|A\|_c^2 = \lambda_{\max}(A^T A)$ - **спектральна норма**, тут $\lambda_{\max}(A)$ - найбільше власне значення матриці A .

Означення 1.7. Матрична норма $\|\cdot\|_{\beta}$ називається **погодженою** з векторною нормою $\|\cdot\|_{\alpha}$, якщо

$$\|Ax\|_{\alpha} \leq \|A\|_{\beta} \cdot \|x\|_{\alpha} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Означення 1.8. Матрична норма $\|\cdot\|_{\alpha}$ називається *породженою* векторною нормою $\|\cdot\|_{\alpha}$, якщо вона визначається наступним чином

$$\|A\|_{\alpha} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_{\alpha}}{\|x\|_{\alpha}} = \sup_{\|x\|_{\alpha}=1} \|Ax\|_{\alpha}$$

Властивість 1. Матрична норма породжена векторною нормою є найменшою із погоджених з цією векторною нормою.

Властивість 2. Кожна норма вектора породжує деяку матричну норму.

Приклад 1.2.

Для матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & -2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ обчислити її $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_{\infty}$, $\|\cdot\|_F$ та спектральну норму.

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \max \{(3+|-1|), (|-5|+|-2|), (2+|-5|)\} = \max \{4, 7, 7\} = 7$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \max \{(3+|-5|+2), (|-1|+|-2|+|-5|)\} = \max \{10, 8\} = 10$$

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = 3^2 + (-1)^2 + (-5)^2 + (-2)^2 + 2^2 + (-5)^2 = 9 + 1 + 25 + 4 + 4 + 25 = 68$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & -2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 & -3 \\ -3 & 30 \end{pmatrix}$$

$$\det(A^T A - I\lambda) = \begin{vmatrix} 38-\lambda & -3 \\ -3 & 30-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 68\lambda + 113$$

$$\det(A^T A - I\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 68\lambda + 113 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 29, \lambda_2 = 39$$

$$\|A\|_c^2 = \lambda_{\max}(A^T A) = 39$$

1.2. Число обумовленості матриці

Означення 1.9. *Числом обумовленості* матриці A називається вираз $\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$.

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$Ax = b \quad (1.1)$$

Якщо збурити вихідні дані системи (1), то розв'язок також зміниться. Тоді отримаємо

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b \quad (1.2)$$

Оцінимо норму вектора δx . Позначимо $\hat{x} = x + \delta x$. Віднімемо (1.1) із (1.2). Отримаємо

$$A \cdot \delta x + \delta A \cdot \hat{x} = \delta b$$

Звідси $\delta x = A^{-1}(-\delta A \cdot \hat{x} + \delta b)$ і

$$\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| (\|\delta A\| \cdot \|\hat{x}\| + \|\delta b\|) \quad (1.3)$$

Поділимо обидві частини виразу (1.3) на $\|\hat{x}\|$. Отримаємо

$$\frac{\|\delta x\|}{\|\hat{x}\|} \leq \text{cond}(A) \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|A\| \cdot \|\hat{x}\|} \right) \quad (1.4)$$

Звідси можна зробити висновок, що якщо число обумовленості матриці мале, то малим змінам вихідних даних відповідають малі зміни розв'язку, тобто задача (1.1) *добре обумовлена*.

Властивості числа обумовленості

Властивість 1. Величина числа обумовленості залежить від вибору норми.

Властивість 2. $\text{cond}(A \cdot B) \leq \text{cond}(A) \cdot \text{cond}(B)$.

Властивість 3. $\text{cond}(A) \geq 1$.

Властивість 4. $\text{cond}(\alpha A) = \text{cond}(A)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R} / \{0\}$.

Властивість 5. Для симетричної матриці A ($A = A^T$)

$$\text{cond}_c(A) = \|A\|_c \cdot \|A^{-1}\|_c = \frac{\max |\lambda(A)|}{\min |\lambda(A)|}.$$

Властивість 6. Для ортогональної матриці Q ($Q^T Q = Q Q^T = I$) $cond_c(Q) = 1$.

Приклад 1.3. Для матриці $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ обчислити число обумовленості за $1, \infty$, спектральною нормами, а також за нормою Фробеніуса.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2 & 0.1 \\ -0.2 & -0.4 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \max \{(|-4| + |-1|), (2 + |-2|)\} = \max \{5, 4\} = 5.$$

$$\|A^{-1}\|_{\infty} = \max \{(|-0.2| + 0.1), (|-0.2| + |-0.4|)\} = \max \{0.3, 0.6\} = 0.6.$$

$$cond_{\infty}(A) = \|A\|_{\infty} \cdot \|A^{-1}\|_{\infty} = 5 \cdot 0.6 = 3.$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \max \{(|-4| + 2), (|-1| + |-2|)\} = \max \{6, 3\} = 6.$$

$$\|A^{-1}\|_1 = \max \{(|-0.2| + |-0.2|), (0.1 + |-0.4|)\} = \max \{0.4, 0.5\} = 0.5.$$

$$cond_1(A) = \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1 = 6 \cdot 0.5 = 3$$

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = (-4)^2 + (-1)^2 + 2^2 + (-2)^2 = 16 + 1 + 4 + 4 = 25.$$

$$\|A^{-1}\|_F^2 = (-0.2)^2 + 0.1^2 + (-0.2)^2 + (-0.4)^2 = 0.04 + 0.01 + 0.04 + 0.16 = 0.25$$

$$cond_F(A) = \|A\|_F \cdot \|A^{-1}\|_F = \sqrt{25} \cdot \sqrt{0.25} = 5 \cdot 0.5 = 2.5$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det(A^T A - I\lambda) = \begin{vmatrix} 20 - \lambda & 0 \\ 0 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (20 - \lambda)(5 - \lambda)$$

$$\det(A^T A - I\lambda) = 0 \Rightarrow (20 - \lambda)(5 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 20, \lambda_2 = 5$$

$$\|A\|_c^2 = \lambda_{\max}(A^T A) = 20.$$

$$B = (A^{-1})^T A^{-1} = \begin{pmatrix} -0.2 & 0.2 \\ -0.1 & -0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.2 & 0.1 \\ -0.2 & -0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.08 & 0.06 \\ 0.06 & 0.17 \end{pmatrix}$$

$$\det(B - I\lambda) = \begin{vmatrix} 0.08 - \lambda & 0.06 \\ 0.06 & 0.17 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 0.25\lambda + 0.01$$

$$\det(B - I\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 0.25\lambda + 0.01 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0.2, \lambda_2 = 0.05$$

$$\|A^{-1}\|_c^2 = \lambda_{\max}(B) = 0.2.$$

$$\text{cond}_C(A) = \|A\|_C \cdot \|A^{-1}\|_C = \sqrt{20} \cdot \sqrt{0.2} = \sqrt{4} = 2.$$

Тема 2. Прямі методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$Ax = b$$

де $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матриця системи, $b \in \mathbb{R}^n$ – вектор правої частини, $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор невідомих.

Усі точні методи базуються на використанні перетворень, дозволяють привести вхідну матрицю до вигляду, який дозволяє легко отримати розв'язок. Ці перетворення не змінюють сам розв'язок а лише саму матрицю та виконуються за допомогою допоміжних класів спеціальних матриць.

Одним з таких типів матриць є матриці виключення, що використовуються у методах типу Гауса.

Матриці виключення

Нехай матриця $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Введемо наступні позначення

- позначимо a_{i*} – i -тий рядок матриці A , та a_{j*} – j -тий стовпець відповідно;
- одинична матриця $I = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = [e_{*1}, e_{*2}, \dots, e_{*m-1}, e_{*m}]$, де e_{*j} – j -тий стовпець одиничної матриці;
- вектор $\bar{n}_{l_k}$ ($k < l$) та вектор $\bar{n}_k$, що мають вид

$$\bar{n}_{l_k} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & n_{l_k} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{matrix} \vdots_k \\ \vdots_l \end{matrix}$$

$$\bar{n}_k = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & n_{k+1,k} & n_{k+2,k} & \cdots & n_{m-1,k} & n_{m,k} \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{matrix} \vdots_k \end{matrix}$$

Приклад 2.1. Нехай $m=4$, тоді вектори $\bar{n}_{3_2}, \bar{n}_2 \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ матимуть вид

$$\bar{n}_{3_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ n_{3_2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{n}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ n_{3_2} \\ n_{4_2} \end{bmatrix}$$

Означення 2.1. *Елементарною матрицею виключення називається матриця такого вигляду*

$$N_{l_k} = [e_{*1}, \dots, e_{*k-1}, \bar{n}_{l_k}, e_{*k+1}, \dots, e_{*n}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & 0 & n_{l_k} & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- одинична матриця в якій в k -му стовпці і l -му ($k < l$) рядку стоїть елемент n_{l_k}

$$N_{3_1} \in R^{4 \times 4}$$

$$N_{3_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ n_{3_1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Означення 2.2. *Загальною матрицею виключення (або просто матрицею виключення) називається матриця такого вигляду*

$$N_k = [e_{*1}, e_{*2}, \dots, \bar{n}_k, e_{*k+1}, \dots, e_{*n}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & & n_{k+1,k} & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & n_{n,k} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Властивості матриць виключення:

1. Матриця виключення, та елементарна матриця виключення – нижні трикутні матриці
2. Матриця виключення, та елементарна матриця виключення – *невироджені*, та $\det N_{l_k} = \det N_k = 1 \neq 0$.

3. Введемо позначення $\widehat{n}_{l_k} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ -n_{l_k} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, тоді

$$N_{l_k}^{-1} = [e_{*1}, e_{*2}, \dots, \widehat{n}_{l_k}, e_{*k+1}, \dots, e_{*n}]$$

Приклад 2.2.

$$N_{3_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ n_{3_1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad N_{3_1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -n_{3_1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$N_{3_1} * N_{3_1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Для матриці виключення позначимо $\widehat{n}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -n_{k+1,k} \\ \vdots \\ -n_{n,k} \end{pmatrix}$, тоді

$$N_k^{-1} = [e_{*1}, e_{*2}, \dots, \widehat{n}_k, \dots, e_{*n}].$$

5. Сума матриці виключення та зворотної матриці виключення

$$N_{l_k} + N_{l_k}^{-1} = 2 * I; \quad N_k + N_k^{-1} = 2 * I$$

6. Матрицю виключення можна отримати шляхом добутку елементарних матриць виключення - $N_k = N_{k+1,k} \times N_{k+2,k} \times \dots \times N_{n,k}$

$$N_k \times N_l = \begin{pmatrix} & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & n_{k+1,k} & & 1 & & & \\ & & \vdots & & & 1 & & \\ & & & & & n_{k+1,k} & 1 & \\ & & & & & \vdots & & 1 \\ n_{k+1,k} & & & & & n_{k+1,k} & & 1 \end{pmatrix}, k < l$$

2.1. Метод LU - розкладу

Означення 2.3. Головною підматрицею матриці A буде називатися матриця отримана з матриці A викреслюванням однойменних стовпців і рядків.

Приклад 2.3

Розглянемо $A \in R^{4 \times 4}$, якщо викреслимо 2-гий, 4-тий стовпець та рядок відповідно

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Означення 2.4. Провідною підматрицею $A^{(k)}$ матриці A називається матриця отримана викреслюванням усіх однойменних рядків і стовпців матриці A , починаючи з номера $(k + 1)$.

Методи виключення невідомих базуються на наступному твердженні.

Теорема 2.1. Нехай всі ведучі підматриці $A^{(k)}$, $k=1, \dots, n$, матриці A неособливі. Тоді A єдиним чином може бути представлена у вигляді

$$A=LU,$$

Де L – нижня трикутна матриця з одиницями на головній діагоналі; U – верхня трикутна матриця, діагональні елементи якої

$$u_{kk} = \det A^{(k)} / \det A^{(k-1)}, \quad k=1, \dots, n, \quad \det A^{(0)}=1.$$

Якщо розв'язується система рівнянь

$$Ax=b \tag{2.1}$$

то, використовуючи LU - розклад матриці A , запишемо

$$LUx = b; \tag{2.2}$$

Розв'язок системи (2.2) зводиться до розв'язку двох систем з трикутними матрицями:

$$Ly=b; \tag{2.3}$$

$$Ux = y. \tag{2.4}$$

Таким чином, алгоритм розв'язку СЛАР, використовуючий LU - розклад, складається з реалізації розкладу $A=LU$, розв'язку систем (2.3) та (2.4).

Реалізацію розкладу $A=LU$ в матричному вигляді можна записати так :

$$A_0 = A.$$

для $k = 1$ до $n-1$ виконати

$$A_k = N_k * A_{k-1}.$$

Покласти $U = A_{n-1}$, $L = N_1^{-1} * N_2^{-1} * \dots * N_{n-1}^{-1}$,

де $N_k, k = 1, 2, \dots, n-1$ - матриці виключення;

$$N_k = [l_1, \dots, l_k, n_k, l_{k+1}, \dots, l_n];$$

$$l_i^T = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0);$$

$$\overline{i-1}$$

$$n_k^T = (0, \dots, 0, 1, n_{k+1,k}, \dots, n_{n,k});$$

$$n_{i,k} = -a_{ik}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}, i = k+1, \dots, n;$$

$a_{ik}^{(k-1)}$ - елементи матриці A_{k-1} .

Слід відмітити, що матричний запис зручний для розуміння алгоритму. При реалізації алгоритму у вигляді програм для ЕОМ матриці $N_k, k = 1, \dots, n-1$, не використовуються. На k -му кроці обробляється матриця N_k для переходу від A_{k-1} до A_k згідно з формулою $A_k = N_k * A_{k-1}$ можна безпосередньо скористатися формулами для елементів матриць:

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} + n_{ik} * a_{kj}^{(k-1)}, i, j = k+1, \dots, n.$$

Нулі, які отримуються в k -му стовпчику під головною діагоналлю, можна не обчислювати. Для обчислення елементів матриці L користуються тим фактом, що $l_{ik} = -n_{i,k}$. Якщо матрицю A не треба зберігати в початковому вигляді, елементи матриць L і U можна розміщувати по мірі їх обчислення на місці відповідних елементів матриці A . При цьому одиниці, які знаходяться на головній діагоналі в матриці L , в пам'яті ЕОМ не зберігаються, а враховуються програмним шляхом у процедурі розв'язку системи (2.3). Якщо немає необхідності зберігати матрицю A , алгоритм обчислення елементів матриць L і U на місці матриці A виглядає наступним чином:

для $k=1$ до $n-1$ виконати

якщо $a_{kk} \neq 0$ то

для $i=k+1$ до n виконати

$$N = -a_{ik} / a_{kk}$$

$$a_{ik} = -N$$

для $j=k+1$ до n виконати

$$a_{ij} = a_{aj} + N * a_{kj}$$

кінець циклу по j

кінець циклу по i

інакше друкувати «ділення на нуль в k -й строчці»;

перейти в кінець

кінець циклу по k

У випадку зберігаємої (повної) матриці загальна кількість арифметичних операцій $O(1/3n^3)$. На етапі розв'язку трикутних систем (2.3) та (2.4) потрібно $O(n^2)$ арифметичних операцій.

