Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра оптимального керування та економічної кібернетики

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

«Збіжність степеневого методу у випадку кратних власних значень»

«Convergence of the power method in the case of multiple eingenvalues»

Виконала: здобувачка денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика
Освітня програма «Прикладна математика»
Мулярчук Владислава Сергіївна

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доц. Вербіцький В.В. _______
Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доц. Страхов Є.М.

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ ___ від ___________ 2025 р.

Завідувач кафедри

________ ________________

Захищено на засіданні ЕК № __________

Протокол № ___ від ___________ 2025 р.

Оцінка _______ / _______ / _______

Голова ЕК

________ ____________________

Одеса — 2025 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Тема "Збіжності степеневого методу і зворотної ітерації"є важливою в галузі чисельних методів та обчислювальної лінійної алгебри. Ці методи використовуються для обчислення найбільшого (або найменшого) власного значення та відповідного власного вектора квадратної матриці.

Степеневий метод та зворотня ітерація є ітеративними методами, які базуються на послідовному застосуванні певних операцій до початкових наближень власних векторів. Основна ідея степеневого методу полягає в тому, щоб вектори послідовно множити на матрицю та нормалізувати результати для збільшення збіжності до головного власного вектора. Зворотня ітерація, натомість, використовує обернені матриці для покращення наближення власних векторів.

Одним із ключових аспектів вивчення цих методів є їх збіжність та умови за яких вони працюють ефективно. Це включає аналіз структури матриці, вплив параметрів ітераційного процесу, а також вплив початкових наближень. Розуміння цих аспектів допомагає вибирати та налаштовувати методи для конкретних задач і забезпечує ефективне чисельне розв'язання.

Степеневий метод [16] є однією з класичних ітераційних схем для обчислення власних значень квадратної матриці A. Алгоритмічно його можна описати так.

Алгоритм 0.1. Степеневий метод

1. $x_0 = y_0/||y_0||_2$
2. $For\ k = 0{,}1, \ldots\ Until\ Convergence\ Do$
3. $\quad y_{k+1} = Ax_k$
4. $\quad \mu_{k+1} = y_{k+1}^T x_k$
5. $\quad x_{k+1} = y_{k+1}/||y_{k+1}||_2$
6. $End\ Do$

Цей метод є простим за структурою та зручним у реалізації, оскільки потребує лише множення матриці на вектор. Завдяки цьому його можна ефективно застосовувати навіть у випадках, коли матриця A є дуже великою та розрідженою.

Зазвичай, у наукових та навчальних джерелах збіжність степеневого методу розглядають за умови, що найбільше за модулем власне значення матриці A є простим. Тобто, розглядається задача на власні значення,

$$Au = \lambda u, \tag{0.1}$$

щодо обчислення найбільшого за модулем власного значення та відповідного йому власного вектора симетричної матриці $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, власні значення якої $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ записані в порядку спадання їх абсолютних значень так, що

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|, \tag{0.2}$$

причому максимальне за модулем власне значення λ_1 є простим. У цьому випадку щодо збіжності степеневого методу маємо теорему [9, 16].

Теорема 0.1. *Припустимо, що власні значення $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ симетричної матриці $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ зі спектральний розкладанням*

$$A = U\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)U^T, \tag{0.3}$$

де матриця власних векторів $U = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$ є ортогональною, задовольняють умовам (0.2). Нехай $\{x_k\}_{k=0}^\infty$ і $\{\mu_k\}_{k=0}^\infty$ — послідовності, що створені за допомогою степеневого методу, $\theta_k \in [0, \pi/2]$ визначається так, що $\cos(\theta_k) = |u_1^T x_k|$. Якщо $\cos(\theta_0) \neq 0$, то для $k = 0, 1, 2, \ldots$ виконується, що

$$|\sin(\theta_k)| \leq \tan(\theta_0)\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k$$

та

$$|\mu_k - \lambda_1| \leq \tan(\theta_0)\max_{2\leq i\leq n}|\lambda_1 - \lambda_i|\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2k}.$$

З теореми 0.1 ми бачимо, що збіжність степеневого методу є геометричною, із співвідношенням $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$ для послідовності $\{\theta_k\}_{k=0}^\infty$ та $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^2$ для послідовності $\{\mu_k\}_{k=0}^\infty$. Метод збігається повільно, якщо є власне значення, близьке до λ_1. Тим не менш, степеневий метод залишається корисним для певних обчислювальних проблем. Степеневий метод може бути більш ефективним, ніж інші методи пошуку домінуючого власного вектора, коли матриця добре обумовлена або розріджена, як веб-матриця. Так, наприклад, степеневий метод корпорація Google використовує для оцінки важливості веб-сторінок [4, 5, 13], а у соцмережа X (колишній Twitter) — для обчислення рекомендацій користувачу щодо того, на ким слідувати [11], тощо. Крім того, ідеї степеневого метода використовуються сучасними ефективними методами обчислення власних пар матриці, наприклад, методами підпростору Крилова [3, 9, 10, 16, 17] .

Мета роботи полягає в дослідженні збіжності степеневого методу щодо обчислення найбільшого за модулем власного значення симетричної дійсної матриці та відповідного власного вектора у випадку коли найбільше за модулем власне значення є кратним.

РОЗДІЛ 1

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Задача полягає в проведені обчислювальних експериментів щодо встановлення умов збіжності степеневого метода (зворотної ітерації) при обчисленні найбільшого (найменшого) за модулем власного значення та відповідного власного вектора симетричної дійсної матриці A.

Степеневий метод полягає у наступному:

- Ітерації починаються з початкового вектора x_0, який, як правило, є випадковим вектором, або вектором, що є відомим апріорії.
- На кожній ітерації обчислюється новий вектор

$$x_{k+1} = Ax_k.$$

- Щоб забезпечити стабільність вектор x_{k+1} нормалізується:

$$x_{k+1} = \frac{x_{k+1}}{|x_{k+1|}}.$$

Цей процес повторюється до досягнення збіжності.

Зворотня ітерація — це степеневий метод для матриці A^{-1}. Зазвичай, зворотна ітерація використовується для покращення наближення до власного вектора, особливо якщо цікавить не лише власне значення, але і власний вектор.

