

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені І. І. МЕЧНИКОВА
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФІЗИКИ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

А. О. Кореновський

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ
(елементарний курс)

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

ОДЕСА
ОНУ
2024

**УДК 517(075)
К663**

Автор:

А. О. Кореновський, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математичного аналізу.

Рецензенти:

М. О. Малаксіано, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри технічної кібернетики й інформаційних технологій імені проф. Р. В. Меркта Одеського національного морського університету;

Я. А. Воробйов, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики, інформатики та інформаційної діяльності Ізмаїльського державного гуманітарного університету.

*Рекомендовано до друку вченою радою
ОНУ імені І. І. Мечникова.
Протокол № 2 від 19 вересня 2023 р.*

Кореновський А. О.

К663 Математичний аналіз (елементарний курс) : навч. посіб. / А. О. Кореновський. – Одеса : Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2024. – 198 с.

ISBN 978-617-689-501-5

Написання такого посібника обумовлене математичною підготовкою сучасних випускників середньої школи, багато з яких змушені були навчатись дистанційно. Цей посібник призначений для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти нематематичних спеціальностей природничих факультетів, де програма навчання включає вищу математику. В ньому наведені основні положення математичного аналізу функцій однієї дійсної змінної, а саме, теорія границь, диференціальне та інтегральне числення, теорія рядів. Матеріал викладений у нестрогій, ознайомчій формі, майже всі доведення виключені.

Посібник може виявитись корисним також і учням ліцеїв, які бажать поглибити свої знання з математичного аналізу та підготуватись до фундаментального його вивчення.

УДК 517(075)

ISBN 978-617-689-501-5

© Кореновський А. О., 2024

© Одеський національний університет
імені І. І. Мечникова, 2024

Зміст

Вступ	8
Розділ 1. Числові множини та їх властивості	9
1.1 Квантори та логічні операції	9
1.2 Множини та операції над ними	10
1.3 Аксиоматичне означення множини дійсних чисел	11
1.4 Натуральні числа, принцип математичної індукції	13
1.5 Обмежені множини, існування точних меж	17
1.6 Цілі числа, принцип Архімеда	19
1.7 Раціональні числа, щільність	20
1.8 Дійсні числа, добування коренів	21
1.9 Модуль числа та його властивості	22
1.10 Деякі стандартні множини	23
Контрольні питання	24
Розділ 2. Границі послідовностей	25
2.1 Означення збіжності послідовності	25
2.2 Властивості збіжних послідовностей	27
2.3 Граничний перехід та арифметичні операції	29
2.4 Нескінченно малі послідовності	31
2.5 Нескінченно великі послідовності	31
2.6 Деякі види неозначеностей	32
2.7 Підпослідовності. Лема Больцано – Вейерштрасса	33

2.8	Критерій Коші	34
2.9	Монотонні послідовності	35
2.10	Число e	39
2.11	Частинні границі. Верхня та нижня границі	40
	Контрольні питання	43
Розділ 3. Границі функцій		44
3.1	Границя функції і її елементарні властивості	44
3.2	Перша визначна границя	49
3.3	Односторонні та нескінченні границі, границі на нескінченності	51
3.4	Асимптоти	53
3.5	Критерій Коші	53
3.6	Монотонні функції	54
3.7	Заміна змінної у границях	55
3.8	Частинні границі. Верхня та нижня границі функцій	56
	Контрольні питання	57
Розділ 4. Неперервні функції		58
4.1	Означення та приклади	58
4.2	Класифікація точок розриву	61
4.3	Неперервність і арифметичні операції	63
4.4	Неперервність складеної функції (композиції)	63
4.5	Неперервність та розриви монотонної функції	64
4.6	Властивість проміжних значень	66
4.7	Теореми Вейєрштрасса	67
4.8	Обернена функція	68
4.9	Показникова, логарифмічна та степенева функції	70
4.10	Друга визначна границя	72
4.11	Порівняння логарифмічної, степеневої та показникової функцій	73
4.12	Еквівалентні функції. Символи Ландау	74
	Контрольні питання	77

Розділ 5. Диференціальне числення	78
5.1 Означення та елементарні властивості	78
5.1.1 Диференційовність та арифметичні операції . . .	81
5.1.2 Похідна композиції та оберненої функцій	82
5.2 Таблиця похідних основних елементарних функцій . . .	83
5.3 Дослідження функцій на диференційовність	86
5.3.1 Дослідження функцій на диференційовність та обчислення похідних за означенням	86
5.3.2 Дослідження на диференційовність функції, яка задана різними формулами на різних проміжках . . .	87
5.3.3 Знаходження рівняння дотичної та нормалі до графіка диференційовної функції в точці	89
5.3.4 Знаходження лінійної частини приросту диференційовної функції в заданій точці та обчислення наближеного значення функції, замінюючи її приріст лінійною частиною	89
5.4 Основні теореми диференціального числення	90
5.5 Правила Лопіталя	91
5.5.1 Приклади застосування правил Лопіталя	92
5.6 Формула Тейлора	93
5.6.1 Приклад розвинення функції	95
5.6.2 Обчислення границь з використанням формули Тейлора	96
5.6.3 Формула Тейлора із залишком у формі Лагранжа	98
5.7 Дослідження функцій за допомогою похідних	98
5.7.1 Приклади знаходження проміжків монотонності функції за допомогою похідної	98
5.7.2 Знаходження екстремумів функцій з використанням похідних першого та вищих порядків, знаходження найбільшого та найменшого значень функції . . .	99
5.7.3 Дослідження функцій на опуклість за допомогою похідних	101

5.8	Повне дослідження функцій та побудова їх графіків . . .	102
5.8.1	Приклади повного дослідження функцій та побудови їх графіків	103
	Контрольні питання	111
Розділ 6. Невизначений інтеграл		112
6.1	Означення та таблиця інтегралів	112
6.2	Елементарні властивості невизначеного інтеграла	115
6.2.1	Інтегрування частинами та заміна змінної	116
6.3	Інтегрування деяких спеціальних класів функцій	119
6.3.1	Інтегрування раціональних функцій	119
6.3.2	Інтеграли виду $\int R(\sin x, \cos x) dx$	125
6.3.3	Інтеграли виду $\int R\left(x^{\frac{p_1}{q_1}}, \dots, x^{\frac{p_n}{q_n}}\right) dx$	128
6.3.4	Інтеграли виду $\int R\left(x, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^{1/m}\right) dx$	128
6.4	Приклади обчислення інтегралів	129
	Контрольні питання	130
Розділ 7. Визначений інтеграл (інтеграл Рімана)		132
7.1	Означення та елементарні властивості	132
7.2	Властивості інтегрованих функцій	135
7.3	Інтеграл зі змінною верхньою межею	137
7.4	Подальші властивості інтеграла Рімана	140
7.5	Застосування інтеграла Рімана	143
7.5.1	Обчислення площ	143
7.5.2	Площа в полярних координатах	145
7.5.3	Довжина шляху	146
7.5.4	Об'єм тіла обертання	148
7.5.5	Площа поверхні тіла обертання	148
	Контрольні питання	148
Розділ 8. Числові ряди		149
8.1	Означення та елементарні властивості	149
8.2	Елементарні властивості збіжних рядів	152

8.3	Ряди з невід’ємними доданками	153
8.3.1	Ознака порівняння	154
8.3.2	Ознака Даламбера	156
8.3.3	Ознака Коші	158
8.3.4	Інтегральна ознака	159
8.4	Знакозмінні ряди. Ознака Лейбниця	160
8.5	Абсолютна та умовна збіжність. Перестановки рядів . .	161
8.6	Множення рядів. Теорема Коші	163
8.7	Нескінченні добутки	163
	Контрольні питання	165
Розділ 9. Функціональні послідовності та ряди		166
9.1	Означення та приклади	166
9.2	Рівномірна збіжність	167
9.2.1	Критерій Коші	172
9.2.2	Ознака Вейерштрасса	173
9.3	Рівномірна збіжність та неперервність	174
9.4	Рівномірна збіжність та інтегрування	176
9.5	Рівномірна збіжність та диференціювання	177
9.6	Перестановка граничних переходів	179
	Контрольні питання	180
Розділ 10. Степеневі ряди та ряди Тейлора		181
10.1	Структура множини точок збіжності степеневого ряду .	181
10.2	Рівномірна збіжність та неперервність суми	185
10.3	Почленне інтегрування та диференціювання	185
10.4	Ряди Тейлора	188
10.5	Розвинення основних елементарних функцій	190
	Контрольні питання	194
Рекомендована література		195

Вступ

Написання такого посібника обумовлене математичною підготовкою сучасних випускників середньої школи, багато з яких змушені були навчатись дистанційно. Цей посібник призначений для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти нематематичних спеціальностей природничих факультетів, де програма навчання включає вищу математику. В ньому наведені основні положення математичного аналізу функцій однієї дійсної змінної, а саме, теорія границь, диференціальне та інтегральне числення, теорія числових та функціональних рядів.

Матеріал викладений у нестрогій, ознайомчій формі, майже всі доведення виключені. Основна увага зосереджена на роз'ясненні різних понять аналізу та співвідношень між ними, а також на їх застосуванні до розв'язування типових та практичних задач. За змістом курс поділений на 10 розділів, кожен із яких завершується питаннями для самоконтролю. Наведений список рекомендованої літератури.

Посібник може виявитись корисним також і учням старших класів ліцеїв, які бажають поглибити свої знання з математичного аналізу та підготуватись до фундаментального його вивчення.

Розділ 1. Числові множини та їх властивості

1.1 Квантори та логічні операції

Кванторами називають логічні символи, якими позначають словосполучення, що часто зустрічаються у різних математичних міркуваннях. Зазвичай використовуються квантор загальності ($\forall$) і квантор існування ($\exists$). Квантор загальності $\forall$ означає такі словосполучення: "для будь-якого", "для кожного", "для всіх" і т. п. У визначеному сенсі протилежний до квантору загальності, квантор існування $\exists$ означає: "знайдеться", "існує" і т. п. Словосполучення "існує єдиний" позначають через $\exists!$.

Математика як наука складається із висловів, які називаються твердженнями (теоремами, лемами і т. п.). Кожне твердження є або істинним, або хибним, але жодне твердження не може бути істинним і хибним одночасно, інакше це не може називатись твердженням. Істинність тверджень встановлюється за допомогою математичних міркувань, вони називаються доведеннями. Зазвичай твердження полягає у тому, що за деякої умови A справедливий якийсь висновок B , пишуть це так: $A \Rightarrow B$, або $B \Leftarrow A$ і кажуть: " A тягне B ", "якщо A то B ", "з A випливає B ", " B випливає з A ", " B є необхідною умовою для A ", " A є достатньою умовою для B ", " B справедливе за умови A ". Символи $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ називають імплікаціями. Твердження $A \Leftarrow B$ називають оберненим до твердження $A \Rightarrow B$. Якщо одночасно $A \Rightarrow B$ і $A \Leftarrow B$, то кажуть, що A еквівалентне (рівносильне) B ("для того щоб A необхідно і достатньо щоб B ", " A тоді і лише тоді коли B ") і позначають так: $A \Leftrightarrow B$.

Якщо задана властивість A , то запис $\neg A$ (або $\bar{A}$) означає, що властивість A не виконується. Операція $\neg$ називається запереченням.

Якщо маємо дві властивості A і B , то їх диз'юнкцією $A \vee B$ називається властивість, яка полягає у тому, що справедлива принаймні одна з двох

властивостей $\mathcal{A}$ або $\mathcal{B}$. Читається: " $\mathcal{A}$ або $\mathcal{B}$ ", "принаймні одне з $\mathcal{A}$ чи $\mathcal{B}$ ".

Кон'юнкцією властивостей $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ називається властивість $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$, яка полягає у тому, що виконуються обидві ці властивості одночасно, читається " $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ ".

1.2 Множини та операції над ними

Поняття множини є одним із первісних понять, тобто таких, що не підлягають означенню. Інтуїтивно можна говорити, що множиною є набір деяких елементів, об'єднаних в одне ціле за певною ознакою. Як синонім слова "множина" іноді використовують слова "сукупність", "набір", "клас", "сімейство" тощо. Множини будемо позначати великими латинськими літерами, а елементи множин – малими літерами. Якщо елемент x належить множині A , то позначатимемо це так: $x \in A$, або $A \ni x$. Якщо ж x не належить A , то пишуть $x \notin A$. Множини можна задавати різними способами. Можна перелічити всі її об'єкти, наприклад, $A = \{a, b, c, d\}$. Інший спосіб – вказати властивість $P(x)$ об'єктів x , яка визначає умову належності їх до множини $A = \{x \in X : P(x)\}$, наприклад, $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 4 = 0\}$. При цьому вважається, що елементи x за ознакою $P(x)$ обираються лише із деякої попередньо заданої множини X , яку називають універсальною, або основною множиною (у наведеному прикладі X – множина дійсних чисел $\mathbb{R}$). Може виявитись, що не існує таких об'єктів $x \in X$, які задовольняють властивість $P(x)$, у цьому випадку множину $A = \{x \in X : P(x)\}$ називають порожньою і позначають її через $\emptyset$.

Множину A називають підмножиною множини B , якщо кожний елемент множини A є також елементом множини B і позначають це так: $A \subset B$ ($A \subseteq B$), або $B \supset A$ ($B \supseteq A$). Кажуть при цьому, що "множина A вкладена в множину B ", "множина A міститься у множині B ", або "множина B містить у собі множину A ". Вважається, що порожня множина є підмножиною будь-якої множини, тобто $\emptyset \subset A$ для будь-якої множини A . Множини A і B називають рівними ($A = B$), якщо одно-

часно $A \subset B$ і $B \supset A$. Якщо A не є підмножиною множини B , то це позначається так $A \not\subset B$. Якщо $A \subset B$ і $A \neq B$, то кажуть, що A є власною підмножиною множини B і позначають $A \subsetneq B$. Співвідношення вкладення $\subset$ асоціюється з імплікацією $\Rightarrow$, оскільки, за означенням, $(A \subset B) \iff (x \in A \Rightarrow x \in B)$.

Нехай X – універсальна множина. Сукупність усіх елементів $x \in X$, які не належать множині A , називають доповненням і позначають sA , або A^c . Операція доповнення асоціюється із логічною операцією заперечення, оскільки, за означенням, $(x \in A^c) \iff (\neg(x \in A))$.

Перетином множин A і B називають сукупність елементів, які належать одночасно до кожної із цих множин і позначають через $A \cap B$. Операція перетину $\cap$ асоціюється із логічною операцією кон'юнкції $\wedge$, оскільки, за означенням, $(A \cap B) \iff ((x \in A) \wedge (x \in B))$.

Об'єднанням множин A і B називають сукупність елементів, які належать принаймні до однієї з цих множин і позначають через $A \cup B$. Операція об'єднання $\cup$ асоціюється із логічною операцією диз'юнкції $\vee$, оскільки, за означенням, $(A \cup B) \iff ((x \in A) \vee (x \in B))$. Якщо $A \cap B = \emptyset$, то $A \cup B$ називають диз'юнктивним об'єднанням множин A і B .

Різницею множин A і B позначають сукупність елементів, які належать до A і не належать до B , позначають таку різницю через $A \setminus B$, тобто $A \setminus B = \{x \in A : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$. Якщо X – універсальна множина, то легко бачити, що для будь-якої множини $A \subset X$ справедлива рівність $A^c = X \setminus A$.

Симетричною різницею множин A і B називають сукупність елементів, які належать до A або до B , але не належать одночасно до обох із цих множин, позначають це так: $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

1.3 Аксіоматичне означення множини дійсних чисел

Існує кілька способів означення дійсних чисел. Ми запроваджуємо так зване аксіоматичне означення, тобто як деяку множину, елементи якої

задовольняють певні властивості (аксіоми).

Означення. Сукупністю дійсних чисел називається непорожня множина $\mathbb{R}$, яка задовольняє наступні властивості:

1. На $\mathbb{R}$ запроваджене співвідношення порядку $<$, $>$, $=$, яке має такі властивості:

a) для кожної пари дійсних чисел a і b справедливе одне і лише одне із трьох наступних співвідношень:

$$a < b, \quad a > b, \quad a = b;$$

b) із умов $a < b$, $b < c$ випливає, що $a < c$ (ця властивість називається транзитивністю нерівностей).

2. Група аксіом додавання та множення припускає означення на $\mathbb{R}$ операцій додавання $+$ та множення $\cdot$, які задовольняють наступні властивості:

a) для будь-яких $a, b \in \mathbb{R}$ справедлива рівність $a + b = b + a$ (комутативність додавання);

b) для будь-яких $a, b \in \mathbb{R}$ справедлива рівність $a + (b + c) = (a + b) + c$ (асоціативність додавання);

c) у множині $\mathbb{R}$ існує елемент 0, який називається нулем, нейтральний відносно додавання, тобто такий, що для будь-якого $a \in \mathbb{R}$ справедлива рівність $a + 0 = a$;

d) для будь-якого $a \in \mathbb{R}$ у множині $\mathbb{R}$ існує елемент $-a$, який називається протилежним, такий, що $a + (-a) = 0$;

e) якщо $a < b$, то для будь-якого $c \in \mathbb{R}$ справедлива нерівність $a + c < b + c$;

f) для будь-яких $a, b \in \mathbb{R}$ справедлива рівність $a \cdot b = b \cdot a$ (комутативність множення);

g) для будь-яких $a, b, c \in \mathbb{R}$ справедлива рівність $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (асоціативність множення);

h) у множині $\mathbb{R}$ існує елемент 1, відмінний від 0, який називається одиницею, нейтральний відносно множення, тобто такий, що для будь-якого $a \in \mathbb{R}$ справедлива рівність $a \cdot 1 = a$;

i) для будь-якого $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ у множині $\mathbb{R}$ існує елемент $\frac{1}{a}$, який називається оберненим, такий, що $a \cdot \frac{1}{a} = 1$;

j) для будь-яких $a, b \in \mathbb{R}$, таких, що $a < b$, і для будь-якого $c > 0$ справедлива нерівність $a \cdot c < b \cdot c$, а для $c < 0$ справедлива нерівність $a \cdot c > b \cdot c$;

k) для будь-яких $a, b, c \in \mathbb{R}$ справедлива рівність $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (дистрибутивний закон).

3. Якщо непорожні підмножини $X, Y \subset \mathbb{R}$ такі, що для будь-якого $x \in X$ і для будь-якого $y \in Y$ справедлива нерівність $x \leq y$, то знайдеться таке $c \in \mathbb{R}$, що нерівність $x \leq c \leq y$ виконується для всіх $x \in X$, $y \in Y$.

Остання аксіома означає, що у множині дійсних чисел немає прогалін. Вона називається властивістю повноти (або неперервності) множини дійсних чисел.

Із наведених аксіом можна отримати багато інших відомих властивостей (теорем) дійсних чисел, наприклад, нерівність $0 < 1$.

1.4 Натуральні числа, принцип математичної індукції

Із множини дійсних чисел виділимо деякі спеціальні числа, які назвемо натуральними. Для цього підмножину $A \subset \mathbb{R}$ назвемо індуктивною, якщо із умови $x \in A$ випливає, що $x + 1 \in A$. Множиною натуральних чисел $\mathbb{N}$ назвемо перетин усіх індуктивних множин, які містять 1. Отже, множина натуральних чисел – це така множина

$$\mathbb{N} = \{1, 2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, \dots\}.$$

Із цього означення випливає наступна основна властивість множини натуральних чисел.

Принцип математичної індукції. Нехай A – підмножина множини натуральних чисел, яка задовольняє наступні властивості:

1) $1 \in A$,

2) для будь-якого $x \in A$ число $x + 1$ також належить до множини A .

Тоді $A = \mathbb{N}$.

Принцип математичної індукції є основою для доведення багатьох тверджень. Метод доведення, який заснований на застосуванні принципу математичної індукції, називається методом математичної індукції. При цьому вимогу 1) називають базою індукції, а вимогу 2) – кроком індукції. Умову $x \in A$ у вимозі 2) називають припущенням індукції.

Приклад 1. Доведемо, що для всіх натуральних чисел n справедлива нерівність $n < 2^n$.

Для доведення застосуємо метод математичної індукції. Нехай A – множина тих натуральних n , для яких ця нерівність справедлива. При $n = 1$ вона має вигляд $1 < 2$, тобто справедлива ($1 \in A$). Припустимо, що потрібна нерівність справедлива при деякому n (тобто, що $n \in A$) і покажемо, що вона також справедлива і для $n + 1$ (тобто, що $n + 1 \in A$). Іншими словами, потрібно показати, що із умови $n < 2^n$ випливає нерівність $n + 1 < 2^{n+1}$. Додаючи припущення індукції $n < 2^n$ до очевидної нерівності $1 < 2 < 2^n$, отримуємо: $n + 1 < 2^n + 2^n = 2^{n+1}$, що і потрібно було довести.

Приклад 2. Доведемо нерівність Бернуллі

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad (n \in \mathbb{N}, x > -1).$$

При $n = 1$ ця нерівність обертається в рівність і тому справедлива. Припустимо, що вона справедлива при деякому натуральному n і покажемо, що вона справедлива і при $n + 1$. Справді, використовуючи припущення індукції, отримуємо

$$\begin{aligned} (1 + x)^{n+1} &= (1 + x)^n(1 + x) \geq (1 + nx)(1 + x) = \\ &= 1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x \end{aligned}$$

(в першій нерівності була використана умова $x > -1$, із якої випливає, що $1 + x > 0$, тобто припущення індукції $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ ми помножили на додатне $1 + x > 0$, а у другій нерівності скористались тим, що $nx^2 \geq 0$).

Приклад 3. Застосовуючи метод математичної індукції, доведемо дуже важливу формулу бінома Ньютона

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n = \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k,\end{aligned}$$

де числа $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ називаються біноміальними коефіцієнтами, а $k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k$ при $k \in \mathbb{N}$ і $0! = 1$.

Ця рівність очевидна при $n = 1$. Припустимо, що вона справедлива при натуральному n і доведемо, що вона справедлива і при $n + 1$. За припущенням індукції, маємо

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n (a+b) = \\ &= (C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n) (a+b) = \\ &= C_n^0 a^{n+1} + C_n^1 a^n b + C_n^2 a^{n-1} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a^2 b^{n-1} + C_n^n a b^n + \\ &= C_n^0 a^n b + C_n^1 a^{n-1} b^2 + C_n^2 a^{n-2} b^3 + \dots + C_n^{n-1} a b^n + C_n^n b^{n+1}.\end{aligned}$$

Враховуючи, що $C_n^0 = C_n^n = C_{n+1}^0 = C_{n+1}^{n+1} = 1$, звідси отримуємо

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= C_{n+1}^0 a^{n+1} + (C_n^0 + C_n^1) a^n b + (C_n^1 + C_n^2) a^{n-1} b^2 + \\ &+ \dots + (C_n^{k-1} + C_n^k) a^{n+1-k} b^k + \dots + (C_n^{n-1} + C_n^n) a b^n + C_{n+1}^{n+1} b^{n+1},\end{aligned}$$

і, таким чином, залишається показати, що

$$C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

За означенням біноміальних коефіцієнтів, маємо

$$\begin{aligned}C_n^{k-1} + C_n^k &= \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \left(\frac{1}{n+1-k} + \frac{1}{k} \right) = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n+1}{k(n-k+1)} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k,\end{aligned}$$

і тим самим завершується доведення формули бінома Ньютона.

Приклад 4. Арифметичною прогресією називають таку послідовність чисел, для яких різниця між двома сусідніми елементами стала, тобто не залежить від номера цих елементів. Таку прогресію можна задати у вигляді

$$a, a + d, a + 2d, \dots, a + (n - 1)d, \dots,$$

де число a – перший елемент прогресії, а число d називається різницею прогресії. Виведемо формулу суми перших n доданків арифметичної прогресії

$$\begin{aligned} S_n &= a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (a + (n - 1)d) = \\ &= \frac{a + (a + (n - 1)d)}{2} \cdot n. \end{aligned}$$

При $n = 1$ ця формула, очевидно, справедлива. Проведемо крок індукції, тобто припустимо, що при n ця рівність справедлива, і доведемо її при $n + 1$. Маємо

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (a + (n - 1)d) + (a + nd) = \\ &= S_n + (a + nd) = \frac{a + (a + (n - 1)d)}{2} \cdot n + (a + nd) = \\ &= \frac{2na + n(n - 1)d + 2a + 2nd}{2} = \frac{a + (a + nd)}{2} \cdot (n + 1), \end{aligned}$$

і тим самим завершується доведення.

Поряд із арифметичною згадаємо також і геометричну прогресію. Геометричною прогресією називають таку послідовність чисел, для яких відношення двох сусідніх елементів стало, тобто не залежить від номера цих елементів. Таку прогресію можна задати у вигляді

$$a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}, \dots,$$

де число a – перший елемент прогресії, а число $q \neq 0$ називається знаменником прогресії. Виведемо формулу суми перших n доданків геометричної прогресії, причому індукцію застосовувати не будемо. Вважаємо, що $q \neq 1$ (при $q = 1$ сума, очевидно, дорівнює $S_n = na$). Маємо

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1},$$

$$q \cdot S_n = aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1} + aq^n.$$

Віднявши другу рівність від першої, отримаємо $(1-q)S_n = a - aq^n$, звідки

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}, \quad q \neq 1.$$

1.5 Обмежені множини, існування точних меж

Розглядаємо підмножини множини дійсних чисел $\mathbb{R}$.

Будемо говорити, що множина $E \subset \mathbb{R}$ обмежена зверху, якщо існує таке число $M \in \mathbb{R}$, що для будь-якого $x \in E$ справедлива нерівність $x \leq M$. Таке число M називають верхньою межею множини E . Аналогічно, множину E назвемо обмеженою знизу, якщо існує таке число $m \in \mathbb{R}$, що $x \geq m$ для будь-якого $x \in E$, а число m назвемо нижньою межею множини E . Множину E назвемо обмеженою, якщо вона обмежена як зверху, так і знизу.

За допомогою кванторів обмеженість зверху можна записати так:

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in E \quad x \leq M,$$

а обмеженість знизу – так:

$$\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in E \quad x \geq m.$$

Слід розрізняти властивості обмеженості зверху і існування найбільшого елементу у множини. Так, факт існування найбільшого елементу у множини E виглядає наступним чином

$$\exists M \in E : \forall x \in E \quad x \leq M,$$

і такий елемент $M \in E$ називається найбільшим елементом множини E . Якщо множина E має найбільший елемент M , то, зрозуміло, вона обмежена зверху і цей найбільший елемент M є верхньою межею цієї множини. Але може виявитись, що множина обмежена зверху і не має найбільшого елементу, тобто

$$\forall M \in E \quad \exists x \in E : x > M.$$

Прикладом такої множини може бути, скажімо, інтервал $(0, 1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$.

Вправа. Наведіть відповідні міркування щодо найменшого елементу множини.