Якщо матрицю A треба зберегти, треба $2n^2$ осередків пам'яті, якщо не потрібно – n^2 осередків.

Метод LU - розкладу особливо ефективний тоді, коли треба розв'язати декілька систем однією ж тією матрицею. В цьому випадку найбільш тяжкий процес LU - розкладу проводиться один раз, а розв'язок систем (2.3) , (2.4) – багато разів.

Приклад 2.1.

Розв'яжемо СЛАР $Ax = b$ методом LU -розкладу, де

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 6 & 2 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Перевіримо матрицю на застосовність метода

$$A^{(1)} = |10| = 10; A^{(2)} = \begin{vmatrix} 10 & -7 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 39; A^{(3)} = \begin{vmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 6 & 2 \\ 5 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 145$$

Усі ведучі матриці $A^{(k)}$ $k = \overline{1, n}$ матриці A неособливі. Тоді A єдиним чином може бути представлена у вигляді:

$$A=LU$$

Побудуємо LU-розклад. Знайдемо матрицю U, розклавши матрицю A так, щоб усі піддіагональні елементи дорівнювали нулю.

$$A_k = N_k * A_{k-1}, \quad k = \overline{1, n-1}$$

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & \cdots & a_{1k}^{(0)} & a_{1,k+1}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{kk}^{(k-1)} & a_{k,k+1}^{(k-1)} & \cdots & a_{11}^{(k-1)} \\ & 0 & \cdots & 0 & a_{k+1,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(k)} \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$$

де N_k —матриця виключення

Нехай: $A_0 = A$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{pmatrix}, \text{ де } a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} + n_{ik} a_{kj}^{(k-1)}, \quad i, j = \overline{k+1, n},$$

$$\text{а } n_{i,k} = -\frac{a_{i,k}^{(k-1)}}{a_{k,k}^{(k-1)}}, \quad i = \overline{k+1, n}$$

$$n_{21} = -\frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = -\frac{3}{10}, \quad n_{31} = -\frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = -\frac{5}{10}$$

$$a_{22}^{(1)} = a_{22}^{(0)} + n_{21} a_{12}^{(0)} = \frac{39}{10}; \quad a_{23}^{(1)} = a_{23}^{(0)} + n_{21} a_{13}^{(0)} = 2$$

$$a_{32}^{(1)} = a_{32}^{(0)} + n_{31} a_{12}^{(0)} = \frac{25}{10}, \quad a_{33}^{(1)} = a_{33}^{(0)} + n_{31} a_{13}^{(0)} = 5.$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & \frac{39}{10} & 2 \\ 0 & \frac{25}{10} & 5 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix}, \text{ де } a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} + n_{32} a_{23}^{(1)} = \frac{145}{39},$$

$$\text{а } n_{32} = -\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = -\frac{25}{39}, \text{ тоді } A_2 = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & \frac{39}{10} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{145}{39} \end{pmatrix} = U$$

Знайдемо матрицю L

$$L = N_1^{-1}N_2^{-1}$$

Таким чином отримуємо:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -n_{21} & 1 & 0 \\ -n_{31} & -n_{32} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{10} & 1 & 0 \\ \frac{5}{10} & \frac{25}{39} & 1 \end{pmatrix}$$

Перевіримо отриманий розклад:

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{10} & 1 & 0 \\ \frac{5}{10} & \frac{25}{39} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & \frac{39}{10} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{145}{39} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 6 & 2 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} = A$$

Знайдемо розв'язок СЛАР:

$$Ly = b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{10} & 1 & 0 \\ \frac{5}{10} & \frac{25}{39} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = 1; \\ \frac{-3y_1}{10} + y_2 = 1; \\ \frac{5y_1}{10} + \frac{25}{39}y_2 + y_3 = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = 1; \\ y_2 = \frac{13}{10}; \\ y_3 = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

$$Ux = y$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & \frac{39}{10} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{145}{39} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{13}{10} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 10x_1 - 7x_2 = 1; \\ \frac{39}{10}x_2 + 2x_3 = \frac{13}{10}; \\ \frac{145}{39}x_3 = -\frac{1}{3}. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{53}{145}; \\ x_2 = \frac{11}{29}; \\ x_3 = -\frac{13}{145}. \end{cases}$$

Перевіримо правильність розв'язку

$$Ax = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 6 & 2 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{53}{145} \\ \frac{11}{29} \\ -\frac{13}{145} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = b$$

2.2. Метод Гауса

Обмеження на матрицю A залишаються ті ж, що і в LU - розкладі. Метод Гауса складається з двох основних етапів: прямого ходу та оберненої підстановки. Алгоритм у матричному вигляді такий :

а) прямий хід - приведення системи (2.1) до вигляду

$$N_{n-1} * \dots * N_1 * A * x = N_{n-1} * \dots * N_1 * b,$$

що еквівалентно

$$U * x = f, \tag{2.5}$$

$$\text{де } f = N_{n-1} * \dots * N_1 * b;$$

б) обернений хід - розв'язок системи (2.5) шляхом оберненої підстановки.

У програмній реалізації алгоритм прямого кроку методу Гауса відрізняється від приведеного вище алгоритму LU - розкладу тільки тим, що не потрібно «запам'ятовувати» множники виключення, тобто не потрібна строчка $a_{ik} = N$.

Але після кінця циклу по j необхідно додати строчку $b = b_1 + N * b$, що відповідає обчисленню вектора f .

Приклад 2.2.

Розв'язати СЛАР $Ax = b$, методом Гауса де

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 6 & 2 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Перевіримо чи можна для розв'язку системи з матрицею A застосувати метод Гауса

$$A^{(1)} = |10| = 10, A^{(2)} = \begin{vmatrix} 10 & -7 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 39, A^{(3)} = \begin{vmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 6 & 2 \\ 5 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 145$$

Усі ведучі матриці $A^{(k)}$ $k = \overline{1, n}$ матриці A невироджені. Тоді систему $Ax = b$ зведемо до системи з верхньою трикутною матрицею:

$$Ux = f, \text{ де } U = N_2 N_1 A, f = N_2 N_1 b,$$

де N_k —матриці виключення

Прямий хід метода Гауса. Побудуємо матрицю U :

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n_{21} & 1 & 0 \\ n_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ де } n_{i,k} = -\frac{a_{i,k}^{(k-1)}}{a_{k,k}^{(k-1)}}, i = \overline{k+1, n},$$

$a_{ij}^{(k)}$ — елемент головної ведучої підматриці

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} + n_{ik} a_{kj}^{(k-1)}, i, j = \overline{k+1, n}$$

$$n_{21} = -\frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = -\frac{3}{10}, \quad n_{31} = -\frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = -\frac{5}{10}$$

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{10} & 1 & 0 \\ -\frac{5}{10} & 0 & 1 \end{pmatrix}; N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & n_{32} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{де } n_{32} = -\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = -\frac{a_{32}^{(0)} + n_{31} a_{12}^{(0)}}{a_{22}^{(0)} + n_{21} a_{12}^{(0)}} = -\frac{25}{39}; N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{25}{39} & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = N_2 N_1 A = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & \frac{39}{10} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{145}{39} \end{pmatrix}$$

Знайдемо вектор f : $f = N_2 N_1 b = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{13}{10} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Знайдемо розв'язок СЛАР оберненим ходом метода Гауса:

$$Ux = f$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & \frac{39}{10} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{145}{39} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{13}{10} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 10x_1 - 7x_2 = 1; \\ \frac{39}{10}x_2 + 2x_3 = \frac{13}{10}; \\ \frac{145}{39}x_3 = -\frac{1}{3}. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{53}{145}; \\ x_2 = \frac{11}{29}; \\ x_3 = -\frac{13}{145}. \end{cases}$$

Перевіримо правильність розв'язку

$$Ax = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 6 & 2 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{53}{145} \\ \frac{11}{29} \\ -\frac{13}{145} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = b$$

2.3. Компактна схема методу Гауса (модифікація Краута)

Існують різні модифікації методу Гауса. Розглянемо одну з них, а точніше так званий метод Краута. В основному алгоритмі методу Гауса кожний елемент матриці перераховується багато разів по формулі $a_{ij} = a_{ij} + N * a_{kj}$. Оскільки у будь-якому випадку вся інформація про процес виключення зберігається, всі операції над a_{ij} можна виконати за один крок. Це приводить до наступних формул:

$$u_{11} = a_{11};$$

$$\text{для } j = 2, \dots, n;$$

$$u_{ij} = a_{ij}, l_{j1} = a_{j1} / u_{11},$$

для $i = 2, \dots, n$;

$$u_{ii} = a_{ii} - \sum_{p=1}^{i-1} l_{ip} * u_{pi},$$

для $j = i+1, \dots, n$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{p=1}^{i-1} l_{ip} * u_{pj};$$

$$l_{ji} = \left(a_{ji} - \sum_{p=1}^{j-1} l_{jp} u_{pi} \right) / u_{ii}.$$

Для більш надійної програми можна додати перевірку на «рівність нулю» діагональних елементів u_{ii} перед відновними операціями ділення.

Навіть не дивлячись на те, що модифікація Краута складається лише в іншому порядку проведення операцій в порівнянні з виключенням Гауса, існує два випадки, коли ця модифікація має переваги. Перша перевага має місце тоді, коли незручно зберігати поміжні результати, наприклад, при використанні калькуляторів. Друга перевага з'являється при використанні обчислюваних машин з швидкою операцією скалярного добутку, так званого режиму накопичення.

Приклад 2.3.

Дано СЛАР $Ax = b$, де

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 6 & 2 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Розв'яжемо СЛАР модифікацією Краута метода Гауса

Перевіримо чи можна для розв'язку системи з матрицею A застосувати модифікацію Краута метода Гауса

$$A^{(1)} = |10| = 10, \quad A^{(2)} = \begin{vmatrix} 10 & -7 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 39, \quad A^{(3)} = \begin{vmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 6 & 2 \\ 5 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 145$$

Усі ведучі матриці $A^{(k)}$ $k = \overline{1, n}$ матриці A невидженні. Тоді A єдиним чином може бути представлена у вигляді:

$$A=LU,$$

де L, U —нижня та верхня трикутны матриці відповідно.

Підрахуємо матриці згідно алгоритму модифікації Краута:

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}; \quad l_{j1} = \frac{a_{j1}}{u_{11}}, \quad j = \overline{2, n}$$

$$l_{11} = 1; \quad l_{21} = -\frac{3}{10}; \quad l_{31} = \frac{5}{10}$$

$$u_{ii} = a_{ii} - \sum_{p=1}^{i-1} l_{ip} u_{pi}, \quad i = \overline{2, n}$$

$$u_{22} = a_{22} - l_{21} u_{12} = \frac{39}{10}; \quad u_{33} = a_{33} - (l_{31} u_{13} + l_{32} u_{23})$$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{p=1}^{i-1} l_{ip} u_{pj}, \quad i = \overline{2, n}, \quad j = \overline{i+1, n}$$

$$u_{23} = a_{23} - l_{21} u_{13} = 2$$

$$l_{ji} = \left(a_{ji} - \sum_{p=1}^{i-1} l_{jp} u_{pi} \right) / u_{ii}, \quad i, j = \overline{1, n}$$

$$l_{22} = \frac{(a_{22} - l_{21} u_{12})}{u_{22}} = 1; \quad l_{32} = \frac{(a_{32} - l_{31} u_{12})}{u_{22}} = \frac{25}{39}$$

$$l_{33} = \frac{(a_{33} - (l_{31} u_{13} + l_{32} u_{23}))}{u_{33}}$$

$$u_{33} = \frac{145}{39}, \quad l_{33} = 1$$

Таким чином отримаємо такі матриці:

$$U = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & \frac{39}{10} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{145}{39} \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{10} & 1 & 0 \\ \frac{5}{10} & \frac{25}{39} & 1 \end{pmatrix}$$

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{10} & 1 & 0 \\ \frac{5}{10} & \frac{25}{39} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & \frac{39}{10} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{145}{39} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 6 & 2 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} = A$$

Знайдемо розв'язок СЛАР:

$$Ly = b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{10} & 1 & 0 \\ \frac{5}{10} & \frac{25}{39} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = 1; \\ -\frac{3y_1}{10} + y_2 = 1; \\ \frac{5y_1}{10} + \frac{25}{39}y_2 + y_3 = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = 1; \\ y_2 = \frac{13}{10}; \\ y_3 = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

$$Ux = y$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & \frac{39}{10} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{145}{39} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{13}{10} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 10x_1 - 7x_2 = 1; \\ \frac{39}{10}x_2 + 2x_3 = \frac{13}{10}; \\ \frac{145}{39}x_3 = -\frac{1}{3}. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{53}{145}; \\ x_2 = \frac{11}{29}; \\ x_3 = -\frac{13}{145}. \end{cases}$$

Перевіримо правильність розв'язку

$$Ax = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 6 & 2 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{53}{145} \\ \frac{11}{29} \\ -\frac{13}{145} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = b$$

2.4. Метод PLU- розкладу

Відомо, що алгоритм виключення Гауса нестійкий. Якщо при виключенні на діагоналі з'явиться «мале» число (малість треба розуміти по відношенню до арифметики, що використовується), то при діленні на цей малий елемент з'являються «великі» числа. Помилки округлень, які малі в порівнянні з цими великими числами, можуть бути великими по відношенню до елементів початкової матриці. В результаті можемо отримати неправильний розв'язок (або мати велику помилку). В цьому випадку подальші обчислення по алгоритму неможливі.

Щоб уникнути цього, використовують так звані перестановки строчок (або строчок і стовпців) матриці так, щоб на діагоналі знаходились максимальні по модулю елементи.