Відомі теореми щодо збіжності степеневого методу стверджують[1–3, 6, 8, 12, 14–17], що степеневий метод збігається, якщо найбільше за модулем власне значення просте.

Треба провести експерименти для матриць з кратними власними значеннями, та перевірити, чи збігається степеневий метод у випадку кратних власних значень.

РОЗДІЛ 2

СТЕПЕНЕВИЙ МЕТОД ДЛЯ СИМЕТРИЧНОЇ ПРОБЛЕМИ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ

2.1 Симетрична матриця

Матриця $A \in R^{n\times n}$ називається симетричною, якщо

$$A^T = A. \tag{2.1}$$

Факт 2.1 *Усі власні значення симетричної матриці дійсні.*

Використовуючи факт 2.1, ми можемо занумерувати власні значення симетричної матриці в порядку зростання:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n. \tag{2.2}$$

Будь-який нормований власний вектор, що відповідає λ_i, позначається через z_i:

$$Az_i = \lambda_i z_i, \quad i = 1 \dots, n.$$

Факт 2.2 *Якщо $\lambda_k \neq \lambda_f$, то $z_k^T z_j = 0$.*

Якщо λ — кратне власне значення матриці A, то підпростір N_λ, що є ядром матриці $A - \lambda I$, тобто множина всіх $x \neq 0$, таких, що

$$(A - \lambda I)x = 0,$$

називається власним підпростором, що відповідає λ.

Кратність λ є розмірність N_λ. (Для несиметричних матриць поняття кратності власного значення складніше).

Власні підпростори- найпростіші з інваріантних підпросторів і одне із наслідків наступного факту полягає в тому, що всі інваріантні підпростори натягнуті на власні вектори.

Факт 2.3 (Спектральна теорема). *Всяка симетрична матриця A ортогонально подібна діагональній матриці.*

Таким чином,

$$A = Z\Lambda Z^T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i z_i^T,$$

де $Z = (z_1, \ldots, z_n)$ — матриця ортонормованих власних векторів матриці A.

Означення 2.1. Матриця E називається проектором, якщо $E^2 = E$.

Вона називається ортогональним проектором (на відміну від косого проектора), якщо

$$Ey = 0$$

для всіх y, ортогональних до області значень E. Умова цього проста:

$$E^T = E. \tag{2.3}$$

Для довільної квадратної матриці B спектральний проектор E_λ (іноді званий ідемпотентою) для власного значення λ задовільняє співвідношенням

$$BE_\lambda = E_\lambda B = \lambda E_\lambda. \tag{2.4}$$

Щоб досягти єдиності розкладання за наявності кратних власних значень, використовують власні підпростори N_λ або, що еквівалентно, спектральні проектори H_λ , зумовлені формулами

$$H_\lambda x = \begin{cases} x & \text{для } x \in N_\lambda \\ 0 & \text{для } x \in N_\mu, \quad \mu \neq \lambda \end{cases}$$

Тепер спектральну теорему можна записати, без будь-якої невизначеності, рівностями

$$A = \sum \lambda_j H_{\lambda_j}, \qquad I = \sum H_{\lambda_j}, \tag{2.5}$$

де суми беруться за спектром A.

Оскільки матриця A симетрична, її спектральні проектори ортогональні.

Приклад 2.1.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Власні значення:

$$\alpha_1 = 0$$
$$\alpha_2 = \alpha_3 = 2$$
$$\alpha_4 = 4$$

$$c_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H_1 = c_1 c_1^* = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_4 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H_4 = c_4 c_4^* = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

c_2 и c_3 визначаються не эдиним чином. Одна підходяща пара

$$\frac{1}{2}(1,-1{,}1,-1)^*,\ \ \frac{1}{2}(1{,}1,-1,-1)^*;$$

друга

$$(1/\sqrt{2})(1{,}0{,}0,-1)^*,\ \ (1/\sqrt{2})(0{,}1,-1{,}0)^*;$$

Однак

$$H_2 = c_2c_2^* + c_3c_3^* = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Визначен вже однозначно і

$$A = 0 * H_1 + 2 * H_2 + 4 * H_4,\ I = H_1 + H_2 + H_4.$$

2.2 Степеневий метод і зворотна ітерація

Припустимо, що максимальне за модулем власне значення симетричної дійсної матриці $A \in R^{n\times n}$ відокремлено, так що

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|.$$

У цьому випадку степеневий метод дозволяє знайти найбільше за модулем власне значення λ_1 та відповідний власний вектор q_1. Наступний ітераційний процес буде виглядати так. Нехай y_0 - початкове наближення до свого вектора q_1. По теоремі про спектральне розкладання симетричної матриці власні вектори матриці A утворюють ортонормований базис простору $R^{n\times n}$. Розкладемо y_0 з цього базису,

$$y_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i, \tag{2.6}$$

де $\alpha_i = q_i^T y_0$. Припустимо, що $\alpha_1 \neq 0$. Нормуємо вектор y_0,

$$x_0 = \frac{y_0}{||y_0||_2}.$$

Множимо матрицю A на вектор x_0,

$$y_1 = Ax_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i q_i}{\left|\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i\right|\right|_2}.$$

Нормуємо вектор y_1,

$$x_1 = \frac{y_1}{||y_1||_2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i q_i}{\left|\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i q_i\right|\right|_2}.$$

Після k інтерацій одержимо:

$$x_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^k q_i}{\left|\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^k q_i\right|\right|_2}, \tag{2.7}$$

$$y_{k+1} = Ax_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^{k+1} q_i}{\left|\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^k q_i\right|\right|_2}. \tag{2.8}$$

Покладемо

$$\lambda^{(k+1)} = y_{k+1}^T x_k.$$

Покажемо, що $\lambda^{(k+1)} \to \lambda_1$ при $k \to \infty$. З (2.7) та (2.8) отримуємо

$$\lambda^{(k+1)} = y_{k+1}^T x_k = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^{k+1} q_i\right)^T \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^k q_i\right)}{\left|\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^k q_i\right|\right|_2^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i^{2k+1}}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i^{2k}} =$$

$$= \frac{\lambda_1 + \frac{\alpha_2^2\lambda_2}{\alpha_1^2}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k} + \cdots + \frac{\alpha_n^2\lambda_n}{\alpha_1^2}\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{2k}}{1 + \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k} + \cdots + \frac{\alpha_n^2}{\alpha_1^2}\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{2k}} = \frac{\lambda_1 + O\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k}\right)}{1 + O\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k}\right)}.$$

