ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ І. І. МЕЧНИКОВА

Факультет математики, фізики та інформаційних технологій

Кафедра методів математичної фізики

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти « магістра »

«Визначення хвильового поля усередині порожнистого конуса з вирізом уздовж твірної»

«Definition of wave field inside a hollow cone with a cutout along the generatrix»

Виконав: здобувач денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика

Освітня програма : Прикладна Математика

Зінов'єв Андрій Олександрович
(прізвище, ім'я, по-батькові здобувача)

Керівник доктор фіз.-мат. наук, проф. Вайсфельд Н.Д. __________
(підпис)

Рецензент канд. фіз.-мат. наук, доц. Процеров Ю. С.

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
____
№ ___ від ____.____. 20___ р.

Завідувач(ка) кафедри
________ _____________
(підпис) (прізвище,ім'я)

Захищено на засіданні ЕК № _____
протокол № __від ____.____.20___ р.

Оцінка______________/___ ___/_____
(за національною шкалою/шкалою ECTS/ бали)

Голова ЕК
_____ _____________
(підпис) (прізвище, ім'я)

Одеса 2023

ЗМІСТ

РОЗДІЛ 1

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

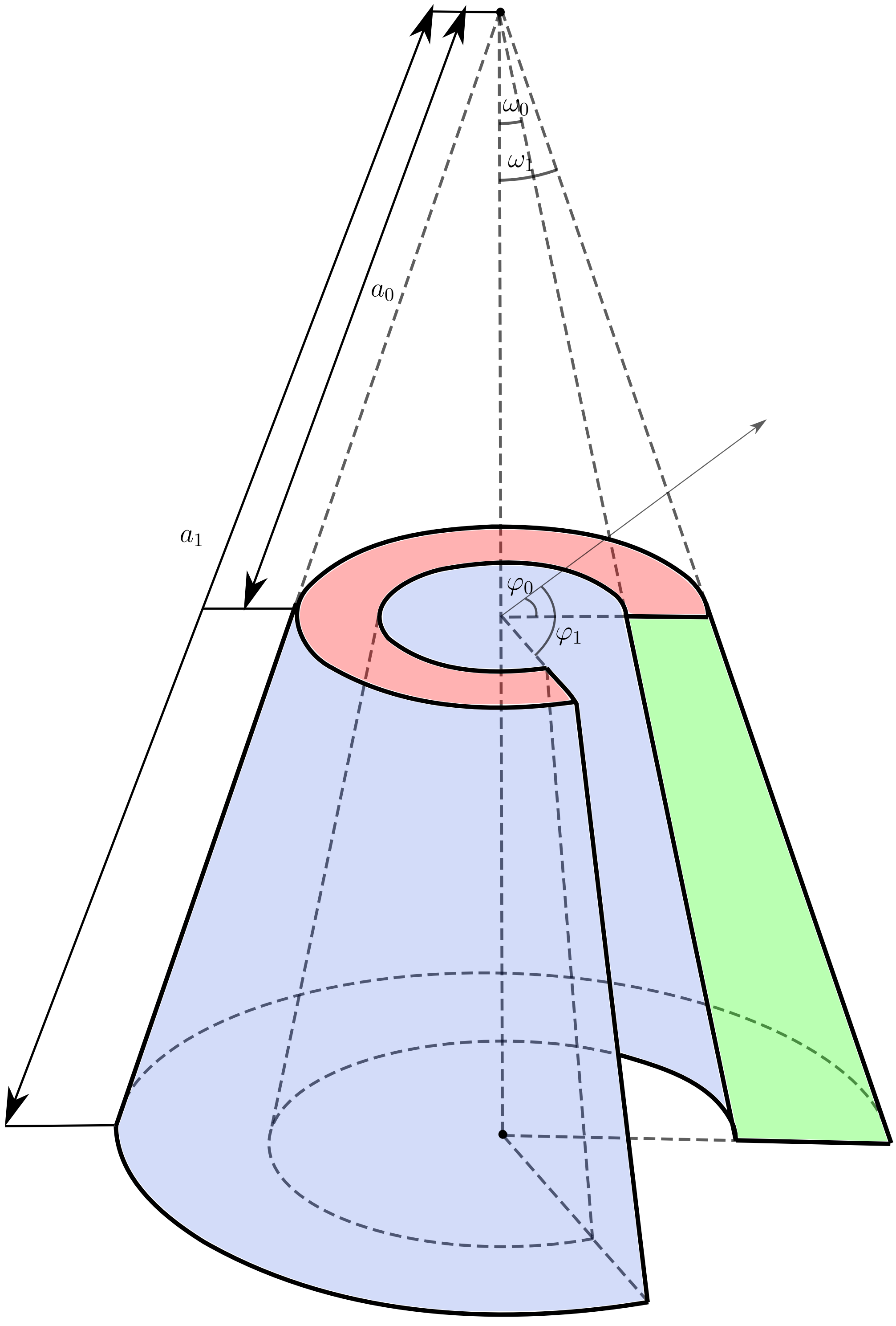

Рис. 1.1. зрізаний конус

Нехай маємо зрізаний, порожній усередині конус з вирізом (рис. 1.1). У сферичній системі координат (r, θ, φ) йому відповідає наступна область простору:

$$a_0 \leqslant r \leqslant a_1, \qquad \omega_0 \leqslant \theta \leqslant \omega_1, \qquad \varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1 \tag{1.0.1}$$

Нехай справедливі наступні умови:

1) На конічних гранях відсутня деформація по полярному куту, також справедливі умови ковзної обробки:

$$u_\theta\Big|_{\theta=\omega_0,\omega_1} = 0, \;\; \tau_{\theta r}\Big|_{\theta=\omega_0,\omega_1} = 0, \;\; \tau_{\theta\varphi}\Big|_{\theta=\omega_0,\omega_1} = 0. \tag{1.0.2}$$

2) На плоских гранях відсутня деформація по азимутальному куту φ, також справедливі умови ковзної обробки:

$$u_\varphi\Big|_{\varphi=\varphi_0,\varphi_1} = 0, \;\; \tau_{\varphi r}\Big|_{\varphi=\varphi_0,\varphi_1} = 0, \;\; \tau_{\varphi\theta}\Big|_{\varphi=\varphi_0,\varphi_1} = 0. \tag{1.0.3}$$

3) На одній з сферичних граней (на рис. 1.1 на нижній грані) прикладене розподілене навантаження інтенсивністю $p(\theta, \varphi)$, на інший напруження по r відсутнє. Ковзна обробка також присутня:

$$\begin{aligned} \sigma_r\Big|_{r=a_0} = 0, \;\; \sigma_r\Big|_{r=a_1} = -p(\theta, \varphi), \\ \tau_{r\theta}\Big|_{r=a_0,a_1} = 0, \qquad \tau_{r\varphi}\Big|_{r=a_0,a_1} = 0. \end{aligned} \tag{1.0.4}$$

У віпадку неравномірної температури конусу, у ньому виникатимуть об'ємні навантаження, позначимо їх інтенсивність як $\mathbf{T}(r, \theta, \varphi)$. Тоді можемо записати рівняння Ламе векторною формою [1]:

$$\mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda + \mu)\mathrm{grad}(\mathrm{div}\mathbf{u}) = -\mathbf{T}, \tag{1.0.5}$$

де μ і λ - параметри Ламе, Δ - векторний оператор Лапласа у сферичних координатах.