Теорема 2.2. Нехай матриця A неособлива, тобто $\det A \neq 0$. Тоді існує матриця перестановок P така, що

$$A = PLU, \quad (2.6)$$

де L - нижня трикутна матриця з одиницями на головній діагоналі; U - верхня трикутна матриця.

Алгоритм тримання такого розкладу, коли максимальний елемент розшукується в стовпчику, в матричному вигляді:

$$A_0 = A$$

для $k=1$ до $n-1$ виконати

$$A_k = N_k * P_k^{k, \gamma_k} * A_{k-1},$$

кінець циклу по k

$$\text{покласти } P * L = P^{1, \gamma_1} * \dots * P^{n-1, \gamma_{n-1}} * N_{n-1}^{-1}; U = A_{n-1},$$

де P^{k, γ_k} – матриця перестановок, елементи якої

$$P_{ij}^{k, \gamma_k} = \begin{cases} 1, \text{ коли } (k=i, \gamma_k=j) \cup (k=j, \gamma_k=i) \cup (i=j, i \neq k, i \neq \gamma_k) \\ 0, \text{ в інших випадках} \end{cases}$$

$$|a_{\gamma_k, k}^{(k-1)}| = \max_{k \leq i \leq n} |a_{ik}^{(k-1)}|,$$

N_k - матриця виключення.

Таким чином, на кожному кроці вибирається максимальний по модулю елемент k -го стовпця; γ_k - номер строчки, яка містить цей елемент. Потім строчки k та γ_k переставляються. Виключення проводиться так же, як і в LU -розкладі.

В програмній реалізації матриці перестановок у явному вигляді звичайно не обчислюється і не зберігаються. Перестановки запам'ятовуються у вигляді деякого вектору. Якщо немає необхідності зберігати початкову матрицю A , алгоритм має такий вигляд:

для $k=1$ до $n-1$ виконати

$\max = a_{kk};$

$i_{\max} = k;$

для $i=k+1$ до n виконати

якщо $\text{abs}(\max) < \text{abs}(a_{ik})$ то

$\max = a_{ik}; i_{\max} = i;$

кінець циклу по i

якщо $\max = \emptyset$ то

друкувати «ділення на нуль у k -ій строчці»; вихід на кінець

інакше

якщо $i_{\max} \neq k$, то

для $j=1$ до n виконати

$r = a_{kj}; a_{kj} = a_{i_{\max}, j}; a_{i_{\max}, j} = r;$

кінець циклу по j

$P(k) = i_{\max};$

інакше

$P(k) = k;$

для $i=k+1$ до n виконати

$N = -a_{ik} / \max; a_{ik} = -N;$

для $j=k+1$ до n виконати

$a_{ij} = a_{ij} + N * a_{kj};$

кінець циклу по j
 кінець циклу по i
 кінець циклу по k .

Після виконання цього алгоритму у векторі P кожна i -та компонента містить номер строчки, яка переставлена з i -ю строчкою на i -му кроці виключення (очевидно, що $P \geq i$). Систему (2.1) легко розв'язати, якщо одержаний розклад (2.6). Задача зводиться до розв'язку двох систем:

$$Ly = P^T b; \quad (2.7)$$

$$Ux = y. \quad (2.8)$$

Стратегія вибору максимального по модулю елементу в стовпчику називається стратегією часткового вибору головного елемента.

Приклад 2.4.

Розв'яжемо СЛАР $Ax = b$ методом PLU -розкладу, де

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для того щоб застосувати метод перевіримо чи є матриця A невивродженою

$$A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 73 \neq 0 \quad \det$$

Матриця A невивроджена. Тоді існує матриця перестановок P така, що

$$A = PLU$$

де L - нижня трикутна матриця з одиницями на головній діагоналі; U - верхня трикутна матриця.

Покладемо:

$$A_0 = A$$

$$|a_{\gamma_k k}^{(k-1)}| = \max_{k \leq i \leq n} |a_{ik}^{(k-1)}|$$

де $a_{\gamma_k k}^{(k-1)}$ найбільший по модулю елемент серед $n - k + 1$ елементів у k -му стовпці матриці A_{k-1}

Переставляємо місцями k -у та γ_k строки матриці A_{k-1} та обнуляємо усі елементи k -го стовпця починаючи з $k + 1$ -го.

$$A_k = N_k P^{k\gamma_k} A_{k-1}, \quad k = \overline{1, n-1}$$

$$A_{k_p} = P^{k\gamma_k} A_k$$

де N_k – матриця виключення, $P^{k\gamma_k}$ – елементарна матриця перестановок

Крок $k = 1$

$$|a_{\gamma_1 1}^{(0)}| = \max_{1 \leq i \leq n} |a_{i1}^{(0)}| = a_{11}^{(0)}$$

$$A_1 = N_1 P^{1\gamma_1} A_0$$

$$P^{1\gamma_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n_{21} & 1 & 0 \\ n_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{0_p} = P^{1\gamma_1} A_0 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$n_{i,k} = -\frac{a_{i,k}^{(k-1)_p}}{a_{k,k}^{(k-1)_p}}, \quad i = \overline{k+1, n}$$

$$n_{21} = -\frac{a_{21}^{(0)_p}}{a_{11}^{(0)_p}} = -\frac{4}{5}, \quad n_{31} = -\frac{a_{31}^{(0)_p}}{a_{11}^{(0)_p}} = \frac{2}{5}$$

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{9}{5} & -\frac{8}{5} \\ 0 & \frac{13}{5} & \frac{29}{5} \end{pmatrix}$$

Крок $k = 2$

$$|a_{\gamma_2 2}^{(1)}| = \max_{2 \leq i \leq n} |a_{i2}^{(1)}| = a_{32}^{(1)}$$

$$P^{2\gamma_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & n_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{1_p} = P^{2\gamma_2} A_1 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{13}{5} & \frac{29}{5} \\ 0 & \frac{9}{5} & -\frac{8}{5} \end{pmatrix}$$

$$n_{32} = -\frac{a_{32}^{(1)_p}}{a_{22}^{(1)_p}} = -\frac{9}{13}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{9}{13} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{13}{5} & \frac{29}{5} \\ 0 & \frac{9}{5} & -\frac{8}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{13}{5} & \frac{29}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{73}{13} \end{pmatrix} = U$$

Підрахуємо нижню трикутну матрицю L з одиницями на головній діагоналі, та матрицю перестановок P

$$P = P^{1,\gamma_1} P^{2,\gamma_2} \dots P^{n-1,\gamma_{n-1}}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P^T$$

$$L = \widetilde{N}_1 \widetilde{N}_2 \dots \widetilde{N}_{n-2} N_{n-1}^{-1}$$

$$\widetilde{N}_k = P^{n-1,\gamma_{n-1}} \dots P^{k+1,\gamma_{k+1}} N_k^{-1} P^{k+1,\gamma_{k+1}} \dots P^{n-1,\gamma_{n-1}}, \quad k = \overline{1, n-2}$$

$$L = \widetilde{N}_1 N_2^{-1}$$

$$\widetilde{N}_1 = P^{2,\gamma_2} N_1^{-1} P^{2,\gamma_2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{5}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & \frac{13}{13} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{9}{13} & 1 \end{pmatrix}$$

Отже отримаємо *PLU* розклад матриці *A*

Знайдемо розв'язок СЛАР

$$Ly = P^T b$$

$$\begin{cases} y_1 = 1; \\ -\frac{2}{5}y_1 + y_2 = 1; \\ \frac{4}{5}y_1 + \frac{9}{13}y_2 + y_3 = 1. \end{cases} \begin{cases} y_1 = 1; \\ y_2 = \frac{7}{5}; \\ y_3 = -\frac{10}{13}. \end{cases}$$

$$Ux = y$$

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 1; \\ \frac{13}{5}x_2 + \frac{29}{5}x_3 = \frac{7}{5}; \\ -\frac{73}{13}x_3 = -\frac{10}{13}. \end{cases} \begin{cases} x_1 = \frac{14}{73}; \\ x_2 = \frac{17}{73}; \\ x_3 = \frac{10}{73}. \end{cases}$$

Звіримо отриманий результат:

$$Ax = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{14}{73} \\ \frac{17}{73} \\ \frac{10}{73} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = b$$

2.5. Метод Гауса з частковим вибором головного елемента

Як і у випадку без вибору головного елемента, алгоритм складається з двох основних етапів: прямого ходу і оберненої підстановки. Різниця полягає лише в тому, що на *k*-му кроці виключення раніше, ніж обчислити множник виключення, знаходиться максимальний по модулю елемент цього стовпчика і проводиться перестановка відповідних строчок. У матричному вигляді алгоритм виглядає так:

а) **прямий хід** - приведення системи (2.1) до виду:

$$\begin{aligned} N_{n-1} * P_{n-1}^{n-1, \gamma_{n-1}} * \dots * N_1 * P_1^{1, \gamma_1} * A * x = \\ = N_{n-1} * P_{n-1}^{n-1, \gamma_{n-1}} * \dots * N_1 * P_1^{1, \gamma_1} * b, \end{aligned} \quad (2.9)$$

що еквівалентно

$$Ux = f$$

б) **обернений хід** - розв'язок системи $Ux = f$.

Алгоритм виглядає так :

для $k=1$ до $n-1$ виконати

$$\max = a_{kk};$$

$$i_{\max} = k;$$

для $i=k+1$ до n виконати

якщо

$$abs(a_{ik}) > abs(a_{i_{\max},k})$$

то

$$\max = a_{ik}; i_{\max} = i;$$

кінець циклу по i

якщо

$$\max = \emptyset$$

то друкувати «ділення на нуль у k -ій строчці»; вихід на кінець

інакше

якщо

$$i_{\max} \neq k$$

то

для $j=k$ до n виконати

$$r = a_{kj}; a_{kj} = a_{i_{\max},j}; a_{i_{\max},j} = r;$$

кінець циклу по j

$$r = b_k; b_k = b_{i_{\max}}; b_{i_{\max}} = r;$$

для $i=k+1$ до n виконати

$$N = -a_{ik} / \max;$$

для $j=k+1$ до n виконати

$$a_{ij} = a_{ij} + N * a_{kj};$$

кінець циклу по j

$$b_i = b_i + N * b_k;$$

кінець циклу по i

кінець циклу по k .

Приклад 2.5.

Розв'яжемо СЛАР $Ax = b$ методом Гауса з частковим вибором головного елемента, де

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Для того щоб застосувати метод перевіримо чи є матриця A є невиродженою

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 73 \neq 0$$

Тоді систему $Ax = b$ зведемо до системи з верхньою трикутною матрицею:

$$Ux = f,$$

$$U = N_2 P^{2\gamma_2} N_1 P^{1\gamma_1} A, \quad f = N_2 P^{2\gamma_2} N_1 P^{1\gamma_1} b,$$

де N_k — матриці виключення

Прямий хід метода Гауса. Побудуємо матрицю U :

Крок $k = 1$

$$A_{p_1} = P^{1\gamma_1} A$$

$$|a_{\gamma_1 1}| = \max_{1 \leq i \leq n} |a_{i1}| = a_{11}$$

$$P^{1\gamma_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n_{21} & 1 & 0 \\ n_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{p_1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$n_{i,k} = -\frac{a_{i,k}^{p_k}}{a_{k,k}^{p_k}}, i = \overline{k+1, n}, \text{ тоді } n_{21} = -\frac{a_{21}^{p_1}}{a_{11}^{p_1}} = -\frac{4}{5}, \quad n_{31} = -\frac{a_{31}^{p_1}}{a_{11}^{p_1}} = \frac{2}{5}$$

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = N_1 A_{p_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{9}{5} & -\frac{8}{5} \\ 0 & \frac{13}{5} & \frac{29}{5} \end{pmatrix}$$

Крок $k = 2$

$$A_{p_2} = P^{2\gamma_2} A_1$$

$$|a_{\gamma_2 2}^{(1)}| = \max_{2 \leq i \leq n} |a_{i2}^{(1)}| = a_{32}^{(1)},$$

де $a_{ij}^{(1)}$ – елемент матриці A_1

$$P^{2\gamma_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & n_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{p_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{9}{5} & -\frac{8}{5} \\ 0 & \frac{13}{5} & \frac{29}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{13}{5} & \frac{29}{5} \\ 0 & \frac{9}{5} & -\frac{8}{5} \end{pmatrix}$$

$$n_{32} = -\frac{a_{32}^{p_2}}{a_{22}^{p_2}} = -\frac{9}{13}$$

$$N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{9}{13} & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = N_2 A_{p_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{9}{13} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{13}{5} & \frac{29}{5} \\ 0 & \frac{9}{5} & -\frac{8}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{13}{5} & \frac{29}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{73}{13} \end{pmatrix}$$

Знайдемо вектор f

$$f = N_2 P^{2\gamma_2} N_1 P^{1\gamma_1} b =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{9}{13} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \\ 10 \\ -\frac{10}{13} \end{pmatrix}$$

Знайдемо розв'язок СЛАР оберненим ходом метода Гауса:

$$Ux = f$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{13}{5} & \frac{29}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{73}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \\ 10 \\ -\frac{10}{13} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 1; \\ \frac{13}{5}x_2 + \frac{29}{5}x_3 = \frac{7}{5}; \\ -\frac{73}{13}x_3 = -\frac{10}{13}. \end{cases} \begin{cases} x_1 = \frac{14}{73}; \\ x_2 = \frac{17}{73}; \\ x_3 = \frac{10}{73}. \end{cases}$$

Перевіримо правильність розв'язку

$$Ax = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{14}{73} \\ \frac{17}{73} \\ \frac{10}{73} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = b$$

2.6. Метод Гауса з повним вибором головного елемента

В цій модифікації методу виключення максимальний по модулю елемент знаходиться серед усіх елементів частини матриці, де не проведене виключення. Іншими словами, перед виключенням елементів k -го стовпця організовується подвійний цикл: по i та j від k до n , в якому знаходиться максимальний по модулю елемент. Нехай це елемент a_{γ_k, p_k} . Щоб цей елемент став на місце a_{kk} треба переставити місцями k -ту та γ_k -ту строчки, k -ий і p_k -ий стовпчики. При цьому відмітимо, що перестановка стовпчиків приводить до перестановки вектора невідомих x . По аналогії з попереднім алгоритмом даний алгоритм у матричному виді виглядає так:

а) прямий хід

$$A_0 = A; b^0 = b$$

для $k=1$ до $n-1$ виконати

$$\begin{aligned} A_k &= N_k * P_k^{k, \gamma_k} * A_{k-1} * P_k^{k, \beta_k} \\ b_k &= N_k * P_k^{k, \gamma_k} * b^{k-1} \\ \text{abs}(a_{jk, \beta k}^{(k-1)}) &= \max \text{abs}(a_{ij}^{(k-1)}) \end{aligned},$$

кінець циклу по k .