Звідси

$$\lambda^{(k+1)} - \lambda_1 = O\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k}\right). \tag{2.9}$$

Покажемо ,що $x_k \to q_1$ при $k \to \infty$. Дійсно,

$$x_k = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^k q_i}{\left\|\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^k q_i\right\|_2} = \frac{\alpha_1\lambda_1^k q_1 + \alpha_2\lambda_2^k q_2 + \cdots + \alpha_n\lambda_n^k q_n}{|\alpha_1|\,|\lambda_1|^k\sqrt{1 + O\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k}\right)}} =$$

$$= \frac{\pm q_1 + O\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k}\right)}{\sqrt{1 + O\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k}\right)}}.$$

Звідси

$$x_k - q_1 = O\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k}\right). \tag{2.10}$$

Зауважимо, що швидкість збіжності власного значення більший у 2 рази, ніж власного вектора.

Опишемо алгоритм степеневого методу.

Алгоритм 2.1. Степеневий метод

1. $x_0 = y_0/||y_0||_2$
2. $For\ k = 0{,}1,\ldots\ Until\ Convergence\ Do$
3. $\quad y_{k+1} = Ax_k$
4. $\quad \lambda^{(k+1)} = y_{k+1}^T x_k$
5. $\quad x_{k+1} = y_{k+1}/||y_{k+1}||_2$
6. $End\ Do$

Тестом на збіжність може бути одна з двох умов,

$$\left|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\right| \leq \varepsilon \left|\lambda^{(k+1)}\right|, \tag{2.11}$$

або

$$\left|\max_{(x_k)_i \neq 0} \frac{(y_{k+1})_i}{(x_k)_i} - \min_{(x_k)_i \neq 0} \frac{(y_{k+1})_i}{(x_k)_i}\right| \leq \varepsilon \left|\max_{(x_k)_i \neq 0} \frac{(y_{k+1})_i}{(x_k)_i}\right|. \tag{2.12}$$

Зауважимо, крок 3. з алгоритму 2.1 вимагає $O(n^2)$ арифметичних дій, інші кроки — $O(n)$ арифметичних дій.

Розглянемо також метод зворотної ітерації. Припустимо, що найменше за модулем власне значення дійсної симетричної матриці $A \in R^{n \times n}$ відокремлено, тобто,

$$|\lambda_1| \geq \cdots \geq |\lambda_{n-1}| > |\lambda_n|. \tag{2.13}$$

Звернемо увагу, що якщо $\{\lambda,x\}$ — власна пара матриці A, то $\{1/\lambda,x\}$ — власна пара оберненої матриці A^{-1}. $1/\lambda_n$ — максимальне по модулю власне значення матриці A^{-1}. Тому для знаходження $1/\lambda_n$ можна застосувати степеневий метод для матриці A^{-1}. В цьому випадку при $k \to \infty$

$$\lambda^{(k+1)} \to \frac{1}{\lambda_n}, \quad x_k \to q_n.$$

Зворотна ітерація дозволяє обчислити найменше по модулю власне значення матриці (і відповідний власний вектор), якщо вона відокремлена від інших своїх значень.

Опишемо алгоритм зворотної ітерації.

Алгоритм 2.2. Зворотна ітерація

1. $x_0 = y_0/||y_0||_2$
2. $For\ k = 0,1,\ldots\ Until\ Convergence\ Do$
3. $\quad y_{k+1} = A^{-1}x_k$
4. $\quad \lambda^{(k+1)} = y_{k+1}^T x_k$
5. $\quad x_{k+1} = y_{k+1}/||y_{k+1}||_2$
6. $End\ Do$

Крок 3. алгоритму зворотної ітерації зводиться до вирішення системи

$Ay_{k+1} = x_k$. Для вирішення цієї системи потрібно $O(n^3)$ арифметичних дій. Але якщо нам відомо деяке розкладання матриці A (наприклад, LU-розкладання),то цей крок буде вимагатиме тільки $O(n^2)$ арифметичних процесів. Інші кроки алгоритму вимагають лише $O(n)$ арифметичних процесів.

Зауваження 2.1. При обґрунтуванні збіжність степенового методу, ми припускали, що коефіцієнт α_1 у розкладанні за власними векторів початкового наближення y_0 відмінний від нуля. Навіть якщо це не правильно, то, внаслідок округлень при виконанні арифметичних операцій, на деякій ітерації k коефіцієнт α_1 у розкладанні вектора y_k буде відмінний від нуля.

2.3 Вичерпування віднімання

Нехай власні значення дійсної симетричної матриці $A \in R^{n\times n}$ задовольняють умовам

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|.$$

Вважатимемо, що власна пара $\{\lambda_1,q_1\}$ уже знайдена. Необхідно знайти $\{\lambda_2,q_2\}$.

Нехай $\widetilde{y}_0$ —початкове приближення

$$\widetilde{y}_0 = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \cdots + \alpha_n q_n,$$

при цьому $\alpha_2 \neq 0$. Покладемо

$$y_0 = \widetilde{y}_0 - \alpha_1 q_1 = \widetilde{y}_0 - \widetilde{y}_0^T q_1 q_1.$$

Повторюючи доведення збіжності степеневого методу для початкового наближення y_0, переконаємось, що в точній арифметиці $k \to \infty$

$$\lambda^{(k+1)} \to \lambda_2, \quad x_k \to q_2.$$

Однак через похибки округлень коефіцієнт при q_1 знову може з’явитися в розкладанні y_k. Тому цей коефіцієнт видаляють на кожної ітерації, або за кілька ітерацій. Таким чином, для знаходження власної пари $\{\lambda_2,q_2\}$ можна застосувати степеневий метод з вичерпуванням відніманням.