Разом з крайовими умовами (1.0.2) - (1.0.4) це рівняння утворює задачу, яку ми будемо досліджувати.

РОЗДІЛ 2

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

2.1. Зведення до трьох скалярних рівнянь

Спочатку перетворимо рівняння (1.0.5) наступним чином. Нехай μ означає коеффицент Пуасона, а G - модуль ссуву матеріалу. Перетворив рівняння, маємо

$$G\Delta\mathbf{u} + G\frac{\mathrm{grad}(\mathrm{div}\mathbf{u})}{1-2\mu} = -\mathbf{T}. \tag{2.1.1}$$

Позначимо

$$G\mathbf{u} = [u, v, w]^T.$$

Також введемо функції Z та Z^* наступним чином [1]:

$$\left\| \begin{matrix} Z(r,\theta,\varphi) \\ \\ Z^*(r,\theta,\varphi) \end{matrix} \right\| = \frac{1}{\sin\theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial\theta} \left\| \begin{matrix} v\sin\theta \\ \\ w\sin\theta \end{matrix} \right\| \pm \frac{\partial}{\partial\varphi} \left\| \begin{matrix} w \\ \\ v \end{matrix} \right\| \right\} \tag{2.1.2}$$

Застосував формули градієнту та дивергенції у сферичних координатах до (2.1.1), можемо розділити векторне рівняння на три скалярних рівняння відносно до u, v та w:

$$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial r}; \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}; \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}) \tag{2.1.3}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{f} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 f_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta f_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f_\varphi}{\partial\varphi} \tag{2.1.4}$$

$$\Delta u - \frac{2u}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial(v\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}w +$$
$$+\frac{1}{r^2(1-2\mu)}\left[r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial u}{\partial r} - 2u + r\frac{\partial^2 v}{\partial r\partial\theta} - \frac{\partial v}{\partial\theta} + r\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial v}{\partial r} -\right.$$
$$\left. - \operatorname{ctg}\theta v + r\csc\theta\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\varphi} - \csc\theta\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right] = -T_r.$$

$$r^2\Delta u - 2(u+Z) + \frac{1}{1-2\mu}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{Z}{r}\right)\right] = -r^2T_r. \quad (2.1.5)$$

Схожими перетвореннями, можемо отримати рівняння для двух інших компонент:

$$\begin{gathered} r^2\Delta v + 2\left[\frac{\partial u}{\partial\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right] - \frac{v}{\sin^2\theta} + \\ +\frac{r}{1-2\mu}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2u)}{\partial r} + \frac{Z}{r}\right] = -r^2T_\theta, \end{gathered} \quad (2.1.6)$$

$$\begin{gathered} r^2\Delta w + \frac{2}{\sin\theta}\left[\frac{\partial u}{\partial\varphi} + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right] - \frac{w}{\sin^2\theta} + \\ +\frac{r}{\sin\theta(1-2\mu)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2u)}{\partial r} + \frac{Z}{r}\right] = -r^2T_\varphi. \end{gathered} \quad (2.1.7)$$

Нехай

$$r^2\Delta u = \frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right] + \nabla_{\theta\varphi}u, \quad (2.1.8)$$

де

$$\nabla_{\theta\varphi}u = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right] + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

Домножимо обидві частини (2.1.6) на $\sin\theta$, придиференцюємо по θ, та розділимо на $\sin\theta$, після цього придиференцюємо (2.1.7) по φ та розділимо на $\sin\theta$. Просумував результати та спростив отримане рівняння за допомогою заміни (2.1.2), а потім з'єднав з (2.1.5) можемо отримати систему з двох рівнянь [1]

$$\begin{cases} r^2\Delta u - 2(u+Z) + \dfrac{1}{1-2\mu}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + r^2\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{Z}{r}\right)\right] = -r^2 T_r. \\ r^2\Delta Z + 2\nabla_{\theta\varphi}u + \dfrac{1}{1-2\mu}\nabla_{\theta\varphi}\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(r^2 u)}{\partial r} + Z\right] = \\ \qquad = -\dfrac{r^2}{\sin\theta}\left[\dfrac{\partial(\sin\theta T_\theta)}{\partial\theta} + \dfrac{\partial T_\varphi}{\partial\varphi}\right] \end{cases} \tag{2.1.9}$$

Якщо в попередніх спрощеннях замість додавання результатів від (2.1.6) та (2.1.7) відняти другий від першого, після спрощення та заміня маємо

$$\Delta Z^* = \frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\partial T_\theta}{\partial\varphi} - \frac{\partial(\sin\theta T_\varphi)}{\partial\theta}\right]. \tag{2.1.10}$$

Таким чином, ми звели задачу до розв'язання системи диференціальних рівнянь (2.1.9) відносно функцій $u(r,\theta,\varphi)$ та $Z(r,\theta,\varphi)$, та до розв'язання незалежного диференціального рівняння (2.1.10) відносно функції $Z^*(r,\theta,\varphi)$.

2.2. Розв'язання незалежного рівняння

2.2.1. Перше інтегральне перетворення

Нехай

$$T^*(r,\theta,\varphi) := \frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\partial T_\theta(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi} - \frac{\partial(\sin\theta T_\varphi(r,\theta,\varphi))}{\partial\theta}\right] \tag{2.2.1}$$

Таким чином рівняння (2.1.10) можно записати так:

$$\Delta Z^* = T^* \tag{2.2.2}$$

Розкроємо оператор Лапласа в сферичних координатах:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial Z^*}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial Z^*}{\partial\theta}\right] + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Z^*}{\partial\varphi^2} = T^*. \tag{2.2.3}$$

Розглянемо граничні умови на плоских гранях (1.0.3):

$$w\big|_{\varphi=\varphi_0,\varphi_1} = 0, \ \ \tau_{\varphi r}\big|_{\varphi=\varphi_0,\varphi_1} = 0, \ \ \tau_{\varphi\theta}\big|_{\varphi=\varphi_0,\varphi_1} = 0.$$

Врахуючи, що $Z^* = \frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\partial(w\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial v}{\partial\varphi}\right]$, а також застосуючи відношення між дотичними напруженями та переміщеннями в сферичних координатах

$$\tau_{\theta\varphi} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial w}{\partial\theta} - w\operatorname{ctg}\theta + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right], \qquad (2.2.4)$$