На цьому кроці система (2.1) приводиться до виду

$$Uy = f, \quad (2.10)$$

$$\text{де } U = N_{n-1} * P_{n-1}^{n-1, \gamma_{n-1}} * \dots * N_1 * P_1^{1, \gamma_1} * A, \quad f = N_{n-1} * P_{n-1}^{n-1, \gamma_{n-1}} * \dots * N_1 * P_1^{1, \gamma_1} * b,$$

$$y = P_1^{1, \beta_1} * \dots * P_{n-1}^{n-1, \beta_{n-1}} * x,$$

б) обернений хід – розв’язок системи (2.10).

При програмній реалізації основою служить алгоритм, приведений в під-розділі 2.5. Різниця лише в тому, що при виборі головного елемента додається цикл по стовпцям і запам’ятовуються перестановки стовпчиків за допомогою деякого вектору (див. метод PLU-розкладу).

Якщо метод Гауса з повним вибором головного елемента використовується для системи з особливою матрицею, то головний елемент на деякому кроці дорівнює нулю. В цьому випадку програма повинна видавати повідомлення «матриця вироджена» і зупинятися.

Приклад 2.6.

Розв’яжемо СЛАР $Ax = b$ Гауса з повним вибором головного елемента,

$$\text{де } A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 3 & 6 & -1 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Для того щоб застосувати метод перевіримо чи є матриця A є невиродженою

$$A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 73 \neq 0 \quad \det$$

Матриця A неособлива. Тоді систему $Ax = b$ зведемо до системи з верхньою трикутною матрицею:

$$Ux = f,$$

$$U = N_{n-1} * P_{n-1}^{n-1, \gamma_{n-1}} * \dots * N_1 * P_1^{1, \gamma_1} * A,$$

$$f = N_{n-1} * P_{n-1}^{n-1, \gamma_{n-1}} * \dots * N_1 * P_1^{1, \gamma_1} * b,$$

де N_k — матриці виключення

Прямий хід метода Гауса. Побудуємо матрицю U :

Крок $k = 1$

$$\max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} |a_{ij}| = a_{11}$$

$$P_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_1^{(1)} A P_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 3 & 6 & -1 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n_{21} & 1 & 0 \\ n_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad n_{i,k} = -\frac{a_{i,k}}{a_{k,k}}, i = \overline{k+1, n}$$

$$n_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{3}{7}, \quad n_{31} = -\frac{a_{31}}{a_{11}} = -\frac{5}{7}$$

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{7} & 1 & 0 \\ -\frac{5}{7} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = N_1 P_1^{(1)} A P_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{7} & 1 & 0 \\ -\frac{5}{7} & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 3 & 6 & -1 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 0 & \frac{54}{7} & -1 \\ 0 & \frac{27}{7} & 6 \end{pmatrix}$$

Крок $k = 2$

$$\max_{\substack{2 \leq i \leq n \\ 2 \leq j \leq n}} |a_{ij}^{(1)}| = a_{33}^{(1)},$$

де $a_{ij}^{(1)}$ – елемент матриці A_1

$$P_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_2^{(1)} A_1 P_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 0 & \frac{54}{7} & -1 \\ 0 & \frac{27}{7} & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & \frac{27}{7} \\ 0 & -1 & \frac{54}{7} \end{pmatrix}$$

$$N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & n_{32} & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{де } n_{32} = \frac{1}{16}, \quad \text{тоді } N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = N_2 P_2^{(1)} A_1 P_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & \frac{27}{7} \\ 0 & -1 & \frac{54}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & \frac{27}{7} \\ 0 & 0 & \frac{117}{14} \end{pmatrix}$$

Знайдемо вектор f

$$f = N_2 P_2^{(1)} N_1 P_1^{(1)} b =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{7} & 1 & 0 \\ \frac{5}{7} & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ \frac{15}{7} \\ \frac{117}{14} \end{pmatrix}$$

Знайдемо розв'язок СЛАР оберненим ходом метода Гауса:

$$Ux = f$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & \frac{27}{7} \\ 0 & 0 & \frac{117}{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ \frac{15}{7} \\ \frac{117}{14} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 7x_1 - 4x_3 = 11; \\ 6x_2 + \frac{27}{7}x_3 = \frac{15}{7}; \\ \frac{117}{14}x_3 = -\frac{117}{14}. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 1; \\ x_2 = 1; \\ x_3 = -1. \end{cases}$$

Перевіримо правильність розв'язку

$$Ax = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 3 & 6 & -1 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix} = b$$

2.7. Метод $LD\bar{U}$ - розкладу

В LU -розкладі матриці A матрицю U можна представити у вигляді $U=D\bar{U}$, де D - діагональна матриця; $\bar{U}$ – верхня трикутна матриця з одиницями на головній діагоналі. Тоді

$$A = LD\bar{U}.$$

Очевидно, що діагональні елементи матриці D - d_{ii} співпадають з діагональними елементами матриці U - u_{ii} , а елементи $\bar{u}_{ij}$ матриці $\bar{U}$ дорівнюють $\bar{u}_{ij} = u_{ij} / u_{ii}$, де u_{ij} - елементи матриці U , $i < j \leq n$.

Приклад 2.7.

Дано СЛАР

$$Ax = b$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Розв'яжемо СЛАР методом - $LD\bar{U}$ розкладу. Оскільки метод базується на LU розкладі матриці A перевіримо чи виконується для неї теорема про LU розкладі

$$A^{(1)} = |2| = 2, A^{(2)} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1, A^{(3)} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 26$$

Усі ведучі матриці $A^{(k)}$ $k = \overline{1, n}$ матриці A неособливі. Тоді A єдиним чином може бути представлена у вигляді:

$$A = LDU$$

де L - нижня трикутна матриця з одиничною діагоналлю, D - діагональна матриця, а U - верхня трикутна матриця з одиничною діагоналлю

Побудуємо LU -розклад

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -5 \\ 0 & 0 & 26 \end{pmatrix}$$

Матрицю D отримаємо з матриці U наступним чином:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{U} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{u_{12}}{u_{11}} & \dots & \frac{u_{1n}}{u_{11}} \\ 0 & 1 & \dots & \frac{u_{2n}}{u_{22}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Маємо

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 26 \end{pmatrix}, \quad \tilde{U} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Перевіримо отриманий розклад:

$$\begin{aligned} LD\tilde{U} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 26 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{5}{2} & 26 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = A \end{aligned}$$

Отримали три СЛАР:

$$Ux = y$$

$$Dy = z$$

$$Lz = b$$

Знайдемо розв'язок СЛАР:

$$1. \quad Lz = b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} z_1 = 5; \\ \frac{3z_1}{2} + z_2 = 2; \\ \frac{z_1}{2} + 5z_2 + z_3 = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 = 5; \\ z_2 = -\frac{11}{2}; \\ z_3 = 26. \end{cases}$$

$$2. \quad Dy = z$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 2 \\ 26 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2y_1 = 5; \\ \frac{1}{2}y_2 = -\frac{11}{2}; \\ 26y_3 = 26. \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = \frac{5}{2}; \\ y_2 = -11; \\ y_3 = 1. \end{cases}$$

$$3. \quad Ux = y$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 = \frac{5}{2}; \\ x_2 - 10x_3 = -11; \\ x_3 = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 1; \\ x_2 = -1; \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Перевіримо правильність розв'язку

$$Ax = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = b$$

2.8. Метод Холеського

Якщо $A=A^T$, то в $LD\bar{U}$ - розкладі $\bar{U}=L^T$. В результаті отримаємо $A=LDL^T$. Якщо $A=A^T$ означена додатньо, то усі елементи $d_{ii}>0$, і розклад можна записати у вигляді $A=\bar{L}*\bar{L}^T$, де $\bar{L}$ - нижня трикутна матриця.

Цей розклад лежить в основі алгоритму Холеського (метод квадратного кореня). Даний алгоритм стійкий, не потребує перестановок. Це пов'язано з тим, що максимальний по модулю елемент додатньо означеної матриці, який знаходиться на головній діагоналі, при перетвореннях виключення не зростає. Алгоритм Холеського вважається найкращим для розв'язку систем з додатньо означеними симетричними матрицями. Існують різні обчислювальні схеми алгоритму: в формі зовнішніх добутків, метод окаймлення, скалярних добутків. Приведемо алгоритм методу Холеського у формі скалярних добутків, що відповідає модифікації Краута в несиметричному випадку.

Алгоритм

для $j=1$ до n виконати

$$l_{jj} = \left(a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2 \right)^{1/2}$$

для $i=j+1$ до n виконати

$$l_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk} \right)^{1/2} / l_{jj}$$

кінець циклу по i

кінець циклу по j

Цей алгоритм можна отримати безпосередньо, прирівнюючи елементи матриці A з елементами матриці $L L^T$ починаючи з першого. На практиці звичайно в ЕОМ зберігається тільки симетрична частина матриці A , наприклад, в одновірному масиві виду

Таблиця 1.

a_{11}	$a_{21}a_{22}$	$a_{31}a_{32}a_{33}$	...	$a_{n1}a_{n2}a_{n3}...a_{nn}$
----------	----------------	----------------------	-----	-------------------------------

Після виконання алгоритму на місці цих елементів отримуються елементи матриці $\bar{L}$.

Великий клас точних методів складають так звані ортогональні методи, в яких створення нулів нижче головної діагоналі здійснюється за допомогою ортогональних перетворень. Відомо, що ці перетворення не змінюють евклідову норму вектора і матриці. Це забезпечує велику стійкість алгоритмів в порівнянні з методами виключення Гауса. Матриці виключення, як відомо, цією властивістю не володіють. Однак ортогональні методи поступаються методам виключення по кількості операцій. Порядок n^3 зберігається, але коефіцієнт при n^3 більше.

Приклад 2.8.

Нехай треба знайти розв'язок системи за допомогою метода Холеського.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 4 \end{cases}$$

Точний розв'язок цієї системи має наступний вигляд:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow x = (1 \ 1 \ 1)^T$$

В цьому можна переконатися, зробивши підстановку у СЛАР.

Перепишемо систему у наступному вигляді:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Можна побачити, що матриця A є симетричною.

Тепер треба визначити, чи є матриця A додатньо означеною. Оскільки, A – симетрична, то для цього скористаємося критерієм Сильвестра. Знайдемо кутові мінори матриці A :

$$\Delta_1 = a_{11} = 1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

За критерієм Сильвестра матриця A є додатньо означеною, так як усі її кутові мінори $\Delta_i > 0, i = \overline{1,3}$.

Оскільки, матриця A – симетрична та додатньо означена, то її можна представити у вигляді $A = \bar{L}\bar{L}^T$.

Розрахуємо елементи матриці $\bar{L}$:

$$\begin{aligned} l_{11} &= \sqrt{a_{11}} = \sqrt{1} = 1 & l_{31} &= \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{1}{1} = 1 \\ l_{21} &= \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{1}{1} = 1 & l_{32} &= \frac{a_{32} - l_{21} \cdot l_{31}}{l_{22}} = \frac{-3 - 1 \cdot 1}{2} = -2 \\ l_{22} &= \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{5 - 1} = 2 & l_{33} &= \sqrt{a_{33} - (l_{31}^2 + l_{32}^2)} = \\ & & &= \sqrt{6 - (1 + 4)} = 1 \end{aligned}$$

Отримали:

$$\bar{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{L}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Тобто, розклад Холеського має наступний вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Послідовно розв'яжемо системи $\bar{L}y = b$ та $\bar{L}^T x = y$.

$$\bar{L}y = b \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 1 \end{cases}$$

$$\bar{L}^T x = y \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

$$x^* = (1 \ 1 \ 1)^T$$

2.9. Метод обернень

Геометричний зміст цього методу у тому, що для виключення елемента $a_{kj}, k > j$, вектор-стовпчик з номером j обертається в координатній площині (x_k, x_j) таким чином, щоб k -та координата цього вектора після обороту стала рівною нулю. Перетворення обернення вектору еквівалентно добутку зліва на відповідну матрицю обернень.

Алгоритм методу обернень складається у наступному:

а) **прямий хід**

$$A_0 = A, b^0 = b$$

для $k=1$ до $n-1$ виконати

$$A_k = Q_{k,n} Q_{k,n-1} \dots Q_{k,k+1} A_{k-1};$$

$$b_k = Q_{k,n} Q_{k,n-1} \dots Q_{k,k+1} b_{k-1};$$

кінець циклу по k

$$\text{тут } Q_{kl} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \dots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & \cos \varphi & - & - & - & \sin \varphi & - & - & - & k \\ & & & | & 1 & & & | & & & & \\ & & & | & & \dots & & | & & & & \\ & & & | & & & 1 & | & & & & \\ & & & -\sin \varphi & - & - & - & \cos \varphi & - & - & - & l \\ & & & | & & & & | & 1 & & & \\ & & & | & & & & | & & \dots & & \\ & & k & & & & & l & & & & 1 \end{pmatrix}$$

є матриця обернень, в якій $(\cos \varphi)_{kl}$ і $(\sin \varphi)_{kl}$ вибираються так, щоб добуток на Q_{kl} привів до нульового елемента з номером (l, k) . Тоді k -ий крок алгоритму приводить до створення нулів в k -му стовпчику під головною діагоналлю матриці A_{k-1} . Звідси витікає, що матриця $U = A_{n-1}$ є верхньою трикутною і система (2.1) приводиться до виду

$$Ux = f, \quad (2.13)$$

де $U = Q_{n-1,n} \dots Q_{1,n} \dots Q_{12} A$; $f = Q_{n-1,n} \dots Q_{1,n} \dots Q_{12} b$;

б) **обернений хід** складається з розв'язання системи (2.13) оберненою підстановкою.

Розглянемо детальніше питання реалізації кроку «а». Тут матриці Q_{kl} в машині не зберігаються. Програмуються дії над елементами матриць.

Розглянемо, наприклад, обчислення $Q_{kl} A > 1$. Елемент цієї матриці з номером (l, j) обчислюється по формулі

$$a_{lj} \sin \varphi_{l1} + a_{1j} \cos \varphi_{l1}, j = 1, \dots, n;$$

де $\cos \varphi_{l1} = \frac{a_{11}}{r}$; $\sin \varphi_{l1} = \frac{a_{l1}}{r}$; $r = (a_{11}^2 + a_{l1}^2)^{1/2}$.