Алгоритм 2.3. Степеневий метод з вичерпуванням віднімання

1. $y_0 = \widetilde{y}_0 - \widetilde{y}_0^T q_1 q_1$
2. $x_0 = y_0/||y_0||_2$
3. $For\ k = 0,1,\ldots\ Until\ Convergence\ Do$
4. $\quad \widetilde{y}_{k+1} = Ax_k$
5. $\quad y_{k+1} = \widetilde{y}_{k+1} - \widetilde{y}_{k+1}^T q_1 q_1$
6. $\quad \lambda^{(k+1)} = y_{k+1}^T x_k$
7. $\quad x_{k+1} = y_{k+1}/||y_{k+1}||_2$
8. $End\ Do$

Таким чином по черзі можна знайти кілька найбільших за модулем власних значень, якщо вони відокремлені один від одного і від решти частини спектру. Очевидно, що для знаходження кількох відокремлених мінімальних за модулем своїх значень можна використовувати зворотну ітерацію.

2.4 Використання зсувів

Нехай $A \in R^{n\times n}$ і $\sigma \in R$. Якщо $\{\lambda, x\}$ — власна пара матриці A, то $\{\lambda-\sigma, x\}$ являється власною парою матриці $A-\sigma I$.Тоді зсувом навивається дійсне число σ .

Спочатку розглянемо використання зсуву у випадку збільшення швидкості збіжності зворотної ітерації. Оскільки зворотна ітерація є степеневим методом для матриці A^{-1}, то

$$\lambda^{(k+1)} - \frac{1}{\lambda_n} = O\left(\left(\frac{\frac{1}{\lambda_{n-1}}}{\frac{1}{\lambda_n}}\right)^{2k}\right) = O\left(\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\right)^{2k}\right).$$

Звідси отримуємо, що швидкість збіжності залежить від величини $|\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}|$ Остання залежить від відстані між $|\lambda_{n-1}|$ і $|\lambda_n|$, від відокремленості найменшого за модулем власного значення, і від малості $|\lambda_n|$. Тому зсув σ вибирають так, щоб найменше за модулем власне значення $\widetilde{\lambda}_n = \lambda_n - \sigma$ матриці $A - \sigma I$ було якомога ближче до нуля. Для збільшення швидкості збіжності зворотної ітерації зсув σ треба вибирати якомога ближче власного значення λ_n, яке шукаємо. Якщо $\widetilde{x}$ – наближення до деякого власного вектор симетричної матриці, то найкращим наближенням до відповідного власного значення дає відношення Релея

$$\rho(\widetilde{x}) = \frac{\widetilde{x}^T A \widetilde{x}}{\widetilde{x}^T \widetilde{x}}.$$

Вище сказане лежить в основі наступного алгоритму.

Алгоритм 2.4. Зворотна ітерація зі зсувом Релея

1. $x_0 = y_0/||y_0||_2$
2. $For\ k = 0,1,\ldots\ Until\ Convergence\ Do$
3. $\quad \sigma_{k+1} = x_k^T A x_k$
4. $\quad y_{k+1} = (A - \sigma_{k+1} I)^{-1} x_k$
5. $\quad x_{k+1} = y_{k+1}/||y_{k+1}||_2$
6. $End\ Do$

В якості тесту на збіжність можна використовувати умову (2.12).

Зауважимо, що крок 3. алгоритму вимагає $O(n^3)$ арифметичних дій, бо кожного разу треба вирішувати систему лінійних алгебраїчних рівнянь із новою матрицею. Розглянемо тепер використання зсуву для обчислення власних значень матриці степеневим методом (зворотною ітерацією), відмінних від максимальних (мінімальних) по модулю. Очевидно, що зворотна ітерація, обчислюючи мінімальне за модулем власне значення матриці $A-\sigma I$, фактично обчислюватиме власне значення матриці A найближче до σ. Визначивши межі спектру матриці A (наприклад, по лемі Гершгоріна), можна так вибрати зсув σ, щоб степеневий метод або зворотна ітерація фактично обчислювали найменше (найбільше) власне значення матриці A. Дійсно якщо $\sigma \leq \lambda_{min}(A)$, то всі власні значення матриці $A - \sigma I$ позитивні, найменшому власному значенню матриці A відповідає мінімальне (мінімальне за модулем) власне значення матриці $A - \sigma I$, а максимальному власному значенню матриці A – максимальне (максимальне за модулем) власне значення матриці $A - \sigma I$. Якщо ж $\sigma \geq \lambda_{max}(A)$, всі власні значення матриці $A - \sigma I$ негативні, найменшому власному значенню матриці A відповідає мінімальне (максимальне за модулем) власне значення матриці $A - \sigma I$, а максимальному власному значенню матриці A – максимальне (мінімальне за модулем) власне значення матриці $A - \sigma I$.

РОЗДІЛ 3

СТЕПЕНЕВИЙ МЕТОД У ВИПАДКУ КРАТНОГО ВЛАСНОГО ЗНАЧЕННЯ

Нехай симетрична матриця $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ має p різних власних значень

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_p| \tag{3.1}$$

кратностей $n_1, n_2, \ldots, n_p$, відповідно, $n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n$.

Якщо

$$\left\{u_k^{(i)}\right\}_{k=1}^{n_i}$$

деякий ортонормований базис власного підпростору E_{λ_i}, що відповідає власному значенню λ_i $(i = 1,2,\ldots,p)$, то ортогональний проектор

$$H_{\lambda_i} = \sum_{k=1}^{n_i} u_k^{(i)} (u_k^{(i)})^T$$

на E_{λ_i} визначається однозначно незалежно від вибору ортонормованого базису та для матриці A можна записати таке спектральне розкладання [16],

$$A = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i H_{\lambda_i}. \tag{3.2}$$

З теореми 4.1 [17, с. 86] випливає наступна

Теорема 3.1. *Нехай існує тільки одне максимальне за модулем кратне власне значення λ_1 симетричної дійсної матриці A. Якщо проекція y_0 на E_{λ_1} відмінна від нуля $(H_{\lambda_1} y_0 \neq 0)$, степеневий метод утворює такі послідовності $\{\mu_k\}$ та $\{x_k\}$, що μ_k збігається до λ_1, а x_k збігається до власного вектора u_1, що відповідає власному значенню λ_1.*

Доведення. За умовою теореми маємо,

$$y_0 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i, \tag{3.3}$$

де $u_i = H_{\lambda_i}y_0/||H_{\lambda_i}y_0||_2$, $\alpha_i = ||H_{\lambda_i}y_0||_2$, $i = 1,2,\ldots,p$, $\alpha_1 \neq 0$. Згідно алгоритму степеневого методу знаходимо,

$$x_0 = \frac{y_0}{||y_0||_2},$$

$$y_1 = Ax_0 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i \lambda_i u_i}{\left|\left|\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i u_i\right|\right|_2}.$$

$$x_1 = \frac{y_1}{||y_1||_2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i \lambda_i u_i}{\left|\left|\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i \lambda_i u_i\right|\right|_2}.$$