отримаємо

$$Z^*\big|_{\varphi=\varphi_0,\varphi_1} = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\big|_{\varphi=\varphi_0,\varphi_1} = 0 \qquad (2.2.5)$$

Хай $\varphi^* := \varphi - \varphi_1, a = \varphi_2 - \varphi_1$. Застосуємо скінчене сінус-перетворення Фурьє

$$f_\alpha = \int_0^a f(\varphi^* + \varphi_1)\sin\alpha\varphi^* d\varphi^* \qquad \alpha = \frac{\pi n}{a} = \alpha_n \qquad (2.2.6)$$

відносно змінної φ^*. Для цього помножимо наше рівняння $\sin\alpha\varphi^*$ та проінтегруємо по φ^* від 0 до a. Отримаємо

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial Z_\alpha^*}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial Z_\alpha^*}{\partial\theta}\right] +$$
$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\int_0^a \frac{\partial^2 Z^*(\varphi^*+\varphi_1)}{\partial\varphi^{*2}}\sin\alpha\varphi^* d\varphi^* = T_\alpha^*.$$

Проінтегруємо по частинам двічі останній інтеграл та підставимо граничні умови на плоских гранях:

$$\int_0^a \frac{\partial^2 Z^*(\varphi)}{\partial\varphi^{*2}}\sin\alpha\varphi^* d\varphi^* =$$
$$= \sin\alpha\varphi^*\frac{\partial Z^*}{\partial\varphi}\Big|_0^a - \alpha\int_0^a \frac{\partial Z^*}{\partial\varphi^*}\cos\alpha\varphi^* d\varphi^* =$$
$$= -\alpha\cos\alpha\varphi^* Z^*(\varphi^*+\varphi_1)\Big|_0^{\varphi_2-\varphi_1} - \alpha^2\int_0^a Z^*\sin\alpha\varphi^* d\varphi^* =$$
$$= -\alpha^2 Z_\alpha^*.$$

Разом маємо

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial Z^*_\alpha}{\partial r}\right]+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial Z^*_\alpha}{\partial\theta}\right]-\frac{\alpha^2}{\sin^2\theta}Z^*_\alpha=r^2T^*_\alpha. \qquad (2.2.7)$$

Також застосуємо це ж перетворення до граничних умов:

$$\begin{cases}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial Z^*_\alpha}{\partial r}-\frac{1}{r^2}Z^*_\alpha\right]\Big|_{r=a_0,a_1}=0\\ \frac{\partial Z^*_\alpha}{\partial\theta}\Big|_{\theta=\omega_0,\omega_1}=\left[\frac{\partial^2 w_\alpha}{\partial\theta^2}-w_\alpha\right]\Big|_{\theta=\omega_0,\omega_1}\end{cases} \qquad (2.2.8)$$

Тут $Z^*_\alpha=Z^*_\alpha(r,\theta)$, тобто мы звели задачу до двомірного виду.

2.2.2. Друге інтегральне перетворення

Розглянемо граничні умови на конічних гранях (1.0.2):

$$v\Big|_{\theta=\omega_0,\omega_1}=0,\;\;\tau_{\theta r}\Big|_{\theta=\omega_0,\omega_1}=0,\;\;\tau_{\theta\varphi}\Big|_{\theta=\omega_0,\omega_1}=0.$$

Так як $\frac{\partial v}{\partial\varphi}\Big|_{\theta=\omega_0,\omega_1}=0$, з 2.2.4 випливає, що

$$\left[\frac{\partial w}{\partial\theta}-w\operatorname{ctg}\theta\right]\Big|_{\theta=\omega_0,\omega_1}=0.$$

$$Z^*\Big|_{\theta=\omega_0,\omega_1}=\left[\frac{\partial w}{\partial\theta}+w\operatorname{ctg}\theta\right]\Big|_{\theta=\omega_0,\omega_1}=2\frac{\partial w}{\partial\theta}\Big|_{\theta=\omega_0,\omega_1}. \qquad (2.2.9)$$

Розглянемо $P^m_\nu(z), Q^m_\nu(z)$ - функції Лежандра перщого та другого роду. Як відомо, вони є розв'язками диференціального рівняння Лежандра [2]

$$(1-z^2)\frac{d^2\varphi(z)}{dz^2}-2z\frac{d\varphi(z)}{dz}+\left[\nu(\nu+1)-m^2\frac{1}{1-z^2}\right]\varphi(z)=0. \qquad (2.2.10)$$

Зробимо заміну $z := \cos\theta$. Тоді рівняння вище прийме вигляд

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{d\varphi(\cos\theta)}{\theta}\right]+\left[\nu(\nu+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\varphi(\cos\theta)=0. \tag{2.2.11}$$

Тепер знайдемо таку функцію φ, яка буде задовольняти граничним умовам

$$\varphi(\cos\theta)\Big|_{\theta=\omega_0,\omega_1}=0. \tag{2.2.12}$$

Так як відома фундаментальна система рішень (2.2.11), а саме $\varphi_1 = P_\nu^m(\cos\theta), \varphi_2 = Q_\nu^m(\cos\theta)$, то розв'язок будемо шукати у вигляді

$$\varphi(\cos\theta)=C_1P_\nu^m(\cos\theta)+C_2Q_\nu^m(\cos\theta).$$

Підставив (2.2.12) сюди, маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1P_\nu^m(\cos\omega_0)+C_2Q_\nu^m(\cos\omega_0)=0\\ C_1P_\nu^m(\cos\omega_1)+C_2Q_\nu^m(\cos\omega_1)=0\end{cases}$$

Звідци

$$C_1\left[P_\nu^m(\cos\omega_0)Q_\nu^m(\cos\omega_1)-P_\nu^m(\cos\omega_1)Q_\nu^m(\cos\omega_0)\right]=0.$$

Так як при $C_1 = 0$ маємо тривіальний розв'язок $\varphi = 0$, нехай $\nu_k^m (k = 0, 1, \ldots)$ будуть коренями рівняння

$$\Omega_\nu^m=P_\nu^m(\cos\omega_0)Q_\nu^m(\cos\omega_1)-P_\nu^m(\cos\omega_1)Q_\nu^m(\cos\omega_0)=0. \tag{2.2.13}$$

Неважно перевірити, що при $C_1 = Q_\nu^m(\cos\omega_1), C_2 = -P_\nu^m(\cos\omega_1)$ граничні умови задовольняються.