Кажуть, що множина E необмежена зверху, якщо вона не є обмеженою зверху, тобто, якщо

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists x \in E : x > M.$$

Аналогічно, множина E необмежена знизу, якщо

$$\forall m \in \mathbb{R} \quad \exists x \in E : x < m.$$

Зрозуміло, що необмежена зверху множина не має найбільшого елементу.

Вправа. Порівняйте властивість необмеженості знизу з властивістю відсутності найменшого елементу.

Зрозуміло, що обмежена зверху множина має як завгодно багато верхніх меж, бо якщо M – деяка верхня межа множини E , то будь-яке число $M' > M$ також є верхньою межею цієї множини. Але істотним є запитання: чи існує у обмеженої зверху множини найменша із усіх верхніх меж? Позитивну відповідь на це запитання надає наступна теорема.

Теорема (про існування точної верхньої межі). *Кожна обмежена зверху множина має найменшу верхню межу.*

Найменша з усіх верхніх меж обмеженої зверху множини E , існування якої гарантується цією теоремою, називається точною верхньою межею і позначається $\sup E$. Таким чином, запис $M = \sup E$ у кванторах означає наступне

$$1) \quad \forall x \in E \quad x \leq M,$$

$$2) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in E : x > M - \varepsilon.$$

Вправа. Наведіть відповідні властивості для обмежених знизу множин і сформулюйте теорему про існування точної нижньої межі $m = \inf E$.

1.6 Цілі числа, принцип Архімеда

Означення. Натуральні числа, протилежні до них і число 0 будемо називати цілими числами. Множина усіх цілих чисел позначається через $\mathbb{Z}$.

Підмножини множини цілих чисел мають деякі властивості, що відрізняються від відповідних властивостей підмножин дійсних чисел. Так, наприклад, кожна обмежена зверху підмножина $A \subset \mathbb{Z}$ має найбільший елемент, а обмежена знизу підмножина має найменший елемент. Звідси, зокрема, випливає, що множина натуральних чисел $\mathbb{N}$ необмежена зверху, тобто

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} : \quad n > a.$$

Основна властивість цілих чисел полягає в наступній теоремі.

Теорема (принцип Архімеда). Для будь-якого дійсного числа x і для будь-якого додатного h існує єдине ціле число k_0 , таке, що

$$(k_0 - 1)h \leq x < k_0 h.$$

З геометричної точки зору принцип Архімеда означає, що кожна точка $x \in \mathbb{R}$ попадає в один і лише один із напівінтервалів $[(k - 1)h, kh)$.

Множина цілих чисел замкнута відносно операції додавання та оберненої до неї – операції віднімання (тобто додавання протилежного елементу). Це означає, що сума та різниця двох цілих чисел є цілим числом.

Очевидно також, що і добуток цілих чисел є цілим числом, але обернена операція – ділення (тобто множення на обернений елемент) в рамках цілих чисел не виконується.

1.7 Раціональні числа, щільність

Означення. Раціональним називається число, яке може бути представленим у вигляді $\frac{p}{q}$, де p – ціле, q – натуральне. Множина всіх раціональних чисел позначається через $\mathbb{Q}$.

Множина раціональних чисел замкнута відносно арифметичних операцій, тобто сума, різниця, добуток та частка (якщо знаменник відмінний від нуля) двох раціональних чисел є раціональним числом. Але, наприклад, наведена вище теорема про існування точної верхньої межі стає хибною, якщо розглядати лише раціональні числа, тобто точна верхня межа обмеженої зверху підмножини $A \subset \mathbb{Q}$ може виявитись не раціональною.

Наслідок із принципу Архімеда. Нехай a, b – дійсні числа, такі, що $a < b$. Тоді знайдеться таке раціональне число r , що $a < r < b$.

Цю властивість називають щільністю множини раціональних чисел. Звідси випливає, що у будь-якому інтервалі існує як завгодно багато раціональних чисел. З іншого боку, раціональних чисел не так і багато. А саме, множина всіх раціональних чисел зчисленна, тобто всі раціональні числа можна перенумерувати. Наведемо приклад нумерації раціональних чисел $\frac{p}{q}$ у вигляді наступної таблиці.

$q = 1 :$	$\frac{0}{1}$	$\rightarrow$	$\frac{1}{1}$	$\rightarrow$	$\frac{-1}{1}$	$\rightarrow$	$\frac{2}{1}$	$\rightarrow$	$\frac{-2}{1}$	$\dots$
		$\swarrow$		$\nearrow$		$\swarrow$		$\nearrow$		
$q = 2 :$	$\frac{1}{2}$		$\frac{-1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{-3}{2}$		$\frac{5}{2}$	$\dots$
	$\downarrow$	$\nearrow$		$\swarrow$		$\nearrow$		$\swarrow$		
$q = 3 :$	$\frac{1}{3}$		$\frac{-1}{3}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{-2}{3}$		$\frac{4}{3}$	$\dots$
		$\swarrow$		$\nearrow$		$\swarrow$		$\nearrow$		
$q = 4 :$	$\frac{1}{4}$		$\frac{-1}{4}$		$\frac{3}{4}$		$\frac{-3}{4}$		$\frac{5}{4}$	$\dots$
	$\downarrow$	$\nearrow$		$\swarrow$		$\nearrow$		$\swarrow$		
$q = 5 :$	$\frac{1}{5}$		$\frac{-1}{5}$		$\frac{2}{5}$		$\frac{-2}{5}$		$\frac{3}{5}$	$\dots$
$\dots$	$\dots$		$\dots$		$\dots$		$\dots$		$\dots$	$\dots$

1.8 Дійсні числа, добування коренів

Вище вже відзначалось, що теорема про існування точної верхньої межі втрачає силу у множині раціональних чисел. Наведемо ще один приклад, який показує, що існують числа, які не є раціональними.

Твердження. *Не існує раціонального числа $\frac{p}{q}$ (p – ціле, q – натуральне), квадрат якого дорівнює 2.*

ДОВЕДЕННЯ. Припустимо, що такі p і q існують. Можемо вважати, що принаймні одне з них непарне, інакше їх можна скоротити. Але тоді $\frac{p^2}{q^2} = 2$, а отже, $p^2 = 2q^2$. Звідси випливає, що p парне, тобто $p = 2r$, де r – ціле. Тому $(2r)^2 = 2q^2$ і, таким чином, $q^2 = 2r^2$ також парне. Звідси випливає, що і q парне, а це суперечить зробленому припущенню, що принаймні одне з цілих чисел p чи q непарне. Отримана суперечність доводить твердження. $\square$

Отже, операція добування квадратного кореня у множині раціональних чисел, взагалі кажучи, неможлива. Разом з тим, у множині дійсних чисел така операція можлива. А саме, справедлива наступна теорема.

Теорема (про існування коренів). *Для будь-якого додатного дійсного числа x і для будь-якого натурального n існує, і притому єдине, дійсне число $y > 0$, таке, що $y^n = x$ (за означенням вважаємо, що $y^n = \underbrace{y \cdot y \cdot \dots \cdot y}_{n \text{ множників}}).$*

Додатне число y , яке задовольняє рівність $y^n = x$, називається коренем n -го степеня з x і позначається через $\sqrt[n]{x}$.

Отже, дійсних чисел "більше" порівняно з раціональними. Насправді їх "істотно більше" у тому сенсі, що, на відміну від раціональних чисел, всі дійсні числа занумерувати не можна.

Твердження. *Множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ незчисленна.*

Дійсні числа, які не є раціональними, називають ірраціональними. Наприклад, як показано вище, дійсне число $\sqrt{2}$ ірраціональне.

1.9 Модуль числа та його властивості

Поняття абсолютної величини (модуля) тісно пов'язане з поняттям протилежного числа.

Означення. Абсолютною величиною (модулем) числа a називається

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \geq 0, \\ -a, & \text{якщо } a < 0. \end{cases}$$

Із самого означення одразу видно, що для будь-якого числа його модуль невід'ємний. Очевидно також, що для будь-якого a справедлива рівність $|a| = |-a|$. Дуже корисною є також рівність $\sqrt{a^2} = |a|$, яка справедлива для будь-якого $a \in \mathbb{R}$.

Властивості модуля

1. Нерівність $|a| \leq b$, ($b \geq 0$) справедлива тоді і лише тоді, коли

$$-b \leq a \leq b.$$

2. $|ab| = |a| \cdot |b|$, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

3. $|a + b| \leq |a| + |b|$.

4. $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Еквівалентне означення обмеженої множини. Нагадаємо, що раніше множину $E \subset \mathbb{R}$ ми назвали обмеженою, якщо вона обмежена і зверху і знизу, тобто якщо існують такі числа m , $M \in \mathbb{R}$, що для будь-якого $x \in E$ справедлива нерівність $m \leq x \leq M$. Легко бачити, що це означення рівносильне наступному.

Означення. Множина $E \subset \mathbb{R}$ називається обмеженою, якщо існує таке дійсне число A , що для будь-якого $x \in E$ справедлива нерівність $|x| \leq A$, тобто

$$\exists A \in \mathbb{R} : \forall x \in E \quad |x| \leq A.$$

За допомогою такого означення зручно записувати означення необмеженої множини, а саме, множина $E \subset \mathbb{R}$ необмежена, якщо

$$\forall A \in \mathbb{R} \exists x \in E : |x| > A.$$

Вправа. Спробуйте записати за допомогою кванторів означення необмеженої множини, користуючись попереднім означенням обмеженості.

1.10 Деякі стандартні множини

1. Множина

$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ – дійсних чисел;

$\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ – додатних дійсних чисел;

$\mathbb{R}_- = (-\infty, 0)$ – від’ємних дійсних чисел;

$\mathbb{N}$ – натуральних чисел;

$\mathbb{Z}$ – цілих чисел;

$\mathbb{Q}$ – раціональних чисел;

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ – ірраціональних чисел.

2. Інтервал:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

3. Відрізок (сегмент):

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

4. Напівінтервал відкритий зліва (або замкнутий справа):

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}.$$

5. Напівінтервал відкритий справа (або замкнутий зліва):

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}.$$

6. Окіл точки $c \in \mathbb{R}$ – будь-який інтервал, який містить у собі c .

7. ε -окіл точки $c \in \mathbb{R}$ ($\varepsilon > 0$):

$$(c - \varepsilon, c + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - c| < \varepsilon\}.$$

8. Проколотий ε -окіл точки $c \in \mathbb{R}$ ($\varepsilon > 0$):

$$(c - \varepsilon, c) \cup (c, c + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - c| < \varepsilon\}.$$

9. Напівпряма:

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \quad \text{або} \quad (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\};$$

відкрита напівпряма:

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$

називається також околом $+\infty$;

відкрита напівпряма:

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$

називається також околом $-\infty$.

10. Окіл нескінченності:

$$(-\infty, a) \cup (b, +\infty);$$

M -окіл нескінченності:

$$(-\infty, -M) \cup (M, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : |x| > M\}.$$

Контрольні питання

1. Множини, логічні операції, квантори.
2. Натуральні числа, індукція. Цілі та раціональні числа. Дійсні числа, повнота. Існування коренів.
3. Обмежені множини, точні верхня та нижня межі.
4. Модуль та його властивості. Стандартні множини.

Розділ 2. Границі послідовностей

2.1 Означення збіжності послідовності

Послідовність – це функція натурального аргументу. Якщо кожному натуральному числу n поставлено у відповідність дійсне число x_n , то кажуть, що задана послідовність $\{x_n\}$. Інакше послідовність позначають так: $x_1, x_1, \dots, x_n, \dots$. Число x_n називається n -м елементом (або n -м членом) послідовності. Елементи послідовності вважаються різними навіть якщо вони однакові, але мають різні номери. Наприклад, послідовність $1, 1, \dots$, у якої всі $x_n = 1$. Послідовність може бути заданою формулою, яка за заданим номером n дозволяє обчислити значення x_n , наприклад, $x_n = ((-1)^n + 1)/2$. Можна задавати послідовність рекурентно, тобто вказувати закон, за яким кожний наступний елемент визначається за відомими попередніми елементами, наприклад, арифметична $x_{n+1} = x_n + d$, або геометрична $x_{n+1} = x_n \cdot q$ прогресії (при цьому треба визначити один або декілька перших елементів). Можна задавати послідовність описанням її елементів, наприклад, x_n – n -й десятковий знак після коми у числа π .

Означення. Число a називається границею послідовності $\{x_n\}$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться номер N , який, взагалі кажучи, залежить від ε , такий, що для всіх номерів $n \geq N$ має місце нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$. У цьому випадку пишуть $x_n \rightarrow a$ ($n \rightarrow \infty$), або

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

У кванторах це означення виглядає наступним чином:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \equiv N_\varepsilon : \forall n \geq N \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Якщо послідовність має границю, то кажуть, що вона збігається (є збіжною). У протилежному випадку кажуть, що послідовність розбігається (розбіжна).

Для з'ясування геометричного сенсу границі послідовності перепишемо нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$ у такому еквівалентному вигляді $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Тоді зрозуміло, що з геометричної точки зору рівність $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ означає, що всі елементи послідовності, починаючи з деякого номера $N(\varepsilon)$, який залежить від ε , знаходяться в ε -околі точки a . Зовні цього околу може знаходитись лише скінченна кількість елементів, а саме, ті x_n , номери n яких менші, ніж $N(\varepsilon)$, причому таким елементам дозволяється і попадати до вказаного околу.

Приклад 1. Нехай $x_n = a$ ($n = 1, 2, \dots$). Така послідовність називається стаціонарною. Зрозуміло, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Приклад 2. Нехай $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Доведемо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$. Задаємо $\varepsilon > 0$ і розглядаємо нерівність $\left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Вона виконується, якщо лише $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Покладемо $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$, де $[b]$ означає цілу частину числа b . Тоді з нерівності $n \geq N$ випливає, що $n > \frac{1}{\varepsilon}$, а отже, $\left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Таким чином, ми показали згідно з означенням, що число $a = 0$ є границею послідовності x_n , тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Приклад 3. Покажемо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$. Задамо $\varepsilon > 0$. Тоді отримаємо, що нерівність

$$\left| (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - 0 \right| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

виконується, якщо лише $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$. Тому достатньо обрати $N = \left[\frac{1}{\varepsilon^2} \right] + 1$.

Зауваження. При доведенні рівності $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ за означенням не обов'язково знаходити найменший номер N , починаючи з якого справджується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$. Достатньо знайти лише який-небудь номер $N(\varepsilon)$, починаючи з якого справедлива нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$.

Заперечення означення границі. Число a не є границею послідов-

ності $\{x_n\}$, якщо знайдеться таке додатне ε , що для будь-якого N існує $n \geq N$, таке, що $|x_n - a| \geq \varepsilon$, тобто

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall N \exists n \geq N : |x_n - a| \geq \varepsilon.$$

У цьому записі число N не може залежати від ε , а n залежить від N .

Тепер легко можемо сформулювати у кванторах означення розбіжної послідовності:

$$\forall a \in \mathbb{R} \exists \varepsilon = \varepsilon(a) > 0 : \forall N \exists n \geq N : |x_n - a| \geq \varepsilon.$$

Приклад 4. Доведемо, що послідовність $x_n = (-1)^n$ розбігається. Задамо довільне $a \in \mathbb{R}$ і покладемо $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Якщо $a \geq 0$, то ззовні околу $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ знаходяться елементи з непарними номерами, а якщо $a < 0$, то з парними номерами. Таким чином, яке б N ми не взяли, знайдеться $n \geq N$ (наприклад, $n = 2N + 1$ при $a \geq 0$ і $n = 2N$ при $a < 0$), для якого справджується нерівність $|x_n - a| \geq \varepsilon$.

2.2 Властивості збіжних послідовностей

Теорема 1 (єдиність границі). *Якщо послідовність має границю, то ця границя єдина.*

Означення. Числова послідовність $\{x_n\}$ називається обмеженою зверху (знизу), якщо існує таке число M (m), що для всіх номерів $n \in \mathbb{N}$ справедлива нерівність $x_n \leq M$ ($x_n \geq m$). Послідовність називається обмеженою, якщо вона одночасно обмежена зверху і знизу.

Легко бачити, що обмеженість послідовності $\{x_n\}$ рівносильна тому, що

$$\exists A > 0 : \forall n \in \mathbb{N} |x_n| \leq A.$$

З геометричної точки зору обмеженість послідовності означає, що всі її елементи знаходяться у деякому околі нуля.

Теорема 2 (необхідна умова збіжності). *Якщо послідовність збігається, то вона обмежена.*

Обернене до цієї теореми твердження хибне, тобто із обмеженості послідовності не випливає її збіжність. Справді, як було показано у прикладі 4, послідовність $x_n = (-1)^n$ розбігається. Разом з тим, вона обмежена, оскільки для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ справедлива нерівність $|(-1)^n| \leq 1$.

У кванторах означення необмеженої послідовності виглядає наступним чином

$$\forall A \exists n \in \mathbb{N} : |x_n| > A.$$

Із теореми 2 миттєво випливає

Наслідок (достатня умова розбіжності). *Якщо послідовність необмежена, то вона розбіжна.*

Приклад 5. Нехай $x_n = q^n$, де $|q| > 1$. Доведемо, що ця послідовність необмежена. Для доведення застосуємо відому нерівність Бернуллі

$$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha, \quad (\alpha > -1, n \in \mathbb{N}),$$

яку легко довести методом математичної індукції.

Покладемо $\alpha = |q| - 1 > 0$. Задамо довільне $A > 0$. За нерівністю Бернуллі

$$|q^n| = |q|^n = (1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha > n\alpha > A,$$

якщо лише $n > \frac{A}{\alpha}$. Отже, для будь-якого $A > 0$ знайдеться номер $n = \left[\frac{A}{\alpha}\right] + 1$, такий, що $|q^n| > A$. Це означає, що послідовність $\{x_n\}$ необмежена, і тому, за наслідком із теореми 2, вона розбіжна.

Теорема 3. *Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$.*

Зауваження. Твердження, обернене до цієї теореми, хибне. Наприклад, послідовність $x_n = (-1)^n$ розбіжна, і в той же час $\lim_{n \rightarrow \infty} |(-1)^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$. Але легко бачити, що при $a = 0$ справедливе також і обернене до теореми 3 твердження.

Граничний перехід і нерівності.

Теорема 4. *Нехай $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ і $x_n \leq y_n$ ($n = 1, 2, \dots$). Тоді $a \leq b$.*

Зауваження. Із умови $x_n < y_n$ не випливає, що $a < b$. Справді, нехай, наприклад, $x_n = 0$, $y_n = \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$). Тоді $x_n < y_n$ ($n = 1, 2, \dots$), але $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$.

Теорема 5. Нехай $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, і число $b < a$. Тоді існує такий номер N , що при всіх $n \geq N$ справедлива нерівність $x_n > b$. Якщо ж $c > a$, то знайдеться такий номер N , що $x_n < c$ при всіх $n \geq N$.

Теорема 6 (теорема Гур'єва про три границі). Нехай три послідовності $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ і $\{z_n\}$ задовольняють умову $x_n \leq y_n \leq z_n$ ($n = 1, 2, \dots$). Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, то послідовність $\{y_n\}$ збігається і $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$.

Приклад 6. Нехай $x_n = q^n$. У прикладі 5 було показано, що при $|q| > 1$ послідовність x_n необмежена, і, отже, розбігається. Далі, при $q = -1$ маємо $x_n = (-1)^n$. У прикладі 4 ми показали, що ця послідовність також розбіжна. Якщо $q = 1$, то $x_n = 1$ ($n = 1, 2, \dots$). Це — стаціонарна послідовність і $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$. Також і при $q = 0$ отримуємо $x_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$) і $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Залишається розглянути випадок $0 < |q| < 1$. Оберемо таке $\alpha > 0$, що $|q| = \frac{1}{1+\alpha}$ (тобто $\alpha = \frac{1}{|q|} - 1 > 0$). Тоді, за нерівністю Бернуллі $(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha$ ($n = 1, 2, \dots$), маємо

$$0 \leq |q^n| = |q|^n = \frac{1}{(1 + \alpha)^n} \leq \frac{1}{1 + n\alpha} \leq \frac{1}{n\alpha}.$$

Поклавши $a_n = 0$, $c_n = \frac{1}{n\alpha}$, $b_n = |q^n|$ ($n = 1, 2, \dots$), і, враховуючи, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$, за теоремою про три границі отримуємо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} |q^n| = 0$, а із зауваження до теореми 3 випливає, що і $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

2.3 Граничний перехід та арифметичні операції

Теорема 7. Нехай $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$. Тоді

1)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b;$$

2)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = ab;$$

3) якщо $y_n \neq 0$ ($n = 1, 2, \dots$), $b \neq 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

У окремому випадку $y_n = b$ ($n = 1, 2, \dots$) твердження 2) теореми 7 набуває такого вигляду:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} bx_n = b \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Це означає, що сталий множник можна виносити за знак границі.

Приклад 7. Доведемо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ при будь-якому $a > 0$.

При $a = 1$ ця рівність очевидна. Нехай $a > 1$. Позначимо $\alpha_n = \sqrt[n]{a} - 1 > 0$. Тоді, за нерівністю Бернуллі, отримаємо $a = (1 + \alpha_n)^n \geq 1 + n\alpha_n$, звідки $0 \leq \alpha_n \leq \frac{a-1}{n}$, тобто

$$0 \leq \sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a-1}{n}.$$

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a-1}{n} = 0$, то, за теоремою про три границі, будемо мати $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{a} - 1) = 0$. Звідси випливає, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{a} - 1) + \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

У випадку $0 < a < 1$ позначимо $b = \frac{1}{a} > 1$. Як вже доведено, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b} = 1$. Тому, за п. 3) теореми 7, отримаємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Приклад 8. Доведемо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Позначимо $\alpha_n = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$. Тоді при $n \geq 2$, за формулою бінома Ньютона отримаємо

$$n = (1 + \alpha_n)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \alpha_n^k \geq C_n^2 \alpha_n^2 = \frac{1}{2} n(n-1) \alpha_n^2,$$

звідки $\alpha_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$. Якщо ми доведемо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 0$, то з нерівності $0 \leq \alpha_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$, за теоремою про три границі, отримаємо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ і, отже,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n} - 1) + \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 0 + 1 = 1.$$

Таким чином, залишається показати, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 0$. Задамо $\varepsilon > 0$. Тоді $\sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon$, якщо лише $n > \frac{2}{\varepsilon^2} + 1$. Поклавши $N = \left[\frac{2}{\varepsilon^2}\right] + 2$, згідно з означенням границі, отримуємо потрібну рівність.

2.4 Нескінченно малі послідовності

Означення. Послідовність $\{x_n\}$ називається нескінченно малою, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Легко бачити, що послідовність $\{x_n\}$ збігається до числа a тоді і лише тоді, коли послідовність $\alpha_n = x_n - a$ нескінченно мала. Використовуючи це, можна надати наступне рівносильне означення границі.

Означення. Число a називається границею послідовності $\{x_n\}$, якщо послідовність $\{x_n - a\}$ нескінченно мала.

Слід, однак, розуміти, що за таким означенням границі, окремо потрібно означати поняття нескінченно малої послідовності, а саме, нескінченно малою називати таку послідовність $\{x_n\}$, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться номер $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, такий, що при кожному $n \geq N$ справедлива нерівність $|x_n| < \varepsilon$.

Теорема (властивості нескінченно малих послідовностей).

- 1). Сума та добуток фіксованої кількості нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою послідовністю.
- 2). Добуток нескінченно малої послідовності на обмежену є нескінченно малою послідовністю.

2.5 Нескінченно великі послідовності

Раніше вже відзначалось, що кожна збіжна послідовність є обмеженою. Інакше кажучи, будь-яка необмежена послідовність розбігається. Виділимо деякі спеціальні класи необмежених послідовностей.

Означення. Кажуть, що послідовність $\{x_n\}$ прямує до $+\infty$, якщо для будь-якого дійсного числа M знайдеться номер N , залежний від M ,

такий, що для всіх $n \geq N$ справедлива нерівність $x_n > M$. У цьому випадку пишуть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, або $x_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Кажуть, що послідовність $\{x_n\}$ прямує до $-\infty$, якщо для будь-якого дійсного числа M знайдеться номер N , залежний від M , такий, що для всіх $n \geq N$ має місце нерівність $x_n < -M$. У цьому випадку пишуть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$, або $x_n \rightarrow -\infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Послідовність $\{x_n\}$ називається нескінченно великою, якщо модулі її елементів прямують до $+\infty$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = +\infty$), тобто якщо для будь-якого M знайдеться номер N , такий, що для всіх $n \geq N$ справедлива нерівність $|x_n| > M$. Позначають це так: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, або $x_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Легко бачити, що із будь-якої з умов $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ чи $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ випливає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$. Обернене твердження хибне. Наприклад, послідовність $x_n = (-1)^n n$ прямує до ∞ , але не прямує ні до $+\infty$, ні до $-\infty$.

Нагадаємо, що необмежена – це така послідовність $\{x_n\}$, що для будь-якого M знайдеться такий номер n , що $|x_n| > M$. Зрозуміло, що кожна нескінченно велика послідовність необмежена, але не навпаки. Наприклад, послідовність $x_n = n^{(-1)^n}$ необмежена, але не є нескінченно великою.

Зв'язок між нескінченно великими та нескінченно малими послідовностями встановлює наступне

Твердження. Нехай $x_n \neq 0$ ($n = 1, 2, \dots$). Тоді послідовність $\{x_n\}$ нескінченно велика у тому і лише у тому випадку, коли послідовність $y_n = \frac{1}{x_n}$ нескінченно мала.

2.6 Деякі види неозначеностей

Нехай $x_n \rightarrow +\infty$, $y_n \rightarrow +\infty$. Тоді, очевидно, $x_n + y_n \rightarrow +\infty$ і $x_n y_n \rightarrow +\infty$. Але про $x_n - y_n$ нічого визначеного сказати не можна. Так, наприклад, якщо $x_n = n^2 \rightarrow +\infty$, $y_n = n \rightarrow +\infty$, то $x_n - y_n = n^2 - n \geq n$ ($n \geq 2$) і $x_n - y_n \rightarrow +\infty$. З іншого боку, для $x_n = n$, $y_n = n^2$ маємо $x_n - y_n = n - n^2 \leq -n$ і $x_n - y_n \rightarrow -\infty$. Якщо ж $x_n = n \rightarrow +\infty$, $y_n = n + (-1)^n \rightarrow +\infty$, то

послідовність $x_n - y_n = (-1)^{n+1}$ не має границі.

Кажуть, що різниця двох послідовностей, які прямують до $+\infty$, утворює неозначеність виду $[(+\infty) - (+\infty)]$. Інший вид неозначеності $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ – відношення двох послідовностей, що прямують до ∞ , тобто $\frac{x_n}{y_n}$, де $x_n \rightarrow \infty$, $y_n \rightarrow \infty$. Справді, для $x_n = n^2$, $y_n = n$ маємо $\frac{x_n}{y_n} = n \rightarrow \infty$, $\frac{y_n}{x_n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Якщо ж $x_n = (2 + (-1)^n)n$, $y_n = n$, то відношення $\frac{x_n}{y_n} = 2 + (-1)^n$, очевидно, не має границі.