Після k ітерацій отримуємо,

$$x_k = \frac{\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i \lambda_i^k u_i}{\left|\left|\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i \lambda_i^k u_i\right|\right|_2}, \tag{3.4}$$

$$y_{k+1} = Ax_k = \frac{\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i \lambda_i^{k+1} u_i}{\left|\left|\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i \lambda_i^k u_i\right|\right|_2}. \tag{3.5}$$

З (3.4) та (3.5) маємо

$$\mu_{k+1} = y_{k+1}^T x_k = \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i \lambda_i^{k+1} u_i\right)^T \left(\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i \lambda_i^k u_i\right)}{\left|\left|\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i \lambda_i^k u_i\right|\right|_2^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i^2 \lambda_i^{2k+1}}{\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i^2 \lambda_i^{2k}} =$$

$$= \frac{\lambda_1 + \frac{\alpha_2^2 \lambda_2}{\alpha_1^2}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k} + \cdots + \frac{\alpha_p^2 \lambda_p}{\alpha_1^2}\left(\frac{\lambda_p}{\lambda_1}\right)^{2k}}{1 + \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k} + \cdots + \frac{\alpha_p^2}{\alpha_1^2}\left(\frac{\lambda_p}{\lambda_1}\right)^{2k}} = \frac{\lambda_1 + O\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k}\right)}{1 + O\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k}\right)}.$$

Очевидно, що x_k — це вектор $A^k y_0$, який нормалізовано деяким скаляром $\hat{\alpha}_k$. За умовою теореми y_0 можна подати так,

$$y_0 = \sum_{i=1}^{p} H_{\lambda_i} y_0, \text{ де } H_{\lambda_1} y_0 \neq 0.$$

Тоді,

$$x_k = \frac{1}{\hat{\alpha}_k} A^k y_0 = \frac{1}{\hat{\alpha}_k} \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i H_{\lambda_i} \right)^k y_0 = \frac{1}{\hat{\alpha}_k} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^k H_{\lambda_i} y_0 =$$
$$= \frac{\lambda_1^k}{\hat{\alpha}_k} \left(H_{\lambda_1} y_0 + \sum_{i=2}^{p} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k H_{\lambda_i} y_0 \right).$$

□

Зауваження 3.1. Якщо враховувати помилки округлень машинної арифметики, малоймовірно, що проекція y_0 на E_{λ_1} буде дорівнювати нулю на першому кроці степеневого метода, або що рівність нулю проекції y_k на E_{λ_1} збережеться у подальших обчисленнях. Тому, умову теореми про те, що проекція початкового вектора y_0 на власний підпростір найбільшого за модулем власного значення не повинна бути нулем, можна вважати не суттєвою для практичних обчислень.

З іншого боку, оскільки всі власні значення симетричної дійсної матриці A дійсні, то матриця A може мати щонайбільше два найбільших за модулем власних значення. У цьому випадку можна обчислити домінуючі за модулем власні значення матриці A застосувавши степеневий метод до матриці $A - \sigma I$, де $\sigma \in \mathbb{R}$ — деякий зсув, а I — одинична матриця. Дійсно, якщо знайти такі дійсні числа σ_- та σ_+, що

$$\sigma_- < \min_i \lambda_i(A) < \sigma_+ \tag{3.6}$$

(наприклад, за лемою Гершгоріна), то у матриці $A - \sigma_- I$ всі власні значення будуть додатні, таким чином її максимальне за модулем власне значення буде відповідати найбільшому власному значенню матриці A, а у матриці $A - \sigma_+ I$ всі власні значення будуть від'ємні, таким чином її максимальне за модулем власне значення буде відповідати найменшому власному значенню матриці A.

Виходячи з вище сказаного, маємо таку теорему.

Теорема 3.2. *В машинній арифметиці степеневий метод для симетричної дійсної матриці*

$$A - \sigma I,$$

де $\sigma \in \{\sigma_-, \sigma_+\}$ *завжди збігаєтьcя.*

Нагадаємо, що матриця A називається додатно (від'ємно) напіввизначеною, якщо $x^T A x \geq (\leq)\ 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Наслідок 3.1. *В машинній арифметиці степеневий метод для симетричної дійсної додатно (від'ємно) напіввизначеної матриці завжди збігаєтьcя.*

Доведення. Дійсно, така матриця має лише одне максимальне за модулем власне значення. $\square$

РОЗДІЛ 4

СТЕПЕНЕВИЙ МЕТОД ТА GOOGLE

4.1 Ланцюг Маркова

Дискретний у часі марковський ланцюг складається з множини можливих станів S і послідовності випадкових величин $X_0, X_1, X_2, \ldots$, що задовольняють умову: для будь-якої вимірної підмножини $E \subseteq S$

$$Pr(X_{t+1} \in E \mid X_0, X_1, \ldots, X_t) = \Pr(X_{t+1} \in E \mid X_t). \tag{4.1}$$

Це означає, що розподіл імовірностей для X_{t+1} залежить лише від значення X_t, а не від попередніх значень X_{t-k}, $k = 1, 2, \ldots$. Значення X_t називається станом марковського ланцюга.

Якщо $\pi_{t,i} = \Pr[X_t = i]$ для будь-якого t і $\pi_t = (\pi_{t,i} \mid i \in S)$ — вектор ймовірностей випадкової величини X_t, то

$$\pi_{t+1} = P\pi_t,$$

де P — матриця переходів для Марковського ланцюга. Нехай e — вектор одиниць розмірності π_t. Оскільки сума ймовірностей дорівнює одиниці, маємо

$$e^T \pi_t = 1 \quad \text{для всіх } t.$$

Зокрема,

$$1 = e^T \pi_{t+1} = e^T P \pi_t$$

для будь-якого вектора ймовірностей π_t; отже,

$$e^T P = e^T.$$

Іншою властивістю матриці P є те, що всі її елементи невід'ємні, оскільки всі ймовірності невід'ємні. Будь-яка квадратна матриця P з невід'ємними елементами, для якої виконується рівність $e^T P = e^T$, називається стохастичною матрицею і може бути матрицею Марковського ланцюга. Стохастична матриця P, для якої також виконується

$$Pe = e,$$

називається двічі стохастичною.