Таким чином шукана функція має вигляд

$$\varphi_c^m(\theta,\nu_k^m)=\varphi(\cos\theta)=P_\nu^m(\cos\theta)Q_\nu^m(\cos\omega_1)-P_\nu^m(\cos\omega_1)Q_\nu^m(\cos\theta). \tag{2.2.14}$$

Теперь можем сконструювати інтегральне перетворення

$$f_{\alpha k}(r)=\int_{\omega_0}^{\omega_1} f_\alpha(r,\theta)\sin\theta\varphi_c^m(\theta,\nu_k^m)d\theta. \tag{2.2.15}$$

При цьому положимо $m=\alpha$.

Помножимо обидві частини рівняння (2.2.7) на $\sin\theta\varphi_c^m(\theta,\nu_k^m)$ и проінтегруємо з ω_0 до ω_1 по θ:

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial Z_\alpha^*}{\partial r}\right]\sin\theta\varphi_c^m(\theta,\nu_k^m)d\theta=\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial Z_{\alpha k}^*}{\partial r}\right].$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial Z_\alpha^*}{\partial\theta}\right]\varphi_c^m(\theta,\nu_k^m)d\theta=$$
$$\varphi_c^m(\theta,\nu_k^m)\sin\theta\frac{\partial Z_\alpha^*}{\partial\theta}\Big|_{\omega_0}^{\omega_1}-\int_{\omega_0}^{\omega_1}\sin\theta\frac{\partial Z_\alpha^*}{\partial\theta}\frac{\partial\varphi_c^m(\theta,\nu_k^m)}{\partial\theta}d\theta=$$
$$=\left[\varphi_c^m(\theta,\nu_k^m)\Big|_{\theta=\omega_0,\omega_1}=0\right]=-\int_{\omega_0}^{\omega_1}\sin\theta\frac{\partial Z_\alpha^*}{\partial\theta}\frac{\partial\varphi_c^m(\theta,\nu_k^m)}{\partial\theta}d\theta=$$
$$=Z_\alpha^*\sin\theta\frac{\partial\varphi_c^m(\theta,\nu_k^m)}{\partial\theta}\Big|_{\omega_1}^{\omega_0}+\int_{\omega_0}^{\omega_1}Z_\alpha^*\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial\varphi_c^m(\theta,\nu_k^m)}{\partial\theta}\right]d\theta=(*)$$

Застосовуючи факт того, що $\varphi_c^m(\theta,\nu_k^m)$ задовольняють (2.2.11), маємо

$$(*)=Z_\alpha^*\sin\theta\frac{\partial\varphi_c^m(\theta,\nu_k^m)}{\partial\theta}\Big|_{\omega_1}^{\omega_0}+$$
$$+\int_{\omega_0}^{\omega_1}Z_\alpha^*\sin\theta\left[-\nu_k^m(\nu_k^m+1)+\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\varphi_c^m(\theta,\nu_k^m)d\theta=$$
$$=Z_\alpha^*\sin\theta\frac{\partial\varphi_c^m(\theta,\nu_k^m)}{\partial\theta}\Big|_{\omega_1}^{\omega_0}-$$
$$-\nu_k^m(\nu_k^m+1)\int_{\omega_0}^{\omega_1}Z_\alpha^*\sin\theta\varphi_c^m(\theta,\nu_k^m)d\theta+m^2\int_{\omega_0}^{\omega_1}Z_\alpha^*\frac{1}{\sin\theta}\varphi_c^m(\theta,\nu_k^m)d\theta=$$
$$=[m=\alpha]=$$
$$=Z_\alpha^*\sin\theta\frac{\partial\varphi_c^m(\theta,\nu_k^m)}{\partial\theta}\Big|_{\omega_1}^{\omega_0}-\nu_k^m(\nu_k^m+1)Z_{\alpha k}^*+\alpha^2\int_{\omega_0}^{\omega_1}Z_\alpha^*\frac{1}{\sin\theta}\varphi_c^m(\theta,\nu_k^m)d\theta.$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1}\left[-\frac{\alpha^2}{\sin^2\theta}Z_\alpha^*\right]\sin\theta\varphi_c^m(\theta,\nu_k^m)d\theta=-\alpha^2\int_{\omega_0}^{\omega_1}\frac{1}{\sin\theta}Z_\alpha^*\varphi_c^m(\theta,\nu_k^m)d\theta.$$

Разом, сумуючи усі частини та замінюючи неоднорідність на її трансформанту отримуємо рівняння

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial Z_{\alpha k}^*}{\partial r}\right]+Z_\alpha^*\sin\theta\frac{\partial\varphi_c^m(\theta,\nu_k^m)}{\partial\theta}\Big|_{\omega_1}^{\omega_0}-\nu_k^m(\nu_k^m+1)Z_{\alpha k}^*+$$
$$+\alpha^2\int_{\omega_0}^{\omega_1}Z_\alpha^*\frac{1}{\sin\theta}\varphi_c^m(\theta,\nu_k^m)d\theta-\alpha^2\int_{\omega_0}^{\omega_1}\frac{1}{\sin\theta}Z_\alpha^*\varphi_c^m(\theta,\nu_k^m)d\theta=r^2T_{\alpha k}^*$$

Розглянемо граничні умови для $Z_{\alpha k}$. Нехай

$$\tau^*=\frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\partial(\tau_{r\varphi}\sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\varphi}\right]. \tag{2.2.16}$$

Тоді має місце
$$2\tau^*=r\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{Z^*}{r}\right]. \tag{2.2.17}$$

Враховуючи граничні умови (1.0.4) для сферичних граней, умови ковзної відділки дають $\tau_{r\varphi}\big|_{r=a_0,a_1}=0$ та $\tau_{r\theta}\big|_{r=a_0,a_1}=0$, звідки маємо, що $\tau^*\big|_{r=a_0,a_1}=0$, звідци
$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{Z^*}{r}\right]\Big|_{r=a_0,a_1}=0,$$
або, розкрив похідну,

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial Z^*}{\partial r}-\frac{1}{r^2}Z^*\right]\Big|_{r=a_0,a_1}=0. \tag{2.2.18}$$

Після сумування частин та видалення подібніх доданків маємо

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[r^2\dfrac{\partial Z_{\alpha k}^*}{\partial r}\right]-\nu_k^m(\nu_k^m+1)Z_{\alpha k}^*=r^2T_{\alpha k}^*-Z_\alpha^*\sin\theta\dfrac{\partial\varphi_c^m(\theta,\nu_k^m)}{\partial\theta}\Big|_{\omega_1}^{\omega_0}\\ \left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial Z_{\alpha k}^*}{\partial r}-\dfrac{1}{r^2}Z_{\alpha k}^*\right]\Big|_{r=a_0,a_1}=0\end{cases} \tag{2.2.19}$$

Приведена задача є одномірною відносно $Z^*_{\alpha k}(r)$, отже ми звели незалежне рівняння (2.1.10) до одновимірної крайової задачі (2.2.28). При цьому за рахунок неосесиметричних умов маємо також невідому функцію в правій частині, що залежить від функції Z^*. В осесиметричних умовах крайові умови дозволяють позбутися цього доданка [3]. Таким чином після розв'язання однорідного варіанту завдання (2.2.28)і введення функції Гріна, необхідним буде розв'язання сингулярного інтегрального рівняння відносно Z^*_α.