Останні добутки реалізуються аналогічно. Кожний добуток на матрицю обернень потребує переліку елементів двох строчок. Так, добуток на Q_{1l} потребує переліку першої і l -ої строчок. Елемент з номером $(1, l)$ перетворюється в нуль, тому не обчислюється. Таким чином, k -ий крок методу обернень потребує переліку $n - (k - 1)$ строчок матриці порядку $n - (k - 1)$, при чому k -та строчка перераховується $(k - 1)$ раз, а останні – по одному разу.

Алгоритм прямого ходу виглядає наступним чином:

Для $k = 1$ до $n - 1$ виконати

Для $m = k + 1$ до n виконати

$$r = (a_{kk}^2 + a_{mk}^2)^{1/2};$$

якщо $r = 0$

то $c = 1, s = 0$;

інакше $c = \frac{a_{kk}}{r}$; $s = \frac{a_{mk}}{r}$;

для $j = k$ до n виконати

$$a_{kj} = s \cdot a_{ml} + c \cdot a_{kj}$$

$$a_{mj} = -s \cdot a_{kj} + c \cdot a_{mj}$$

кінець циклу по j

$$a_{mk} = 0; b_k = s \cdot b_m + c \cdot b_k; b_m = -s \cdot b_k + c \cdot b_m;$$

кінець циклу по m

кінець циклу по k

Приклад 2.9.

Нехай потрібно знайти рішення СЛАР методом обернень:

$$\begin{cases} 2x_1 - 9x_2 + 5x_3 = -4; \\ 1.2x_1 - 5.4x_2 + 6x_3 = 0.6; \\ x_1 - x_2 - 7.5x_3 = -8.5. \end{cases}$$

Прямий хід. За системою рівнянь складемо початкову матрицю та вектор правої частини:

$$A^0 = \begin{pmatrix} 2 & -9 & 5 \\ 1.2 & -5.4 & 6 \\ 1 & -1 & -7.5 \end{pmatrix}, b^0 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0.6 \\ -8.5 \end{pmatrix}.$$

Крок 1. У матриці A^0 обнуляємо елемент a_{21} . Для цього візьмемо $k = 1, l = 2$ та побудуємо матрицю обернень Q_{12} . Маємо

$$\cos \varphi = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}} = \frac{2}{\sqrt{4 + 1.2^2}} = 0.857, \sin \varphi = \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}} = \frac{1.2}{\sqrt{4 + 1.2^2}} = 0.514.$$

Таким чином,

$$Q_{12} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.857 & 0.514 & 0 \\ -0.514 & 0.857 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$A^1 = Q_{12} \cdot A^0 = \begin{pmatrix} 2.231 & -10.489 & 7.369 \\ 0 & -0.002 & 2.572 \\ 1 & -1 & -7.5 \end{pmatrix}, b^1 = Q_{12} \cdot b^0 = \begin{pmatrix} -3.12 \\ 2.57 \\ -8.5 \end{pmatrix}.$$

Крок 2. У матриці A^1 обнуляємо елемент a_{31} . $k = 1, l = 3$, будуємо матрицю Q_{13} .

$$\cos \varphi = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{31}^2}} = \frac{2.231}{\sqrt{2.231^2 + 1}} = 0.919, \sin \varphi = \frac{a_{31}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{31}^2}} = 0.394.$$

$$Q_{13} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.919 & 0 & 0.394 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.394 & 0 & 0.919 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = Q_{13} \cdot Q_{12} \cdot A^0 = Q_{13} \cdot A^1 = \begin{pmatrix} 2.536 & -10.033 & 3.817 \\ 0 & 0 & 2.572 \\ 0 & 3.214 & -9.796 \end{pmatrix},$$

$$b^2 = Q_{13} \cdot Q_{12} \cdot b^0 = Q_{13} \cdot b^1 = \begin{pmatrix} -6.216 \\ 2.57 \\ -6.582 \end{pmatrix}.$$

Крок 3. Тепер обнуляємо елемент a_{32} матриці A^2 . $k = 2, l = 3$, будемо матрицю Q_{23} .

$$\cos \varphi = \frac{a_{22}}{\sqrt{a_{22}^2 + a_{32}^2}} \approx 0, \sin \varphi = \frac{a_{32}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{32}^2}} \approx 1.$$

$$Q_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином,

$$A^3 = Q_{23} \cdot Q_{13} \cdot Q_{12} \cdot A^0 = Q_{23} \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 2.536 & -10.033 & 3.817 \\ 0 & 3.214 & -9.796 \\ 0 & 0 & -2.572 \end{pmatrix},$$

$$b^2 = Q_{23} \cdot Q_{13} \cdot Q_{12} \cdot b^0 = Q_{23} \cdot b^2 = \begin{pmatrix} -6.216 \\ -6.582 \\ -2.57 \end{pmatrix}.$$

Вихідна СЛАР приведена до нижнього трикутного вигляду. Зворотній хід дає послідовно значення

$$x_3 = 0.999 \approx 1, x_2 = 1, x_1 = 0.$$

Таким чином, рішенням вихідної СЛАР є вектор $\bar{x}^* = (1; 1; 0)^T$.

2.10. Метод відображень

Ідея методу відображень так ж, як і методу обернень. Вектор, який складається з діагонального і піддіагональних елементів k -го стовпчика $k = 1, \dots, n - 1$, відображається в $(n - k - 1)$ мірному просторі відносно деякої площини так, щоб всі компоненти, за виключенням першої, стали рівні нулю. Таке відображення вектору реалізується за допомогою добутку зліва на матрицю відображень, відповідаючу умовам обнулення компонент.

Алгоритм методу відображень у матричній формі має вигляд:

а) прямий хід

$$A_0 = A; \quad b_0 = b$$

для $k = 1$ до $n - 1$ виконати

$$A_k = H_k A_{k-1}; \quad b_k = H_k b_{k-1};$$

кінець циклу по k

Система (2.1) приводиться до виду

$$U_x = f, \quad (2.14)$$

$$\text{де } U = A_{n-1} = H_{n-1} \cdot H_{n-2} \cdot \dots \cdot H_1 \cdot A, \quad f = H_{n-1} \cdot H_{n-2} \cdot \dots \cdot H_1 \cdot b;$$

б) обернений хід - розв'язок системи (2.14) шляхом оберненої підстановки.

Детально опишемо один крок «а». Розглянемо перетворення $A_1 = H_1 \cdot A$.

Нехай a_1 -перший стовпчик матриці A . Тоді

$$H_1 = I - \beta_1^{-1} \cdot h_1 \cdot h_1^T;$$

$$h_1 = a_1 + \left(\|a_1\|_E, \dots, 0 \right)^T;$$

$$\beta_1 = \|h_1\|_E^2 / 2; \quad I - \text{одинична матриця.}$$

Добуток на перший стовпчик дає

$$H_1 a_1 = a_1 - h_1 = \left(-\|a_1\|_E, 0, \dots, 0 \right)^T;$$

Останні стовпчики матриці $H_1 A$ обчислюються по формулі

$$H_1 a_i = a_i \beta_1^{-1} \cdot h_1 h_1^T a_i = a_i - h_1 \cdot [\beta_1^{-1} \cdot h_1^T a_i]; \quad i = 2, \dots, n,$$

де $\beta_1^{-1} \cdot h_1^T \cdot a_i$ - число.

Добутки $H_k A_{k-1}$ реалізуються аналогічно. На k -му кроці формули аналогічні, але обробляється матриця розміром $n - (k - 1)$. Матриці H_i ,

$i = 1, \dots, n - 1$, як ми бачимо з попередніх формул, обчислювати і зберігати в пам'яті ЕОМ немає необхідності. Алгоритм має вигляд:

для $k = 1$ до $n - 1$ виконати

$$c = a_{k,k+1}^2 + \dots + a_{k,n}^2;$$

$$\text{норма} = (a_{k,k}^2 + c)^{1/2};$$

$$h_k = a_{kk} + \text{норма}$$

для $i = k + 1$ до n виконати

$$h_i = a_{ik}$$

кінець циклу по i

$$b = 0.5 \cdot (h_k^2 + \dots + h_n^2);$$

$$a_{kk} = -\text{норма}$$

для $j = k + 1$ до n виконати

$$\alpha = b^{-1}(h_k a_{kj} + h_{k+1} a_{k+1,j} + \dots + h_n a_{nj});$$

для $i = k$ до n виконати

$$a_{ij} = a_{ij} - \alpha h_i$$

кінець циклу по i

кінець циклу по j

кінець циклу по k

Перетворення обернень і відображень не потребують неособливості матриці. Якщо матриця особлива, на діагоналі у U отримається хоча б один нуль. У цьому випадку треба передбачити вихід з програми і повідомити про те, що система не може бути розв'язана.

Приклад 2.10. Розв'язати СЛАР методом відображень

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 11 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -7 \end{cases}$$

Складемо матрицю $A^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 11 \\ 2 & 3 & -4 & -7 \end{pmatrix}$.

Крок 1.

$$s = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, l = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |\alpha| = \sqrt{(s,s)} = \sqrt{9} = 3, (s,l) = 1,$$

$$\arg \alpha = \arg(s,l) - \pi = 0 - \pi = -\pi, \alpha = -3,$$

$$\rho = \sqrt{2|\alpha|^2 + 2|\alpha|(s,l)} = \sqrt{24} = 4.8990,$$

$$w = \frac{1}{\rho}(s - \alpha l) = \frac{1}{4.8990} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0.8165 \\ 0.4082 \\ 0.4082 \end{pmatrix},$$

$$U = E - 2ww' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.8165 \\ 0.4082 \\ 0.4082 \end{pmatrix} \cdot (0.8165 \quad 0.4082 \quad 0.4082) =$$

$$= \begin{pmatrix} -0.3333 & -0.6667 & -0.6667 \\ -0.6667 & 0.6667 & -0.3333 \\ -0.6667 & -0.3333 & 0.6667 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Тоді } A^{(1)} = U \cdot A^{(0)} = \begin{pmatrix} -3.0000 & -0.6667 & 0.3333 & -4.6667 \\ 0 & -0.3333 & 2.6667 & 5.6667 \\ 0 & 3.6667 & -4.3333 & -12.3333 \end{pmatrix}.$$

Крок 2.

$$s = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.3333 \\ 3.6667 \end{pmatrix}, \quad l = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\alpha| = \sqrt{(s, s)} = \sqrt{13.5557} = 3.6818, \quad (s, l) = -0.3333,$$

$$\arg \alpha = \arg(s, l) - \pi = \pi - \pi = 0, \quad \alpha = 3.6818, \quad \rho = \sqrt{2|\alpha|^2 + 2|\alpha|(s, l)} = 5.4374,$$

$$w = \frac{1}{\rho}(s - \alpha l) = \frac{1}{5.4374} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -0.3333 \\ 3.6667 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.7384 \\ 0.6743 \end{pmatrix},$$

$$U = E - 2ww' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -0.7384 \\ 0.6743 \end{pmatrix} \cdot (0 \quad -0.7384 \quad 0.6743) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0905 & 0.9959 \\ 0 & 0.9959 & 0.0905 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Тоді } A^{(2)} = U \cdot A^{(1)} = \begin{pmatrix} -3.0000 & -0.6667 & 0.3333 & -4.6667 \\ 0 & 3.6818 & -4.5570 & -12.7957 \\ 0 & 0 & 2.2634 & 4.5268 \end{pmatrix}.$$

Крок 3.

Користуючись шляхом оберненої підстановки, знаходимо $x_1 = 2.0000$,
 $x_2 = -1.0000$, $x_3 = 2.0000$.

Перевірка:

$$\begin{cases} 2 + 2 + 2 = 6 \\ 4 + 1 + 6 = 11 \\ 4 - 3 - 8 = -7 \end{cases}$$

2.11. Ітераційне уточнення

Нехай x^0 – розв’язок системи (2.1), одержаний будь-яким прямим методом. Тоді ітераційний процес від k -го до $k + 1$ -го кроку має вигляд

$r^k = b - Ax^k$ - обчислення невязки,

$Az^k = r^k$ - розв’язок системи,

$x^{k+1} = x^k + z^k$ - чергове наближення.

Цей процес називається ітераційним уточненням. Ітераційне уточнення збігається до розв’язку системи (2.1), якщо число обумовленості матриці A не дуже велике.

Алгоритм дає уточнення розв’язку, якщо невязки r^k обчислюються з більшим числом розрядів, ніж розв’язується система для z^k . У випадку LU, PLU, LDU, LL^T - розкладів ітераційне уточнення потребує незначного збільшення обчислювальної роботи ($= 25\%$), так як матриця системи для z^k та ж, що і в системі (2.1). Тому на кожній ітерації перетворення проводяться тільки над вектором правої частини та виконується обернений хід. Звичайно для

отримання уточнення розв'язку достатньо двох-трьох ітерацій, якщо число обумовленості матриці не дуже велике.

Тема 3. Ітераційні методи розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Окрім прямих методів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) виду

$$Ax = f, \quad \det A \neq 0, \quad (3.1)$$

де $A = (a_{ij})$ – $n \times n$ матриця, f вектор правої частини, є ітераційні методи. Ці методи дають результат розв'язання СЛАР через послідовність наближень, де кожне наближення обчислюється через попередні. Процес починається з вибору якогось початкового наближення x^0 .

Коли для знаходження чергового наближення використовують одне попереднє наближення, то кажуть, що ітераційний процес однокроковий, в протилежному випадку – **багатокроковий**. Будемо розглядати однокрокові ітераційні методи. Їх запишемо у вигляді

$$\frac{x^{k+1} - x^k}{\tau_{k+1}} = -(Ax^k - f), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

де τ_{k+1} – ітераційний параметр, x^{k+1} – чергове наближення.

Ітераційний метод називається **стаціонарним**, коли $\tau_{k+1} = \tau$ і не залежить від номера ітерації, інакше – **нестационарним**.

Окрема група методів, які записуються у вигляді (3.2), утворюють градієнтні ітераційні методи. До них відносяться метод найшвидшого градієнтного спуску, метод спряжених градієнтів, метод спряжених напрямків. Ці методи будемо розглядати коли матриця симетрична і додатньо означена. Ці методи засновані на тому, що задача розв'язання системи (3.1) рівнозначна задачі мінімуму енергетичного функціонала

$$F(x) = \frac{1}{2} x^T A x - x^T \cdot b. \quad (3.3)$$

Градієнтні методи не вимагають знання границь спектру, але вимагають більшої кількості арифметичних дій.