Оскільки обернена до нескінченно великої є нескінченно малою послідовністю, то отримуємо ще такі види неозначеностей: $[0 \cdot \infty]$, $\left[\frac{1}{\infty} \cdot \infty\right]$, $\left[\frac{0}{0}\right]$. Рекомендується самостійно навести відповідні приклади.

2.7 Підпослідовності.

Лема Больцано – Вейєрштраса

Нехай задана послідовність $\{x_n\}$. Якщо ми виберемо з неї деякі її елементи (нескінченно багато в порядку зростання номерів), то отримаємо підпослідовність послідовності $\{x_n\}$. Точніше, задамо строго зростаючу послідовність номерів n_k ($k = 1, 2, \dots$). Тоді послідовність $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ називається підпослідовністю послідовності $\{x_n\}$. Підпослідовність x_{n_k} є функцією натурального аргументу k , тобто кожному натуральному k поставлено у відповідність елемент x_{n_k} послідовності $\{x_n\}$. Наприклад, якщо $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$, тобто початкова послідовність $0, 1, 0, 1, \dots$, то обираючи $n_k = 2k$, тобто вибравши всі елементи з парними номерами, отримаємо підпослідовність $x_{2k} = 1$ ($k = 1, 2, \dots$).

Раніше відзначалось, що кожна збіжна послідовність обмежена. Обернене твердження хибне, із обмеженості послідовності не випливає її збіжність. Так, розглянута щойно послідовність $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$, очевидно, обмежена ($|x_n| \leq 1$, $n = 1, 2, \dots$), але вона не є збіжною. Разом з тим із цієї послідовності ми вилучили підпослідовність $x_{2k} = 1$ ($k = 1, 2, \dots$) – стаціонарну, а отже, збіжну. Виявляється, що це можна зробити для будь-якої обмеженої послідовності.

Лема Больцано – Вейєрштраса. *Із будь-якої обмеженої послі-*

довності можна вилучити збіжну підпослідовність.

2.8 Критерій Коші

Якщо для дослідження збіжності послідовності застосовувати означення границі, то ми наперед повинні знати чи є ця послідовність збіжною і, якщо так, то її границю. Використовуючи означення границі, ми можемо лише доводити висунуту гіпотезу. Але в багатьох випадках за самим виглядом послідовності важко визначити чи є послідовність збіжною чи розбіжною. Наприклад, $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, $y_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$. У зв'язку з цим виникає бажання знайти внутрішню властивість послідовності, яка рівносильна збіжності і не залежить від числа a – границі послідовності. Такою властивістю є фундаментальність.

Означення. Послідовність $\{x_n\}$ називається фундаментальною (збіжною в собі), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер N , залежний, взагалі кажучи, від ε , що для всіх номерів $n \geq N$, $m \geq N$ справедлива нерівність $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Істотна відмінність означення фундаментальності від означення границі полягає в тому, що означення границі потребує величину границі, а в означенні фундаментальності цього не потрібно. Сенс означення границі полягає в тому, що всі елементи послідовності з достатньо великими номерами мало відрізняються від границі, тобто $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n \geq N = N(\varepsilon)$. В означенні ж фундаментальності вимагається щоб всі елементи з достатньо великими номерами мало відрізнялись один від одного ($|x_n - x_m| < \varepsilon$, $n, m \geq N = N(\varepsilon)$).

Рівносильність збіжності послідовності і її фундаментальності встановлює наступна теорема.

Теорема (критерій Коші). Для того щоб послідовність була збіжною, необхідно і достатньо, щоб вона була фундаментальною.

Означення фундаментальності послідовності можна сформулювати у наступній еквівалентній формі.

Означення. Послідовність $\{x_n\}$ називається фундаментальною, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер N , залежний, взагалі кажучи, від ε , що для кожного $n \geq N$ і для кожного $p \in \mathbb{N}$ справедлива нерівність $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

Користуючись цим означенням, скажемо, що послідовність $\{x_n\}$ не є фундаментальною, якщо знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$, що для будь-якого N існує такий номер $n \geq N$ і таке натуральне число p , що $|x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon_0$.

Приклад 1. Розглянемо послідовність $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. Для натуральних n і p маємо $x_{n+p} - x_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+p} \geq \frac{1}{n+p} + \dots + \frac{1}{n+p} = \frac{p}{n+p}$. Якщо n зафіксоване, то для $p = n$ отримуємо $|x_{n+p} - x_n| \geq \frac{1}{2}$. Оберемо $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} > 0$. Тоді для заданого номера N покладемо $n = N$, $p = n$ і будемо мати $|x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon_0$. Це означає, що задана послідовність не є фундаментальною, і, отже, за критерієм Коші, вона розбігається.

Приклад 2. Покажемо, що послідовність $x_n = \frac{\sin 1}{1^2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{n^2}$ фундаментальна, а отже, збіжна. Для натуральних n і p маємо

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &\leq \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} \leq \\ &\leq \frac{1}{n(n+1)} + \dots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \\ &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \right) = \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon, \end{aligned}$$

якщо лише $n \geq N \equiv \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$. Цим самим доведено, що задана послідовність фундаментальна.

2.9 Монотонні послідовності

Означення. Послідовність $\{x_n\}$ називається неспадною (зростаючою), якщо $x_{n+1} \geq x_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Якщо ж $x_{n+1} > x_n$ ($n \in \mathbb{N}$), то

така послідовність називається строго зростаючою. Якщо $x_{n+1} \leq x_n$ ($n \in \mathbb{N}$), то така послідовність називається незростаючою (спадною), а якщо $x_{n+1} < x_n$, то послідовність називається строго спадною. Послідовність називається монотонною, якщо вона незростаюча, або неспадна, і строго монотонною, якщо вона строго зростаюча або строго спадна.

Теорема. *Нехай послідовність $\{x_n\}$ монотонно зростає. Тоді*

- 1) *якщо $\{x_n\}$ обмежена зверху, то вона збігається;*
- 2) *якщо $\{x_n\}$ необмежена зверху, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.*

Із цієї теореми миттєво випливає

Теорема (критерій збіжності монотонно зростаючої послідовності). *Монотонно зростаюча послідовність збігається тоді і лише тоді, коли вона обмежена зверху.*

Аналогічно, маємо наступне твердження.

Теорема. *Нехай послідовність $\{x_n\}$ монотонно спадає. Тоді*

- 1) *якщо $\{x_n\}$ обмежена знизу, то вона збігається;*
- 2) *якщо $\{x_n\}$ необмежена знизу, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.*

Як і вище, звідси випливає

Теорема (критерій збіжності монотонно спадної послідовності). *Монотонно спадна послідовність збігається тоді і лише тоді, коли вона обмежена знизу.*

Зрозуміло, що зростаюча послідовність обмежена знизу (наприклад, першим елементом послідовності), а спадна послідовність обмежена зверху. Тому попередні твердження можна об'єднати у вигляді наступної теореми.

Теорема (критерій збіжності монотонної послідовності). *Монотонна послідовність збігається тоді і лише тоді, коли вона обмежена.*

Зауваження. Без припущення монотонності ця теорема втрачає силу. Справді, послідовність $x_n = (-1)^n$ обмежена, але, як було показано раніше, вона розбіжна. Це виявилось можливим тому, що ця послідовність не

є монотонною.

Як критерій Коші, так і критерій збіжності монотонної послідовності, дозволяють доводити збіжність послідовності, але не надають способів знаходження границі. На практиці часто можна облегшити знаходження границі, знаючи лише її існування і використовуючи арифметичні властивості збіжних послідовностей. Проілюструємо це на прикладах.

Приклад 1. Нехай $x_n = \frac{n}{2^n}$. Покажемо, що ця послідовність спадає. Маємо

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n} = \frac{n+1}{2n} \leq 1,$$

звідки, враховуючи, що $x_n > 0$, випливає $x_{n+1} \leq x_n$. Крім того, оскільки $x_n > 0$, то ця послідовність обмежена знизу. За теоремою існування границі монотонної і обмеженої послідовності, задана послідовність має границю $a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n}$. Але тоді і $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = a$, а за теоремою про границю добутку, маємо

$$\begin{aligned} a &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \frac{2^n}{2^{n+1}} \frac{n}{2^n} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} a. \end{aligned}$$

Тепер із рівності $a = \frac{1}{2}a$ випливає, що $a = 0$, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$.

Слід звернути особливу увагу на те, що подібні міркування справедливі лише за умови, що існує $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Якщо ця умова не виконується, то можна отримати хибний результат. Справді, якщо $x_n = (-1)^n$, то $x_{n+1} = (-1)^{n+1} = -x_n$, звідки $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -a$. Із цієї рівності отримаємо, що $a = 0$. Але цей висновок неправильний, оскільки наші міркування проводились за припущенням, що послідовність $(-1)^n$ збігається, що, зрозуміло, неправда.

Приклад 2. Нехай $a > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$, де в якості x_1 можна взяти будь-яке додатне число. Якщо ми покажемо, що існує додатна границя цієї послідовності $c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n > 0$, то, виходячи з арифметичних властивостей границь, отримаємо $c = \frac{1}{2} \left(c + \frac{a}{c} \right)$, звідки $2c^2 = c^2 + a$, тобто $c^2 = a$. Враховуючи, що $c > 0$, маємо $c = \sqrt{a}$.

Отже, залишається показати, що задана послідовність має додатну границю. Оскільки $x_1 > 0$, то $x_2 > 0$, а отже, $x_3 > 0$ і т. д. За індукцією отримуємо, що всі $x_n > 0$. Це, зокрема, означає, що задана послідовність визначена коректно. Доведемо точнішу нерівність – оцінку знизу для x_n . Для цього перепишемо задану рекурентну рівність, яка визначає послідовність, у такому вигляді:

$$x_{n+1} = \sqrt{a} \frac{1}{2} \left(\frac{x_n}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{x_n} \right).$$

Але оскільки для будь-якого $y > 0$ справедлива нерівність $y + \frac{1}{y} \geq 2$ (вона рівносильна тому, що $(y - 1)^2 \geq 0$), то маємо

$$x_{n+1} = \sqrt{a} \frac{1}{2} \left(\frac{x_n}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{x_n} \right) \geq \sqrt{a}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тепер, враховуючи, що $x_n \geq \sqrt{a}$, $n = 2, 3, \dots$, отримаємо

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{x_n^2} \right) \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{(\sqrt{a})^2} \right) = 1, \quad n = 2, 3, \dots,$$

звідки $x_{n+1} \leq x_n$, $n = 2, 3, \dots$, тобто задана послідовність спадна, починаючи з другого номера. Вище було показано, що вона обмежена знизу числом $\sqrt{a}$. За теоремою про збіжність монотонної і обмеженої послідовності отримуємо, що існує границя $c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, і, оскільки всі $x_n \geq \sqrt{a}$, то ця границя $c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \sqrt{a} > 0$.

Зауваження. У розглянутому прикладі послідовність $\{x_n\}$ визначається рекурентно рівністю $x_{n+1} = f(x_n)$, де функція f має таку властивість, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right).$$

Тоді для знаходження границі c такої послідовності нам потрібно було розв'язати рівняння $c = f(c)$. Цей стандартний прийом зручний для обчислення границь послідовностей, які задані рекурентно. Але слід розуміти, що перед тим, як використовувати цей прийом, потрібно довести саме існування границі. Якщо цього не зробити, то можна отримати хибний результат.

2.10 Число е

Теорема. *Послідовність $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ збігається.*

ДОВЕДЕННЯ. Достатньо показати, що x_n зростає і обмежена зверху. За формулою бінома Ньютона

$$\begin{aligned}
 x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{n^k} = \\
 &= C_n^0 + C_n^1 \frac{1}{n} + C_n^2 \frac{1}{n^2} + \dots + C_n^{n-1} \frac{1}{n^{n-1}} + C_n^n \frac{1}{n^n} = \\
 &= \frac{n!}{0!n!} + \frac{n!}{1!(n-1)!} \frac{1}{n} + \frac{n!}{2!(n-2)!} \frac{1}{n^2} + \dots + \\
 &\quad + \frac{n!}{(n-1)!1!} \frac{1}{n^{n-1}} + \frac{n!}{n!0!} \frac{1}{n^n} = \\
 &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \\
 &\quad + \frac{1}{(n-1)!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-2}{n}\right) + \\
 &\quad + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).
 \end{aligned}$$

Якщо ми тепер замість n підставимо $n+1$, то кількість доданків справа збільшиться на один додатний, і в кожному доданку всі вирази в дужках також збільшаться. Справді, $1 - \frac{k}{n} \leq 1 - \frac{k}{n+1}$, $1 \leq k \leq n-1$, а враховуючи, що всі доданки додатні, отримаємо, що $x_{n+1} \geq x_n$. Таким чином, послідовність зростаюча.

Для доведення обмеженості зверху скористаємось тим, що кожний вираз в дужках не більший за 1. Тоді, за формулою суми перших доданків геометричної прогресії, отримаємо

$$x_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \\
&= 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) = \\
&= 1 + \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1/2^n}{1 - \frac{1}{2}} \right) \leq 1 + 2 = 3.
\end{aligned}$$

Отже, ми показали, що задана послідовність зростаюча і обмежена зверху. За теоремою про збіжність монотонної і обмеженої послідовності отримуємо, що ця послідовність збіжна. $\square$

Позначимо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e.$$

Із доведення теореми видно, що $e \leq 3$. Наближене значення цього числа дорівнює $e \approx 2,718281828 \dots$

Теорема (інше представлення числа e). *Справедлива рівність*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) = e.$$

Використовуючи цю теорему, можна довести, що число e ірраціональне.

2.11 Частинні границі. Верхня та нижня границі

Твердження 1. *Нехай $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Тоді будь-яка підпослідовність $\{x_{n_k}\}$ збігається і $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$.*

Твердження 2. *Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = +\infty$ для будь-якої підпослідовності $\{x_{n_k}\}$. Якщо ж $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = -\infty$ для будь-якої підпослідовності $\{x_{n_k}\}$.*

Отже, якщо послідовність прямує до деякої границі (дійсної, або $+\infty$ чи $-\infty$), то і будь-яка її підпослідовність прямує до тієї ж границі. Обернене твердження очевидне, оскільки сама послідовність є однією із своїх

підпослідовностей (покладаємо $n_k = k$). Раніше ми вже наводили приклади розбіжних послідовностей, у яких існують збіжні підпослідовності.

Означення. Число c називається частинною границею послідовності $\{x_n\}$, якщо існує підпослідовність $\{x_{n_k}\}$ послідовності $\{x_n\}$, яка збігається до c .

Із твердження 1 випливає, що у кожної збіжної послідовності існує лише одна скінченна частинна границя (оскільки кожна підпослідовність збігається до границі послідовності). Якщо ж послідовність розбіжна, то в неї може бути декілька різних частинних границь. Наприклад, розбіжна послідовність $x_n = (-1)^n$ має дві частинні границі $1 = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k}$ і $-1 = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k+1}$.

Розширимо поняття частинної границі. Скажемо, що послідовність має частинною границею $+\infty$, якщо існує підпослідовність $\{x_{n_k}\}$, така, що $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = +\infty$. Якщо ж існує підпослідовність $\{x_{n_k}\}$, така, що $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = -\infty$, то кажуть, що $-\infty$ є частинною границею послідовності $\{x_n\}$. Наприклад, для послідовності $x_n = (-1)^n n$ частинними границями є $+\infty$ і $-\infty$, оскільки

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^{2k} 2k = \lim_{k \rightarrow \infty} 2k = +\infty,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^{2k+1} (2k+1) = \lim_{k \rightarrow \infty} (-2k-1) = -\infty.$$

Твердження. Кожна послідовність має принаймні одну частинну границю (яка може бути дійсним числом, або дорівнювати $+\infty$ чи $-\infty$).

Для того щоб означити поняття верхньої та нижньої границь послідовності, нам знадобиться наступне розширення множини дійсних чисел:

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Будемо вважати, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ справедлива нерівність $-\infty < x < +\infty$. Якщо множина $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ містить $+\infty$, то елемент $+\infty$ вважається найбільшим E . Якщо ж $-\infty \in E$, то $-\infty$ вважається найменшим елементом в E .

Вище ми відзначили, що у кожної послідовності $\{x_n\}$ існує частинна границя, яка належить до $\overline{\mathbb{R}}$. Іншими словами, множина $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ частинних границь довільної послідовності $\{x_n\}$ непорожня. Можна довести, що множина частинних границь має найбільший та найменший елементи.

Означення. Верхньою границею послідовності $\{x_n\}$ називається найбільша з усіх її частинних границь і позначається через $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ (або $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$). Нижньою границею послідовності $\{x_n\}$ називається найменша з усіх її частинних границь і позначається через $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ (або $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$).

Вище відзначалось, що у будь-якої послідовності множина її частинних границь в $\overline{\mathbb{R}}$ непорожня. Таким чином, у кожної послідовності існують верхня та нижня границі.

Приклад 1. Нехай $x_n = \sin \frac{\pi n}{4}$. Це – така послідовність:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \dots$$

Множина E частинних границь цієї послідовності $E = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 1, -1 \right\}$. Жодне інше число, $+\infty$, $-\infty$ не є частинними границями. Отже, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -1$.

Приклад 2. Нехай $x_n = -n$. Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ і, отже, будь-яка підпослідовність послідовності $\{x_n\}$ також прямує до $-\infty$. Таким чином, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.

Приклад 3. Нехай $x_n = n^{(-1)^n}$. Одна з підпослідовностей $x_{2k} = 2k$ прямує до $+\infty$, а інша $x_{2k+1} = \frac{1}{2k+1}$ – прямує до нуля. Якщо ж ми візьмемо яку-небудь підпослідовність, що містить нескінченно багато парних і непарних елементів, то така підпослідовність не має границі. Таким чином, у заданої послідовності є лише дві частинні границі: $+\infty$ і 0 . Тому $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Теорема (критерій збіжності послідовності в термінах верхньої та нижньої границь). *Послідовність $\{x_n\}$ має скінченну грани-*

цю a , або $+\infty$ чи $-\infty$, тоді і лише тоді, коли

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Отже, ця теорема надає необхідну та достатню умову існування границі послідовності (яка, можливо, дорівнює $+\infty$ чи $-\infty$). Звідси отримуємо, що якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$, то послідовність не має границі (навіть і такої, що дорівнює $+\infty$ чи $-\infty$). Це твердження може бути застосованим на практиці для доведення розбіжності послідовності. А саме, якщо із заданої послідовності $\{x_n\}$ виявляється можливим вилучити дві підпослідовності $\{x_{n_k}\}$ і $\{x_{m_k}\}$, які збігаються до різних границь, то початкова послідовність $\{x_n\}$ не має границі, навіть нескінченної ($+\infty$ чи $-\infty$). Але при цьому така послідовність може мати границею ∞ .

Наприклад, нехай $x_n = (-1)^n$. Вилучимо дві підпослідовності: $x_{2k} = 1$ і $x_{2k+1} = -1$. Вони збігаються до різних границь, і тому початкова послідовність x_n не має границі. Для іншого розглянутого вище прикладу послідовності $y_n = n^{(-1)^n}$ маємо $y_{2k} = 2k \rightarrow +\infty$ і $y_{2k+1} = \frac{1}{2k+1} \rightarrow 0$. Отже, послідовність $\{y_n\}$ розбігається. Наостанок, якщо $z_n = \frac{n}{n+1} \cos \frac{\pi n}{4}$, то $z_{8k} = \frac{8k}{8k+1} \rightarrow 1$ і $z_{8k+4} = -\frac{8k+4}{8k+5} \rightarrow -1$. Отже, послідовність $\{z_n\}$ розбіжна.

Контрольні питання

1. Послідовності та границі. Властивості. Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності.
2. Критерій Коші.
3. Монотонні послідовності. Число e .
4. Частинні границі, верхня та нижня границі.

Розділ 3. Границі функцій

3.1 Границя функції і її елементарні властивості

Нагадаємо, що околом радіуса $\delta > 0$ (або δ -околом) точки $a \in \mathbb{R}$ називається множина таких $x \in \mathbb{R}$, що $a - \delta < x < a + \delta$, або, що те ж саме, $|x - a| < \delta$. Проколотим δ -околом точки a називаємо δ -окіл точки $a \in \mathbb{R}$, із якого видалена сама точка a . Іншими словами, проколотий δ -окіл точки a – це множина всіх точок $x \in \mathbb{R}$, таких, що $a - \delta < x < a$ або $a < x < a + \delta$. Це можна записати так: $0 < |x - a| < \delta$.

Означення границі функції за Коші. Нехай функція f визначена в деякому проколотому околі точки a . Число A називається границею функції f в точці a , якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, яке залежить, взагалі кажучи, від ε , що для всіх x , які задовольняють умову $0 < |x - a| < \delta$, справедлива нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Якщо число A є границею функції f в точці a , то кажуть, що функція f прямує до A при x , який прямує до a , і пишуть: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, або $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow a$.

Приклад 1. Нехай $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $a = 0$. Ця функція визначена в проколотому околі точки $a = 0$. Покажемо, що $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Задамо $\varepsilon > 0$. Тоді для $x \neq 0$ нерівність

$$|f(x) - 0| = \left| x \cdot \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| < \varepsilon$$

справедлива, якщо лише $0 < |x - 0| = |x| < \delta$, де в якості δ ми обираємо ε , тобто $\delta = \varepsilon$. Оскільки $\varepsilon > 0$ довільне, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке δ ($\delta = \varepsilon$), що для всіх x , які задовольняють умову $0 < |x - 0| < \delta$, справедлива нерівність $|x \cdot \sin \frac{1}{x} - 0| < \varepsilon$. За означенням, це означає, що $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$.

Приклад 2. Нехай

$$f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

(ця функція називається функцією знаку). Покажемо, що функція f не має границі в точці $a = 0$, тобто для кожного $A \in \mathbb{R}$ знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$, що для кожного $\delta > 0$, знайдеться таке x , яке задовольняє умову $0 < |x - 0| < \delta$, при якому $|f(x) - A| \geq \varepsilon_0$.

Нехай $A \in \mathbb{R}$. Покажемо, що $\varepsilon_0 = 1$ задовольняє таку властивість. Справді, задамо довільне $\delta > 0$. Якщо $A \geq 0$, то оберемо таке x , що $-\delta < x < 0$, наприклад, $x = -\frac{\delta}{2}$. Тоді $0 < |x - 0| < \delta$, і $|f(x) - A| = |-1 - A| = 1 + A \geq 1 = \varepsilon_0$. Якщо ж $A < 0$, то оберемо таке x , що $0 < x < \delta$, наприклад, $x = \frac{\delta}{2}$. Тоді знову отримаємо, що $0 < |x - 0| < \delta$, і $|f(x) - A| = |1 - A| = 1 - A \geq 1 = \varepsilon_0$. Отже, жодне $A \in \mathbb{R}$ не є границею функції $f(x) = \operatorname{sign} x$ в точці $a = 0$.

Зауваження 1. В означенні границі ми припускаємо, що функція f визначена в проколотому околі точки a . Може виявитись, що в самій точці a функція f також визначена. Але значення функції f в цій точці a ніяк не впливає на границю функції в цій точці, оскільки в означенні границі ми розглядаємо лише ті значення x , які відмінні від a .

Приклад 3. Нехай

$$f(x) = |\operatorname{sign} x| = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Покажемо, що $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. Справді, задамо $\varepsilon > 0$ і в якості δ оберемо будь-яке додатне число, наприклад, $\delta = 1$. Тоді з умови $0 < |x - 0| = |x| < \delta$ випливає $|f(x) - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$. Слід звернути увагу на те, що нерівність $|f(x) - 1| < \varepsilon$ може і не виконуватись при $x = 0$ (вона й справді не виконується, якщо $\varepsilon \leq 1$). Але ми і не вимагаємо, щоб вона виконувалась при $x = 0$, оскільки розглядаються лише такі значення x , для яких $|x| > 0$.

Приклад 4. Доведемо, що $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$. Справді, якщо $x \neq 1$, то $\frac{x^2-1}{x-1} = x+1$, і тоді $|f(x) - 2| = |(x+1) - 2| = |x-1| < \varepsilon$, якщо лише $0 < |x-1| < \delta$, де $\delta = \varepsilon$.

Зауваження 2. Означення границі носить локальний характер. Це означає, що факт існування границі і її числове значення залежать лише від тих значень, які набуває функція в достатньо малому околі точки a . Іншими словами, якщо ми змінимо функцію зовні деякого проколотого околу точки a , то це ніяк не вплине на існування границі і її величину.

Приклад 5. Доведемо, що $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ при $a > 0$.

Задамо $\varepsilon > 0$. Тоді для $x > 0$ нерівність

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x-a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \leq \frac{1}{\sqrt{a}}|x-a| < \varepsilon$$

буде справедливою, якщо лише $0 < |x-a| < \sqrt{a} \cdot \varepsilon = \delta$.

Теорема 1 (єдиність границі). *Якщо функція f має границю в точці a , то ця границя єдина.*

Локальна обмеженість функції, яка має границю. Функція f називається обмеженою зверху (знизу) на множині E , якщо існує таке число M (m), що для всіх $x \in E$ справедлива нерівність $f(x) \leq M$ ($f(x) \geq m$). Функція f називається обмеженою на множині E , якщо вона обмежена на цій множині як зверху, так і знизу.

Інше еквівалентне означення обмеженості функції можна дати, використовуючи поняття модуля. А саме, функція f називається обмеженою на множині E , якщо існує таке число A , що для всіх $x \in E$ справедлива нерівність $|f(x)| \leq A$.

Раніше ми відзначали, що збіжна послідовність обмежена. Розглянемо аналогічне питання для функцій. А саме, чи впливає із існування границі функції обмеженість цієї функції? Негативну відповідь на це питання надає, наприклад, функція $f(x) = \frac{1}{x}$, $0 < x < +\infty$. Справді, легко бачити, що функція f необмежена на $(0, +\infty)$. В той же час, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1$. Справді,

$$\left| \frac{1}{x} - 1 \right| = \frac{|x-1|}{x} \leq 2|x-1| < \varepsilon,$$

якщо лише $|x - 1| < \delta = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2} \right\}$. Разом з тим, справедлива

Теорема 2 (локальна обмеженість функції, яка має границю). *Нехай функція f визначена в деякому проколотому околі U точки a і має границю в цій точці. Тоді існує такий проколотий окіл $V \subset U$, на якому функція f обмежена.*

Означення границі функції за Гейне. Ми хочемо пов'язати означення границі функції з означенням границі послідовності. Нехай функція f визначена в деякому проколотому околі U точки a . Оберемо довільну послідовність аргументів $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, тобто $x_n \in U$ ($x_n \neq a$, $n = 1, 2, \dots$). Ця послідовність аргументів породжує послідовність значень функції f в точках x_n , тобто ми отримуємо послідовність $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$.