2.2.3. Побудування функції Гріна

Введемо нові означення у рамках цього параграфу. Нехай

$$u(r) := Z^*_{\alpha k}(r)$$

$$f(r) = r^2 T^*_{\alpha k} - Z^*_\alpha(r,\theta)\sin\theta \frac{\partial \varphi^m_c(\theta, \nu^m_k)}{\partial \theta}\Big|^{\omega_0}_{\omega_1}$$
$$c := \nu^m_k(\nu^m_k + 1)$$

Тоді перепишемо задачу (2.2.28) у вигляді

$$\begin{cases} L(u) := r^2 u'' + 2ru' - cu = f(r) \\ \left[\dfrac{1}{r}u' - \dfrac{1}{r^2}u\right]\Big|_{r=a_0,a_1} = 0 \end{cases} \tag{2.2.20}$$

Нехай $g = \sqrt{4c+1}$

Фундаментальну систему розв'язків однорідного рівняння $L(u) = 0$ складають функції

$$\begin{aligned} \varphi_0(r) &= r^{\frac{1}{2}(g-1)} \\ \varphi_1(r) &= r^{-\frac{1}{2}(g+1)} \end{aligned} \tag{2.2.21}$$

Нескладно переконатися, що ці функції є лінійно незалежними, отож дійсно утворюють ФСР. Будемо шукати функцію Гріна у вигляді

$$G(r,t) = \begin{cases} b_{0,0}(t)\varphi_0(r) + b_{0,1}(t)\varphi_1(r), & a_0 \leqslant r < t \\ b_{1,0}(t)\varphi_0(r) + b_{1,1}(t)\varphi_1(r), & t < r \leqslant a_1 \end{cases} \tag{2.2.22}$$

Врахуємо властивості шуканої функції Гріна, а саме

$$\begin{cases} G(r,t)\big|_{r=t+0} - G(r,t)\big|_{r=t-0} = 0 \\ G'_r(r,t)\big|_{r=t+0} - G'_r(r,t)\big|_{r=t-0} = \dfrac{1}{t^2} \end{cases} \tag{2.2.23}$$

Також задовольнимо граничним умовам:

$$\left[\frac{1}{r}G'_r(r,t) - \frac{1}{r^2}G(r,t)\right]\big|_{r=a_0,a_1} = 0$$

Маємо систему з чотирьох рівнянь відносно $b_{i,j}$. Можемо розв'язати її за допомогою додатка Wolfram Mathematica (Додаток А). Отримаємо

$$b_{0,0}(t) = \frac{t^{\frac{1}{2}(-g-1)}\left((g-3)a_1^g + (g+3)t^g\right)}{(g-3)g\left(a_0^g - a_1^g\right)},$$

$$b_{0,1}(t) = \frac{a_0^g t^{\frac{1}{2}(-g-1)}\left((g-3)a_1^g + (g+3)t^g\right)}{g(g+3)\left(a_0^g - a_1^g\right)},$$

$$b_{1,0}(t) = \frac{t^{\frac{1}{2}(-g-1)}\left((g-3)a_0^g + (g+3)t^g\right)}{(g-3)g\left(a_0^g - a_1^g\right)},$$

$$b_{1,1}(t) = \frac{a_1^g t^{\frac{1}{2}(-g-1)}\left((g-3)a_0^g + (g+3)t^g\right)}{g(g+3)\left(a_0^g - a_1^g\right)}.$$

Звідци маємо функцію Гріна:

$$G(r,t) = \begin{cases} \frac{r^{\frac{1}{2}(-g-1)}t^{\frac{1}{2}(-g-1)}((g-3)a_0^g+(g+3)r^g)((g-3)a_1^g+(g+3)t^g)}{g(g^2-9)(a_0^g-a_1^g)}, & a_0 \leqslant r < t \\ \frac{r^{\frac{1}{2}(-g-1)}t^{\frac{1}{2}(-g-1)}((g-3)a_1^g+(g+3)r^g)((g-3)a_0^g+(g+3)t^g)}{g(g^2-9)(a_0^g-a_1^g)}, & t < r \leqslant a_1 \end{cases}$$

Після деяких спрощень можемо отримати

$$G(r,t) = \frac{1}{g^3 - 9g}\frac{1}{a_0^g - a_1^g}\begin{cases} F(r,a_0)\cdot F(t,a_1), & a_0 \leqslant r < t \\ F(t,a_0)\cdot F(r,a_1), & t < r \leqslant a_1 \end{cases}, \tag{2.2.24}$$

де

$$F(x,a) = x^{-\frac{1}{2}(g+1)}\cdot((g-3)a^g + (g+3)x^g) \tag{2.2.25}$$

Тоді неоднорідна задача (2.2.20) має рішення вигляду

$$u(r) = \int_{a_0}^{a_1} G(r,t)f(t)dt. \tag{2.2.26}$$

Повернемося до основних позначень:

$$Z^*_{\alpha k}(r) = \int_{a_0}^{a_1} t^2 G(r,t)T^*_{\alpha k}(t)dt - \int_{a_0}^{a_1} G(r,t)\left[Z^*_{\alpha}(t,\theta)\sin\theta\frac{\partial\varphi_c^m(\theta,\nu_k^m)}{\partial\theta}\right]\Big|_{\omega_1}^{\omega_0}dt \tag{2.2.27}$$

$$\begin{gathered}\int_{\omega_0}^{\omega_1} Z^*_{\alpha}(r,\theta)\sin\theta\varphi_c^m(\theta,\nu_k^m)d\theta = \int_{a_0}^{a_1} t^2 G(r,t)T^*_{\alpha k}(t)dt- \\ -\int_{a_0}^{a_1} G(r,t)\left[Z^*_{\alpha}(t,\theta)\sin\theta\frac{\partial\varphi_c^m(\theta,\nu_k^m)}{\partial\theta}\right]\Big|_{\omega_1}^{\omega_0}dt\end{gathered} \tag{2.2.28}$$

2.3. Розв'язання системи рівнянь

2.3.1. Перше інтегральне перетворення

Розглянемо систему рівнянь (2.1.9):

$$\begin{cases} r^2\Delta u - 2(u+Z) + \dfrac{1}{1-2\mu}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + r^2\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{Z}{r}\right)\right] = -r^2T_r. \\ r^2\Delta Z + 2\nabla_{\theta\varphi}u + \dfrac{1}{1-2\mu}\nabla_{\theta\varphi}\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(r^2u)}{\partial r} + Z\right] = \\ \qquad = -\dfrac{r^2}{\sin\theta}\left[\dfrac{\partial(\sin\theta T_\theta)}{\partial\theta} + \dfrac{\partial T_\varphi}{\partial\varphi}\right] \end{cases}$$