В загальному випадку існують чотири можливі комбінації марковських ланцюгів з дискретним та неперервним часом і станами: дискретний час і дискретні стани, дискретний час і неперервні стани, неперервний час і дискретні стани, а також неперервний час і неперервні стани.

Задачі з неперервним часом і неперервними станами найкраще розуміти як **стохастичні диференціальні рівняння**. Марковські ланцюги з неперервним часом і дискретними станами — це системи **лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами**:

Алгоритм 4.1. Імітація марковського ланцюга з дискретним часом і дискретним станом

1. generator `markovdiscrete`(x_0, P, U)
2. $\quad x \leftarrow x_0$
3. $\quad$ while `true` do
4. $\quad\quad u \leftarrow \text{next}(U)$
5. $\quad\quad$ знайти y таке, що

$$\sum_{i=1}^{y-1} p_{ix} \leq u < \sum_{i=1}^{y} p_{ix}$$

6. $\quad\quad x \leftarrow y$
7. $\quad\quad$ yield x
8. $\quad$ end while
9. end generator

4.2 Безперервний час і дискретний простір станів

У цьому випадку динаміка описується системою диференціальних рівнянь:

$$\frac{d\pi}{dt} = A\pi,$$

де $a_{ii} \leq 0$, $a_{ij} \geq 0$ при $i \neq j$, і $e^T A = 0^T$.Матриця A називається **матрицею інтенсивностей переходів** (або **матрицею швидкостей переходів**) для марковського ланцюга.

Марковські процеси з **дискретним часом і безперервним простором станів** часто можна описати за допомогою інтегралів від функцій розподілу ймовірностей:

$$\pi_{t+1}(x) = \int_S p(x,y)\,\pi_t(y)\,dy,$$

де $p(x,y)$ — функція щільності переходу. При цьому виконується умова нормування:

$$\int_S p(x,y)\,dx = 1 \quad \text{для всіх } y \in S.$$

У загальнішому випадку, ймовірнісні розподіли слід описувати через **міри**, і тоді формула має вигляд:

$$\pi_{t+1}(E) = \int_E \left(\int_S \pi_t(dy)\,\mu(dx,y) \right),$$

де μ — функція, що кожному $y \in S$ ставить у відповідність **ймовірнісну міру** на S, причому:

$$\mu(S,y) = 1 \quad \text{для всіх } y \in S.$$

Функцію μ називають **перехідною мірою**.

4.3 Моделювання PageRank за допомогою марковського ланцюга

Оригінальний алгоритм **Google PageRank** використовує метод степенів для ранжування вебсторінок. Він базується на **марковському ланцюгу**, де випадковий користувач переходить за посиланнями на сторінці з однаковою ймовірністю. Якщо немає посилань — обирається випадкова сторінка з усіх можливих.

Сторінки з високою **рівноважною ймовірністю** вважаються важливішими. Це означає, що на них веде багато посилань, включаючи посилання з інших важливих сторінок. Тобто, зміст сторінки не враховується — лише структура посилань.

Алгоритм вводить ймовірність $\alpha > 0$ випадкового переходу на будь-яку сторінку. Якщо p_t — вектор ймовірностей, де $(p_t)_i$ — ймовірність того, що сторінка i переглядається після t кроків, тоді

$$p_{t+1} = Pp_t,$$

де P — матриця перехідних ймовірностей, P_{ij} — ймовірність того, що сторінка i переглядається в момент часу $t+1$, якщо в момент часу t переглядалася сторінка j. Значення $P_{ij} \in [0,1]$. Крім того,

$$\sum_{i=1}^{N} (p_t)_i = 1,$$

або

$$e^T p_t = 1,$$

для всіх t, де $e = [1, 1, \ldots, 1]^T$.

Тоді

$$e^T p_{t+1} = e^T P p_t = e^T p_t,$$

для будь-якого вектора ймовірностей p_t. Отже,

$$e^T P = e^T.$$

Нехай P_0 — матриця перехідних ймовірностей, що описує вибір посилань. Алгоритм PageRank модифікує її, вводячи ймовірність $\alpha > 0$ випадкового вибору будь-якої вебсторінки замість вибору посилання на поточній сторінці:

$$P = \alpha \frac{ee^T}{N} + (1 - \alpha) P_0. \tag{4.2}$$

Це означає, що кожен елемент

$$P_{ij} \geq \frac{\alpha}{N}.$$

Множина векторів ймовірностей:

$$\mathcal{S} = \{p \mid e^T p = 1, \quad p \geq 0\},$$

де нерівність $p \geq 0$ розглядається покомпонентно. Множина $\mathcal{S}$ є опуклою і обмеженою в $\mathbb{R}^N$.

Матриця P визначає відображення $p \mapsto Pp$ з $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$. Згідно з теоремою Брауера про нерухому точку, існує фіксована точка p^*, для якої виконується

$$Pp^* = p^*.$$

Вектор p^* є власним вектором матриці P з власним значенням 1. Крім того, такий вектор ймовірностей єдиний, оскільки всі елементи P строго додатні.

$$\|P(p - q)\|_1 = \sum_{i=1}^{N} \left| \sum_{j=1}^{N} P_{ij}(p_j - q_j) \right| \leq \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} P_{ij} |p_j - q_j|$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} P_{ij} |p_j - q_j| = \sum_{j=1}^{N} |p_j - q_j| = \|p - q\|_1.$$

Рівність можлива лише тоді, коли

$$\left| \sum_{j=1}^{N} P_{ij}(p_j - q_j) \right| = \sum_{j=1}^{N} P_{ij} |p_j - q_j|$$

для всіх i. Оскільки всі $P_{ij} > 0$, це означає, що $p_j - q_j$ мають однаковий знак для всіх j. Але $\sum_{j=1}^{N} p_j = \sum_{j=1}^{N} q_j = 1$, отже $p_j - q_j = 0$ для всіх j. Таким чином, рівноважний вектор ймовірностей p^* є унікальним.