Означення. Нехай функція f визначена в проколотому околі U точки a . Число A називається границею функції f в точці a , якщо кожна послідовність аргументів $\{x_n\}$, що прямує до a (тобто $x_n \in U$, $x_n \neq a$, $x_n \rightarrow a$, $n = 1, 2, \dots$), породжує відповідну послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$, яка прямує до A .

Отже, маємо два означення границі функції: за Коші і за Гейне. Ці два означення еквівалентні. Часто на практиці означення границі за Гейне використовується для доведення того, що функція не має границі в точці a . Справді, заперечення означення границі за Гейне виглядає наступним чином.

Число A не є границею функції f в точці a , якщо існує послідовність аргументів $\{x_n\}$ ($x_n \rightarrow a$, $x_n \neq a$), така, що $f(x_n)$ не прямує до A .

Припустимо, що існує така послідовність аргументів $\{x_n\}$, що відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ розбіжна. Тоді зрозуміло, що ніяке число не може бути границею функції f в точці a , тобто f не має границі при $x \rightarrow a$. Отже, для того, щоб показати, що функція f не має границі в точці a , достатньо побудувати послідовність $\{x_n\}$ ($x_n \rightarrow a$, $x_n \neq a$), таку, що $\{f(x_n)\}$ не має границі.

Приклад. Нехай $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$). Оберемо дві послідовності ар-

гументів $x'_k = \frac{1}{2\pi k}$ і $x''_k = \frac{1}{2\pi(k+1/4)}$ ($k = 1, 2, \dots$). Тоді $x'_k \rightarrow 0$, $x''_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) і $f(x'_k) = 0$, $f(x''_k) = 1$. Складемо послідовність аргументів $x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \dots$. Тоді відповідна послідовність значень функції буде такою $0, 1, 0, 1, \dots$, яка, очевидно, розбігається. Отже, ми побудували збіжну до нуля послідовність відмінних від нуля аргументів, таку, що відповідна послідовність значень функції не має границі. Звідси, за означенням границі функції за Гейне, випливає, що функція $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ не має границі при $x \rightarrow 0$.

Ідея розв'язання цього прикладу часто використовується і при розв'язанні інших задач. А саме, для того, щоб показати, що функція f не має границі при $x \rightarrow a$, достатньо побудувати дві послідовності $\{x'_n\}$ і $\{x''_n\}$, які прямують до a ($x'_n \neq a$, $x''_n \neq a$), такі, що $\{f(x'_n)\}$ і $\{f(x''_n)\}$ прямують до різних границь (або принаймні одна з них розбіжна). Тоді для послідовності аргументів $x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \dots$ відповідна послідовність значень функції $f(x'_1), f(x''_1), f(x'_2), f(x''_2), \dots$ буде розбіжною, оскільки у неї є дві різні частинні границі (не виконана умова критерію збіжності в термінах верхньої і нижньої границь послідовності).

Теорема (арифметичні властивості границь). *Нехай функції f і g задані в проколотому околі U точки a , $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$. Тоді*

- 1) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$;
- 3) якщо $g(x) \neq 0$ ($x \in U$) і $B \neq 0$, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

Теорема (граничний перехід і нерівності). *Нехай функції f і g визначені в проколотому околі U точки a , $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, причому $B > A$. Тоді знайдеться проколотий окіл $\Delta \subset U$ точки a , такий, що $f(x) < g(x)$ для всіх $x \in \Delta$.*

Наслідок. *Якщо $f(x) \geq g(x)$ для всіх x , які належать до проколотого околу U точки a , то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$, якщо ці границі існують.*

Теорема (про три границі). *Нехай три функції f, g, h визначені в*

деякому проколотому околі U точки a і такі, що $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ для всіх $x \in U$. Якщо існують границі $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$, то існує і $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$.

3.2 Перша визначна границя

Так називається наступна рівність:

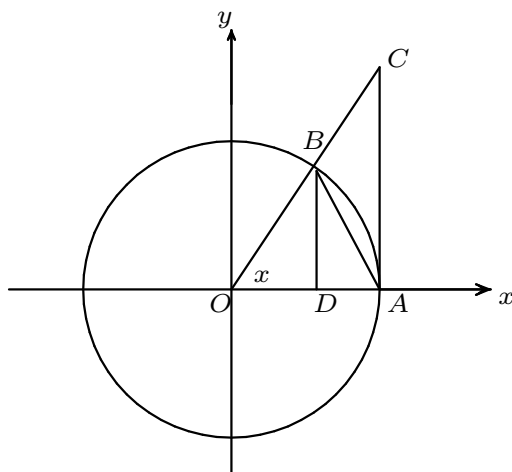
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

де величина x виражена в радіанах. Для доведення цієї рівності доведемо спочатку дві важливі нерівності:

$$\sin x < x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right), \quad (1)$$

$$x < \operatorname{tg} x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right), \quad (2)$$

які мають численні застосування в різних питаннях. Наведемо геометричне доведення цих нерівностей. Розглянемо коло одиничного радіуса з центром у початку координат:



Нехай точка B розташована в першій чверті на колі. Отримаємо кут AOB , радіанна міра якого дорівнює x . Проведемо в точці A перпендикуляр до осі абсцис і продовжимо OB до перетину з цим перпендикуляром в точці C . Із точки B опустимо перпендикуляр на вісь абсцис в точку D .

Тоді із малюнку зрозуміло, що сектор AOB міститься в трикутнику AOC і цей сектор містить у собі трикутник AOB . Тому для площ $S_{\triangle AOB}$ трикутника AOB , $\widehat{S}$ сектора AOB і $S_{\triangle AOC}$ трикутника AOC справедлива наступна нерівність:

$$S_{\triangle AOB} < \widehat{S} < S_{\triangle AOC}. \quad (3)$$

Маємо: $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot |OA| \cdot |BD|$, $S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} \cdot |OA| \cdot |AC|$ і $\widehat{S} = \frac{1}{2} \cdot |AO| \cdot \ell(AB) = \frac{1}{2}x$ (оскільки $|AO| = 1$, а довжина $\ell(AB)$ дуги кола дорівнює добутку радіуса на величину кута, виражену в радіанах, на який опирається ця дуга). Далі, $|BD| = \sin x$, тому ліва нерівність в (3) набуває вигляду $\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2}x$, або $\sin x < x$. Права нерівність в (3) має такий вигляд: $\frac{1}{2}x < \frac{1}{2}|AC| = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$, тобто $x < \operatorname{tg} x$. Тим самим доведені нерівності (1) і (2).

Із (1) отримуємо, що $\frac{\sin x}{x} < 1$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$), а з (2) випливає, що $\cos x < \frac{\sin x}{x}$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$). Отже,

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

Звідси, оскільки $\sin \frac{x}{2} < \frac{x}{2}$, випливає:

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < \frac{x^2}{2}.$$

Наостанок,

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

Враховуючи ще, що функція $\frac{\sin x}{x}$ парна, для $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ отримуємо

$$1 - \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{\sin(-x)}{(-x)} < \frac{(-x)^2}{2} = \frac{x^2}{2}$$

і

$$1 - \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{\sin(-x)}{(-x)} > 0.$$

Таким чином, нерівність

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2}$$

справедлива для всіх x , таких, що $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$. Застосовуючи до цієї нерівності теорему про три границі, отримуємо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\sin x}{x} \right) = 0,$$

а це рівносильно тому, що

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

3.3 Односторонні та нескінченні границі, границі на нескінченності

Нехай функція f визначена на інтервалі (a, b) . Число A називається границею справа функції f в точці a , якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для всіх x , які задовольняють умову $a < x < a + \delta$, справедлива нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Це записують наступним чином: $f(a + 0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A$.

Аналогічно означається границя $f(b - 0) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$ функції f зліва в точці b .

Можна сформулювати ці означення в термінах послідовностей. Наприклад, число B називається границею зліва функції f в точці b , якщо будь-яка послідовність $\{x_n\}$ точок із (a, b) , що прямує до b , породжує відповідну послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$, яка прямує до B .

Нехай функція f визначена в проколотому околі U точки a . Кажуть, що границя функції f при x , що прямує до a , дорівнює $+\infty$ (або f прямує до $+\infty$ при x , що прямує до a), якщо для будь-якого $E > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що для всіх x , які задовольняють умову $0 < |x - a| < \delta$, справедлива нерівність $f(x) > E$. Позначають це так: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

Аналогічно, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, якщо для будь-якого $E > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що для всіх x , які задовольняють умову $0 < |x - a| < \delta$, справедлива нерівність $f(x) < -E$. Якщо ж для будь-якого $E > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що для всіх x , які задовольняють умову $0 < |x - a| < \delta$, справедлива нерівність $|f(x)| > E$, то пишуть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

Легко бачити, що із будь-якої з умов $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ чи $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ випливає, що $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$. Разом з тим, легко навести приклад функції f , такої, що $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, але f не прямує ні до $+\infty$, ні до $-\infty$.

Наведені означення нескінченних границь легко можна сформулювати в термінах послідовностей.

Нехай функція f визначена на півосі $(a, +\infty)$. Число A називається границею функції f при $x \rightarrow +\infty$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\Delta > 0$, що для всіх $x > \Delta$ справедлива нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Позначають це так: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

Сформулюємо ще кілька означень за допомогою кванторів:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \Delta > 0 : \forall x < -\Delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \Delta > 0 : \forall x : |x| > \Delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon,$$

$$f(x) \rightarrow A + 0 \ (x \rightarrow a - 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x : a - \delta < x < a \quad A < f(x) < A + \varepsilon.$$

Як і в попередніх випадках, подібні означення легко можна сформулювати в термінах послідовностей.

Приклад 1. Покажемо, що $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$. Справді,

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 0 \right| \leq \frac{1}{|x|} < \varepsilon,$$

якщо лише $|x| > \Delta = \frac{1}{\varepsilon}$.

Приклад 2. Доведемо, що функція $f(x) = \sin x$ не має границі при $x \rightarrow +\infty$. Для цього розглянемо дві послідовності: $x'_n = \pi n$ і $x''_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Обидві ці послідовності прямують до $+\infty$, але при цьому відповідні послідовності значень функції $f(x'_n) = \sin \pi n = 0 \rightarrow 0$ і $f(x''_n) = \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1 \rightarrow 1$. Звідси випливає, що функція не має границі при $x \rightarrow +\infty$.

Приклад 3. Якщо $f(x) = \operatorname{sign} x$, то, очевидно, маємо $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sign} x = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sign} x = -1$. В той же час, f не має границі при $x \rightarrow \infty$. Справді, для доведення достатньо розглянути послідовності $x'_n = n$ і $x''_n = -n$.

3.4 Асимптоти

Вертикальна асимптота. Кажуть, що в декартовій системі координат вертикальна пряма $l = \{(x, y) : x = x_0, y \in \mathbb{R}\}$ є вертикальною асимптотою графіка функції $y = f(x)$, якщо принаймні одна із односторонніх границь $\lim_{x \rightarrow x_0 \pm 0} f(x)$ дорівнює $+\infty$ чи $-\infty$.

Похила асимптота. Пряму $l = \{(x, y) : y = kx + b, x \in \mathbb{R}\}$ називають похилою асимптотою графіка функції $y = f(x)$ на $+\infty$, якщо

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0.$$

Щоб дослідити функцію на наявність такої асимптоти (тобто з'ясувати чи існують такі числа k і b) необхідно і достатньо обчислити наступні границі (у вказаному порядку)

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx).$$

Якщо принаймні однієї з цих границь не існує (скінченної), то функція не має асимптоти на $+\infty$.

Аналогічно означаються і знаходяться асимптоти функції на $-\infty$.

3.5 Критерій Коші

Зараз мова йтиме про існування скінченної границі.

Для послідовностей ми відзначали критерій Коші, який полягає у тому, що збіжність послідовності рівносильна її фундаментальності. Аналогічне твердження справедливе і для границь функцій.

Теорема (критерій Коші). *Нехай функція f визначена в проколотому околі U точки a . Для того, щоб функція f мала скінченну границю при $x \rightarrow a$, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$ існувало таке $\delta > 0$, що для всіх $x', x'' \in U$, які задовольняють умову $0 < |x' - a| < \delta$, $0 < |x'' - a| < \delta$, виконувалась нерівність $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.*

Аналогічно можемо сформулювати критерій Коші для границь при $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ і $x \rightarrow \infty$, а також односторонніх границь. Наведемо, наприклад, формулювання критерію Коші для границі при $x \rightarrow +\infty$.

Теорема (критерій Коші для випадку $x \rightarrow +\infty$). Нехай функція f визначена на півпрямій $(a, +\infty)$. Для того щоб функція f мала скінченну границю при $x \rightarrow +\infty$, необхідно і достатньо, щоб для довільного числа $\varepsilon > 0$ знайшлося таке $\Delta > 0$, що при будь-яких $x', x'' > \Delta$ виконувалась нерівність $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Приклад. Довести, що функція $f(x) = \frac{1}{x}$ не має скінченної границі справа в точці $a = 0$. Для доведення покажемо, що існує таке $\varepsilon_0 > 0$, що для будь-якого $\delta > 0$ знайдуться x', x'' , які задовольняють умову $0 < x' < \delta$, $0 < x'' < \delta$, такі, що $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0$. Покладемо $\varepsilon_0 = 1$. Нехай задане довільне $\delta > 0$. Оберемо $x' = \frac{\delta}{2}$, $x'' = \frac{\delta}{2+\delta}$. Тоді $0 < x' < \delta$, $0 < x'' < \delta$, але $|f(x') - f(x'')| = \left| \frac{2}{\delta} - \left(\frac{2}{\delta} + 1 \right) \right| = 1 = \varepsilon_0$, і тим самим завершується розгляд прикладу.

3.6 Монотонні функції

Означення. Нехай $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ і функція f визначена на (a, b) . Функція f називається монотонно зростаючою (спадною) на (a, b) , якщо для будь-яких $x, y \in (a, b)$, таких, що $x < y$, справедлива нерівність $f(x) \leq f(y)$ ($f(x) \geq f(y)$).

Якщо в даному означенні нестрогі нерівності замінити строгими, то отримаємо означення строго зростаючої (спадної) функції.

Для монотонної послідовності ми відзначали критерій збіжності, який полягає в тому, що збіжність монотонної послідовності еквівалентна обмеженості цієї послідовності (зверху для зростаючої і знизу для спадної послідовності). Відповідні твердження справедливі і для функцій.

Теорема. Нехай $-\infty < a < b < +\infty$ і функція f монотонно зростає на (a, b) . Якщо f обмежена зверху на (a, b) , то існує скінченна $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$. Якщо ж f необмежена зверху, то $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = +\infty$.

Аналогічно, якщо f зростає на $(a, +\infty)$, то

1) якщо f обмежена зверху, то існує скінченна $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$;

2) якщо f необмежена зверху, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Подібним чином можна сформулювати аналоги наведеної теореми для правої границі функції в точці a для скінченного a і для $a = -\infty$.

Наслідок. Якщо функція f монотонна на інтервалі (a, b) , то в кожній точці цього інтервалу вона має скінченні ліву та праву границі.

3.7 Заміна змінної у границях

Теорема. Нехай функція f визначена в проколотому околі U точки x_0 , а функція g визначена в проколотому околі V точки t_0 і така, що для всіх $t \in V$ значення $x = g(t)$ належить до U і $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = x_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. Тоді $\lim_{t \rightarrow t_0} f(g(t)) = A$.

Сенс цієї теореми в тому, що якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, то, вважаючи x залежною змінною ($x = g(t)$) і такою, що $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = x_0$, ми отримуємо те ж саме значення $\lim_{t \rightarrow t_0} f(g(t)) = A$. Інакше кажучи, при обчисленні границі $\lim_{t \rightarrow t_0} f(g(t))$ можна виконувати заміну $x = g(t)$ і (за виконанням відповідних умов, тобто $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = x_0$, $g(t) \neq x_0$) обчислювати $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Ці границі однакові.

Приклад. Обчислити $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+t}-1}{t}$, де $n \in \mathbb{N}$.

Покладемо $t = x^n - 1$, тобто вважаємо, що $f(g(t)) = \frac{\sqrt[n]{1+t}-1}{t}$, де $x = g(t) = \sqrt[n]{1+t}$, а $f(x) = \frac{x-1}{x^n-1}$. Тоді умова $t \rightarrow t_0 = 0$ рівносильна тому, що $x \rightarrow x_0 = 1$, а задана границя, згідно з умовою теореми про заміну змінної, дорівнює такій границі $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^n-1}$. Обчислимо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^n-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Тому і $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+t}-1}{t} = \frac{1}{n}$.

3.8 Частинні границі. Верхня та нижня границі функцій

Означення. Нахай функція f визначена в проколотому околі U точки a . Число A (скінченне, $+\infty$ чи $-\infty$) називається частинною границею функції f в точці a , якщо існує така послідовність $\{x_n\}$ ($x_n \in U$, $x_n \rightarrow a$ ($n \rightarrow \infty$), $x_n \neq a$), що $f(x_n) \rightarrow A$ ($n \rightarrow \infty$).

Кожна функція, яка визначена в проколотому околі U точки a , має частинні границі. Справді, якщо функція f обмежена в деякому проколотому околі $\Delta \subset U$ точки a , то для будь-якої послідовності $\{x_n\}$ ($x_n \in U$, $x_n \rightarrow a$ ($n \rightarrow \infty$), $x_n \neq a$), починаючи з деякого номера $x_n \in \Delta$, і, отже, $\{f(x_n)\}$ – обмежена послідовність. За лемою Больцано – Вейерштрасса, із обмеженої послідовності $\{f(x_n)\}$ можна вилучити збіжну підпослідовність $\{f(x_{n_k})\}$, тобто у функції f буде існувати скінченна частинна границя. Якщо ж f необмежена в будь-якому проколотому околі точки a , то вона необмежена або зверху, або знизу. Якщо, наприклад, f необмежена зверху, то, обираючи послідовність $x_n \in ((a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}) \setminus \{a\}) \cap U$ так, що $f(x_n) > n$, отримаємо, що $x_n \rightarrow a$ і $f(x_n) \rightarrow +\infty$, тобто $+\infty$ є частинною границею функції f в точці a . Аналогічно бачимо, що у необмеженій знизу функції $-\infty$ є її частинною границею.

Отже, у множині $\overline{\mathbb{R}}$ для будь-якої функції f множина її частинних границь непорожня.

Означення. Найбільша із усіх частинних границь функції f в точці a називається верхньою границею в точці a і позначається $\overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x)$. Найменша із усіх частинних границь функції f в точці a називається нижньою границею в точці a і позначається $\underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x)$.

Приклад. Нехай $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$), $a = 0$. Сукупність усіх частинних границь цієї функції в точці 0 – це відрізок $[-1, 1]$. Справді, для будь-якого числа $A \in [-1, 1]$ легко побудувати послідовність $\{x_n\}$, $x_n \rightarrow 0$, таку, що $\sin \frac{1}{x_n} \rightarrow A$ ($n \rightarrow \infty$). Також легко бачити, що коли число $A \notin [-1, 1]$, то воно не є частинною границею функції $\sin \frac{1}{x}$ в точці 0 .

Таким чином, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = -1$ і $\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = 1$.

Як і для послідовностей, справедлива наступна теорема.

Теорема. Для того, щоб функція f мала в точці a границю, яка дорівнює A (скінченну, $+\infty$ чи $-\infty$), необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

Аналогічно можна навести поняття частинних, верхньої і нижньої границь для випадку $a = +\infty$, $a = -\infty$, $a = \infty$ та відповідну теорему про існування границі.

Контрольні питання

1. Елементарні функції та їх графіки. Операції над графіками. Обернені функції.
2. Границі функцій та їх властивості.
3. Перша визначна границя та наслідки з неї.
4. Односторонні та нескінченні границі. Границі на нескінченності.
5. Асимптоти.
6. Критерій Коші.
7. Монотонні функції та їх границі.
8. Частинні границі, верхня та нижня границі.

Розділ 4. Неперервні функції

4.1 Означення та приклади

Означення. Нехай функція f визначена на інтервалі (a, b) і точка $x_0 \in (a, b)$. Кажуть, що функція f неперервна в точці x_0 , якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Зауваження. На відміну від означення границі функції f в точці x_0 , тут ми вимагаємо, щоб функція f була визначеною не лише в проколотому околі точки x_0 , а в цілому околі точки x_0 . Крім того, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ не просто існує, а дорівнює визначеному значенню, а саме, $f(x_0)$.

Використовуючи означення границі функції за Коші, означення неперервності функції f в точці x_0 в кванторах можна записати наступним чином:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in (a, b) \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

У цьому означенні можна не вимагати умови $|x - x_0| > 0$, оскільки при $|x - x_0| = 0$ нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, очевидно, виконана.

Оскільки величина $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ залежить лише від тих значень, які функція f набуває у довільно малому околі точки x_0 , то неперервність – це локальна властивість функції.

Застосовуючи означення границі функції за Гейне, означення неперервності можна сформулювати так.

Означення. Функція f , яка визначена на інтервалі (a, b) , називається неперервною в точці $x_0 \in (a, b)$, якщо будь-яка послідовність аргументів $\{x_n\}$ ($x_n \in (a, b)$, $x_n \rightarrow x_0$) породжує послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$, яка прямує до $f(x_0)$.

Застосовуючи поняття односторонньої границі (тобто границі зліва або справа) в точці x_0 , можна надати означення неперервності зліва (справа) в точці x_0 . А саме, функція f називається неперервною зліва (справа) в точці x_0 , якщо $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0)$ ($\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$). При цьому в означенні неперервності зліва достатньо вважати, що функція f визначена лише в лівому півоколі точки x_0 , тобто на $(a, x_0]$, а для неперервності справа – на $[x_0, b)$.

Легко бачити, що справедливе наступне

Твердження. Для того щоб функція f була неперервною в точці x_0 , необхідно і достатньо, що f була неперервною як зліва, так і справа в точці x_0 .

Означення. Функція f , яка визначена на інтервалі (a, b) , називається розривною в точці $x_0 \in (a, b)$, якщо f не є неперервною в цій точці.

Таким чином, функція f є розривною в точці x_0 , якщо виконуються одна з двох наступних умов:

1. або не існує $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$;
2. або границя $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ існує, але вона не дорівнює $f(x_0)$.

Приклад 1. $f(x) \equiv C = \text{Const}$. Ця функція неперервна в кожній точці $x_0 \in \mathbb{R}$, оскільки $|f(x) - f(x_0)| = 0$ для будь-якого $x \in \mathbb{R}$.

Приклад 2. $f(x) = x^2$, $-\infty < x < +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Задамо $\varepsilon > 0$. Тоді з нерівності

$$|x^2 - x_0^2| \leq (|x| + |x_0|) |x - x_0| \leq ((|x_0| + 1) + |x_0|) |x - x_0|$$

впливає, що при $|x - x_0| < \delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}\right)$ справедлива нерівність $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0} x^2 = x_0^2$, а отже, функція $f(x) = x^2$ неперервна в кожній точці $x_0 \in \mathbb{R}$.

Приклад 3. $f(x) = \sqrt{x}$, $0 \leq x < +\infty$. Якщо $x_0 \in (0, +\infty)$, то

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \leq \frac{1}{\sqrt{x_0}} |x - x_0| < \varepsilon,$$

якщо лише $|x - x_0| < \delta \equiv \sqrt{x_0} \cdot \varepsilon$. Таким чином, функція $f(x) = \sqrt{x}$ неперервна в кожній точці $x_0 > 0$. В точці $x_0 = 0$ можна ставити питання

лише про неперервність справа. Маємо $|\sqrt{x} - \sqrt{0}| = \sqrt{x} < \varepsilon$, якщо лише $0 \leq x < \delta \equiv \varepsilon^2$. Отже, $\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{x} = 0 = \sqrt{0}$, тобто функція $f(x) = \sqrt{x}$ неперервна справа в точці 0.

Приклад 4. $f(x) = \sin x$, $-\infty < x < +\infty$. Нехай $x_0 \in \mathbb{R}$. Тоді

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin x_0| &= \left| 2 \cos \frac{x+x_0}{2} \sin \frac{x-x_0}{2} \right| \leq \\ &\leq 2 \left| \sin \frac{x-x_0}{2} \right| \leq |x-x_0|, \end{aligned}$$

де остання нерівність в цьому ланцюжку впливає із відзначеної раніше нерівності $|\sin t| \leq |t|$. Тоді при $|x-x_0| < \delta \equiv \varepsilon$ справедлива нерівність $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$, тобто функція $f(x) = \sin x$ неперервна в кожній точці $x_0 \in \mathbb{R}$.

Аналогічно показуємо, що функція $f(x) = \cos x$ неперервна в кожній точці $x_0 \in \mathbb{R}$.

Приклад 5. $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ і $f(0) = 0$. Покажемо, що функція f неперервна в точці $x_0 = 0$. Маємо $f(0) = 0$ і

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

(оскільки $|f(x) - 0| = |x \sin \frac{1}{x}| \leq |x| < \varepsilon$, якщо лише $|x - 0| = |x| < \delta \equiv \varepsilon$). Отже, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, і тому f неперервна в точці 0. Зауважимо, що якби ми поклали $f(0) = A \neq 0$, то отримали б

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \neq A = f(0),$$

тобто така функція стала б розривною в точці 0.

Приклад 6. $f(x) = \operatorname{sign} x$, $x \in \mathbb{R}$. Якщо $x_0 \neq 0$, то функція f стала в деякому околі точки x_0 і, отже, неперервна в цій точці. Якщо ж $x_0 = 0$, то не існує границі функції f при $x \rightarrow 0$. Отже, функція f розривна в точці 0. Крім того, $\lim_{x \rightarrow 0+} \operatorname{sign} x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0-} \operatorname{sign} x = -1$, $\operatorname{sign} 0 = 0$, і тому функція $\operatorname{sign} x$ розривна в точці 0 як зліва, так і справа.

Приклад 7. Розглянемо функцію Діріхле

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Нехай $x_0 \in \mathbb{R}$. Покажемо, що не існує границі функції $\mathcal{D}$ при $x \rightarrow x_0$. Для цього оберемо послідовність $\{x'_n\}$ відмінних від x_0 раціональних чисел, яка прямує до x_0 . Тоді $\mathcal{D}(x'_n) = 1$ і, отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{D}(x'_n) = 1$. Якщо ж взяти послідовність $\{x''_n\}$ відмінних від x_0 ірраціональних чисел, яка прямує до x_0 , то отримаємо, що $\mathcal{D}(x''_n) = 0$ і тому $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{D}(x''_n) = 0$. За означенням границі функції за Гейне отримуємо, що функція $\mathcal{D}$ не має границі в точці x_0 . Оскільки $x_0 \in \mathbb{R}$ – довільна точка, то це означає, що функція Діріхле розривна в кожній точці.