Позначимо

$$-r^2T_r = T_1(r,\theta,\varphi) \tag{2.3.1}$$

$$-\frac{r^2}{\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta T_\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial T_\varphi}{\partial\varphi}\right] = T_2(r,\theta,\varphi). \tag{2.3.2}$$

Також, згідно с попередніх позначень

$$r^2\Delta u = \frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right] + \nabla_{\theta\varphi}u,$$

також нехай

$$\mathcal{D}_r(u,Z) = \frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right] + \frac{1}{1-2\mu}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{Z}{r}\right)\right]. \tag{2.3.3}$$

Після заміни маємо

$$\begin{cases} \nabla_{\theta\varphi}u - 2(u+Z) + \mathcal{D}_r(u,Z) = T_1 \\ \nabla_{\theta\varphi}Z + 2\nabla_{\theta\varphi}u + \dfrac{\partial}{\partial r}\left[r^2\dfrac{\partial Z}{\partial r}\right] + \dfrac{1}{1-2\mu}\nabla_{\theta\varphi}\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(r^2u)}{\partial r} + Z\right] = T_2 \end{cases} \tag{2.3.4}$$

Розглянемо граничні умови функцій $u(r,\theta,\varphi)$ та $Z(r,\theta,\varphi)$ стосовно до змінної φ. Використуючи умови на плоскій грані (1.0.3):

$$w\big|_{\varphi=\varphi_0,\varphi_1}=0,\ \ \tau_{\varphi r}\big|_{\varphi=\varphi_0,\varphi_1}=0,\ \ \tau_{\varphi\theta}\big|_{\varphi=\varphi_0,\varphi_1}=0.$$

Використуючи (2.2.4)

$$\tau_{r\varphi}=\frac{1}{r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{w}{r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right]\implies\frac{\partial u}{\partial\varphi}\big|_{\varphi=\varphi_0,\varphi_1}=0 \qquad (2.3.5)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial\varphi}\big|_{\varphi=\varphi_0,\varphi_1}=\frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi}\sin\theta\right)+\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right]\big|_{\varphi=\varphi_0,\varphi_1}=0 \qquad (2.3.6)$$

Хай тут і далі $\varphi_0=0$. Застосуємо скінчене косинус-перетворення Фурьє

$$f_\alpha=\int_0^{\varphi_1}f(\varphi)\cos\alpha\varphi d\varphi \qquad \alpha=\frac{\pi(n-1)}{\varphi_1}=\alpha_n \qquad (2.3.7)$$

Застосуємо перетворення до $\nabla_{\theta\varphi}f$:

$$\nabla_{\theta\varphi}f=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right]+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$
$$\int_0^{\varphi_1}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right]\cos\alpha\varphi d\varphi=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial f_\alpha}{\partial\theta}\right]$$
$$\int_0^{\varphi_1}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\cos\alpha\varphi d\varphi=\frac{\partial f}{\partial\varphi}\cos\alpha\varphi\Big|_0^{\varphi_1}+\alpha\int_0^{\varphi_1}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\sin\alpha\varphi d\varphi=$$
$$=(-1)^n\alpha\frac{\partial f}{\partial\varphi}\big|_{\varphi=\varphi_1}+\alpha\frac{\partial f}{\partial\varphi}\big|_{\varphi=0}+\alpha f\sin\alpha\varphi\Big|_0^{\varphi_1}-\alpha^2\int_0^{\varphi_1}f\cos\alpha\varphi d\varphi=$$
$$=(-1)^n\alpha\frac{\partial f}{\partial\varphi}\big|_{\varphi=\varphi_1}+\alpha\frac{\partial f}{\partial\varphi}\big|_{\varphi=0}-\alpha^2 f_\alpha$$

Позначимо

$$\nabla^*_\alpha f_\alpha(r,\theta)=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial f_\alpha}{\partial\theta}\right]-\frac{\alpha^2}{\sin^2\theta}f_\alpha. \qquad (2.3.8)$$

Застосуємо перетворення до першого з рівнянь (2.3.4) та врахуємо, що з граничних умов $\frac{\partial u}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=0,\varphi_1} = 0$:

$$\nabla^*_\alpha u_\alpha - 2(u_\alpha + Z_\alpha) + \mathcal{D}_r(u_\alpha, Z_\alpha) = T_{1\alpha} \tag{2.3.9}$$

Застосуємо перетворення до другого рівняння системи, враховуючи, що $\frac{\partial Z}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=0,\varphi_1} = 0$:

$$\nabla^*_\alpha Z_\alpha + 2\nabla^*_\alpha u_\alpha + \frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \frac{\partial Z_\alpha}{\partial r}\right] + \frac{1}{1-2\mu}\nabla^*_\alpha \left[\frac{1}{r}\frac{\partial (r^2 u_\alpha)}{\partial r} + Z_\alpha\right] = T_{2\alpha}$$

Позначимо

$$\mu_* = \frac{2-2\mu}{1-2\mu}; \mu_0 = \frac{1}{1-2\mu} \tag{2.3.10}$$

Тоді можемо записати систему рівнянь відносно трансформант Z_α та u_α:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \frac{\partial u_\alpha}{\partial r}\right] + \mu_*^{-1}\nabla^*_\alpha u_\alpha - \mu_*^{-1}(2+\mu_0) Z_\alpha - 2\mu_*^{-1} u_\alpha + \mu_*^{-1}\mu_0 r \frac{\partial Z_\alpha}{\partial r} = \mu_*^{-1} T_{1\alpha} \\ \frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \frac{\partial Z_\alpha}{\partial r}\right] + 2\mu_* \nabla^*_\alpha u_\alpha + \mu_* \nabla^*_\alpha Z_\alpha + \mu_0 \nabla^*_\alpha \left[r \frac{\partial u_\alpha}{\partial r}\right] = T_{2\alpha} \end{cases} \tag{2.3.11}$$

2.3.2. Друге інтегральне перетворення

Застосуємо інтегральне перетворенняб схоже на (2.2.15) відносно θ до системи рівнянь. Щоб задовольнити крайовим умовам на конічних гранях, покладемо

$$\varphi_*^m(\theta, \nu) = P_\nu^m(\cos\theta)\frac{d}{d\omega_1} Q_\nu^m(\cos\omega_1) - Q_\nu^m(\cos\theta)\frac{d}{d\omega_1} P_\nu^m(\cos\omega_1). \tag{2.3.12}$$