Можна застосувати метод степенів

$$p_{t+1} = P p_t$$

до цієї матриці. Оскільки P — це сума розрідженої матриці (матриці посилань між вебсторінками), матриці низького рангу $\alpha \frac{ee^T}{N}$, та матриці з колонкою $\frac{e}{N}$ для кожної сторінки без вихідних посилань, добуток Pp можна обчислити ефективно.

Кількість операцій з плаваючою комою, необхідних на кожному кроці, дорівнює $O(N + L)$, де N — кількість вебсторінок, а L — кількість посилань, замість $O(N^2)$.

о онити видкстност методу стеенв дл матри eредни моврносте (5.1), ролнемо:

$$\|p_{t+1} - p^*\|_1 = \|P(p_t - p^*)\|_1 = \left\| \frac{\alpha}{N} ee^T (p_t - p^*) + (1 - \alpha) P_0 (p_t - p^*) \right\|_1.$$

Оскільки $e^T p_t = e^T p^* = 1$, перший доданок дорівнює нулю, отже:

$$\|p_{t+1} - p^*\|_1 = \|(1 - \alpha) P_0 (p_t - p^*)\|_1 \le (1 - \alpha) \|p_t - p^*\|_1.$$

Отже, метод степенів сходиться зі швидкістю, керованою параметром $1 - \alpha$.

Кількість ітерацій, необхідних для досягнення точності ε, має порядок

$$O\left(\frac{\log \varepsilon}{\log(1-\alpha)}\right).$$

Відомо, що Google використовує $\alpha \approx 0.15$, що дозволяє гарантувати певний рівень точності за помірну кількість ітерацій.

РОЗДІЛ 5

ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ

5.1 Експеримент 1

Визначимо матриці розмірності $n \times n$,

$$A_n = \mathrm{diag}(10{,}10,\ldots,10{,}11), \tag{5.1}$$

$$B_n = \mathrm{diag}(10{,}10,\ldots,10{,}11{,}11), \tag{5.2}$$

$$C_n = \mathrm{diag}(10{,}10,\ldots,10,-11{,}11). \tag{5.3}$$

У матриці A_n максимальне за модулем власне значення просте, у матриці B_n максимальне за модулем власне значення кратне, матриця C_n має два різні (протилежні за знаком) максимальні за модулем власні числа.

Степеневим методом обчислювались максимальні за модулем власні значення матриць A_n, B_n та C_n з точністю $\varepsilon = 10^{-6}$. Початковий вектор вибрано так:

$$x_0 = \frac{y_0}{||y_0||_2}, \quad \text{де} \quad y^T = [1{,}1{,}1,\ldots,1]. \tag{5.4}$$

У табл. 5.1 приведено кількість кроків, що затрачені степеневим методом для обчислення максимального за модулем власного значення матриць A_n та B_n. Для матриці C_n степеневий метод за вказану кількість кроків обчислив неправильний результат (нульове власне значення).

Аналізуючи результати обчислювального експерименту, можна зробити такі висновки:

- Для обчислення простого та кратного власного значення затрачено однакову кількість ітерацій степеневого методу.
- Швидкість збіжності степеневого методу однакова для простого та кратного власного значення.
- Швидкість збіжності степеневого методу залежить від співвідношення $\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}$, де λ_1 — найбільше за модулем власне значення та не залежить

Табл. 5.1. Кількість кроків, що затрачені степеневим методом для обчислення максимального за модулем власного значення.

n	A_n	B_n	C_n
10	65	60	197
100	77	74	210
1000	89	86	222
2000	93	89	223

від розміру матриці.

- Степеневий метод не може обчислити максимальне за модулем власне значення, якщо матриця має різні за знаком максимальні власні значення.

5.2 Експеримент 2

Добре відомо, що власні значення симетричної трьохдіагональної матриці

$$A_h = \begin{bmatrix} 2/h^2 & -1/h^2 & & & \\ -1/h^2 & 2/h^2 & -1/h^2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1/h^2 & 2/h^2 & -1/h^2 \\ & & & -1/h^2 & 2/h^2 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

розміру $(n-1) \times (n-1)$, де $h = \frac{1}{n}$, всі різні та обчислюються за формулою

$$\lambda_i^h = 4n^2 \sin^2 \frac{\pi i}{2n}, \qquad i = 1,2,\ldots,n-1. \quad (5.6)$$

Очевидно, що власні значення матриці

$$B_h = \begin{bmatrix} A_h & 0 \\ 0 & A_h \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

такі ж, як у матриці A_h, але кратність кожного дорівнює 2.

Степеневим методом обчислювались максимальні за модулем власні значення матриць A_h та B_h з точністю $\varepsilon = 10^{-6}$.

У табл. 5.2 приведено кількість кроків, що затрачені степеневим методом для обчислення максимального за модулем власного значення матриць A_h та B_h з початковим вектором (5.8).

Спектр матриці

$$C_h = \begin{bmatrix} A_h & 0 \\ 0 & -A_h \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

складається з власних значень матриці A_h, та власних значень, які знаком відрізняються від власних чисел матриці A_h.

Для матриці C_h степеневий метод обчислив неправильний результат (нульове власне значення).

Табл. 5.2. Кількість кроків, що затрачені степеневим методом для обчислення максимального за модулем власного значення.

n	A_h	B_h
10	35	35
100	999	999
1000	868	868
10000	868	868

Аналізуючи результати обчислювального експерименту, можна зробити такі висновки:

- Для обчислення простого та кратного власного значення затрачено однакову кількість ітерацій степеневого методу, хоча розмірність матриці B_h у 2 рази більше розмірності матриці A_h.

- Швидкість збіжності степеневого методу однакова для простого та кратного власного значення.
- Швидкість збіжності степеневого методу залежить від співвідношення $\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}$, де λ_1 — найбільше за модулем власне значення та не залежить від розміру матриці.
- Степеневий метод не може обчислити максимальне за модулем власне значення, якщо матриця має різні за знаком максимальні власні значення.

ВИСНОВКИ

В роботі розглянуто степеневий метод обчислення найбільшого за модулем власного значення симетричної матриці.

Відомі теореми щодо збіжності степеневого методу стверджують, що степеневий метод збігається, якщо найбільше за модулем власне значення просте.