4.2 Класифікація точок розриву

Припустимо, що функція f неперервна в точці x_0 . Це означає, що існує границя $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ і вона дорівнює $f(x_0)$. Якщо ж ми змінимо значення функції f лише в одній точці x_0 , то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ буде існувати, як і раніше (вона не залежить від значення $f(x_0)$), але при цьому рівність $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ стане порушеною. У цьому випадку кажуть, що отримана функція буде мати усувний розрив. Отже, точка x_0 називається точкою усувного розриву функції f , якщо існує $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, але вона не дорівнює $f(x_0)$.

Нехай функція f визначена в деякому проколотому околі точки x_0 . Нагадаємо, що односторонні границі ми позначали через $f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$, $f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ (звичайно, якщо ці границі існують). У цих термінах критерій існування границі функції f в точці x_0 полягає в тому, що $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, а необхідною і достатньою умовою неперервності функції f в точці x_0 є наступна рівність:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0). \quad (4)$$

Якщо ж функція f не є неперервною в точці x_0 , то це означає, що

а) або всі значення, які входять до рівності (4) існують, але порушена принаймні одна із двох рівностей в (4);

$b)$ або не існує (скінченного) принаймні одного з двох значень $f(x_0 - 0)$ чи $f(x_0 + 0)$.

У випадку $a)$ точку x_0 назвемо точкою розриву першого роду, а у випадку $b)$ – точкою розриву другого роду. Таким чином, приходимо до наступних означень.

Означення 1. Точка x_0 називається точкою розриву I роду, якщо існують скінченні границі $f(x_0 - 0)$ і $f(x_0 + 0)$, але принаймні одна з них не дорівнює $f(x_0)$.

Зокрема, точка усувного розриву є точкою розриву I роду, оскільки якщо x_0 – точка усувного розриву, то існує $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, але вона не дорівнює $f(x_0)$. Якщо ж $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ (обидві границі існують), то яким би не було б значення $f(x_0)$, точка x_0 буде точкою розриву I роду. У цьому випадку кажуть, що функція f має стрибок в точці x_0 , а величину $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ називають стрибком f в точці x_0 .

Означення 2. Точка x_0 називається точкою розриву II роду функції f , якщо не існує принаймні однієї з двох границь $f(x_0 - 0)$ чи $f(x_0 + 0)$.

Приклад 1. $f(x) = |\operatorname{sign} x|$. В точці $x_0 = 0$ у функції f усувний розрив, оскільки $\lim_{x \rightarrow 0} |\operatorname{sign} x| = 1 \neq 0 = |\operatorname{sign} 0|$.

Приклад 2. $f(x) = \operatorname{sign} x$. Ця функція f в точці $x_0 = 0$ має розрив I роду, оскільки односторонні границі $f(x_0 - 0) = -1$ і $f(x_0 + 0) = 1$ існують, але вони не дорівнюють $\operatorname{sign} 0 = 0$. Крім того, в точці 0 функція f має стрибок, який дорівнює $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0) = 1 - (-1) = 2$.

Приклад 3. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ і $f(0) = 0$. Оскільки обидві односторонні границі функції f в точці $x_0 = 0$ не існують, то точка 0 є точкою розриву II роду.

Приклад 4. $f(x) = [x]$ – функція цілої частини – найбільше ціле число, яке не більше за x . Легко бачити, що ця функція неперервна в кожній точці $x_0 \notin \mathbb{Z}$, а в кожній точці $x_0 \in \mathbb{Z}$ має розрив першого роду і неперервна справа. Стрибок в кожній цілочисельній точці дорівнює 1 .

4.3 Неперервність і арифметичні операції

Теорема. Нехай функції f і g визначені на інтервалі (a, b) і неперервні в точці $x_0 \in (a, b)$. Тоді

- а) функція $f + g$ неперервна в точці x_0 ;
- б) функція $f \cdot g$ неперервна в точці x_0 ;
- в) якщо $g(x) \neq 0$ на (a, b) , то функція $\frac{f}{g}$ неперервна в точці x_0 .

Ця теорема є простим наслідком відповідної теореми для границь функцій. Із цієї теореми та з неперервності функції $f(x) = x$ в кожній точці $x_0 \in \mathbb{R}$ одразу випливає, що функція $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) неперервна в кожній точці $x_0 \in \mathbb{R}$. Звідси, в свою чергу, випливає, що і многочлен $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ неперервний в кожній точці, а також і раціональна функція

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m}$$

неперервна в кожній точці області визначення $D(R)$. Справді, нехай $x_0 \in D(R)$. Тоді $Q_m(x_0) \neq 0$. Оскільки кількість дійсних коренів многочлена $Q_m(x)$ скінченна (не більша за m), то можна знайти такий інтервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ($\delta = \min_{i \geq 1} |x_0 - x_i|$, де x_i ($i \geq 1$) – корені $Q_m(x)$), у якому $Q_m(x) \neq 0$, і застосувати теорему про неперервність відношення.

Далі, функція $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ($x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$) і функція $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ ($x \neq \pi n$) неперервні в кожній точці своєї області визначення. Це випливає із неперервності функцій $\sin x$ і $\cos x$.

Теорема (про збереження знаку). Нехай функція f визначена на інтервалі (a, b) і неперервна в деякій точці $x_0 \in (a, b)$. Якщо значення функції $f(x_0) > 0$ ($f(x_0) < 0$), то знайдеться такий окіл $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 , що $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) для всіх $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

4.4 Неперервність складеної функції (композиції)

Теорема. Нехай функція g , яка визначена на інтервалі (a, b) , неперервна в точці $x_0 \in (a, b)$ і така, що $c < g(x) < d$ для всіх $x \in (a, b)$.

Далі, нехай функція f визначена на інтервалі (c, d) і неперервна в точці $y_0 = g(x_0) \in (c, d)$. Тоді складена функція (композиція) $\varphi(x) = f(g(x))$ неперервна в точці $x_0 \in (a, b)$.

Приклад. Нехай $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$). Оскільки функція $\sin y$ неперервна в кожній точці $y_0 \in \mathbb{R}$, а функція $\frac{1}{x}$ неперервна в кожній точці $x_0 \neq 0$, то складена функція $\sin \frac{1}{x}$, за наведеною теоремою, неперервна в кожній точці $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

4.5 Неперервність та розриви монотонної функції

Означення. Функція f , яка визначена на інтервалі (a, b) , називається неперервною на цьому інтервалі, якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервала. Функція f називається неперервною на відрізку $[a, b]$, якщо вона неперервна на (a, b) , а в точках a і b неперервна справа і зліва, відповідно.

Дослідимо характер можливих розривів у монотонної функції. А саме, наступна теорема показує, що у монотонної функції не може бути точок розриву II роду, а у внутрішніх точках не може бути усувних розривів. З іншого боку, в кінцевих точках відрізка якщо і є розрив, то він усувний.

Теорема 1. Нехай функція f монотонна на $[a, b]$. Тоді

1. Якщо $x_0 \in (a, b)$, то має місце одна і лише одна з двох наступних ситуацій:

- а) f неперервна в точці x_0 ;
- б) в точці x_0 функція f має неусувний розрив I роду.

2. Якщо $x_0 = a$ ($x_0 = b$), то

- а) або f неперервна справа (зліва) в точці x_0 ;
- б) або f має в точці x_0 усувний правосторонній (лівосторонній) розрив.

Тепер поставимо питання про кількість точок розриву монотонної функції, яка задана на $[a, b]$. Може виявитись, що точок розриву у функції f немає (наприклад, $f(x) = x$). Легко побудувати приклад монотонної фун-

кції, у якої будь-який наперед заданий скінченний набір точок із $[a, b]$ буде точками розриву, а всі інші точки будуть точками неперервності. Монотонна функція може мати і нескінченно багато точок розриву. Наприклад, у незростаючої функції

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

кожна точка виду $\frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$) є точкою розриву. У цьому прикладі множина точок розриву зчисленна. Якщо ж відмовитись від умови монотонності, то можна навести приклад функції, у якої множина точок розриву незчисленна (функція Діріхле). Природньо запитати, чи може монотонна функція мати незчисленну множину точок розриву?

Означення. Множина називається не більше ніж зчисленною, якщо вона порожня, скінченна або зчисленна.

Теорема 2. *Нехай функція f монотонна на (a, b) . Тоді множина її точок розриву не більше ніж зчисленна.*

Нехай функція f монотонна на $[a, b]$. Тоді множина її значень $E(f)$ міститься у відрізку I з кінцями $f(a)$ і $f(b)$, тобто $E(f) \subset I$. Наступна теорема показує, що у випадку $E(f) = I$ функція f неперервна на $[a, b]$. Іншими словами, якщо в області значень монотонної функції немає "дірок" (проміжків), то така функція неперервна.

Теорема 3. *Нехай функція f монотонна на $[a, b]$ і множина її значень є відрізком із кінцями $f(a)$ і $f(b)$. Тоді функція f неперервна на $[a, b]$.*

Зауваження. Теорема 3 втрачає силу, якщо відкинути умову монотонності функції f . Наприклад, множина значень функції

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -1 \leq x < 0, \\ x - 1, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

яка визначена на відрізку $[-1, 1]$, є відрізком $[-1, 1]$, але в той же час ця функція розривна в точці $x_0 = 0$.

Еквівалентне формулювання теореми 3 має наступний вигляд. Якщо монотонна функція f набуває усіх проміжних значень між $f(a)$ і $f(b)$, то f неперервна на $[a, b]$. Далі ми покажемо, що обернене твердження справедливе для будь-якої неперервної функції, навіть без припущення монотонності.

4.6 Властивість проміжних значень

Теорема Больцано – Коші (про корінь). *Нехай функція f неперервна на відрізку $[a, b]$ і на кінцях цього відрізка набуває значень різних знаків. Тоді існує точка $c \in (a, b)$ така, що $f(c) = 0$.*

Наслідок (властивість проміжних значень). *Нехай задана неперервна на відрізку $[a, b]$ функція f . Тоді функція f набуває усіх значень, які розташовані між $f(a)$ і $f(b)$. Точніше, для будь-якого числа A , розташованого між $f(a)$ і $f(b)$, знайдеться така точка $c \in [a, b]$, що $f(c) = A$.*

Цей наслідок миттєво впливає із теореми Больцано – Коші, якщо застосувати її до функції $g(x) = f(x) - A$.

Обернене до цього наслідку твердження хибне. У цьому легко переконатись на прикладі функції

$$f(x) = \begin{cases} x, & x - \text{раціональне,} \\ 1 - x, & x - \text{іраціональне,} \end{cases}$$

яка визначена на відрізку $[0, 1]$. Якщо ж функція f монотонна на $[a, b]$, то, як показує теорема 3, цей наслідок можна обернути. Таким чином, із теореми 3 і властивості проміжних значень отримуємо наступний критерій неперервності монотонної функції.

Теорема. *Монотонна на відрізку $[a, b]$ функція f неперервна на цьому відрізку тоді і лише тоді, коли вона набуває усіх проміжних значень між $f(a)$ і $f(b)$.*

Приклад. Покажемо, що кожний многочлен непарного степеня має принаймні один дійсний корінь. Нехай $P_{2k+1}(x) = a_0x^{2k+1} + a_1x^{2k} + \dots +$

a_{2k+1} , причому можемо вважати, що $a_0 > 0$. Тоді $\lim_{x \rightarrow -\infty} P_{2k+1}(x) = -\infty$, а отже, існує таке a , що $P_{2k+1}(a) < 0$. Далі, оскільки $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_{2k+1}(x) = +\infty$, то знайдеться таке $b > a$, що $P_{2k+1}(b) > 0$. Оскільки многочлен P_{2k+1} неперервний на $[a, b]$, то, за теоремою Больцано – Коші, знайдеться таке $c \in (a, b)$, що $P_{2k+1}(c) = 0$.

4.7 Теореми Вейєрштрасса

Раніше ми відзначали, що неперервна в точці функція локально обмежена, тобто обмежена в деякому околі цієї точки. Але із локальної обмеженості в кожній точці деякої множини не випливає обмеженість функції на всій множині. Наприклад, функція $f(x) = \frac{1}{x}$ ($0 < x < 1$) неперервна в кожній точці $x_0 \in (0, 1)$ і, таким чином, локально обмежена в кожній точці (тобто для кожної точки $x_0 \in (0, 1)$ існує такий окіл $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, на якому функція f обмежена). Разом з тим функція f необмежена на всій множині $(0, 1)$.

Перша теорема Вейєрштрасса. *Якщо функція f неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона обмежена на цьому відрізку.*

Тепер поставимо таке запитання. Чи зобов'язана обмежена функція мати найбільше та найменше значення? Відповідь, очевидно, негативна. Наприклад, функція $f(x) = x$, що задана на $(0, 1)$, не має найбільшого і найменшого значень на цій множині. Іншим прикладом може бути функція дробової частини $f(x) = \{x\} = x - [x]$ на відрізку $[0, 1]$.

В першому прикладі функція неперервна, але задана на інтервалі. У другому прикладі функція задана на відрізку, але не є неперервною на цьому відрізку. Наступна теорема стверджує, що неперервна на відрізку функція має найбільше та найменше значення.

Друга теорема Вейєрштрасса. *Нехай функція f неперервна на відрізку $[a, b]$. Тоді f досягає своїх точних верхньої та нижньої меж, тобто існують такі $\alpha, \beta \in [a, b]$, що*

$$f(\alpha) = \sup_{x \in [a, b]} f(x), \quad f(\beta) = \inf_{x \in [a, b]} f(x).$$

Інакше кажучи, на відрізку $[a, b]$ функція f має найбільше та найменше значення

$$f(\alpha) = \max_{x \in [a, b]} f(x), \quad f(\beta) = \min_{x \in [a, b]} f(x).$$

Наслідок із теореми Больцано – Коші (властивість проміжних значень) стверджує, що множиною значень неперервної на відрізку функції є проміжок. Але проміжком може бути інтервал, відрізок або напівінтервал. Друга теорема Вейерштрасса разом із теоремою Больцано – Коші уточнюють, що це – саме відрізок.

Теорема. *Множиною значень неперервної на відрізку функції є відрізок.*

4.8 Обернена функція

Функція f , яка діє з X в Y , називається бієктивною, якщо вона взаємно однозначна і її область значень співпадає з множиною Y . Це означає, що для кожного $y \in Y$ існує єдиний $x \in X$, такий, що $y = f(x)$.

Нехай функція $f : X \rightarrow Y$ бієктивна. Тоді кожному $y \in Y$ можна поставити у відповідність єдиний $x \in X$, такий, що $y = f(x)$. Тим самим ми отримаємо нову функцію, яка діє з Y в X . Така функція називається оберненою до функції f і позначається через f^{-1} . Наприклад, $f(x) = x^3$ діє із $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ і бієктивна. Тоді $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$. Інша функція $f(x) = x^2$, яка діє із $\mathbb{R}$ в $[0, +\infty)$, не є бієктивною, і тому не можна говорити про обернену функцію. Якщо ж ми розглянемо функцію $f_1 : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, яка діє за правилом $f_1(x) = x^2$, то така функція вже є бієктивною, і тому у неї є обернена $f_1^{-1}(y) = \sqrt{y}$. У цьому прикладі ми користуємось поняттям звуження, тобто функцію ми розглядаємо не на всій можливій області визначення, де формула, яка означає функцію, визначена, а лише на деякій частині цієї області визначення. Надамо означення.

Означення. Нехай функція $f : X \rightarrow Y$, і множина $A \subset X$. Кожній точці $x \in A$ поставимо у відповідність $y = f(x) \in Y$. Тоді отримаємо нову функцію, визначену на множині A , яку назовемо звуженням функції f на

множину A , і будемо позначати це звуження через $f|A$.

У розглянутому вище прикладі $f(x) = x^2$ функція не була взаємно однозначною на $\mathbb{R}$. В той же час, звуження $f_1 = f| [0, +\infty)$ – взаємно однозначна функція, і тому існує обернена функція.

Розглянемо питання про існування оберненої функції і її властивості. Якщо обернену функцію вдається виразити явно (як у розглянутих вище прикладах), то властивості оберненої функції можуть бути вивчені безпосередньо. Але це не завжди можна зробити. Наприклад, функція $f(x) = x + \frac{1}{2} \sin x$ взаємно однозначна, але виразити обернену функцію досить складно. Ми хочемо дослідити деякі властивості обернені функції f^{-1} , не знаючи її явного зображення.

Нехай функція f визначена на $[a, b]$. Очевидно, що коли f строго монотонна на $[a, b]$, то вона взаємно однозначна. Обернене твердження хибне. Наприклад, функція

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -1 \leq x < 0, \\ x - 1, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

очевидно, взаємно однозначна, але не є монотонною на $[-1, 1]$. Але можна показати, що коли функція взаємно однозначна і неперервна, то вона строго монотонна.

Надалі через $\langle \alpha, \beta \rangle$ будемо позначати відрізок із кінцями α і β (при цьому нерівність $\alpha < \beta$ не є обов'язковою).

Теорема (про обернену функцію). *Нехай функція f строго монотонна і неперервна на відрізку $[a, b]$. Тоді обернена функція f^{-1} також строго монотонна і неперервна на відрізку $\langle f(a), f(b) \rangle$.*

Приклад 1. Арксинус. Функція $f(x) = \sin x$ ($-\infty < x < +\infty$) не є взаємно однозначною. Розглянемо звуження цієї функції на $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Це звуження – неперервна і строго зростаюча функція. Тому існує обернена функція, неперервна і строго зростаюча.

Арксинусом називається функція, обернена до звуження функції $\sin x$ на $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, і позначається через $\arcsin x$. Вона визначена на $[-1, 1]$, областю значень має $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, строго зростає і неперервна на $[-1, 1]$.

Приклад 2. Арккосинус. Функція $f(x) = \cos x$ ($-\infty < x < +\infty$) не є взаємно однозначною. Розглянемо звуження цієї функції на $[0, \pi]$. Це звуження – неперервна і строго спадна функція. Тому існує обернена функція, неперервна і строго спадна.

Арккосинусом називається функція, обернена до звуження функції $\cos x$ на $[0, \pi]$, і позначається через $\arccos x$. Вона визначена на $[-1, 1]$, її область значень – відрізок $[0, \pi]$, строго спадає і неперервна на $[-1, 1]$.

Приклад 3. Арктангенс и арккотангенс. Арктангенсом називається функція, обернена до звуження функції $\operatorname{tg} x$ на $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, і позначається через $\operatorname{arctg} x$. Функція $\operatorname{arctg} x$ неперервна і строго зростає на $(-\infty, +\infty)$, область її значень – інтервал $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Арккотангенсом називається функція, обернена до звуження функції $\operatorname{ctg} x$ на $(0, \pi)$, і позначається через $\operatorname{arcctg} x$. Функція $\operatorname{arcctg} x$ неперервна і строго спадна на $(-\infty, +\infty)$, область її значень – інтервал $(0, \pi)$.

Вправа. Побудуйте графіки означених вище обернених тригонометричних функцій $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ і $y = \operatorname{arcctg} x$.

4.9 Показникова, логарифмічна та степенева функції

Показникова функція. Нехай $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Покладаємо $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$. Відомо, що для будь-якого $a > 0$ і $n \in \mathbb{N}$ існує єдине $b > 0$ таке, що $b^n = a$. Позначається це число через $b = \sqrt[n]{a}$. Покладемо за означенням $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$. Далі, нехай раціональне число $r > 0$. Тоді $r = \frac{m}{n}$, де m, n – натуральні числа. Покладаємо за означенням $a^r = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$.

Далі, покладаємо за означенням $a^0 = 1$ і $a^r = \frac{1}{a^{-r}}$ при раціональному $r < 0$. Таким чином, ми отримали означення раціонального степеня дійсного числа $a > 0$.

Нехай тепер $a > 0$ і довільне дійсне x . Оберемо деяку послідовність раціональних чисел $\{r_n\}$, яка збігається до x . Можна показати, що послідовність $\{a^{r_n}\}$ також має границю, яку ми і позначимо через a^x . Але

таких послідовностей раціональних $r_n \rightarrow x$ безліч. Можна показати, що означене таким чином значення a^x є коректним, тобто воно не залежить від послідовності раціональних чисел $\{r_n\}$, яка збігається до x . Інакше кажучи, для означення a^x можна обрати будь-яку послідовність раціональних чисел, яка збігається до x . Значення a^x не залежить від вибору цієї послідовності. Отже, для $a > 0$ кожному $x \in \mathbb{R}$ поставлено у відповідність число a^x , тобто ми отримуємо функцію $f(x) = a^x$, яка визначена на $\mathbb{R}$.

Виходячи із властивостей степеней з раціональним показником, можна довести наступні властивості показникової функції:

- 1) $a^x > 0$ ($x \in \mathbb{R}$, $a > 0$);
- 2) $a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$;
- 3) $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}$;
- 4) $a^x > 1$ ($x > 0$, $a > 1$);
- 5) $a^{x_1} > a^{x_2} > 0$ ($x_1 > x_2$, $a > 1$);
- 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ ($a > 1$);
- 7) $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ ($a > 1$);
- 8) $a^x < 1$ ($x > 0$, $0 < a < 1$);
- 9) $a^{x_1} < a^{x_2}$ ($x_1 > x_2$, $0 < a < 1$);
- 10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ ($0 < a < 1$);
- 11) $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$ ($0 < a < 1$);
- 12) функція $f(x) = a^x$ неперервна на $(-\infty, +\infty)$;
- 13) $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$ при будь-якому $a > 0$.

Логарифмічна функція. Нехай $a > 1$. Тоді функція $f(x) = a^x$ строго зростає на $(-\infty, +\infty)$ і неперервна. За теоремою про обернену функцію, у f існує неперервна, строго зростаюча обернена функція f^{-1} , яка визначена на множині додатних чисел, а областю її значень є вся множина $\mathbb{R}$. Ця функція називається логарифмічною. При $0 < a < 1$ логарифмічна функція означається аналогічно. Вона має такі ж властивості, за виключенням того, що вона строго спадає.

Оскільки функції a^x і $\log_a x$ взаємно обернені, то справедливі наступні рівності:

$$a^{\log_a x} = x \quad (x > 0) \quad \text{і} \quad \log_a a^x = x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Звідси та з властивостей показникової функції випливають наступні властивості логарифмів, у формулюванні яких вважається, що $a, b > 0$, $a, b \neq 1$, $x', x'', x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$1) \log_a (x' \cdot x'') = \log_a x' + \log_a x'';$$

$$2) \log_a \frac{x'}{x''} = \log_a x' - \log_a x'';$$

$$3) \log_a x^\alpha = \alpha \log_a x;$$

$$4) \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Часто за основу показникової функції беруть число e . Функцію $y = e^x$ називають експоненціальною. Обернену до неї функцію, тобто логарифм за основою e , називають натуральним логарифмом і позначають через $\ln x = \log_e x$.

Вправа. На основі означення і властивостей побудуйте графіки логарифмічної функції $y = \log_a x$ при різних значеннях $a > 0$, $a \neq 1$.

Степенева функція з дійсним показником. Раніше розглядалась степенева функція $y = x^\alpha$ з цілим показником α , а також функція $y = \sqrt[n]{x}$ для натуральних n .

Степеневою функцією з дійсним показником $\alpha \in \mathbb{R}$ називається функція $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, яка визначена для $x > 0$. Степенева функція неперервна, це впливає із неперервності показникової та логарифмічної функцій і теореми про неперервність складеної функції. При $\alpha > 0$ функція x^α строго зростає від 0 до $+\infty$, а при $\alpha < 0$ – строго спадає від $+\infty$ до 0.

Вправа 1. На основі означення і властивостей побудуйте графіки степеневої функції $y = x^\alpha$ при різних значеннях α .

Вправа 2. Покажіть, що при $\alpha \neq 0$ оберненою до степеневої функції $y = x^\alpha$ є степенева функція $y = x^{\frac{1}{\alpha}}$.

4.10 Друга визначна границя

Раніше було показано, що послідовність $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ збігається і її границю позначили через e , тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Другою визначною гра-

ницею називають наступну границю:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

або, що те ж саме,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Наслідок 1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1.$$

Наслідок 2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a > 0).$$

Наслідок 3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

4.11 Порівняння логарифмічної, степеневої та показникової функцій

Справедливі наступні рівності

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0 \quad (\alpha > 0, a > 1);$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0 \quad (a > 1, \alpha > 0).$$

Перша з цих рівностей означає, що за зазначеними умовами при $x \rightarrow +\infty$ будь-яка показникова функція прямує до нескінченності швидше порівняно з будь-якою степеневою функцією. Друга рівність означає, що при $x \rightarrow +\infty$ степенева функція прямує до нескінченності швидше за будь-яку логарифмічну функцію.

Рівність 2) можна переписати у такому еквівалентному вигляді:

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0 \quad (0 < a < 1, \alpha < 0).$$

Ця рівність означає, що за зазначеними параметрами логарифмічна функція при $x \rightarrow 0+$ прямує до нескінченності повільніше, ніж степенева функція.

4.12 Еквівалентні функції. Символи Ландау

Означення. Нехай функції f і g відмінні від нуля в проколотому околі точки x_0 (яка може дорівнювати $+\infty$, $-\infty$ чи ∞). Кажуть, що функції f і g еквівалентні при $x \rightarrow x_0$, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Позначають це так: $f(x) \sim g(x)$ ($x \rightarrow x_0$).

В термінах цього означення знайдені раніше границі можна переписати наступним чином (всі співвідношення формулюються для випадку $x \rightarrow 0$):

$$\begin{aligned}\sin x &\sim x, & \operatorname{tg} x &\sim x, \\ 1 - \cos x &\sim \frac{1}{2}x^2, & \arcsin x &\sim x, \\ \operatorname{arctg} x &\sim x, & a^x - 1 &\sim x \cdot \ln a, \\ \log_a(1+x) &\sim \frac{x}{\ln a}, & (1+x)^\alpha - 1 &\sim \alpha \cdot x.\end{aligned}$$

Ці співвідношення залишаються справедливими, якщо в них замість x записати будь-яку відмінну від нуля функцію $\varphi(x)$, яка прямує до нуля при $x \rightarrow x_0$. Наприклад, $\sin x^2 \sim x^2$ ($x \rightarrow 0$), $\operatorname{tg} \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$ ($x \rightarrow \infty$), $\operatorname{tg} \sin(x-1)^2 \sim \sin(x-1)^2 \sim (x-1)^2$ ($x \rightarrow 1$).

Теорема (застосування еквівалентних функцій до обчислення границь). Нехай $f(x) \sim f_1(x)$ і $g(x) \sim g_1(x)$ при $x \rightarrow x_0$ і нехай існує $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = A$. Тоді існує $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Ця теорема означає, що при обчисленні границь множники у добутках та відношеннях можна замінювати еквівалентними. При цьому існування границі та її величина не змінюються.