Також, нехай ν_k^m - корені трансцендентного рівняння

$$\frac{dP_\nu^m(\cos\omega_0)}{d\omega_0}\frac{dQ_\nu^m(\cos\omega_1)}{d\omega_1} - \frac{dQ_\nu^m(\cos\omega_0)}{d\omega_0}\frac{dP_\nu^m(\cos\omega_1)}{d\omega_1} = 0 \tag{2.3.13}$$

$$f_{\alpha k}(r) = \int_{\omega_0}^{\omega_1} f_\alpha(r,\theta)\varphi_*^m(\theta,\nu_k^m)\sin\theta d\theta. \qquad (2.3.14)$$

Розглянемо застосування цього перетворення до $\nabla_\alpha^* f(r,\theta)$:

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} \left[\nabla_\alpha^* f(r,\theta)\right] \varphi_*^m(\theta,\nu_k^m)\sin\theta d\theta =$$
$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right]\varphi_*^m(\theta,\nu_k^m)d\theta - \alpha^2\int_{\omega_0}^{\omega_1}\frac{1}{\sin\theta} f\varphi_*^m(\theta,\nu_k^m)d\theta;$$
$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right]\varphi_*^m(\theta,\nu_k^m)d\theta =$$
$$\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\varphi_*^m(\theta,\nu_k^m)\Big|_{\omega_0}^{\omega_1} - \int_{\omega_0}^{\omega_1}\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{d\varphi_*^m(\theta,\nu_k^m)}{d\theta}d\theta = (*)$$

За умови, що $f(r,\theta)$ задовольняє $\frac{\partial f}{\partial\theta}\big|_{w_i} = 0$ маємо

$$(*) = -\int_{\omega_0}^{\omega_1}\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{d\varphi_*^m(\theta,\nu_k^m)}{d\theta}d\theta =$$
$$-f\sin\theta\frac{d\varphi_*^m(\theta,\nu_k^m)}{d\theta}\Big|_{\omega_0}^{\omega_1} + \int_{\omega_0}^{\omega_1} f\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{d\varphi_*^m(\theta,\nu_k^m)}{d\theta}\right]d\theta = (*)$$

З (2.3.13) та (2.3.12) маємо $\frac{d\varphi_*^m(\theta,\nu_k^m)}{d\theta}\Big|_{\omega_0}^{\omega_1} = 0$, отож

$$(*) = \int_{\omega_0}^{\omega_1} f\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{d\varphi_*^m(\theta,\nu_k^m)}{d\theta}\right]d\theta.$$

Враховуючи властивості функцій Лежандра, при $m = \alpha$ отримаємо

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1}\left[\nabla_\alpha^* f(r,\theta)\right]\varphi_*^m(\theta,\nu_k^m)\sin\theta d\theta = -N_\nu f_k(r), \qquad (2.3.15)$$

де $N_\nu = \nu(\nu+1)$.

Отож, після застосування перетворення до системи (2.3.11) маємо таку систему відносно одновимірних трансформант $u_{\alpha k}(r)$ та $Z_{\alpha k}(r)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial u_{\alpha k}}{\partial r}\right] - \mu_*^{-1}(2+N_\nu)u_{\alpha k} - \mu_*^{-1}(2+\mu_0)Z_{\alpha k} - \mu_*^{-1}\mu_0 r\frac{\partial Z_{\alpha k}}{\partial r} = \mu_*^{-1}T_{1\alpha k} \\ \frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial Z_{\alpha k}}{\partial r}\right] - 2\mu_* N_\nu u_{\alpha k} - \mu_* N_\nu Z_{\alpha k} - \mu_0 N_\nu\left[r\frac{\partial u_{\alpha k}}{\partial r}\right] = T_{2\alpha k} \end{cases} \tag{2.3.16}$$

з крайовими умовами

$$\begin{gathered} N_\nu u_{\alpha k}(a_i) + Z_{\alpha k}(a_i) - a_i Z'_{\alpha k}(a_i) = 0 \\ 2\mu u_{\alpha k}(a_0) - (1-\mu)a_0 u'_{\alpha k}(a_0) + \mu Z_{\alpha k}(a_0) = -T_{\alpha k}(a_0) \\ 2\mu u_{\alpha k}(a_1) - (1-\mu)a_1 u'_{\alpha k}(a_1) + \mu Z_{\alpha k}(a_1) = (1-2\mu)a_1(p_{\alpha k} - T_{\alpha k}(a_1)) \end{gathered} \tag{2.3.17}$$

Таким чином, ми звели задачу до одновимірного випадку.

2.3.3. Побудування матриці Гріна

Для формулювання задачі у векторній формі положимо такі функції:

$$\begin{gathered} y_0(r) = u_{\alpha k}(r), \\ y_1(r) = r u'_{\alpha k}(r), \\ y_2(r) = Z_{\alpha k}(r), \\ y_3(r) = r Z'_{\alpha k}(r), \\ f_1(r) = \mu_*^{-1}T_{1\alpha k}(r), \\ f_2(r) = T_{2\alpha k}(r). \end{gathered}$$

Тоді можемо записати рівняння у формі

$$r y'(r) - P_k y(r) = f(r), \tag{2.3.18}$$

де

$$y(r)=\begin{Vmatrix} y_0(r)\\ y_1(r)\\ y_2(r)\\ y_3(r)\end{Vmatrix}\quad P_k=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ \mu_*^{-1}(2+N_\nu) & -1 & \mu_*^{-1}(2+\mu_0) & \mu_*^{-1}\mu_0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 2\mu_* N_\nu & \mu_0 N_\nu & \mu_* N_\nu & -1\end{Vmatrix}\quad f(r)=\begin{Vmatrix} 0\\ f_1(r)\\ 0\\ f_2(r)\end{Vmatrix}$$

Для побудови фундаментальної матриці рівняння (2.3.18) скористаємося інтегральним перетворенням Мелліна:

$$f_s=\mathcal{M}f(x)=\int_0^\infty x^{s-1}f(x)dx. \tag{2.3.19}$$

Зворотнє перетворення дається формулою

$$f(x)=\mathcal{M}^{-1}f_s=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s}f_s ds. \tag{2.3.20}$$

Застосуємо перетворення до рівняння:

$$(-sI-P_k)y_s=f_s \tag{2.3.21}$$

Звідци

$$y_s=(-sI-P_k)^{-1}f_s \tag{2.3.22}$$

та

$$\begin{gathered} y(r)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} r^{-s}(-sI-P_k)^{-1}f_s ds=\\ =\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} r^{-s}(-sI-P_k)^{-1}\left[\int_0^\infty \xi^{s-1}f(\xi)d\xi\right]ds=\\ =\int_0^\infty \frac{1}{\xi}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}(-sI-P_k)^{-1}\left(\frac{r}{\xi}\right)^{-s}ds\right]f(\xi)d\xi \end{gathered}$$

Позначимо

$$E(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (\xi I - P_k)^{-1} x^{\xi} d\xi \tag{2.3.23}$$

Тоді маємо

$$y(r) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\xi} E(\frac{r}{\xi}) f(\xi) d\xi, \tag{2.3.24}$$

Отже шукана фундаментальна матриця має вигляд

$$\Phi(r,\xi) = \frac{1}{\xi} E(\frac{r}{\xi}) \tag{2.3.25}$$

Отримати явний вираз для фундаментальної матриці можна, скориставшись розкладенням оберненої матриці за допомогою характеристичного поліному [4] та основною теоремою про лишки, позбувшись інтегралу по комплексній площині.