Використовуючи будь-який ітераційний метод, треба перевіряти збігання ітераційних наближень. Якщо $\{x^k\}$ послідовність ітераційних наближень, то часто використовуються два методи перевірки

$$\|x^{k+1} - x^k\| \leq \epsilon, \quad \text{або} \quad \|x^{k+1} - x^k\| \leq \epsilon \|x^k\|, \quad (3.4)$$

де $\|\cdot\|$ позначає векторну норму. Достатньо часто використовують також нев'язку $r^k = Ax^k - f$ для k -ої ітерації і вимагають, щоб замість (3.4) виконувалася умова

$$\|r^k\| \leq \epsilon, \quad \text{або} \quad \|r^k\| \leq \epsilon \dots \|r^0\| \quad (3.5)$$

Ітераційні методи мають такі властивості як:

- а) самовиправність,
- б) проста реалізація на ЕОМ,
- в) дозволяють не виконувати операції з нульовими елементами і не зменшують їх кількості,
- г) для великого кола задач мають меншу кількість арифметичних дій, ніж прямі методи розв'язання СЛАР.

Однак кожен ітераційний метод має свої умови збігання, практична перевірка котрих повинна виконуватися до його застосування.

3.1 Метод простої ітерації (метод Якобі)

Система (3.1) зводиться до еквівалентної системи вигляду

$$x = Gx + f \quad (3.7)$$

Це можливо зробити багатьма способами:

$$1) \ x = x - \alpha(Ax - b), \quad \alpha \in \mathbb{R} / \{0\}, \ G = I - \alpha A, \ f = \alpha b;$$

$$2) \ x = x - B^{-1}(Ax - b), \quad B \in \mathbb{R}^{n \times n}, \det(B) \neq 0,$$

$$G = I - B^{-1}A, \ f = B^{-1}b.$$

Означення 3.1 Для знаходження розв'язку системи (3.7) можна побудувати ітераційний процес, який називається *методом простої ітерації*

$$x_{k+1} = Gx_k + f, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.8)$$

тут x_0 - початкове наближення, яке звичайно обирають довільно.

Теорема 3.1. (Необхідна та достатня умова збіжності простої ітерації). Для того, щоб ітераційний процес (3.8) збігався до розв'язку рівняння (3.7) для будь-якого початкового наближення x_0 та правої частини f необхідно і достатньо, щоб радіус спектру матриці переходу G був менше одиниці:

$$\rho(G) = \max_i |\lambda_i(G)| < 1 \quad (3.9)$$

Теорема 3.2. (Достатня умова збіжності простої ітерації). Якщо $\|G\| < 1$, то метод простої ітерації (3.8) збігається.

Приклад 3.1. Розв'язати СЛАУ з матрицею $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ та векто-

ром правої частини $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ методом простої ітерації (3.8) з точністю $\varepsilon=0.01$.

Приведемо систему $Ax = b$ до еквівалентної системи $x = Gx + f$ першим способом, обравши параметр $\alpha=0.2$. Тоді

$$G = I - \alpha A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 0.2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0.2 & 0.2 \\ -0.4 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f = \alpha b = 0.2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix}.$$

Для перевірки збіжності ітераційного процесу скористаємося достатньою умовою збіжності.

$\|G\|_{\infty} = 0.4 < 1$ тому ітераційний процес (3.8) є збіжним.

В якості початкового наближення оберемо нульовий вектор $x_0 = (0; 0; 0)^T$.

1 крок.

$$x_1 = Gx_0 + f = \begin{pmatrix} 0 & -0.2 & 0.2 \\ -0.4 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо, чи не є знайдений вектор x_1 наближенням до точного розв'язку системи з точністю ε .

$\|x_1 - x_0\|_\infty = 0.6$, $\|x_0\|_\infty = 0$. $\|x_1 - x_0\| > \varepsilon \|x_0\|$, тому продовжуємо ітераційний процес.

2 крок.

$$x_2 = Gx_1 + f = \begin{pmatrix} 0 & -0.2 & 0.2 \\ -0.4 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.24 \\ 0.32 \\ 0.56 \end{pmatrix}.$$

$$\|x_2 - x_1\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 0.04 \\ -0.08 \\ -0.04 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 0.08, \quad \|x_1\|_\infty = 0.6. \quad \|x_2 - x_1\| > \varepsilon \|x_1\|, \quad \text{тому}$$

продовжуємо ітераційний процес.

3 крок.

$$x_3 = Gx_2 + f = \begin{pmatrix} 0 & -0.2 & 0.2 \\ -0.4 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.24 \\ 0.32 \\ 0.56 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.248 \\ 0.304 \\ 0.552 \end{pmatrix}.$$

$$\|x_3 - x_2\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 0.008 \\ -0.016 \\ -0.008 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 0.016, \quad \|x_2\|_\infty = 0.56. \quad \|x_3 - x_2\| > \varepsilon \|x_2\|,$$

тому продовжуємо ітераційний процес.

4 крок.

$$x_4 = Gx_3 + f = \begin{pmatrix} 0 & -0.2 & 0.2 \\ -0.4 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.248 \\ 0.304 \\ 0.552 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2496 \\ 0.3008 \\ 0.5504 \end{pmatrix}.$$

$$\|x_4 - x_3\|_{\infty} = \left\| \begin{pmatrix} 0.0016 \\ -0.0032 \\ -0.0016 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} = 0.0032,$$

$$\|x_3\|_{\infty} = 0.552. \quad \|x_4 - x_3\| < \varepsilon \|x_3\| = 0.00552, \text{ тому знайдений вектор } x_4$$

є шуканим наближенням до точного розв'язку з точністю ε .

$$\text{Точний розв'язок системи } x_* = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.3 \\ 0.55 \end{pmatrix}.$$

$$\|x_4 - x_*\|_{\infty} = \left\| \begin{pmatrix} -0.0004 \\ -0.0008 \\ -0.0004 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} = 0.8 \cdot 10^{-3} < \varepsilon.$$

Матрицю системи (3.1) представимо у вигляді

$$A = L + D + U$$

де $D = \text{diag}\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$, L – нижня трикутна матриця з нульовою діагоналлю, U – верхня трикутна матриця з нульовою діагоналлю.

Тоді систему (3.1) можна записати наступним чином

$$x = -D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b \quad (3.10)$$

Для системи (3.10) можна побудувати *ітераційний процес*

$$x_{k+1} = -D^{-1}(L + U)x_k + D^{-1}b, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.11)$$

Означення 3.2. Матриця A називається матрицею зі *строгим діагональним переважанням*, якщо

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad i = \overline{1, n} \quad \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}| < |a_{jj}|, \quad j = \overline{1, n}$$

або

Теорема 3.3. (*Достатня умова збіжності простої ітерації*). Якщо матриця A є матрицею зі строгим діагональним переважанням, то ітераційний процес (3.11) є збіжним.

Приклад 3.2. Виконати 3 кроки методу простої ітерації (3.11) для знаходження розв'язку СЛАУ $Ax = b$, з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{та вектором правої частини } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислення проводити з чотирма значащими цифрами.

Спочатку перевіримо, чи є матриця A матрицею зі строгим діагональним переважанням.

$5 > 2 + 1$, $8 > 2 + |-1|$, $5 > 1 + |-1|$, отже матриця A матрицею зі строгим діагональним переважанням. Тому за другою достатньою умовою ітераційний процес (3.6) є збіжним.

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad L + U = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$D^{-1} = \frac{1}{5 \cdot 8 \cdot 5} \begin{pmatrix} 8 \cdot 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 \cdot 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.125 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} G &= -D^{-1}(L + U) = - \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.125 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -0.4 & -0.2 \\ -0.25 & 0 & -0.125 \\ -0.2 & 0.2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$f = D^{-1}b = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.125 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.125 \\ 0.2 \end{pmatrix}.$$

В якості початкового наближення оберемо нульовий вектор $x_0 = (0; 0; 0)^T$.

1 крок.

$$\begin{aligned} x_1 &= -D^{-1}(L+U)x_0 + D^{-1}b = Gx_0 + f = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -0.4 & -0.2 \\ -0.25 & 0 & -0.125 \\ -0.2 & 0.2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.125 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.125 \\ 0.2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2 крок.

$$\begin{aligned} x_2 &= Gx_1 + f = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -0.4 & -0.2 \\ -0.25 & 0 & -0.125 \\ -0.2 & 0.2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.125 \\ 0.2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.125 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.11 \\ 0.1 \\ 0.185 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3 крок.

$$\begin{aligned} x_3 &= Gx_2 + f = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -0.4 & -0.2 \\ -0.25 & 0 & -0.125 \\ -0.2 & 0.2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.11 \\ 0.1 \\ 0.185 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.125 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.123 \\ 0.1206 \\ 0.198 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Точний розв'язок системи } x_* = \begin{pmatrix} 0.1104 \\ 0.1227 \\ 0.2025 \end{pmatrix}.$$

$$\|x_3 - x_*\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 0.0126 \\ -0.0021 \\ -0.0045 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 0.0126.$$

Відмітимо, що з точністю $\varepsilon=0.01$ ітераційний процес для даної задачі збігається за 6 кроків.

3.2. Метод простої ітерації з параметром

У даному методі візьмемо другий спосіб побудови матриці G . Нехай A – симетрична додатньо-означена матриця і $G + E - \tau A$, тоді (3.4) запишемо у вигляді

$$x^{k+1} = x^k - \tau(Ax^k - f), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.12)$$

Нехай усі власні значення λ_i матриці A обмежені константами

$$0 < m \leq \lambda_i \leq M < \infty, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Тоді ітераційний процес (3.12) збігається для усіх τ , які задовольняють умові

$$0 < \tau = \frac{2}{m} \quad (3.13)$$

Оптимальне значення параметра буде

$$\tau = \frac{2}{m + M} \quad (3.14)$$

При такому виборі τ спектральна норма помилки $\|x^* - x^m\|$ прямує до нуля, коли $k \rightarrow \infty$ з швидкістю геометричної прогресії зі знаменником

$$q = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \quad \xi = \frac{m}{M},$$

де x^* – розв'язок системи (3.1).

Вихід з ітерацій по (3.5).

3.3. Метод Зейделя

Система (3.1) зводиться до еквівалентного вигляду (3.7). Матриця G подається у вигляді суми двох матриць

$$G = G_1 + G_2$$

де G_1 - нижня трикутна матриця з нулями на головній діагоналі, G_2 - верхня трикутна матриця.

Означення 3.4. *Методом Зейделя (Гауса-Зейделя)* розв'язання системи (3.1) (чи еквівалентної системи (3.7)) називається ітераційний процес

$$x_{k+1} = G_1 x_{k+1} + G_2 x_k + f, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.15)$$

або у покомпонентному вигляді

$$x_1^{k+1} = g_{11}x_1^k + g_{12}x_2^k + g_{13}x_3^k + \dots + g_{1n}x_n^k + d_1,$$

$$x_2^{k+1} = g_{21}x_1^k + g_{22}x_2^k + g_{23}x_3^k + \dots + g_{2n}x_n^k + d_2,$$

$$x_3^{k+1} = g_{31}x_1^k + g_{32}x_2^k + g_{33}x_3^k + \dots + g_{3n}x_n^k + d_3,$$

... ..

$$x_n^{k+1} = g_{n1}x_1^k + g_{n2}x_2^k + g_{n3}x_3^k + \dots + g_{nn}x_n^k + d_n.$$

Зауваження 3.1. Якщо переставити рівняння у системі (3.1), отримаємо інший ітераційний процес (3.15).

Початкове наближення обираємо довільно. Для обчислення i -ої координати $k + 1$ -го наближення використовуємо перші $i - 1$ координати $k + 1$ -го наближення (котрі вже обчислені) і $n - i + 1$ останні координати k -го наближення. Тому у методі Зейделя на кожній ітерації достатньо зберігати тільки один вектор наближення. Умову закінчення ітераційного процесу зручно використати у вигляді

$$|x_i^{k+1} - x_i^k| < \epsilon \quad (3.16)$$

для кожного $i = 1, 2, \dots, n$, тому що перевірку виконуємо відразу після обчислення i -ої координати $k + 1$ -го наближення і виконуємо перезапис цієї компоненти. Якщо умова (3.13) виконується для усіх координат, то процес закінчуємо. До виду (3.12) систему (3.1) можна привести, наприклад, коли розв'язати її відносно діагональних невідомих. Тоді метод Зейделя запишеться у вигляді

$$x_i^{k+1} = - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \frac{f_i}{a_{ii}}, \quad (3.15a)$$

де $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Теорема 3.4. (Необхідня та достатня умова збіжності методу Зейделя). Метод Зейделя збігається тоді і тільки тоді, коли радіус спектру матриці $(I - G_1)^{-1} G_2$ менше одиниці, тобто

$$\rho\left((I - G_1)^{-1} G_2\right) = \max_i \left| \lambda_i \left((I - G_1)^{-1} G_2 \right) \right| < 1.$$

Приклад 3.3. Розв'язати СЛАУ з матрицею $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ та векто-

ром правої частини $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ методом Зейделя (7) з точністю $\varepsilon=0.01$.

Приведемо систему $Ax = b$ до еквівалентної системи $x = Gx + f$, скориставшись вибором параметру $\alpha=0.2$ з прикладу 1.

$$G = I - \alpha A = \begin{pmatrix} 0 & -0.2 & 0.2 \\ -0.4 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \alpha b = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Тоді } G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.4 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} 0 & -0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що якщо б діагональні елементи матриці G були відмінні від нуля, вони б потрапили до матриці G_2 .

Для обчислень зручно розбити ітераційний процес (3.16) на два етапи:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1} &= G_2 x_k + f, \\ x_{k+1} &= \tilde{x}_{k+1} + G_1 \tilde{x}_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{3.17}$$

В якості початкового наближення оберемо нульовий вектор $x_0 = (0; 0; 0)^T$. 1 крок.

$$\tilde{x}_1 = G_2 x_0 + f = \begin{pmatrix} 0 & -0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix},$$

$$x_1 = \tilde{x}_1 + G_1 \tilde{x}_1 = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.4 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.32 \\ 0.56 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо, чи не є знайдений вектор x_1 наближенням до точного розв'язку системи з точністю ε .

$\|x_1 - x_0\|_\infty = 0.56$, $\|x_0\|_\infty = 0$. $\|x_1 - x_0\| > \varepsilon \|x_0\|$, тому продовжуємо ітераційний процес.