Приклад.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x \cdot (e^x - 1)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x}{\frac{x^2}{2}} = 2.$$

Порівняння нескінченно великих та нескінченно малих. Символами Ландау називаються символи $\bar{o}$ і $\underline{O}$. Надамо означення.

Означення. Нехай функції f і g визначені в проколотому околі точки x_0 (скінченної або нескінченної) і $g(x) \neq 0$. Кажуть, що $f(x)$ є $\bar{o}$ -малою відносно $g(x)$ при $x \rightarrow x_0$, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Позначають це так: $f(x) = \bar{o}(g(x))$ ($x \rightarrow x_0$).

Якщо $f(x) \rightarrow 0$, $g(x) \rightarrow 0$ і $f(x) = \bar{o}(g(x))$ при $x \rightarrow x_0$, то кажуть, що $f(x)$ є нескінченно малою більш високого порядку порівняно з $g(x)$ при $x \rightarrow x_0$. Якщо ж функції $f(x) \rightarrow \infty$, $g(x) \rightarrow \infty$ і $f(x) = \bar{o}(g(x))$ при $x \rightarrow x_0$, то кажуть, що $g(x)$ прямує до нескінченності швидше ніж $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$. Наприклад, $\sin x^2 = \bar{o}(x)$ ($x \rightarrow 0$), $\operatorname{tg}^3 x \cdot \sin \frac{1}{x} = \bar{o}(x^2)$ ($x \rightarrow 0$).

Означення. Нехай функції f і g визначені в проколотому околі x_0 (скінченного чи нескінченного) і $g(x) \neq 0$. Кажуть, що $f(x)$ є $\underline{O}$ -великим відносно $g(x)$ при $x \rightarrow x_0$, якщо існує такий проколотий окіл U_δ точки x_0 , що для всіх $x \in U_\delta$ справедлива нерівність $|f(x)| \leq c \cdot |g(x)|$, де стала c не залежить від x (але може залежати від околу U_δ). Позначають це так: $f(x) = \underline{O}(g(x))$ ($x \rightarrow x_0$).

Наприклад,

$$x^2 + 2x^3 = \underline{O}(x^2) \quad (x \rightarrow 0), \quad x^2 + 2x^3 = \underline{O}(x^3) \quad (x \rightarrow \infty).$$

Теорема. Нехай існує $\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = K$, де $0 \leq K < +\infty$. Тоді $f(x) = \underline{O}(g(x))$.

Теорема (критерій еквівалентності функцій). Для того щоб відмінні від нуля функції f і g були еквівалентними, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність $f(x) = g(x) + \bar{o}(g(x))$ ($x \rightarrow x_0$).

Використовуючи цю теорему, набір еквівалентних функцій, який ми виписали раніше, можна переписати у наступному вигляді (всюди $x \rightarrow 0$):

$$\begin{aligned} \sin x &= x + \bar{o}(x), & \operatorname{tg} x &= x + \bar{o}(x), \\ 1 - \cos x &= \frac{1}{2}x^2 + \bar{o}(x^2), & \arcsin x &= x + \bar{o}(x), \\ \operatorname{arctg} x &= x + \bar{o}(x), & a^x - 1 &= x \ln a + \bar{o}(x), \end{aligned}$$

$$\log_a(1+x) = \frac{x}{\ln a} + \bar{o}(x), \quad (1+x)^\alpha - 1 = \alpha \cdot x + \bar{o}(x).$$

За допомогою цієї таблиці можна обчислювати границі. Покажемо це на прикладах.

Приклад 1.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt[3]{1+x}}{2 \operatorname{arctg} x - \arcsin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - (\sqrt[3]{1+x} - 1)}{2 \operatorname{arctg} x - \arcsin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \bar{o}(x) - (\frac{1}{3}x + \bar{o}(x))}{2(x + \bar{o}(x)) - (x + \bar{o}(x))} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3}x + \bar{o}(x)}{x + \bar{o}(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3} + \frac{\bar{o}(x)}{x}}{1 + \frac{\bar{o}(x)}{x}} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Приклад 2. Розкриття неозначеності $[1^\infty]$. Нехай функції $\alpha(x) \neq 0$ і $\alpha(x) \rightarrow 0$, $\beta(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow x_0$). Тоді, за неперервністю показникової функції,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (1 + \alpha(x))^{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{\beta(x) \ln(1 + \alpha(x))} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x)(\alpha(x) + \bar{o}(\alpha(x)))}.$$

Якщо існує $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) \cdot \beta(x) = A$, то

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x)(\alpha(x) + \bar{o}(\alpha(x))) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) \cdot \alpha(x) \cdot \frac{\alpha(x) + \bar{o}(\alpha(x))}{\alpha(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) \cdot \alpha(x) \left(1 + \frac{\bar{o}(\alpha(x))}{\alpha(x)}\right) = A. \end{aligned}$$

Тому

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (1 + \alpha(x))^{\beta(x)} = e^A.$$

Вправа. Нехай $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = \infty$. Показати, що

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (1 + \alpha(x))^{\beta(x)} = 0,$$

якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) \cdot \beta(x) = -\infty$. Якщо ж $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) \cdot \beta(x) = +\infty$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (1 + \alpha(x))^{\beta(x)} = +\infty.$$

Контрольні питання

1. Неперервні функції, означення та приклади.
2. Точки розриву та їх класифікація.
3. Властивості неперервних функцій.
4. Монотонні функції.
5. Властивість проміжних значень.
6. Теорема Вейєрштрасса.
7. Показникова, логарифмічна та степенева функції.
8. Друга визначна границя та наслідки з неї.

Розділ 5. Диференціальне числення

5.1 Означення та елементарні властивості

Означення 1. Нехай функція f визначена на інтервалі (a, b) і точка $x_0 \in (a, b)$. Якщо існує скінченна границя $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, то вона називається похідною функції f в точці x_0 і позначається $f'(x_0)$, або $\frac{df}{dx}(x_0)$, $Df(x_0)$.

Означення 2. Нехай функція f визначена на інтервалі (a, b) і точка $x_0 \in (a, b)$. Функцію f назвемо диференційовною в точці x_0 , якщо існує така стала A (що залежить від x_0 і не залежить від x), що справедлива рівність

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + r(x),$$

де $r(x) = o(x - x_0)$ ($x \rightarrow x_0$).

Коротше означення диференційовності можна записати у наступному вигляді:

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + o(x - x_0) \quad (x \rightarrow x_0).$$

Легко бачити, що ці два означення еквівалентні у тому сенсі, що диференційовність функції рівносильна існуванню похідної, тобто справедлива

Теорема. Функція f диференційовна в точці $x_0 \in (a, b)$ тоді і лише тоді, коли у f існує похідна в точці x_0 і при цьому $A = f'(x_0)$.

Сенс диференційовності полягає в тому, що в деякому околі точки x_0 функція f може бути зображена у вигляді лінійної функції $l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ наближено з точністю до нескінченно малої $r(x)$, більш високого порядку, ніж $(x - x_0)$ при $x \rightarrow x_0$.

Зв'язок між диференційовністю і неперервністю встановлює наступна

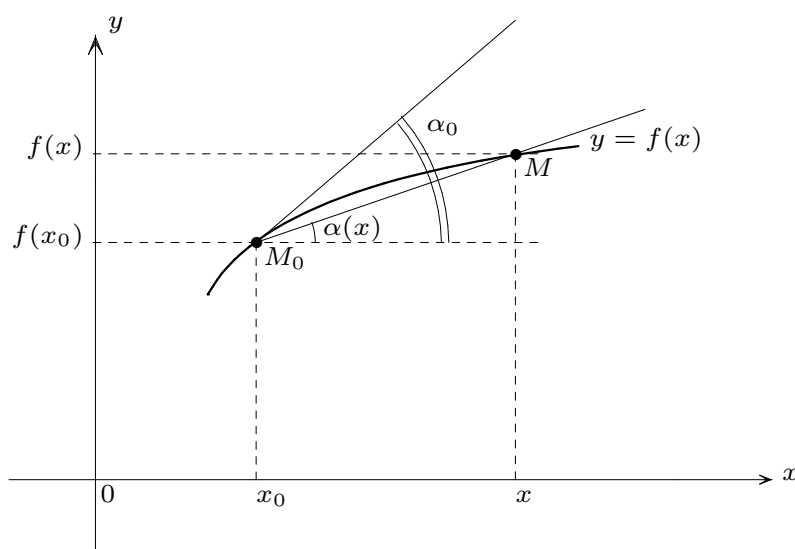
Теорема. Якщо функція f диференційовна в точці x_0 , то вона неперервна в цій точці.

Оберене твердження хибне, тобто із неперервності функції f не випливає її диференційовності. Прикладом може бути функція $f(x) = |x|$, яка є неперервною в точці $x_0 = 0$, і для якої вираз

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x|}{x} = \operatorname{sign} x$$

не має границі при $x \rightarrow 0$ і, отже функція f не має похідної в точці $x_0 = 0$. Таким чином, f не є диференційовною в нулі.

Отже, неперервність є необхідною, але не достатньою умовою диференційовності. Іншими словами, якщо функція розривна в точці x_0 , то вона недиференційовна в цій точці, а оберене твердження хибне.



З геометричної точки зору похідна $f'(x_0)$ – це тангенс кута нахилу дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці M_0 з координатами $(x_0, f(x_0))$. При цьому дотичною до графіка функції f в точці M_0 називається граничне положення хорди M_0M при прямуванні точки $M(x, f(x))$ уздовж кривої $y = f(x)$ до точки M_0 . Справді, якщо функція f диференційовна в точці x_0 , то при прямуванні M до M_0 уздовж кривої $y = f(x)$ хорда M_0M має тангенс кута нахилу, який дорівнює

$$\operatorname{tg} \alpha(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

і при $x \rightarrow x_0$ точка M прямує до M_0 уздовж кривої $y = f(x)$. Оскільки

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow f'(x_0) \quad (x \rightarrow x_0),$$

то $\operatorname{tg} \alpha(x) \rightarrow f'(x_0)$ при $x \rightarrow x_0$, тобто хорда прагне зайняти деяке граничне положення, тангенс кута нахилу α_0 якого дорівнює $f'(x_0)$. Звідси отримуємо рівняння дотичної до графіка диференційовної в точці x_0 функції $y = f(x)$:

$$l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Приклади. Раніше ми наводили таблицю еквівалентних функцій, з якої можемо встановити диференційовність деяких функцій. Наприклад, якщо рівність $\sin x = x + \overline{o}(x)$ ($x \rightarrow 0$) записати у вигляді $\sin x - \sin 0 = 1 \cdot (x - 0) + \overline{o}(x - 0)$, то бачимо, що функція $f(x) = \sin x$ диференційовна в точці $x_0 = 0$ і її похідна в цій точці дорівнює 1. Це також можна встановити, користуючись означенням похідної:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Наведемо ще один приклад:

$$a^x - 1 = x \cdot \ln a + \overline{o}(x) \quad (x \rightarrow 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^x - a^0 = \ln a(x - 0) + \overline{o}(x - 0) \quad (x \rightarrow 0),$$

тобто функція $f(x) = a^x$ диференційовна в точці $x_0 = 0$ і її похідна в цій точці дорівнює $\ln a$.

Вправа. Розглянути всі інші приклади із згаданої таблиці.

Означення. Нехай функція f визначена в деякому правому півколі $[x_0, x_0 + \delta)$ точки x_0 . Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

то її називають правою похідною функції f в точці x_0 і позначають через $f'_+(x_0)$. Аналогічно означається похідна зліва $f'_-(x_0)$ функції f в точці x_0 .

Нехай функція f визначена в деякому околі точки x_0 . Легко бачити, що

- a) якщо існує $f'_+(x_0)$, то f неперервна справа в точці x_0 ;
- b) якщо існує $f'_-(x_0)$, то f неперервна зліва в точці x_0 ;
- c) якщо існують $f'_+(x_0)$ і $f'_-(x_0)$, то f неперервна в точці x_0 ;
- d) для того щоб f була диференційовною в точці x_0 , необхідно та достатньо, щоб у неї існували похідні зліва та справа і вони дорівнювали одна одній.

Приклад. Нехай $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$. Тоді легко бачити, що $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$.

5.1.1 Диференційовність та арифметичні операції

Теорема. Нехай функції f і g визначені на інтервалі (a, b) і диференційовні в точці x_0 . Тоді

- a) функція $f + g$ диференційовна в точці x_0 і

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0);$$

- b) функція $f \cdot g$ диференційовна в точці x_0 і

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0);$$

- c) якщо $g(x) \neq 0$ ($x \in (a, b)$), то функція $\frac{f}{g}$ диференційовна в точці x_0 і

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

ДОВЕДЕННЯ. Твердження a) очевидне. Доведемо b). Маємо

$$\begin{aligned} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Використовуючи неперервність функції g в точці x_0 , яка впливає з її диференційовності, переходячи до границі при $x \rightarrow x_0$, отримуємо b).

Для доведення c) розглянемо спочатку випадок $f(x) \equiv 1$. Тоді

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = -\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{1}{g(x)g(x_0)} \rightarrow -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)} \quad (x \rightarrow x_0).$$

У загальному випадку, застосовуючи твердження b), отримаємо

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0) \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \\ &= f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} - f(x_0) \cdot \frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}. \end{aligned}$$

Зауваження. Безпосередньо із означення похідної впливає рівність $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$, де c – стала. Тому, використовуючи частину a) доведеної теореми, отримуємо, що операція диференціювання є лінійною операцією, тобто похідна лінійної комбінації двох диференційовних функцій є лінійною комбінацією їх похідних –

$$(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)'(x_0) = \alpha \cdot f'(x_0) + \beta \cdot g'(x_0),$$

де α і β – сталі.

5.1.2 Похідна композиції та оберненої функцій

Теорема (про похідну композиції). Нехай функція f визначена на інтервалі I і диференційовна в точці $x_0 \in I$, а функція g визначена на інтервалі $J \supset f(I)$ і диференційовна у відповідній точці $y_0 = f(x_0) \in J$. Тоді композиція $\varphi(x) = g(f(x))$ диференційовна в точці x_0 , причому

$$\varphi'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Теорема (про похідну оберненої функції). Нехай функція f строго зростає на інтервалі I , неперервна на I , диференційовна в точці $x_0 \in I$ і $f'(x_0) \neq 0$. Тоді обернена функція $g = f^{-1}$ диференційовна в точці $y_0 = f(x_0)$, причому $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

5.2 Таблиця похідних основних елементарних функцій

1. Нехай $f(x) \equiv C$. Тоді, очевидно, $f'(x) = 0$.

2. Нехай $f(x) = x^n$ ($-\infty < x < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$). Тоді

$$\begin{aligned} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} &= \frac{1}{h} \left[\sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} h^k - x^n \right] = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^n C_n^k x^{n-k} h^k = \\ &= \sum_{k=1}^n C_n^k x^{n-k} h^{k-1} \rightarrow nx^{n-1} \quad (h \rightarrow 0). \end{aligned}$$

Звідси випливає, що $f'(x) = (x^n)' = nx^{n-1}$.

3. Нехай $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$). Тоді

$$\frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{h} \cdot \frac{-h}{x(x+h)} = -\frac{1}{x(x+h)} \rightarrow -\frac{1}{x^2} \quad (h \rightarrow 0).$$

Отже, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

4. Нехай $f(x) = x^\alpha$ ($x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$). Тоді

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} ((x+h)^\alpha - x^\alpha) &= \frac{x^\alpha}{h} \left(\left(1 + \frac{h}{x}\right)^\alpha - 1 \right) = \\ &= \frac{x^\alpha}{h} \cdot \frac{\left(1 + \frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{h}{x} \rightarrow \alpha \cdot x^{\alpha-1} \quad (h \rightarrow 0), \end{aligned}$$

тобто $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$.

5. Нехай $f(x) = a^x$ ($-\infty < x < +\infty$, $a > 0$, $a \neq 1$). Тоді

$$\frac{1}{h} (a^{x+h} - a^x) = a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h} \rightarrow a^x \cdot \ln a \quad (h \rightarrow 0),$$

тобто $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$.

6. Нехай $f(x) = \log_a x$ ($x > 0$). Тоді

$$\frac{1}{h} (\log_a(x+h) - \log_a x) = \frac{1}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x} \right) =$$

$$= \frac{1}{x} \frac{\log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \rightarrow \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} \quad (h \rightarrow 0),$$

тобто $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$.

7. Нехай $f(x) = \sin x$ ($-\infty < x < +\infty$). Тоді

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} (\sin(x+h) - \sin x) &= \frac{1}{h} (\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x) = \\ &= \frac{1}{h} \sin x (\cos h - 1) + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \rightarrow \cos x \quad (h \rightarrow 0), \end{aligned}$$

тобто $(\sin x)' = \cos x$.

8. Аналогічно отримуємо, що $(\cos x)' = -\sin x$.

9. Нехай $f(x) = \operatorname{tg} x$ ($x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$). Тоді

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

10. Нехай $f(x) = \operatorname{ctg} x$ ($x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$). Тоді

$$(\operatorname{ctg} x)' = ((\operatorname{tg} x)^{-1})' = -(\operatorname{tg} x)^{-2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

11. Нехай $y = \arcsin x$ ($-1 < x < 1$), т. е. $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. За правилом диференціювання оберненої функції, $y'_x = \frac{1}{x'_y}$, де $x = \sin y$, тобто

$$y'_x = \frac{1}{(\sin y)'_y} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

Але $\cos y = \pm \sqrt{1 - \sin^2 y}$, причому перед коренем треба обрати знак "+", оскільки при $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ маємо $\cos y > 0$. Звідси

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2},$$

тобто

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (-1 < x < 1).$$

12. Нехай $y = \arccos x$ ($-1 < x < 1$), т. е. $0 < y < \pi$. Як і в попередньому прикладі, отримуємо

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cos y)'_y} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

При цьому, як і вище, ми скористались рівністю

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2}.$$

13. Нехай $y = \operatorname{arctg} x$ ($-\infty < x < +\infty$). Як і в двох попередніх прикладах, маємо

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'_y} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

14. Нехай $y = \operatorname{arcctg} x$ ($-\infty < x < +\infty$). Тоді

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'_y} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

15. Нехай $f(x) = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ($-\infty < x < +\infty$). Тоді, як легко обчислити,

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x.$$

16. Нехай $f(x) = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ($-\infty < x < +\infty$). Тоді, як легко обчислити,

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x.$$

Приклад 1. Нехай $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Тоді

$$f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Приклад 2. Нехай $f(x) = \left(\ln \frac{1}{x} \right)^{\arcsin x}$. Для зручності диференціювання представим функцію f в такому вигляді:

$$f(x) = \exp(\arcsin x \cdot \ln(-\ln x)).$$

Тепер легко обчислюємо похідну

$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp(\arcsin x \cdot \ln(-\ln x)) \times \\ &\times \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ln(-\ln x) + \arcsin x \cdot \frac{1}{-\ln x} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) \right) = \\ &= \left(\ln \frac{1}{x} \right)^{\arcsin x} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ln \left(\ln \frac{1}{x} \right) + \arcsin x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

Приклад 3. Нехай $f(x) = |x|^3$. В околі точки $x > 0$ функція $f(x)$ співпадає з функцією x^3 і тому $f'(x) = 3x^2$ при $x > 0$. В околі точки $x < 0$ функція $f(x)$ співпадає з функцією $-x^3$ і тому $f'(x) = -3x^2$ при $x < 0$. В правому півоколі нуля функція f співпадає з функцією x^3 і тому $f'_+(0) = 3x^2|_{x=0} = 0$. В лівому півоколі нуля функція f співпадає з функцією $-x^3$ і тому $f'_-(0) = -3x^2|_{x=0} = 0$. Оскільки в нулі ліва та права похідні функції f співпали, то f диференційовна в точці $x = 0$ і $f'(0) = 0$. Отже, отримали $f'(x) = 3x^2 \operatorname{sign} x$.

5.3 Дослідження функцій на диференційовність

5.3.1 Дослідження функцій на диференційовність та обчислення похідних за означенням

1. Дослідити на диференційовність функцію

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x \ln(1+x)}{x}, & x > -1, x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

В кожній точці $x_0 > -1$, $x_0 \neq 0$ функція диференційовна за арифметичними властивостями диференційовних функцій. Дослідимо функцію на диференційовність в точці $x_0 = 0$. Маємо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \ln(1+x)}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \end{aligned}$$

Це означає, що дана функція диференційовна в точці $x_0 = 0$ і її похідна $f'(0) = 1$.

2. Дослідити на диференційовність функцію

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x \ln(1+|x|)}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

В кожній точці $x_0 \neq 0$ функція диференційовна за арифметичними властивостями диференційовних функцій. Дослідимо функцію на диференційовність в точці $x_0 = 0$. При $x < 0$ задана функція має вигляд $f(x) = \frac{\sin x \ln(1-x)}{x}$, а при $x > 0$ функція дорівнює $f(x) = \frac{\sin x \ln(1+x)}{x}$. Тому маємо

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x \ln(1+x)}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \\ f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin x \ln(1-x)}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\ln(1-x)}{x} = -1. \end{aligned}$$

Оскільки $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, то дана функція не є диференційовною в точці $x_0 = 0$.

5.3.2 Дослідження на диференційовність функції, яка задана різними формулами на різних проміжках

1. Дослідити на диференційовність функцію

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & |x| \leq 1, \\ \frac{\pi}{4} \operatorname{sign} x + \frac{x-1}{2}, & |x| > 1. \end{cases}$$

Якщо $|x_0| \neq 1$, то функція f диференційовна в точці x_0 за арифметичними властивостями диференційовних функцій.

Нехай $x_0 = 1$. В правому півоколі точки $x_0 = 1$ функція дорівнює $f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2}$ і тому

$$f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2} \right) = \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = f(1),$$

тобто функція неперервна справа в точці $x_0 = 1$. Обчислимо в цій точці праву похідну

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2} - \frac{\pi}{4}}{x - 1} = \frac{1}{2}.$$

В лівому півоколі точки $x_0 = 1$ функція дорівнює $f(x) = \operatorname{arctg} x$ і тому

$$f(1 - 0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = f(1),$$

тобто функція неперервна зліва в точці $x_0 = 1$. Обчислимо в цій точці ліву похідну

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4}}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 1}{x - 1} = (\operatorname{arctg} x)'|_{x=1} = \frac{1}{1 + x^2} \Big|_{x=1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Оскільки, як виявилось, $f'_-(1) = f'_+(1) = \frac{1}{2}$, то функція f диференційовна в точці $x_0 = 1$ і її похідна дорівнює $f'(1) = \frac{1}{2}$.

Нехай $x_0 = -1$. В правому півоколі точки $x_0 = 1$ функція дорівнює $f(x) = \operatorname{arctg} x$ і тому

$$f(-1 + 0) = \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}(-1) = f(-1),$$

тобто функція неперервна справа в точці $x_0 = -1$. Обчислимо в цій точці праву похідну

$$\begin{aligned} f'_+(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4}}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 1}{x - 1} = (\operatorname{arctg} x)'|_{x=-1} = \frac{1}{1 + x^2} \Big|_{x=-1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

В лівому півоколі точки $x_0 = 1$ функція дорівнює $f(x) = -\frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2}$ і тому

$$\begin{aligned} f(-1 - 0) &= \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2} \right) = \\ &= -\frac{\pi}{4} - 1 \neq f(-1) = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Таким чином, функція не є неперервною зліва в точці $x_0 = -1$ і тому вона також не має лівої похідної в цій точці.

Отже, отримали, що задана функція диференційовна у всіх точках, окрім точки $x_0 = -1$.

5.3.3 Знаходження рівняння дотичної та нормалі до графіка диференційовної функції в точці

Рівняння дотичної до графіка функції в точці x_0 має вигляд

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

а рівняння нормалі до графіка функції в точці x_0 має вигляд

$$(x - x_0) + f'(x_0)(y - f(x_0)) = 0.$$

1. Скласти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $f(x) = \arcsin x$ в точці $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Маємо

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}, \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-3/4}} = 2.$$

Тому рівняння дотичної набуває такого вигляду

$$y = \frac{\pi}{3} + 2\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \iff 2\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(y - \frac{\pi}{3}\right) = 0,$$

а рівняння нормалі –

$$\frac{1}{2}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(y - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \iff y = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

5.3.4 Знаходження лінійної частини приросту диференційовної функції в заданій точці та обчислення наближеного значення функції, замінюючи її приріст лінійною частиною

Згідно з означенням диференційовності, приріст диференційовної в точці x_0 функції f може бути представленим у вигляді

$$f(x_0 + dx) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot dx + o(dx), \quad dx \rightarrow 0.$$

Перший доданок в правій частині називається лінійною частиною приросту функції.

1. Заміняючи приріст функції його лінійною частиною, наближено обчислити $\sin 61^\circ$.

Покладемо $x_0 = \frac{\pi}{3}$, $dx = \frac{\pi}{180}$. Тоді, заміняючи повний приріст функції його лінійною частиною, отримаємо

$$\sin 61^\circ = \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180} \right) \approx \sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{180}.$$

5.4 Основні теореми диференціального числення

Теорема Ферма. Нехай функція f визначена на інтервалі (a, b) і в деякій точці $x_0 \in (a, b)$ набуває найбільшого (найменшого) значення на цьому інтервалі. Якщо існує $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

З геометричної точки зору теорема Ферма означає, що якщо в точці екстремуму у графіка функції існує дотична, то вона паралельна до осі Ox .

Зауваження. У функції $f(x) = |x|$, $(-1 < x < 1)$ в точці $x_0 = 0$ є екстремум (мінімум), але похідної в цій точці функція не має. Теорема Ферма означає, що для пошуку екстремуму функції f у внутрішніх точках області визначення достатньо дослідити поведінку функції f лише в тих точках, в яких похідна або обертається в нуль, або не існує. Екстремуму не може бути в тих точках, в яких похідна існує і не дорівнює нулю. Але із того, що похідна дорівнює нулю в точці x_0 не випливає, що x_0 – точка екстремуму. Наприклад, у функції $f(x) = x^3$ в точці $x_0 = 0$ екстремуму немає і в той же час $f'(0) = 0$.

Теорема Ролля. Нехай функція f неперервна на відрізку $[a, b]$, диференційовна на інтервалі (a, b) , і $f(a) = f(b)$. Тоді існує така точка $\xi \in (a, b)$, що $f'(\xi) = 0$.

Наслідок. Між будь-якими двома коренями диференційовної функції існує корінь похідної.

Приклад. Рівняння непарного степеня $x^5 + x - 1 = 0$ має дійсний корінь. Покажемо, що він єдиний. Позначимо $y = x^5 + x - 1$. Тоді $y' =$

$5x^4 + 1 > 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Якби дане рівняння мало б інший корінь, то, згідно з наслідком, знайшлась би точка, в якій похідна y' оберталася б в нуль, а це неможливо.