Для побудови функції Гріна запишемо крайові умови (2.3.17) у матричній формі:

$$U[y(r)] = Ay(a_0) + By(a_1) = c, \tag{2.3.26}$$

де A, B - квадратні матриці, які нескладно отримати з крайових умов, а c - постійний вектор, який теж можна отримати у явному вигляді.

Знайдемо базисну матрицю векторної крайової задачі, тобто таку $\Psi(r)$, що

$$r\Psi'(r) - P_k\Psi(r) = 0; U[\Psi(r)] = I \tag{2.3.27}$$

Відомо, що якщо $Z(r)$ - фундаментальний розв'язок рівняння, то базисна матриця дається формулою [5]

$$\Psi(r) = Z(U[Z])^{-1} \tag{2.3.28}$$

Можна перевірити, що матриця [5]

$$Z(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} (\xi I - P_k)^{-1} r^{\xi} d\xi \tag{2.3.29}$$

є фундаментальним розв'язком рівняння (2.3.18). Тоді, аналогічно фундаментальній матриці, можна скористатися властивостями матриць та теоремою про лишки, щоб отримати явний вигляд $Z(r)$ і $\Psi(r)$. Тоді матриця Гріна дається формулою [5]

$$G(r,\xi) = \frac{1}{\xi}E(\frac{r}{\xi}) - \frac{1}{\xi}\Psi(r)E(\frac{r}{\xi}), \tag{2.3.30}$$

і розв'язок крайової задачі визначається формулою

$$y(r) = \int_{a_0}^{a_1} G(r,\xi)f(\xi)d\xi - \Psi(r)\cdot c \tag{2.3.31}$$

РОЗДІЛ 3

ВИСНОВКИ

У даній роботі нам вдалося звести зазначену задачу до одновимірного інтегрального рівняння (2.2.28). Наступним кроком до отримання розв'язку задачі є розв'язання інтегрального рівняння (2.3.16) та зазначення обернених перетворень. Після цього буде отримано точний розв'язок задачі у рядах.

ДОДАТОК А

КОД ДЛЯ ПОШУКУ ФУНКЦІЇ ГРІНА

```
In[10]:= ϕ0[r_] := r^(1/2 (g - 1))
         ϕ1[r_] := r^(-1/2 (g + 1))
         Lg[r_, t_] := b0,0[t] ϕ0[r] + b0,1[t] ϕ1[r]
         Rg[r_, t_] := b1,0[t] ϕ0[r] + b1,1[t] ϕ1[r]
         U[F_] := 1/r D[F, r] - 1/r^2 F

In[15]:= sol =
          Solve[{
              (U[Lg[r, t]] == 0) /. {r → a0},
              (U[Rg[r, t]] == 0) /. {r → a1},
              (Rg[r, t] - Lg[r, t] == 0) /. {r → t},
              (D[Rg[r, t], r] - D[Lg[r, t], r] == 1/t^2) /. {r → t}
            }, {b0,0[t], b0,1[t], b1,0[t], b1,1[t]}] // FullSimplify // First
```

Out[15]= $\left\{b_{0,0}(t) \to \frac{t^{\frac{1}{2}(-g-1)}\left((g-3)\,a_1^g+(g+3)\,t^g\right)}{(g-3)\,g\,\left(a_0^g-a_1^g\right)},\ b_{0,1}(t) \to \frac{a_0^g\,t^{\frac{1}{2}(-g-1)}\left((g-3)\,a_1^g+(g+3)\,t^g\right)}{g\,(g+3)\,\left(a_0^g-a_1^g\right)},\ b_{1,0}(t) \to \frac{t^{\frac{1}{2}(-g-1)}\left((g-3)\,a_0^g+(g+3)\,t^g\right)}{(g-3)\,g\,\left(a_0^g-a_1^g\right)},\ b_{1,1}(t) \to \frac{a_1^g\,t^{\frac{1}{2}(-g-1)}\left((g-3)\,a_0^g+(g+3)\,t^g\right)}{g\,(g+3)\,\left(a_0^g-a_1^g\right)}\right\}$

Повний вираз для лівої та правої частин:

```
In[20]:= Lg[r, t] /. sol // FullSimplify
         Rg[r, t] /. sol // FullSimplify
```

Out[20]= $\frac{r^{\frac{1}{2}(-g-1)}\,t^{\frac{1}{2}(-g-1)}\left((g-3)\,a_0^g+(g+3)\,r^g\right)\left((g-3)\,a_1^g+(g+3)\,t^g\right)}{g\,(g^2-9)\left(a_0^g-a_1^g\right)}$

Out[21]= $\frac{r^{\frac{1}{2}(-g-1)}\,t^{\frac{1}{2}(-g-1)}\left((g-3)\,a_1^g+(g+3)\,r^g\right)\left((g-3)\,a_0^g+(g+3)\,t^g\right)}{g\,(g^2-9)\left(a_0^g-a_1^g\right)}$

Перевірка на властивості функції Гріна:

```
In[16]:= (1/r D[Lg[r, t], r] - 1/r^2 Lg[r, t] == 0) /. sol /. {r → a0} // FullSimplify
         (1/r D[Rg[r, t], r] - 1/r^2 Rg[r, t] == 0) /. sol /. {r → a1} // FullSimplify
         (Rg[r, t] - Lg[r, t]) /. sol /. {r → t} // FullSimplify
         (D[Rg[r, t], r] - D[Lg[r, t], r]) /. sol /. {r → t} // FullSimplify

Out[16]= True

Out[17]= True

Out[18]= 0

Out[19]= 1/t^2
```

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. G. Ya. Popov. Reduction of equations of motion of an elastic medium to one independent and two coupled equations. *Doklady Physics*, 47(5):397–400, May 2002.
2. United States, Harry Bateman, William O. (William Orville) Douglas, and Arthur Erdelyi. *Higher transcendental functions*. 1953.
3. G.Ya. Popov. Axisymmetric problems of the theory of elasticity for a truncated hollow cone. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 69(3):417–426, January 2005.
4. Feliks R Gantmacher. *The theory of matrices*. Taylor & Francis, 1964.
5. Abdymanapov S. A. Popov G. Ya. and Yefimov V. V. *Green's Functions and Matrices of One-dimensional Boundary-value Problems*. Izd. Rauan, 1999.