2 крок.

$$\tilde{x}_2 = G_2 x_1 + f = \begin{pmatrix} 0 & -0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.32 \\ 0.56 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.248 \\ 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix},$$

$$x_2 = \tilde{x}_2 + G_1 \tilde{x}_2 = \begin{pmatrix} 0.248 \\ 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.4 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.248 \\ 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.248 \\ 0.3008 \\ 0.5504 \end{pmatrix}.$$

$$\|x_2 - x_1\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 0.048 \\ -0.0192 \\ -0.0096 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 0.048, \quad \|x_1\|_\infty = 0.56. \quad \|x_2 - x_1\| > \varepsilon \|x_1\|,$$

тому продовжуємо ітераційний процес.

3 крок.

$$\tilde{x}_3 = G_2 x_2 + f = \begin{pmatrix} 0 & -0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.248 \\ 0.3008 \\ 0.5504 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.24992 \\ 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix},$$

$$x_3 = \tilde{x}_3 + G_1 \tilde{x}_3 = \begin{pmatrix} 0.24992 \\ 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.4 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.24992 \\ 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.24992 \\ 0.300032 \\ 0.550016 \end{pmatrix}$$

$$\|x_3 - x_2\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 0.00192 \\ -0.000768 \\ -0.000384 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 0.00192, \quad \|x_2\|_\infty = 0.5504.$$

$\|x_3 - x_2\| < \varepsilon \|x_2\| = 0.005504$, тому знайдений вектор x_3 є шуканим наближенням до точного розв'язку з точністю ε .

$$\text{Точний розв'язок системи } x_* = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.3 \\ 0.55 \end{pmatrix}.$$

$$\|x_3 - x_*\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} -0.00008 \\ 0.000032 \\ 0.000016 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 0.8 \cdot 10^{-4} < \varepsilon.$$

Як бачимо, розв'язок тієї самої системи з тим самим параметром α методом Зейделя отримано швидше та точніше, ніж методом простої ітерації.

Означення 3.5. Матриця $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ називається *позитивно визначеною*, якщо

$$x^T A x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n / \{\vec{0}\}$$

чи, те саме

$$x^T A x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x^T A x = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}.$$

Критерій Сильвестра перевірки матриці на позитивну визначеність. Для того, щоб дійсна матриця була позитивно визначеною необхідно і достатньо, щоб усі ведучі мінори цієї матриці були позитивними, тобто, щоб

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0, \quad k = \overline{1, n}.$$

Розглянемо систему (1) з симетричною позитивно визначеною матрицею $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Представимо матрицю A у вигляді суми

$$A = L + D + L^T,$$

де $D = \text{diag}\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$, L – нижня трикутна матриця з нульовою діагоналлю.

Тоді систему (3.1) можна записати наступним чином

$$Dx = -Lx - L^T x + b \quad (3.18)$$

Для системи (3.18) можна побудувати *ітераційний процес*

$$x_{k+1} = -D^{-1}Lx_{k+1} - D^{-1}L^T x_k + D^{-1}b, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.19)$$

Теорема 3.6. (*Достатня умова збіжності методу Зейделя*). Якщо матриця $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ симетрична та позитивно визначена, то метод Зейделя (3.19) є збіжним при будь-якому початковому наближенні x_0 .

Зауваження 3.2. Ітераційний процес (3.19) можна представити у вигляді простої ітерації

$$x_{k+1} = -(D + L)^{-1} L^T x_k + (D + L)^{-1} b, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Приклад 3.4. Виконати 3 кроки методу Зейделя (3.19) для знаходження розв'язку СЛАУ $Ax = b$, де

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{та вектором правої частини } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислення проводити з чотирма значущими цифрами.

Спочатку перевіримо, чи є симетрична матриця $A = A^T$ позитивно визначеною. Скористаємося критерієм Сильвестра:

$$\Delta_1 = 5 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 36 > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 163 > 0.$$

Так як матриця A симетрична та позитивно визначена, то згідно з достатньою умовою метод Зейделя (3.19) є збіжним при будь-якому початковому наближенні x_0 .

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, D^{-1} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.125 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

$$G_1 = -D^{-1}L = -\begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.125 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0.2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G_2 = -D^{-1}L^T = -\begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.125 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0.4 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0.125 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f = D^{-1}b = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.125 \\ 0.2 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що при таких позначеннях ітераційний процес (3.19) має форму ітераційного процесу (3.15) чи, те саме, (3.17).

В якості початкового наближення оберемо нульовий вектор $x_0 = (0; 0; 0)^T$. 1 крок.

$$\tilde{x}_1 = G_2 x_0 + f = \begin{pmatrix} 0 & -0.4 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0.125 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.125 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.125 \\ 0.2 \end{pmatrix},$$

$$x_1 = \tilde{x}_1 + G_1 \tilde{x}_1 = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.125 \\ 0.2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0.2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.125 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.075 \\ 0.175 \end{pmatrix}.$$

2 крок.

$$\tilde{x}_2 = G_2 x_1 + f = \begin{pmatrix} 0 & -0.4 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0.125 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.075 \\ 0.175 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.125 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.135 \\ 0.1469 \\ 0.2 \end{pmatrix},$$

$$x_2 = \tilde{x}_2 + G_1 \tilde{x}_2 = \begin{pmatrix} 0.135 \\ 0.1469 \\ 0.2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0.2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.135 \\ 0.1469 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.135 \\ 0.1131 \\ 0.1956 \end{pmatrix}.$$

3 крок.

$$\tilde{x}_3 = G_2 x_2 + f = \begin{pmatrix} 0 & -0.4 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0.125 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.135 \\ 0.1131 \\ 0.1956 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.125 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1156 \\ 0.1495 \\ 0.2 \end{pmatrix},$$

$$x_3 = \tilde{x}_3 + G_1 \tilde{x}_3 = \begin{pmatrix} 0.1156 \\ 0.1495 \\ 0.2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0.2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.1156 \\ 0.1495 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1156 \\ 0.1205 \\ 0.201 \end{pmatrix}$$

$$\text{Точний розв'язок системи } x_* = \begin{pmatrix} 0.1104 \\ 0.1227 \\ 0.2025 \end{pmatrix}.$$

$$\|x_3 - x_*\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 0.0052 \\ -0.0022 \\ -0.0015 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 0.0052.$$

Відмітимо, що з точністю $\varepsilon=0.01$ ітераційний процес для даної задачі збігається за 5 кроків.

Зауваження 3.3. Метод Зейделя збігається швидше за метод простої ітерації.

3.4. Метод Річардсона

Метод

$$x^{k+1} = x^k - \tau_{k+1}(Ax^k - f), k = 1, 2, \dots \quad (3.20)$$

з змінним параметром τ_{k+1} називається ітераційним методом Річардсона, Параметр змінюють з метою збільшення швидкості збігання. Найчастіше його використовують циклічно. Тоді:

крок 1) задаємо початкове наближення x^0 , точність обчислення результату ϵ ;

крок 2) задаємо довжину циклу p та обчислюємо $\tau_k, k = 1, 2, \dots, p$;

крок 3) обчислюємо $x^1, x^2, \dots, x^p$ по (3.20);

крок 4) вихід з ітераційного процесу по (3.5). Якщо (3.5) не виконується, то покладемо $x^0 = x^k$ і крок 3 повторюємо з тими ж параметрами $\tau_k, k = 1, 2, \dots, p$.

Для методу Річардсона відомий спосіб вибору оптимальних ітераційних параметрів у тому випадку, коли A є симетрична і додатньо означена матриця. Розглянемо цей випадок. Нехай $0 < m \leq \lambda(A) \leq M < \infty$. Тоді задаємо

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \frac{2}{m + M}; \quad \xi = \frac{1}{\text{cound}(A)}; \\ p_0 &= \frac{1 - \xi}{1 + \xi}; \quad t_i = \cos\left(\frac{(2 \cdot i - 1)\pi}{2p}\right); \quad i = 1, 2, \dots, p \end{aligned} \quad (3.21)$$

За крок 2 обчислюємо

$$\tau_i = \frac{\tau_0}{1 - p_0 t_i}, \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (3.21a)$$

Порядок обирання параметрів впливає на стійкість алгоритму. Але якщо довжина циклу $p < 10$, то порядок параметрів може бути довільним. Якщо τ_i вибрано за (3.20), (3.21a), то для помилки можна записати

$$\|x^p - x^*\| \leq q_p \|x^0 - x^*\|, \quad (3.22)$$

$$q_p = \frac{2 \cdot p_1^p}{1 - p_1^{2p}}; \quad p_1 = \frac{1 - \sqrt{\xi}}{1 + \sqrt{\xi}}. \quad (3.23)$$

$\|\cdot\|$ - спектральна норма. Формула (3.22) визначає швидкість збігання методу Річардсона.

Формули (3.20)-(3.23) використовують і в тому випадку, коли точні границі спектру матриці A невідомі. У цьому випадку ітераційні параметри неоптимальні.

3.5. Метод найшвидшого градієнтного спуску

Нехай A симетрична додатньо означена матриця. Розглянемо задачу мінімізації функціоналу (3.3). Початкове наближення x^0 задаємо довільно і обчислюємо нев'язку

$$r^0 = b - A \cdot x^0. \quad (3.24)$$

Перехід від ітерації k до ітерації $k + 1$ виконуємо по формулам:

$$r^k = b - A \cdot x^k; \quad (3.25)$$

$$\alpha_k = \frac{(r^k)^T \cdot r^k}{(r^k)^T A \cdot r^k}; \quad (3.26)$$

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k r^k. \quad (3.27)$$

На кожній ітерації виконуємо два множення матриці на вектор. Вихід з ітерації здійснюємо по (3.5), тобто задаємо точність ϵ і коли

$$\|r^k\| \leq \epsilon \|r^0\|,$$

то x^k беремо як наближення до x^* .

Так як $\text{grad } F(x) = -r$, то у цьому методі рух виконується по антиградієнту до лінії рівня енергетичного функціоналу, яка проходить через точку x^k , до точки мінімуму цього функціоналу на цьому напрямку. Ця точка обирається за x^{k+1} . Швидкість збігання цього методу така ж як у методу простої ітерації з оптимальним параметром. Цей метод є частим випадком цілого класу методів, котрі називаються методами спряжених напрямків.

Приклад 3.5.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -1x_1 + 2x_2 - 1x_3 = 0 \\ -1x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Перепишемо систему у наступному вигляді:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Точне розв'язок: $x = (1,1,1)^T$

Перевіримо необхідні умови:

Так як матриця A симетрична, доведемо, що вона додатньо означена за допомогою критерія Сильвестра:

$$\Delta_1 = a_{11} = 2 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

Так як усі її кутові мінори $\Delta_i > 0, i = \overline{1,3}$, то матриця додатньо означена

Розв'язання:

Задаємо точність $\epsilon = 0.1$

Знайдемо нев'язку:

$$r_0 = b - Ax_0; x_0 = (10,10,10) \text{ .}$$

$$r_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} (10,10,10) = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Крок 1 (k=0):

$$a_0 = \frac{(r^k)^T \cdot r^k}{(r^k)^T A \cdot r^k} = 0.5$$

Крок 2 (k=1):

$$x_1 = x_0 + a_0 r_0 = \begin{pmatrix} 5.5 \\ 10 \\ 5.5 \end{pmatrix}; r_1 = b - Ax_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a_1 = \frac{(r^k)^T \cdot r^k}{(r^k)^T A \cdot r^k} = 0.5; x_2 = x_1 + a_1 r_1 = \begin{pmatrix} 5.5 \\ 5.5 \\ 5.5 \end{pmatrix}$$

$$\|r_1 - r_0\|_2 = 18 > \epsilon$$

Крок 3 (k=2):

$$r_2 = b - Ax_2 = \begin{pmatrix} -4.5 \\ 0 \\ -4.5 \end{pmatrix}; \quad a_2 = \frac{(r^k)^T \cdot r^k}{(r^k)^T A \cdot r^k} = 0.5$$

$$x_3 = x_2 + a_2 r_2 = \begin{pmatrix} 3.25 \\ 5.5 \\ 3.25 \end{pmatrix}$$

$$\|r_2 - r_0\|_2 = 16.065 > \epsilon$$

Крок 4(k=3):

$$r_3 = b - Ax_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4.5 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad a_3 = \frac{(r^k)^T \cdot r^k}{(r^k)^T A \cdot r^k} = 0.5$$

$$x_4 = x_3 + a_3 r_3 = \begin{pmatrix} 3.25 \\ 3.25 \\ 3.25 \end{pmatrix}$$

$$\|r_3 - r_0\|_2 = 19.154 > \epsilon$$

Результат запишемо у вигляді таблиці.

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\ r_{(k)} - r_0\ _2$
0	10	10	10	—
1	5.5	10	5.5	18
2	5.5	5.5	5.5	16.065
3	3.25	5.5	3.25	19.154
4	3.25	3.25	3.25	13.12

Порівняємо точний розв'язок та розв'язок, отриманий методом найшвидшого градієнтного спуску: $\|(1,1,1)^T - (3.25,3.25,3.25)^T\|_2 = 3.8971$

3.6. Метод спряжених напрямків

Нехай A симетрична додатньо означена матриця. Розглянемо задачу мінімізації функціоналу (3.3). Початкове наближення x^0 задаємо довільно і обчислюємо нев'язку

$$r^0 = b - Ax^0. \quad (3.28)$$

Перехід від ітерації k до ітерації $k + 1$ виконуємо по формулам:

$$r^k = b - Ax^k, \quad (3.29)$$

обираємо напрямки $p^k, k = 0, 1, \dots$ є A -спряженими, тобто

$$(p^i)^T A p^j = \begin{cases} 0, & \text{коли } i \neq j, \\ \neq 0, & \text{коли } i = j \end{cases} \quad (3.30)$$

(p^k можна обирати як вектори власного базису матриці).

$$\alpha_k = -\frac{(p^k)^T r^k}{(p^k)^T A p^k}; \quad (3.31)$$

$$x^{k+1} = x^k - \alpha_k p^k; \quad (3.32)$$

Ми рухаємося у напрямку $-\alpha_k p^k$ від точки x^k до точки мінімуму енергетичного функціоналу на цьому напрямку. Цю точку обираємо за x^{k+1} .

На кожній ітерації виконуємо два множення матриці на вектор. Вихід з ітерації здійснюємо по (3.5), тобто задаємо точність ϵ і коли

$$\|r^k\| \leq \epsilon \|r^0\|$$

то x^k беремо як наближення до x^* .