Проведено обчислювальні експерименти для встановлення умов збіжності степеневого метода (зворотної ітерації) при обчисленні найбільшого (найменшого) за модулем власного значення та відповідного власного вектора симетричної дійсної матриці A з кратними власними значеннями.

Аналізуючи результати обчислювальних експериментів, можна зробити такі висновки:

- Швидкість збіжності степеневого методу однакова для простого та кратного власного значення.
- Степеневий метод не може обчислити максимальне за модулем власне значення, якщо матриця має різні за знаком максимальні власні значення.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вербіцький В. В., Реут В. В. Введення в чисельні методи алгебри: навчальний посібник / Одеса: Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 2015. 127 с.
2. Цегелик Г.Г. Чисельні методи / Львів: Світ, 2005. 408 с.
3. Bai Z., Demmel J., Dongarra J., Ruhe A., and H. van der Vorst. Templates for the Solution of Algebraic Eigenvalue Problems: A Practical Guide / SIAM, Philadelphia, PA, USA, 2000. 430 p.
4. Berkhin P. A survey on PageRank computing. *Internet Math.* 2005. No. 2. P. 73–120.
5. Berkhin P. Bookmark-coloring algorithm for personalized PageRank computing. *Internet Math.* 2006. No. 3. P. 41–62.
6. Beilina L., Karchevskii E., Karchevskii M. Numerical linear algebra : theory and applications / Springer, 2017. 457 p.
7. Börm St., Mehl Ch. Numerical Methods for Eigenvalue Problems. Berlin/Boston:De Gruyter. 2010. 208 p.
8. Diethelm K. The Analysis of Fractional Differential Equations. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010. — 281 p.
9. Golub G. H. , Van Loan C. F. Matrix Computations, third edition. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1996. 674 p.
10. Golub G.H., Ye Q. An inverse free preconditioned Krylov subspace method for symmetric generalized eigenvalue problems. *SIAM J. Sci. Comput.* 2002. Vol. 24. P. 312–334.
11. Gupta P., Goel A., Lin J., Sharma A., Wang D., Zadeh R., WTF: The who to follow service at Twitter. in: WWW 2013, Rio de Janeiro, Brazil, 2013, pp.505–514.
12. Higham Nicholas J. Functions of Matrices: Theory and Computation / SIAM, 2008. 446 p.
13. Langville A.N., Meyer C.D. Google's PageRank and Beyond:The Science of Search Engine Rankings. Princeton, N.J: Princeton University Press, 2006. 233 p.

14. Lyche T. Numerical linear algebra and matrix factorizations / Springer, 2020. 376 p.
15. Meyer Carl D. Matrix analysis and applied linear algebra / SIAM, 2000. 890 p.
16. Parlett B. N. The Symmetric Eigenvalue Problem/ Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998. 398 p.
17. Saad Y. Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems / Manchester University Press, Manchester, 2011. 287 p.
18. Stewart D. E. Numerical Analysis: A Graduate Course. CMS/CAIMS Books in Mathematics, Springer, 2022. 632 p.
19. Verbitskyi V. V., Huk A. G. NEWTON'S METHOD FOR THE EIGENVALUE PROBLEM OF A SYMMETRIC MATRIX // Researches in Mathematics and Mechanics. — 2020. — V. 25, Is. 2(36). — P. 75–82.
20. Van der Vorst H. A. Computational methods for large eigenvalue problems. *Handbook of Num. Anal.* 2002. Vol. 8. P. 3-179.

ДОДАТОК А. ТЕКСТ ПРОГРАМНИХ ДОДАТКІВ

```
function p1
  n=10;
  eps=1e-6;
  y0=ones(n,1);
  x0=y0/norm(y0,2);
  lambda0=x0'*y0
  A=initA(n);
  step=0;
  while 1
    step=step+1;
    y1=A*x0;
    x1=y1/norm(y1,2);
    lambda1=x0'*y1;
    if abs(lambda0-lambda1) <= eps*abs(lambda1)
      break
    endif
    lambda0=lambda1;
    x0=x1;
  endwhile
  x1;
  lambda1
  step
endfunction

function A=initA(n)
  for i=1:n
    A(i,i)=10;
      endfor
    A(n-1,n-1)=-11;
    A(n,n)=11;
    A=sparse(A);
    endfunction
```

```
function p2
 % Різницевий оператор
  format long;
  N=20000
  A=initA(N);
  n=size(A,1)
  eps=1e-6;
  y0=ones(n,1);
  x0=y0/norm(y0,2);
  lambda0=x0'*y0


  step=0;
  while 1
    step=step+1;
    y1=A*x0;
    x1=y1/norm(y1,2);
    lambda1=x0'*y1;
    if abs(lambda0-lambda1) <= eps*abs(lambda1)
      break
    endif
    lambda0=lambda1;
    x0=x1;
  endwhile
  x1;
  lambda1
  s=sin(pi*(N-1)/2/N);
  lambda_=4*N*N*s*s
  step
endfunction
```

```
function [A]=initA(N)
 % Різницевий оператор
  h=1/N;
  n=N-1;
  v(1:n)=2/h/h;
  v1(1:n-1)=-1/h/h;
  A=diag(v)+diag(v1,1)+diag(v1,-1);
  A=sparse(A);

end


function p3
 % Різницевий оператор
  format long;

  N=100
  A=initA(N);
  n=size(A,1)
  eps=1e-6;
  y0=ones(n,1);
  x0=y0/norm(y0,2);
  lambda0=x0'*y0
  step=0

  while 1
    step=step+1;
    y1=A*x0;
    x1=y1/norm(y1,2);
    lambda1=x0'*y1;
    if abs(lambda0-lambda1) <= eps*abs(lambda1)
      break
```

```
    endif
    lambda0=lambda1;
    x0=x1;
  endwhile
  x1;
  lambda1
    s=sin(pi*(N-1)/2/N);
  lambda_=4*N*N*s*s
  step
endfunction


function [A]=initA(N)
 % Різницевий оператор
  h=1/N;
  n=N-1;
  v(1:n)=2/h/h;
  v1(1:n-1)=-1/h/h;
  B=diag(v)+diag(v1,1)+diag(v1,-1);
  nn=size(B,1);
  C=zeros(nn,nn);
  A=[B,C;C,-B];
  A=sparse(A);

end
```