Теорема Лагранжа (формула скінченних приростів). *Нехай функція f неперервна на відрізку $[a, b]$, диференційовна на інтервалі (a, b) . Тоді існує така точка $\xi \in (a, b)$, що*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Геометричний сенс теореми Лагранжа полягає в тому, що існує точка $\xi \in (a, b)$, в якій дотична до графіка функції $y = f(x)$ паралельна до відрізка, який з'єднує точки $(a, f(a))$ і $(b, f(b))$.

Рівність, яка відзначена в теоремі Лагранжа, можна переписати в такому вигляді

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a),$$

або в такому

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b - a))(b - a),$$

де $0 < \theta < 1$.

Дві останні рівності називають формулами скінченних приростів.

Наслідок. *Якщо диференційовна на (a, b) функція f така, що для кожного $\xi \in (a, b)$ похідна $f'(\xi) = 0$, то f тотожно стала на (a, b) .*

Теорема Коші (узагальнена формула скінченних приростів). *Нехай функції f і g неперервні на відрізку $[a, b]$, диференційовні на інтервалі (a, b) , $g'(x) \neq 0$ для всіх $x \in (a, b)$. Тоді існує така точка $\xi \in (a, b)$, що справедлива рівність*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

5.5 Правила Лопіталя

Перша теорема Лопіталя призначена для розкриття неозначеності вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Перша теорема Лопіталя. Нехай функції f і g диференційовні на інтервалі (a, b) , $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = 0$ і $g'(x) \neq 0$ для всіх $x \in (a, b)$. Далі, нехай існує

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A,$$

де A може бути скінченним, $+\infty$ чи $-\infty$. Тоді існує

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

і ця границя дорівнює A .

Зауваження. Теорема Лопіталя стверджує, що границя відношення функцій дорівнює границі відношення їх похідних, якщо остання існує. Але може виявитись, що границя відношення функцій існує, в той час коли границя відношення їх похідних не існує, тобто обернене до теореми Лопіталя твердження не має місця.

Друга теорема Лопіталя призначена для розкриття неозначеності вигляду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Друга теорема Лопіталя. Нехай функції f і g диференційовні на інтервалі (a, b) , $g'(x) \neq 0$ ($x \in (a, b)$) і $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = \infty$,

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A,$$

де A може бути скінченним, $+\infty$ чи $-\infty$. Тоді існує

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

і ця границя дорівнює A .

5.5.1 Приклади застосування правил Лопіталя

$$\begin{aligned} 1. \quad & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{2} \cos x - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \\ & = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-2 \operatorname{tg} x \frac{1}{\cos^2 x}}{-\sqrt{2} \sin x} = \frac{-2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{(\sqrt{2}/2)^2}}{-\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}/2} = 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \operatorname{tg} x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^2 \operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} \right) = \\
&= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{3x^2} = \\
&= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \right) = \\
&= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1+1}{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x} - x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln(\sqrt{1+x} - x)} = \\
&= \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sqrt{1+x} - x)}{x} \right) = \\
&= \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x} - x} \left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}} - 1 \right)}{1} \right) = \\
&= \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x} - x)} \right) = \\
&= \exp \left(\frac{1-2}{2 \cdot 1 \cdot 1} \right) = \exp \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{e}}.
\end{aligned}$$

5.6 Формула Тейлора

Нехай функція f диференційовна на деякому інтервалі (a, b) , тобто диференційовна в кожній точці цього інтервалу. Тоді на (a, b) визначена функція $f'(x)$, яка також може виявитись диференційовною в деякій точці $x_0 \in (a, b)$. В такому випадку кажуть, що функція f має в точці x_0 похідну другого порядку і позначають її через $f''(x_0)$, тобто $f''(x_0) = (f')'(x_0)$. Аналогічно, за індукцією, означаються похідні вищих порядків, тобто

$$f'''(x_0) = (f'')'(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)} \right)'(x_0).$$

Зауважимо, що для існування $f^{(n)}(x_0)$ похідної n -го порядку в точці $x_0 \in (a, b)$ необхідно, щоб похідна $f^{(n-1)}(x)$ існувала в деякому околі точки x_0 . Похідною нульового порядку зазвичай вважається $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Теорема (формула Тейлора із залишком у формі Пеано). *Нехай функція f визначена в деякому околі I точки x_0 , має в цьому околі похідні до $(n - 1)$ -го порядку включно, а в точці x_0 має похідну n -го порядку. Тоді справедлива рівність*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \bar{o}((x - x_0)^n)$$

при $x \rightarrow x_0$.

Формулу Тейлора з центром в точці $x_0 = 0$ називають формулою Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \bar{o}(x^n) \quad (x \rightarrow 0).$$

Наведемо розвинення деяких функцій за формулою Маклорена.

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \bar{o}(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}x^k + \bar{o}(x^n).$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \bar{o}(x^{2n+2}) = \\ = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \bar{o}(x^{2n+2}).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \bar{o}(x^{2n+1}) = \\ = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \bar{o}(x^{2n+1}).$$

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \bar{o}(x^n) = \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \bar{o}(x^n).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \\ &+ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \bar{o}(x^n) = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + \bar{o}(x^n).\end{aligned}$$

Зокрема, якщо $\alpha = n$, то отримуємо

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots + x^n,$$

тобто формулу бінома Ньютона. Якщо ж $\alpha = -1$, то

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \bar{o}(x^n)$$

– сума геометричної прогресії із знаменником $-x$ та першим доданком, який дорівнює 1.

5.6.1 Приклад розвинення функції

Розвинути за формулою Маклорена функцію

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{(x+1)(x-2)} = \\ &= \frac{-\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{\frac{1}{3}}{x-2} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+x} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \\ &= -\frac{1}{3}(1+x)^{-1} - \frac{1}{6}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1} = \\ &= -\frac{1}{3}\left(1-x+x^2-\dots+(-1)^n x^n + \bar{o}(x^n)\right) -\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{6} \left(1 + \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x}{2}\right)^n + \bar{o}(x^n) \right) = \\
& = \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6 \cdot 2} \right) x + \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{6 \cdot 2^2} \right) x^2 + \dots + \\
& \quad + \left(\frac{(-1)^{n-1}}{3} - \frac{1}{6 \cdot 2^n} \right) x^n + \bar{o}(x^n),
\end{aligned}$$

де $|x| < 1$ і $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$, тобто $|x| < 1$.

5.6.2 Обчислення границь з використанням формули Тейлора

1. Обчислимо границю

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}.$$

Скориставшись рівностями

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \bar{o}(x^2), \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \bar{o}(x^4),$$

отримуємо

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \bar{o}(x^2)\right) \left(x - \frac{x^3}{6} + \bar{o}(x^4)\right) - x - x^2}{x^3} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + \bar{o}(x^3) - x - x^2}{x^3} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

2. Обчислити границю

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}.$$

Оскільки $\sin x \ln \cos x \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 0$), то, користуючись рівністю $e^t = 1 + t + \bar{o}(t)$ ($t \rightarrow 0$), отримаємо

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{\sin x \ln \cos x}}{x^3} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 + \sin x \ln \cos x + \bar{o}(\sin x \ln \cos x))}{x^3}.
\end{aligned}$$

Скористуємось наступними рівностями

$$\bar{o}(\sin x \ln \cos x) = \bar{o}(\sin x \ln(1 + \cos x - 1)) = \bar{o}(x(\cos x - 1)) = \bar{o}(x^3),$$

$$\begin{aligned} \sin x &= x + \bar{o}(x^2), \quad \ln \cos x = \ln(1 + (\cos x - 1)) = \\ &= \cos x - 1 - \frac{(\cos x - 1)^2}{2} + \bar{o}((\cos x - 1)^2) = -\frac{x^2}{2} + \bar{o}(x^3). \end{aligned}$$

Тому отримаємо

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(x + \bar{o}(x^2)) \left(-\frac{x^2}{2} + \bar{o}(x^3)\right) + \bar{o}(x^3)}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{2} + \bar{o}(x^3)}{x^3} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{3.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1 - 2x} - x}{1 - e^{-x^3}}.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \bar{o}(x^3),$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - 2x} &= (1 - 2x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(-2x) + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)}{2!}(-2x)^2 + \\ &+ \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)(\frac{1}{2} - 2)}{3!}(-2x)^3 + \bar{o}(x^3) = \end{aligned}$$

$$= 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \bar{o}(x^3),$$

$$e^{-x^3} = 1 - x^3 + \bar{o}(x^3).$$

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1 - 2x} - x}{1 - e^{-x^3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \bar{o}(x^3) - \left(1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \bar{o}(x^3)\right) - x}{1 - (1 - x^3 + \bar{o}(x^3))} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{2} + \bar{o}(x^3)}{x^3 + \bar{o}(x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} + \frac{\bar{o}(x^3)}{x^3}}{1 + \frac{\bar{o}(x^3)}{x^3}} = \frac{\frac{1}{2} + 0}{1 + 0} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{4.} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x - \ln x)^{\frac{1}{\sin(1-x)^2}} = [t = x - 1, \quad x = t + 1] =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow 0} (1 + t - \ln(1 + t))^{\frac{1}{\sin t^2}} = \\
&= \exp \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + t - \ln(1 + t))}{\sin t^2} \right) = \\
&= \exp \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(1 + t - \left(t - \frac{t^2}{2} + \bar{o}(t^2) \right) \right)}{t^2 + \bar{o}(t^2)} \right) = \\
&= \exp \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^2}{2} + \bar{o}(t^2)}{t^2 + \bar{o}(t^2)} \right) = \exp \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} + \frac{\bar{o}(t^2)}{t^2}}{1 + \frac{\bar{o}(t^2)}{t^2}} \right) = \\
&= \exp \left(\frac{\frac{1}{2} + 0}{1 + 0} \right) = \exp \left(\frac{1}{2} \right) = \sqrt{e}.
\end{aligned}$$

5.6.3 Формула Тейлора із залишком у формі Лагранжа

Теорема. Нехай функція f визначена на відрізку з кінцями в точках x_0 і x і має на цьому відрізку неперервні похідні до порядку n включно, а на інтервалі з кінцями в точках x_0 і x існує похідна $(n+1)$ -го порядку. Тоді на інтервалі з кінцями в точках x_0 і x існує така точка ξ , що

$$\begin{aligned}
f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \\
+ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.
\end{aligned}$$

5.7 Дослідження функцій за допомогою похідних

5.7.1 Приклади знаходження проміжків монотонності функції за допомогою похідної

За допомогою похідної можна досліджувати функцію на монотонність. А саме, якщо $f'(x) \geq 0$ на деякому проміжку, то функція f зростає, а якщо $f'(x) \leq 0$, то f спадає на цьому проміжку. Якщо ж на деякому проміжку похідна додатна, то функція строго зростає, а якщо похідна від'ємна, то функція строго спадає на цьому проміжку.

1. Доведемо, що функція $f(x) = x - \sin x$ строго зростає на $(-\infty, +\infty)$. Маємо $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ для всіх $x \in (-\infty, +\infty)$. Звідси вже випливає, що f зростає на $(-\infty, +\infty)$. Залишається показати, що f строго зростає. Нехай $x < y$. Тоді

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= y - \sin y - x + \sin x = y - x - 2 \sin \frac{y-x}{2} \cos \frac{y+x}{2} \geq \\ &\geq y - x - 2 \left| \sin \frac{y-x}{2} \right|. \end{aligned}$$

Оскільки $|\sin t| < |t|$ для всіх $t \neq 0$, то

$$f(y) - f(x) \geq y - x - 2 \left| \sin \frac{y-x}{2} \right| > y - x - 2 \frac{y-x}{2} = 0,$$

тобто $f(y) > f(x)$.

2. Для функції $f(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x}$ ($x > 0$) маємо

$$f'(x) = \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2} \right) - \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{x^2} \left(1 - \cos \frac{1}{x} \right) \geq 0.$$

Отже, f зростає. Покажемо, що f строго зростає. Нехай $x < y$. Тоді на відрізку $[x, y]$ не більше, ніж в скінченному числі точок похідна f' обертається в нуль. Тому $f(x) < f(y)$.

3. Довести нерівність

$$(x+y)^p < x^p + y^p \quad (0 < p < 1, \ x, y > 0).$$

Ця нерівність рівносильна наступній $(1+t)^p < 1+t^p$, где $t = \frac{x}{y} > 0$. Покладемо $\varphi(t) = (1+t)^p - 1 - t^p$. Тоді $\varphi(0) = 0$ і $\varphi'(t) = p[(1+t)^{p-1} - t^{p-1}] < 0$. Отже, функція φ строго спадає і тому $\varphi(t) < \varphi(0)$.

5.7.2 Знаходження екстремумів функцій з використанням похідних першого та вищих порядків, знаходження найбільшого та найменшого значень функції

Із наведеної вище теореми Ферма випливає, що внутрішня точка області визначення функції може бути точкою локального екстремуму (мінімуму

чи максимуму) лише у тому випадку, коли похідна функції у цій точці або не існує, або дорівнює нулю (такі точки називаються критичними). Іншими словами, екстремуму не може бути в точках, у яких похідна відмінна від нуля. Але якщо в якійсь точці похідна обертається в нуль чи не існує, то це ще не означає, що така критична точка є точкою екстремуму. Отже, для знаходження точок локального екстремуму достатньо дослідити поведінку функції в околах критичних точок. Таке дослідження можна проводити, наприклад, аналізуючи функцію на монотонність зліва і справа від критичної точки. Іншим засобом може бути формула Тейлора, за допомогою якої можна встановити наступне твердження.

Теорема *Нехай*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Якщо n непарне, то точка x_0 не є точкою локального екстремуму функції f . Якщо ж n парне, то в точці x_0 функція f має строгий локальний екстремум, а саме, мінімум, якщо $f^{(n)}(x_0) > 0$ і максимум, якщо $f^{(n)}(x_0) < 0$. Зокрема, при $n = 2$ маємо, що за умови $f'(x_0) = 0$ точка x_0 є точкою мінімуму при $f''(x_0) > 0$, а при $f''(x_0) < 0$ – точкою максимуму.

1. Знайти точки екстремуму функції $f(x) = \operatorname{ch} x + \cos x$.

Маємо $f'(x) = \operatorname{sh} x - \sin x \equiv \varphi(x)$. Очевидно, $f'(0) = 0$, і тому 0 – критична точка функції f . Покажемо, що інших критичних точок у функції f немає. Оскільки $\varphi(0) = 0$, то зі строгого зростання функції φ на $[0, +\infty)$ буде випливати, що $\varphi(x) > 0$ для всіх $x > 0$, а оскільки $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, то $\varphi(x) < 0$ при $x < 0$. Покажемо, що φ строго зростає на $[0, +\infty)$. Маємо

$$\varphi'(x) = \operatorname{ch} x - \cos x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \cos x \geq \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1 > 0$$

при $x > 0$. Справді, остання нерівність випливає з того, що $t + \frac{1}{t} > 2$ при $t > 0$, $t \neq 1$, де $t = e^x > 1$ при $x > 0$. Таким чином, $\varphi'(x) > 0$ на $(0, +\infty)$. Отже, φ строго зростає на $[0, +\infty)$ і тому $\varphi(x) > \varphi(0) = 0$ ($x > 0$). Отримали, що точка $x = 0$ є єдиною критичною точкою функції f . На

$(0, +\infty)$ похідна $f' > 0$, і тому функція f строго зростає на $[0, +\infty)$, тобто $f(x) > f(0) = 0$ при $x > 0$. На $(-\infty, 0)$ похідна $f' < 0$, і тому функція f строго спадає на $(-\infty, 0)$ і тому $f(x) > f(0) = 0$ при $x < 0$. Таким чином, $f(x) > f(0)$ для будь-якого $x \neq 0$. Отже, 0 – точка строгого мінімуму (єдина точка екстремуму даної функції).

Інший розв'язок. Маємо

$$f'(x) = \operatorname{sh} x - \sin x, \quad f'(0) = 0,$$

$$f''(x) = \operatorname{ch} x - \cos x, \quad f''(0) = 0,$$

$$f'''(x) = \operatorname{sh} x + \sin x, \quad f'''(0) = 0,$$

$$f^{(4)}(x) = \operatorname{ch} x + \cos x, \quad f^{(4)}(0) = 2 > 0.$$

Перша відмінна від нуля похідна є парного порядку, а це означає, що точка 0 є точкою локального екстремуму. Оскільки ця похідна додатна, то 0 є точкою строгого мінімуму функції f .

2. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = (x - 2)^2(x + 1)^3$ на відрізку $[0, 3]$.

Маємо $f'(x) = (x - 2)(x + 1)^2(5x - 4)$. Розв'язками рівняння $f'(x) = 0$, які належать до $[0, 3]$, є значення $x = 2$ і $x = \frac{4}{5}$. Обчислимо $f(0) = 4$, $f(3) = 64$, $f(2) = 0$, $f\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{2^2 \cdot 9^4}{5^5} \approx 2,1$. Таким чином, найбільше значення функції дорівнює $f(3) = 64$, а найменше – $f(2) = 0$.

5.7.3 Дослідження функцій на опуклість за допомогою похідних

Функція f називається опуклою донизу на інтервалі I , якщо для будь-яких $x_1, x_2 \in I$ і для кожного $\lambda \in (0, 1)$ справедлива нерівність

$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2).$$

З геометричної точки зору це означає, що частина графіка функції $y = f(x)$, яка розташована між точками $(x_1, f(x_1))$ і $(x_2, f(x_2))$, знаходиться під хордою, яка сполучає ці точки. Якщо ж в цьому означенні знак нерівності змінити на протилежний, то отримаємо функцію, яку називають

опуклою догори (ввігнутою). Якщо нерівності строгі, то кажуть, що функція опукла строго. Точка x_0 називається точкою перегину функції, якщо при переході через цю точку функція змінює характер опуклості на протилежний.

Досліджувати функцію на опуклість дає змогу друга похідна. А саме, якщо друга похідна додатна, то функція опукла донизу, а якщо друга похідна від'ємна, то функція опукла догори.

Приклад. Нехай $f(x) = x^\alpha$ ($0 < x < +\infty$). Тоді $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}$. Якщо $\alpha \in (0, 1)$, то $f''(x) < 0$ і f ввігнута (опукла догори). Якщо $\alpha \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, то $f''(x) > 0$ і f опукла донизу.

5.8 Повне дослідження функцій та побудова їх графіків

Приблизна схема дослідження функцій.

1. Знаходимо область визначення функції, досліджуємо функцію на парність та періодичність.
2. Знаходимо точки перетину з осями координат, множини, на яких функція зберігає знак.
3. Знаходимо асимптоти (похилі та вертикальні) графіка функції. Досліджуємо поведінку в околі особливих точок.
4. Досліджуємо функцію на неперервність (в тому числі односторонню) та характеризуємо точки розриву.
5. Досліджуємо функцію на диференційовність (в тому числі односторонню). За допомогою похідної знаходимо проміжки монотонності та точки екстремуму.
6. За допомогою другої похідної досліджуємо характер опуклості функції на різних проміжках та знаходимо точки перегину.

5.8.1 Приклади повного дослідження функцій та побудови їх графіків

1. Провести повне дослідження та побудувати графік функції

$$f(x) = \frac{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - 4}.$$

Область визначення $\mathcal{D}(f)$ даної функції визначається умовами

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0, \\ x^2 - 4 \neq 0. \end{cases}$$

Звідси зрозуміло, що $\mathcal{D}(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, -1] \cup [1, 2) \cup (2, +\infty)$. Оскільки для кожного $x \in \mathcal{D}(f)$ маємо $-x \in \mathcal{D}(f)$ і, очевидно, $f(-x) = f(x)$, то функція парна, і тому її графік симетричний відносно осі Oy . Дана функція неперіодична, оскільки для кожного $T > 0$ знайдеться $x = -2 - T$, таке, що $x = -2 - T \in \mathcal{D}(f)$, $x + T = -2 \notin \mathcal{D}(f)$. Оскільки $0 \notin \mathcal{D}(f)$, то графік функції не перетинає вісь Oy . Для знаходження точок перетину графіка з віссю Ox знайдемо корені рівняння $f(x) = 0$. Це рівняння, очевидно, має два розв'язки $x = -1$ і $x = 1$. Отже, графік функції перетинає вісь Ox в точках $x = -1$ і $x = 1$. Оскільки чисельник дробу $\frac{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - 4}$ невід'ємний, то знак цього дробу, а отже і даної функції, визначається знаком знаменника. Зрозуміло, що $x^2 - 4 > 0$ при $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ і $x^2 - 4 < 0$ для $x \in (-2, -1] \cup [1, 2)$. Знаходимо похилі асимптоти. Маємо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}{x(x^2 - 4)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{1 - \frac{4}{x^2}} = 1 = k, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - 4} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \sqrt{x^2 - 1} - x^3 + 4x}{x^2 - 4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2 - 4} \cdot \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} + \frac{4x}{x^2 - 4} \right) = 1 \cdot 0 + 0 = 0 = b. \end{aligned}$$

Отже, асимптотою до графіка функції при $x \rightarrow +\infty$ є пряма $y = x$. Для визначення розташування графіка функції відносно асимптоти, розглянемо різницю

$$\begin{aligned} f(x) - (kx + b) &= \frac{x^2\sqrt{x^2-1}}{x^2-4} - x = \frac{x^2\sqrt{x^2-1} - x^3 + 4x}{x^2-4} = \\ &= \frac{x^2}{x^2-4} \cdot \frac{-1}{\sqrt{x^2-1} + x} + \frac{4x}{x^2-4} = \\ &= \frac{x}{x^2-4} \left(4 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1} + x} \right) = \frac{x}{x^2-4} \left(4 - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + 1} \right). \end{aligned}$$

Оскільки дріб в дужках прямує до $\frac{1}{2}$, то при достатньо великих x вираз в дужках додатний. Оскільки множник перед дужкою також додатний, то це означає, що при великих x графік функції розташований вище асимптоти. В силу парності функції, при $x \rightarrow -\infty$ похилою асимптотою є пряма $y = -x$ і графік функції при $x \rightarrow -\infty$ також розташований вище асимптоти. Знаходимо вертикальні асимптоти графіка. Маємо

$$\begin{aligned} f(1+0) &= \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 0 = f(1), \\ f(-1-0) &= \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = 0 = f(1), \\ \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) &= +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -2+0} f(x) &= -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2-0} f(x) = +\infty. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що графік функції має дві вертикальні асимптоти $x = -2$ і $x = 2$, а в точках $x = -1$ і $x = 1$ функція неперервна зліва і справа, відповідно. У всіх інших точках області визначення функція неперервна, в чому легко переконатись, використовуючи теореми про арифметичні властивості неперервних функцій, неперервність функції $g(t) = \sqrt{t}$ ($t > 0$) та теорему про неперервність композиції. У виколотих точках області визначення $x = -2$ і $x = 2$ яким би чином не доозначити дану функцію, отримана функція буде мати розрив другого роду, оскільки у вказаних точках не існує скінченних односторонніх границь даної функції. Досліджуємо функцію на диференційовність. У всіх внутрішніх точках області

визначення функція диференційовна, в чому легко переконатись, використовуючи теореми про арифметичні властивості диференційовних функцій, диференційовність функції $g(t) = \sqrt{t}$ при $t > 0$ та теорему про диференційовність композиції. Похідна у внутрішніх точках дорівнює

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(2x\sqrt{x^2-1} + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}x^2\right)(x^2-4) - 2x \cdot x^2\sqrt{x^2-1}}{(x^2-4)^2} = \\ &= \frac{x(x^4-12x^2+8)}{(x^2-4)^2\sqrt{x^2-1}}. \end{aligned}$$

Далі,

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2\sqrt{x^2-1}}{(x-1)(x^2-4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2\sqrt{x+1}}{x^2-4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}} = -\infty, \\ f'_-(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^2\sqrt{x^2-1}}{(x+1)(x^2-4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^2\sqrt{1-x}}{x^2-4} \cdot \frac{-1}{\sqrt{-x-1}} = +\infty, \end{aligned}$$

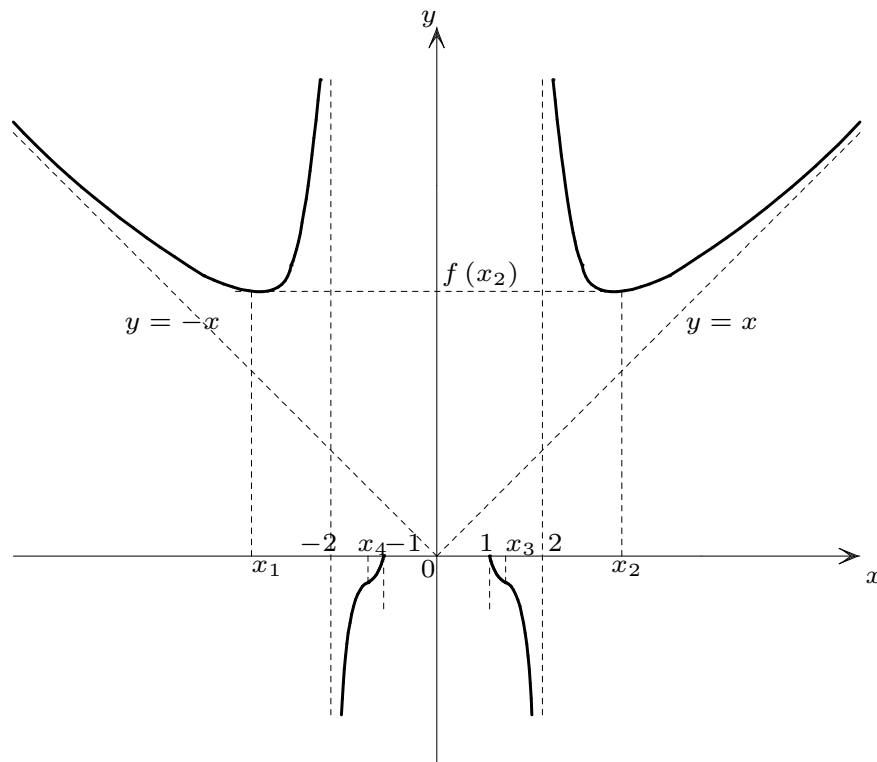
Дві останні рівності означають, що в точці $x = 1$ графік функції має правосторонню вертикальну дотичну, а в точці $x = -1$ – лівосторонню вертикальну дотичну. Для знаходження коренів похідної достатньо розв'язати рівняння $x^4 - 12x^2 + 8 = 0$. Розв'язуючи його, знаходимо $x_1 = -\sqrt{2(3+\sqrt{7})} \approx -3.36$, $x_2 = \sqrt{2(3+\sqrt{7})} \approx 3.36$. Два інших розв'язки $x'_1 = -\sqrt{2(3-\sqrt{7})}$, $x'_2 = \sqrt{2(3-\sqrt{7})}$ не належать до області визначення функції. Якщо $x \in (x_1, -2) \cup (-2, -1) \cup (x_2, +\infty)$, то $f'(x) > 0$, а якщо $x \in (-\infty, x_1) \cup (1, 2) \cup (2, x_2)$, то $f'(x) < 0$. Це означає, що функція строго зростає на кожному з проміжків $[x_1, -2)$, $(-2, -1]$, $[x_2, +\infty)$ і строго спадає на кожному з проміжків $(-\infty, x_1]$, $[1, 2)$, $(2, x_2]$. При переході через точку x_2 похідна змінює знак з "–" на "+". Тому точка x_2 є точкою локального мінімуму функції і $f(x_2) = \frac{(6+\sqrt{28})\sqrt{5+\sqrt{28}}}{2+\sqrt{28}} \approx 4.96$. При переході через точку x_1 похідна функції змінює знак з "–" на "+". Це означає, що

точка x_1 є точкою локального мінімуму функції і $f(x_1) \approx 4.96$. Обчислимо другу похідну

$$f''(x) = \frac{7x^6 + 72x^4 - 120x^2 + 32}{(x^4 - 1)^3 (x^2 - 1)^{3/2}}.$$

Ми не будемо знаходити корені другої похідної, а отже і точок перегину. Відзначимо лише, що $f''(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow 1 + 0$. Це означає, що функція опукла донизу в правому півколі точки 1. Якщо ж $x \rightarrow 2 - 0$, то $f''(x) \rightarrow -\infty$, тобто функція опукла догори в лівому півколі точки 2. За неперервністю $f''(x)$, знайдеться точка $x_3 \in (1, 2)$, в якій похідна f'' змінить знак з $''+$ на $''-$. Це означає, що на інтервалі $(1, 2)$ дана функція має точку перегину. Далі, $f''(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow 2 + 0$ і $f''(x) > 0$ при достатньо великих x . Це означає, що функція f опукла донизу в правому півколі точки 2, а також при достатньо великих x . Із парності функції f випливає, що на інтервалі $\in (-2, -1)$ також існує точка перегину x_4 . Із встановлених властивостей функції f отримуємо, що множиною значень даної функції є $(-\infty, 0] \cup \left[\frac{(6+\sqrt{28})\sqrt{5+\sqrt{28}}}{2+\sqrt{28}}, +\infty \right)$.