Якщо p^k виберемо як напрямки антиградієнту до лінії рівня, яка проходить через точку x^k (це напрямки $-r^k$), то одержимо метод найшвидшого градієнтного спуску. Відомо, що коли напрямки $p^k, k = 0, 1, \dots$ є A -спряженими, тобто, то метод збігається не більше як за n ітерацій, де $n \times n$ - розмір матриці. Тобто цей метод виявляється точним. Проблема полягає у виборі p^k . Прикладом A -спряжених напрямків є вектори власного базису матриці. Однак їх знаходження є більш складною задачею, ніж розв'язання СЛАР. Вихід з цього полягає у тому, щоб не задавати p^k , а обчислювати їх у процесі ітерації. Це виконується у методі спряжених градієнтів, котрий у нинішній час вважається одним із найбільш ефективних ітераційних методів.

Приклад 3.6.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -1x_1 + 2x_2 - 1x_3 = 0 \\ -1x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Перепишемо систему у наступному вигляді:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Точний розв'язок: $x = (1,1,1)^T$

Перевіримо необхідні умови:

Так як матриця A симетрична, доведемо, що вона додатньо означена за допомогою критерія Сильвестра:

$$\Delta_1 = a_{11} = 2 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

Так як усі її кутові мінори $\Delta_i > 0, i = \overline{1,3}$, то матриця додатньо означена

Рішення:

Задаємо точність $\epsilon=0.1$

Знайдемо нев'язку: $r_0 = b - Ax_0; x_0 = (10,10,10)$.

$$r_0 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\text{Крок 1}(k=0): p_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}; a_0 = \frac{(p^k)^T \cdot r^k}{(p^k)^T A \cdot p^k} = -2.25$$

$$x_1 = x_0 + a_0 p_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Отримали точний розв'язок.

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\ x^{(k)} - x^{(k-1)}\ _1$
0	10	10	10	—
1	1	1	1	27

3.7. Метод спряжених градієнтів

Нехай A симетрична додатньо означена матриця. Розглянемо задачу мінімізації функціоналу (3.3). Початкове приближення x^0 задаємо довільно і обчислюємо

$$p^0 = r^0 = b - Ax^0. \quad (3.33)$$

Перехід від ітерації k до ітерації $k + 1$ виконуємо по формулам:

$$\alpha_k = \frac{(r^k)^T r^k}{(p^k)^T A p^k}, \quad (3.34)$$

коли $\alpha_k = 0$, то x^k – розв’язок задачі,

$$x^{k+1} = x^k = \alpha_k p^k; \quad (3.35)$$

$$r^{k+1} = r^k + \alpha_k A p^k. \quad (3.36)$$

Коли

$$\|r^{k+1}\| \leq \epsilon \|r^0\|, \quad (3.37)$$

де ϵ – задана точність, то x^{k+1} – наближення до розв’язка задачі,

$$\beta_k = \frac{(r^{k+1})^T r^{k+1}}{(p^k)^T A p^k}; \quad (3.38)$$

$$p^{k+1} = r^{k+1} + \beta_k p^k, \quad (3.39)$$

коли $p^{k+1} = 0$, то x^{k+1} – розв’язок задачі.

Швидкість збігання цього методу така ж сама, як і у метода Річардсона

Приклад 3.7

Нехай треба знайти розв’язок системи за допомогою метода спряжених градієнтів.

$$\begin{cases} 13x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 22 \\ 6x_1 + 9x_2 + x_3 = 16 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 = 11 \end{cases}$$

Точний розв’язок цієї системи має наступний вигляд:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow x = (1 \ 1 \ 1)^T$$

В цьому можна переконатися, зробивши підстановку у СЛАР.

Перепишемо систему у наступному вигляді:

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 6 & 3 \\ 6 & 9 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 22 \\ 16 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Розглянемо матрицю A . Вона є симетричною. Перевіримо, чи є дана матриця додатньо означеною. Для цього скористуємося критерієм Сильвестра. Знайдемо кутові мінори матриці A :

$$\Delta_1 = a_{11} = 13 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 81 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 6 & 3 \\ 6 & 9 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 509 > 0$$

За критерієм Сильвестра матриця A є додатньо означеною, так як усі її кутові мінори $\Delta_i > 0, i = \overline{1,3}$.

Отже, для знаходження розв'язку СЛАР можемо використовувати метод спряжених градієнтів.

Задамо точність $e = 0.1$. Покладемо $x^0 = (0 \ 0 \ 0)^T$. Тоді

$$p^1 = r^0 = b - Ax^0 = (22 \ 16 \ 11)^T$$

$$e \|r_0\|_2 = 2.9343$$

Крок 1.

$$\alpha_1 = \frac{r_0^T r_0}{p_1^T A r_0} = 0.055$$

$$x_1 = x_0 + \alpha_1 p_1 = (1.21 \ 0.88 \ 0.605)^T$$

$$r_1 = r_0 - \alpha_1 A p_1 = (-0.825 \ 0.215 \ 2.255)^T$$

$$\beta_1 = -\frac{p_1^T A r_1}{p_1^T A p_1} = -0.005$$

$$p_2 = r_1 + \beta_1 p_1 = (-0.9357 \ 0.1345 \ 2.1996)^T$$

$$\|r_1\|_2 = 2.4108$$

$$\|r_1\|_2 < e \|r_0\|_2$$

Крок 2.

$$\alpha_2 = \frac{r_1^T r_1}{p_2^T A r_1} = 0.1808$$

$$x_2 = x_1 + \alpha_2 p_2 = (1.0408 \ 0.9043 \ 1.0027)^T$$

$$r_2 = r_1 - \alpha_2 A p_2 = (0.0354 \ 0.6136 \ -0.0456)^T, \beta_2 = -\frac{p_2^T A r_2}{p_2^T A p_2} = 0.0654$$

$$p_3 = r_2 + \beta_2 p_2 = (-0.0258 \ 0.6224 \ 0.0982)^T$$

$$\|r_2\|_2 < e\|r_0\|_2, \quad \|r_2\|_2 = 0.6163$$

Крок 3.

$$\alpha_3 = \frac{r_2^T r_2}{p_3^T A r_2} = 0.1092$$

$$x_3 = x_2 + \alpha_3 p_3 = (1.038 \ 0.9723 \ 1.0134)^T$$

$$r_3 = r_2 - \alpha_3 A p_3 = (-0.3681 \ 0.0079 \ -0.1802)^T$$

$$\beta_3 = -\frac{p_3^T A r_3}{p_3^T A p_3} = 0.4424, \quad p_4 = r_3 + \beta_3 p_3 = (-0.3795 \ 0.2832 \ -0.1367)^T$$

$$\|r_3\|_2 < e\|r_0\|_2, \quad \|r_3\|_2 = 0.4424$$

Крок 4.

$$\alpha_4 = \frac{r_3^T r_3}{p_4^T A r_3} = 0.1007, \quad x_4 = x_3 + \alpha_4 p_4 = (0.9998 \ 1.0008 \ 0.9996)^T$$

$$r_4 = r_3 - \alpha_4 A p_4 = (-0.7717 \ -0.5979 \ -0.3148)^T,$$

$$\beta_4 = -\frac{p_4^T A r_4}{p_4^T A p_4} = -1.9781,$$

$$p_5 = r_4 + \beta_4 p_4 = (-0.0209 \ -1.1581 \ -0.0443)^T.$$

$$\|r_4\|_2 < e\|r_0\|_2, \quad \|r_4\|_2 = 1.0257$$

Результат запишемо у вигляді таблиці.

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\ r_{(k)}\ _2 > e\ r_0\ _2$
0	0	0	0	—
1	1.21	0.88	0.605	$2.4108 < 2.9343$
2	1.0408	0.9043	1.0027	$0.6163 < 2.9343$
3	1.038	0.9723	1.0134	$0.4424 < 2.9343$
4	0.9998	1.0008	0.9996	$1.0257 < 2.9343$

Розв'язок, отриманий за чотири ітерації метода спряжених градієнтів, має наступний вигляд:

$$\begin{cases} x_1 = 0.9998 \\ x_2 = 1.0008 \\ x_3 = 0.9996 \end{cases} \Rightarrow x^* = (0.9998 \ 1.0008 \ 0.9996)^T$$

Порівняємо точний розв'язок та розв'язок, отриманий методом спряжених градієнтів:

$$x = (1 \ 1 \ 1)^T; x^* = (0.9998 \ 1.0008 \ 0.9996)^T$$

$$\|x - x^*\|_2 = 0.0009$$

Варіанти контрольних завдань

Тема 1. Векторні та матричні норми. Число обумовленості.

Завдання. Обчислити $\|A\|_1, \|A\|_\infty, \|A\|_F, \|A\|_C$ - норми та число обумовленості для заданої матриці A .

$$A = \begin{pmatrix} -2 * N & -N & -1 \\ 2 & 10 & 40 / N \\ -1 & (N + 1) / 2 & 0 \end{pmatrix},$$

де N - номер варіанту.

Тема 2. Прямі методи розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Завдання 1. Побудувати модельний приклад, а саме:

- задати матрицю $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, та вектор $x \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$;
- обчислити вектор $b = Ax$;
- для матриці A , обчислити її визначник та число обумовленості.

Завдання 2. Для методів, що визначаються варіантом у Таблиці 1, перевірити чи коректним буде їх застосування для розв'язку СЛАР

$$Ax = b.$$

(якщо метод не можна застосувати для заданої матриці, то підібрати іншу)

Завдання 3. Розв'язати СЛАР $Ax = b$ запропонованими методами. Перевірити отриманий розв'язок. Якщо $\|x - x\| > \varepsilon = 10^{-6}$ застосувати ітераційне уточнення, щоб отримати розв'язок з точністю $\varepsilon = 10^{-6}$.

Таблиця 1

№	Методи
1	Метод Гауса, Метод відображень
2	Метод Гауса з частковим вибором головного елемента, Метод обернень
3	LU – розклад, Метод відображень
4	PLU – розклад, Метод Холеського
5	Метод Гауса з повним вибором головного елемента, Метод обернень
6	Компактна схема методу Гауса, Метод відображень
7	Метод $LD\bar{U}$ - розкладу, Метод обернень
8	Метод Холеського, Метод Гауса з частковим вибором головного елемента
9	Метод обернень, Метод $LD\bar{U}$ - розкладу
10	Метод Холеського, LU – розклад
11	Метод обернень, Метод Гауса
12	Метод відображень, PLU – розклад

Тема 3. Ітераційні методи розв’язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Завдання 1. Побудувати модельний приклад, а саме:

- задати матрицю $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, та вектор $x \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$;
- обчислити вектор $b = Ax$;
- для матриці A , обчислити її визначник та число обумовленості.

Завдання 2. Для методів, що визначаються варіантом у Таблиці 2, перевірити умови збіжності методів до розв’язку СЛАР. (якщо метод не збігається для заданої матриці, то підібрати іншу матрицю)

Завдання 3. Розв’язати СЛАР $Ax = b$ запропонованими методами. Отримати розв’язок з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$.

Таблиця 2

№	Методи
1	Простої ітерації, Метод найшвидшого градієнтного спуску
2	Метод простої ітерації з параметром, Метод найшвидшого градієнтного спуску
3	Метод Зейделя, Метод найшвидшого градієнтного спуску

4	Простої ітерації, Метод спряжених напрямків
5	Метод простої ітерації з параметром, Метод спряжених напрямків
6	Метод Зейделя, Метод спряжених напрямків
7	Простої ітерації, Метод спряжених градієнтів
8	Метод простої ітерації з параметром, Метод спряжених градієнтів
9	Метод Зейделя, Метод спряжених градієнтів
10	Простої ітерації, Метод Річардсона
11	Метод простої ітерації з параметром, Метод Річардсона
12	Метод Зейделя, Метод Річардсона

Контрольні питання для підготовки до змістовного модулю

1. Основні властивості матричної та векторної норми.
2. Сформулювати теорему про LU розклад.
3. Навести необхідні умови для існування PLU розкладу матриці.
4. Які переваги методу Гауса з частковим вибором головного елемента перед класичним методом Гауса.
5. Навести необхідні умови для застосування методу Холеського.
6. Навести необхідні та достатні умови для збіжності методу простої ітерації.
7. Основні властивості матриці виключення.
8. Навести алгоритм методу градієнтного спуску.
9. Навести необхідні та достатні умови для збіжності методу Зейделя.
10. Основні властивості матриці обернень.
11. Основні відмінності методу простої ітерації від методу Зейделя.
12. Навести алгоритм методу Річардсона.

Список рекомендованої літератури

1. Бахвалов Н. С. Численные методы. – М. : Наука, 1973, – Т. 1.
2. Калиткин Н. Н. Численные методы. – М. : Наука, 1978.
3. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. – М. : Наука, 1989.
4. Крилов В. И., Бобков В. В., Монастырский П. И. Вычислительные методы. – М. : Наука, 1976, – Т. 1.
5. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. Н. Численные методы. – М. : Наука, 1987.
6. Завьялов Ю. С., Квасов В. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. – М. : Наука, 1980.
7. Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. Сплаины в вычислительной математике. – М. : Наука, 1976.
8. Мак-Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на Фортране. – М. : Мир, 1977.
9. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. – М. : Мир, 1980.
10. В. В. Вербіцький, Реут В. В. Введення в чисельні методи аналізу і диференціальних рівнянь: навчальний посібник. – Одеса: Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 2018. – 116 с.
11. Todd Young and Martin J. Mohlenkamp Title Introduction to Numerical Methods and MATLAB Programming for Engineers. – Ohio University (Last updated on May 4, 2017).

Навчальне видання

**Таїрова Марія Сергіївна
Журавльова Зінаїда Юріївна**

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

*МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ
ДЛЯ КОНТРОЛЬНИХ І САМОСТІЙНИХ РОБІТ*

*з дисципліни «МЕТОДИ ОБЧИСЛЕНЬ»
для здобувачів освіти 4 курсу спеціальності 111 «математика»*

В авторській редакції

Підп. до друку 01.11.2019. Формат 60х84/16.
Ум. друк. арк. 4,77. Тираж 30 пр.
Зам. № 2001.

Видавець і виготовлювач
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Україна, 65082, м. Одеса, вул. Єлісаветинська, 12
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4215 від 22.11.2011 р.
Тел.: (048) 723 28 39. E-mail: druk@onu.edu.ua