Використовуючи тепер всю отриману вище інформацію, будуємо графік даної функції.



2. Провести повне дослідження та побудувати графік функції

$$f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}.$$

Область визначення $\mathcal{D}(f)$ визначається умовою $\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1$. Оскільки ця нерівність рівносильна наступній $(1 - |x|)^2 \geq 0$, яка, очевидно, є справедливою для всіх $x \in \mathbb{R}$, то $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Функція непарна, оскільки для будь-якого $x \in \mathcal{D}(x)$ значення $-x \in \mathcal{D}(x)$ і $f(-x) = -f(x)$. Тому графік функції симетричний відносно початку координат. Функція неперіодична, оскільки, наприклад, $f(0) = 0$, а $f(0+T) \neq 0$ при будь-якому $T > 0$. Єдина точка перетину графіка функції з координатними осями – початок координат. При $x > 0$ функція додатна, тобто графік функції розташований вище осі Ox , а при $x < 0$ функція від’ємна, тобто графік функції розташований нижче осі Ox . При $x \rightarrow +\infty$ $\frac{2x}{1+x^2} \rightarrow +0$. Це означає, що пряма $y = 0$ є похилою асимптотою графіка функції при $x \rightarrow +\infty$ і при цьому графік розташований вище асимптоти. За непарністю функції, пряма $y = 0$ є також похилою асимптотою графіка функції при $x \rightarrow -\infty$ і при цьому графік функції розташований нижче асимптоти. Функція неперервна в кожній точці. Звідси, зокрема, випливає, що вертикальних асимптот графік функції не має. Дослідимо функцію на диференційовність. Маємо

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \\ &= 2 \frac{1-x^2}{(1+x^2)|1-x^2|} = \frac{2}{1+x^2} \cdot \text{sign}(1-x^2) \quad (|x| \neq 1). \end{aligned}$$

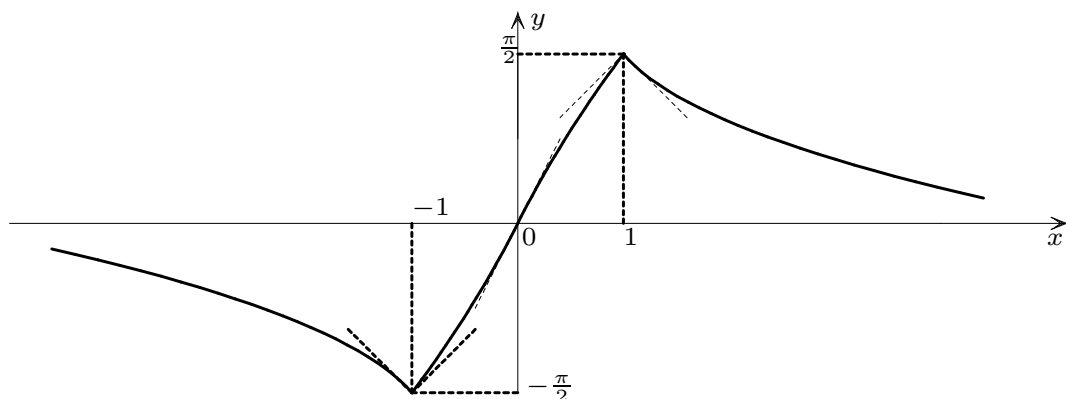
Для знаходження односторонніх похідних в точці $x_0 = 1$ скористаємось правилом Лопіталя і отримаємо

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\arcsin \frac{2x}{1+x^2} - \arcsin 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{2 \text{sign}(1-x^2)}{1+x^2} = 1, \\ f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\arcsin \frac{2x}{1+x^2} - \arcsin 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2 \text{sign}(1-x^2)}{1+x^2} = -1. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що дана функція недиференційовна в точці $x_0 = 1$. За непарністю, функція недиференційовна також і в точці $x_1 = -1$. На інтервалі $(-\infty, -1)$ похідна $f'(x) < 0$, тобто функція спадає, на інтервалі $(-1, 1)$ похідна $f'(x) > 0$, тобто функція зростає, на інтервалі $(1, +\infty)$ похідна $f'(x) < 0$, тобто функція спадає. Отже, критична точка $x_1 = -1$ є точкою локального мінімуму, а критична точка $x_0 = 1$ – точкою локального максимуму. Обчислимо значення функції в точці локального максимуму $f(1) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, і, за непарністю функції, $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$. Звідси отримуємо, що множина значень функції – відрізок $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Для дослідження опуклості знайдемо другу похідну

$$f''(x) = \begin{cases} \left(\frac{-2}{1+x^2}\right)' = \frac{4x}{(1+x^2)^2} & (|x| > 1), \\ \left(\frac{2}{1+x^2}\right)' = \frac{-4x}{(1+x^2)^2} & (|x| < 1). \end{cases}$$

На інтервалі $(-\infty, -1)$ $f''(x) < 0$, тобто функція опукла догори, на інтервалі $(-1, 0)$ $f''(x) > 0$, тобто функція опукла донизу, на інтервалі $(0, 1)$ $f''(x) < 0$, тобто функція опукла догори, на інтервалі $(1, +\infty)$ $f''(x) > 0$, тобто функція опукла донизу. При переході через точки $-1, 0, 1$ функція змінює характер опуклості. Це означає, що точки $(-1, -\frac{\pi}{2})$, $(0, 0)$ і $(1, \frac{\pi}{2})$ є точками перегину графіка функції. Оскільки $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$, то пряма $y = 2x$ є дотичною до графіка функції в початку координат. Оскільки $f'_-(1) = 1$, $f'_+(1) = -1$, то лівосторонньою дотичною до графіка в точці $(1, \frac{\pi}{2})$ є пряма $y = \frac{\pi}{2} + x - 1$, правосторонньою – пряма $y = \frac{\pi}{2} - x + 1$. В точці $(-1, -\frac{\pi}{2})$ односторонні дотичні знаходимо виходячи з непарності функції. Використовуючи всю отриману вище інформацію, будуємо графік даної функції.



3. Провести повне дослідження побудувати графік функції

$$f(x) = (x + 2)e^{\frac{1}{x}}.$$

Область визначення даної функції $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Оскільки $f(-2) = 0$, і $f(x) \neq 0$ при всіх $x \in \mathcal{D}(f) \setminus \{-2\}$, то дана функція є функцією загального вигляду і неперіодична. Оскільки $0 \notin \mathcal{D}(f)$, то графік функції не перетинає вісь Oy . Єдиною точкою перетину графіка з віссю Ox є точка $(-2, 0)$. При $x > -2$ функція $f(x) > 0$, тобто графік розташований вище осі Ox , а при $x < -2$ $f(x) < 0$, тобто графік розташований нижче осі Ox . Знаходимо похилі асимптоти

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+2)e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1 \equiv k, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left((x+2)e^{\frac{1}{x}} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) + 2e^{\frac{1}{x}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} + 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1 + 2 = 3 \equiv b. \end{aligned}$$

Це означає, що при $x \rightarrow +\infty$ похилою асимптотою графіка функції є пряма $y = x + 3$. Всі знайдені границі залишаться такими ж і при $x \rightarrow -\infty$. Це означає, що пряма $y = x + 3$ є також асимптотою графіка функції і при $x \rightarrow -\infty$. Розташування графіка функції відносно асимптоти встановимо нижче, виходячи з опуклості функції. Вертикальна асимптота може бути хіба що в точці $x = 0$. Маємо

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (x+2)e^{\frac{1}{x}} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (x+2)e^{\frac{1}{x}} = 0.$$

Це означає, що пряма $x = 0$ є вертикальною асимптотою графіка функції. Виходячи з арифметичних властивостей неперервних функцій та теореми про неперервність композиції, отримуємо, що дана функція неперервна у всіх точках області визначення. Користуючись теоремою про арифметичні властивості диференційовних функцій та теоремою про диференційовність композиції, отримуємо, що дана функція диференційовна у всіх

точках області визначення. Знаходимо похідну

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + (x+2)e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right).$$

Оскільки $e^{\frac{1}{x}} > 0$ для всіх $x \in \mathcal{D}(f)$, то знак похідної визначається знаком виразу $1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$. Покладемо $t = \frac{1}{x}$ і розглянемо квадратний тричлен $1 - t - 2t^2$. Його корені $t = -1$ і $t = \frac{1}{2}$; при цьому $1 - t - 2t^2 > 0$ при $-1 < t < \frac{1}{2}$ і $1 - t - 2t^2 < 0$ при $t \in (-\infty, -1) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$. Оскільки $t = \frac{1}{x}$, то отримуємо умову $-1 < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$. Звідси $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$. Далі, умова $\frac{1}{x} \in (-\infty, -1) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$ рівносильна такій $x \in (-1, 0) \cup (0, 2)$. Отже, отримуємо, що $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ і $f'(x) < 0$ при $x \in (-1, 0) \cup (0, 2)$. Це означає, що на інтервалах $(-\infty, -1)$ і $(2, +\infty)$ функція строго зростає, а на інтервалах $(-1, 0)$ і $(0, 2)$ – строго спадає. При цьому точка -1 є точкою строгого локального максимуму і $f'(-1) = 0$, $f(-1) = \frac{1}{e}$, а точка 2 є точкою строгого локального мінімуму і $f'(2) = 0$, $f(2) = 4\sqrt{e} \approx 6.6$. Оскільки існує границя зліва в точці 0 , то можемо визначити кут нахилу, під яким графік функції входить в точку $(0, 0)$ зліва. Для цього знайдемо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0-)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{(x+2)e^{\frac{1}{x}}}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \\ &= -2 \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = 0. \end{aligned}$$

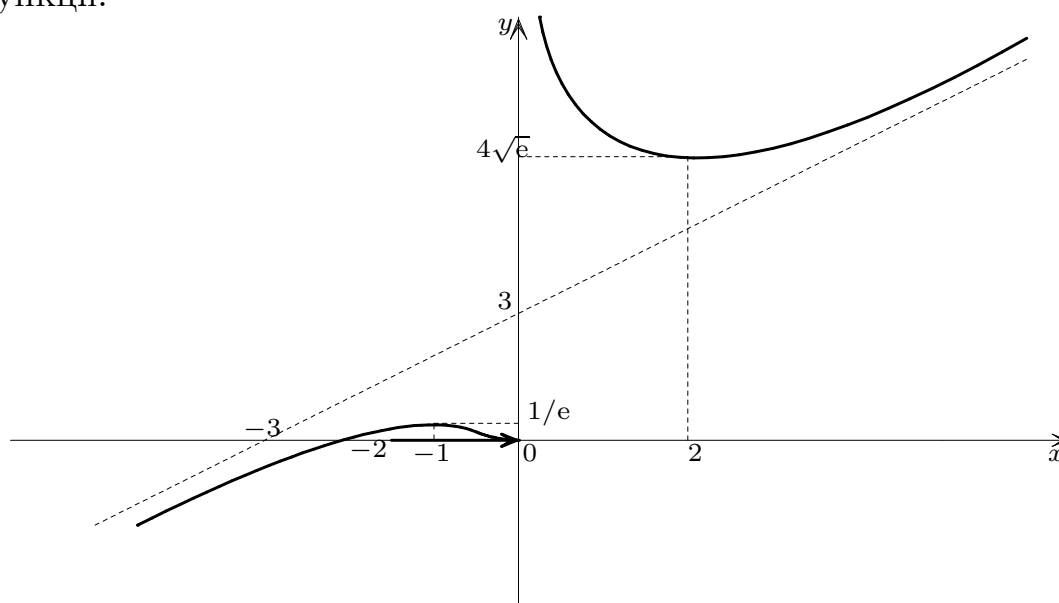
Це означає, що вісь Ox є лівосторонньою дотичною до графіка функції в точці $(0, 0)$. Дослідимо опуклість. Для цього знаходимо

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) + e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3}\right) = \\ &= e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{5}{x^3} + \frac{4}{x^4}\right). \end{aligned}$$

Якщо $x > 0$, то $f''(x) > 0$, і, отже, функція опукла донизу на $(0, +\infty)$. Звідси, зокрема, випливає, що при $x \rightarrow +\infty$ графік функції розташований вище похилої асимптоти. Нехай $x < 0$. Тоді представимо $f''(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} \left(5 + \frac{4}{x}\right)$. Якщо $5 + \frac{4}{x} > 0$, тобто $5x + 4 < 0$, $x < -\frac{4}{5}$, то $f''(x) < 0$, і

тому функція опукла догори. Звідси, зокрема, випливає, що при $x \rightarrow -\infty$ графік функції розташований нижче своєї похилої асимптоти. Якщо ж $-\frac{4}{5} < x < 0$, то $f''(x) > 0$, тобто функція опукла донизу на інтервалі $(-\frac{4}{5}, 0)$. При переході через точку $-\frac{4}{5}$ друга похідна $f''(x)$ змінює знак з $''-''$ на $''+''$. Тому точка $(-\frac{4}{5}, f(-\frac{4}{5}))$ є точкою перегину графіка функції. Обчислимо $f(-\frac{4}{5}) = \frac{6}{5}e^{-\frac{5}{4}} \approx 0,37$.

Використовуючи тепер всю отриману вище інформацію, будуємо графік функції.



Із отриманої вище інформації, зокрема, випливає, що множиною значень даної функції є множина $(-\infty, \frac{1}{e}] \cup [4\sqrt{e}, +\infty)$.

Контрольні питання

1. Неперервні функції, означення та приклади.
2. Точки розриву та їх класифікація.
3. Властивості неперервних функцій.
4. Монотонні функції.
5. Властивість проміжних значень.
6. Теорема Вейєрштраса.
7. Показникова, логарифмічна та степенева функції.
8. Друга визначна границя та наслідки з неї.

Розділ 6. Невизначений інтеграл

6.1 Означення та таблиця інтегралів

Нам знадобиться поняття диференціала функції.

Означення. Нехай функція f диференційовна в точці x . Лінійна функція $dy = f'(x) dx$ змінної dx називається диференціалом функції f в точці x і позначається через

$$df(x) = f'(x) dx.$$

Властивості диференціала визначаються властивостями похідних та правилами диференціювання. Наприклад,

$$d(uv)(x) = (u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) dx = u(x) dv(x) + v(x) du(x),$$

або, коротше,

$$d(uv) = u dv + v du.$$

Аналогічно, маємо

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}.$$

Означення. Нехай функція f визначена на інтервалі I . Якщо існує функція F , диференційовна на інтервалі I і така, що $F'(x) = f(x)$ для всіх $x \in I$, то функція F називається первісною для функції f на цьому інтервалі.

Наприклад, $f(x) = 2xe^{x^2}$, $F(x) = e^{x^2}$ ($-\infty < x < +\infty$).

Якщо у функції f існує одна первісна, то існує і нескінченно багато первісних. Справді, кожна функція $F(x) + C$, де C – стала, також є первісною, оскільки $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$. За допомогою теореми Лагранжа легко можна довести, що різниця двох будь-яких первісних є

сталою. Таким чином, сукупність усіх первісних заданої функції f має вигляд $F(x) + C$, де $F(x)$ – одна з первісних.

Означення. Сукупність усіх первісних функції f називається невичисленим інтегралом функції f і позначається через $\int f(x) dx$. При цьому сама функція $f(x)$ називається підінтегральною функцією, а $f(x) dx$ називається підінтегральним виразом.

Як відзначено вище, якщо $F(x)$ – одна з первісних функції $f(x)$, то справедлива наступна рівність:

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

де C – стала.

Операція знаходження первісної називається інтегруванням.

Таблиця інтегралів (перевірити шляхом диференціювання).

$$1. \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1).$$

$$2. \quad \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C.$$

$$3. \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C. \end{cases}$$

$$4. \quad \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C.$$

$$5. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C. \end{cases}$$

$$6. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C.$$

$$7. \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1); \quad \int e^x dx = e^x + C.$$

$$8. \quad \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$9. \quad \int \cos x \, dx = \sin x + C.$$

$$10. \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$11. \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$12. \quad \int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C.$$

$$13. \quad \int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C.$$

$$14. \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

$$15. \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$$

$$16. \quad \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0).$$

$$17. \quad \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \quad (a \neq 0).$$

$$18. \quad \int \frac{x \, dx}{a^2 \pm x^2} = \pm \frac{1}{2} \ln |a^2 \pm x^2| + C.$$

$$19. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$$

$$20. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C \quad (a > 0).$$

$$21. \quad \int \frac{x \, dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm \sqrt{a^2 \pm x^2} + C.$$

$$22. \quad \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$$

$$23. \quad \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$$

6.2 Елементарні властивості невизначеного інтеграла

1. Якщо функція F диференційовна на інтервалі I , то

$$\int F'(x) dx = F(x) + C.$$

Це одразу випливає з означення похідної.

2. Якщо $\int f(x) dx = F(x) + C$ і $\int g(x) dx = G(x) + C$, то $\int [f(x) + g(x)] dx = F(x) + G(x) + C$, або, що те ж саме,

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

Справді, за припущеннями

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x).$$

3. Якщо $\int f(x) dx = F(x) + C$, то $\int [\alpha f(x)] dx = \alpha F(x) + C$ для будь-якої сталої $\alpha \neq 0$, або, що те ж саме,

$$\int [\alpha f(x)] dx = \alpha \int f(x) dx.$$

Це очевидно випливає з означення.

4. Якщо $\int f(t) dt = F(t) + C$, то для будь-якої сталої $a \neq 0$ і для будь-якого b

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C.$$

Справді,

$$\left[\frac{1}{a} F(ax + b) \right]' = \frac{1}{a} F'(ax + b) \cdot a = f(ax + b).$$

Наприклад,

$$\int \cos(2x + 3) dx = \frac{1}{2} \sin(2x + 3) + C.$$

6.2.1 Інтегрування частинами та заміна змінної

Теорема (формула інтегрування частинами). *Нехай функції $u(x)$ і $v(x)$ диференційовні на інтервалі I . Якщо одна з функцій $u(x)v'(x)$ чи $u'(x)v(x)$ має первісну на інтервалі I , то на цьому інтервалі має первісну і інша функція, причому справедлива рівність*

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx.$$

ДОВЕДЕННЯ одразу випливає із правила диференціювання добутку. Справді, за правилом диференціювання добутку, маємо

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Звідси отримуємо потрібну рівність.

Коротко правило інтегрування частинами можна записати так:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

В цьому запису використовується формула обчислення диференціала функції $du(x) = u'(x) dx$.

Приклади

$$\begin{aligned} 1. \int x e^x dx &= \left[\begin{array}{ll} u = x, & dv = e^x dx \\ du = dx, & v = e^x \end{array} \right] = \\ &= x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C. \end{aligned}$$

$$2. \int x \cos x dx = \left[\begin{array}{ll} u = x, & dv = \cos x dx \\ du = dx, & v = \sin x \end{array} \right] =$$

$$= x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C.$$

$$\begin{aligned} 3. \int x \ln x \, dx &= \left[\begin{array}{ll} u = \ln x, & dv = x \, dx \\ du = \frac{dx}{x}, & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right] = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C. \end{aligned}$$

Наступний приклад показує такий спосіб застосування формули інтегрування частинами, коли в правій частині з'являється такий же інтеграл, як і в лівій. Тоді шуканий інтеграл може бути знайдений із отриманої рівності.

$$\begin{aligned} 4. \int e^x \cos x \, dx &= \left[\begin{array}{ll} u = e^x, & dv = \cos x \, dx \\ du = e^x dx, & v = \sin x \end{array} \right] = \\ &= e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx = \\ &= e^x \sin x - \left[\begin{array}{ll} u = e^x, & dv = \sin x \, dx \\ du = e^x dx, & v = -\cos x \end{array} \right] = \\ &= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx. \end{aligned}$$

З цієї рівності знаходимо

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x}{2} [\sin x + \cos x] + C.$$

Теорема (про заміну змінної в інтегралі). Нехай функція f має первісну на інтервалі I , тобто

$$\int f(t) dt = F(t) + C.$$

Нехай, далі, функція φ диференційовна на інтервалі Δ і $\varphi(\Delta) \subset I$. Тоді справедлива рівність

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) \, dx = F(\varphi(x)) + C.$$

ДОВЕДЕННЯ. Справді, за правилом диференціювання композиції, маємо

$$[F(\varphi(x))]' = F'(\varphi(x)) \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \varphi'(x).$$

Приклади

$$\begin{aligned} 1. \int \sin^3 x \, dx &= \int \sin x (1 - \cos^2 x) \, dx = \left[\begin{array}{l} \cos x = t, \\ dt = -\sin x \, dx \end{array} \right] = \\ &= \int (t^2 - 1) \, dt = \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \int \frac{dx}{1+e^x} &= \left[\begin{array}{l} \text{перетворимо} \quad \frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{e^x(e^{-x}+1)} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \\ \text{покладемо} \quad 1+e^{-x} = t, \quad dt = -e^{-x} \, dx \end{array} \right] = \\ &= - \int \frac{dt}{t} = -\ln |t| + C = -\ln(1+e^{-x}) + C = \\ &= -\ln \frac{1+e^x}{e^x} + C = x - \ln(1+e^x) + C. \end{aligned}$$

Зауваження. Ми використали рівність $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$. Цю рівність слід застосовувати окремо для проміжків $(0, +\infty)$ і $(-\infty, 0)$. При $x > 0$ вона справедлива, оскільки $|x| = x$, $(\ln x + C)' = \frac{1}{x}$. Якщо ж $x < 0$, то $|x| = -x$, $(\ln(-x) + C)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$, і тому ця рівність справедлива і в цьому випадку.

Отже, якщо заданий інтеграл має вигляд $\int f(\varphi(x))\varphi'(x) \, dx$, то, виконуючи заміну змінної $t = \varphi(x)$, приходимо до інтеграла $\int f(t) \, dt$. Часто заміну змінної в інтегралі $\int g(x) \, dx$ застосовують у вигляді $x = \psi(t)$, потім обчислюють інтеграл по t , а щоб повернутись до початкової змінної x , потрібно виразити нову змінну t через x .

Приклад. Нехай $I = \int \sqrt{1-x^2} \, dx$.

Для обчислення цього інтеграла покладемо $x = \sin t$. Тоді

$$dx = \cos t \, dt, \quad \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t.$$

Підставляючи в початковий інтеграл, отримуємо

$$I = \int \cos^2 t \, dt = \int \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C.$$

З рівності $x = \sin t$ маємо $t = \arcsin x$, і тому

$$I = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C.$$

Обчислимо цей інтеграл ще одним способом, заснованим на застосуванні формули інтегрування частинами.

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{1-x^2} \, dx = \left[\begin{array}{ll} u = \sqrt{1-x^2}, & dv = dx \\ du = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx, & v = x \end{array} \right] = \\ &= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \\ &= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2 - 1 + 1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = x\sqrt{1-x^2} - I + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Скориставшись тепер рівністю $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$, отримаємо, що $I = x\sqrt{1-x^2} - I + \arcsin x$. Звідси випливає

$$I = \frac{1}{2} \left[x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x \right] + C.$$

6.3 Інтегрування деяких спеціальних класів функцій

6.3.1 Інтегрування раціональних функцій

Раціональною функцією (або дробом) називається функція виду

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ – многочлени. Якщо степінь чисельника менше степеня знаменника, то раціональний дріб називається правильним. Добре відомо, що кожний раціональний дріб можна представити у вигляді

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

де $R(x)$ – многочлен, а дріб $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ – правильний. Оскільки інтеграли від многочленів обчислюються зовсім просто, то будемо розглядати лише методи інтегрування правильних дробів.

Будемо розрізняти наступні чотири види дробів.

1. $\frac{A}{x-a}$, де A , a – сталі.
2. $\frac{A}{(x-a)^k}$, де A , a – сталі, $k = 2, 3, \dots$
3. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, де M , N , p , q – сталі, квадратний тричлен в знаменнику не має дійсних коренів.
4. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$, де M , N , p , q – сталі, $k = 2, 3, \dots$, квадратний тричлен в знаменнику не має дійсних коренів.

Покажемо як обчислюються інтеграли від кожного із цих дробів.

1. $\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln |x-a| + C$.
2. $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = -\frac{A}{k-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$.
3. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx$. Для обчислення цього інтеграла представимо підінтегральну функцію у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{Mx+N}{x^2+px+q} &= \frac{\frac{M}{2}(2x+p) + N - p\frac{M}{2}}{x^2+px+q} = \\ &= \frac{M}{2} \cdot \frac{2x+p}{x^2+px+q} + \frac{N - p\frac{M}{2}}{x^2+px+q}. \end{aligned}$$

Для обчислення інтеграла від першого доданка справа, очевидно, достатньо виконати заміну $t = x^2 + px + q$. Тоді отримаємо

$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx = \ln(x^2+px+q) + C.$$

Для обчислення другого інтеграла справа виділимо повний квадрат в знаменнику, тобто представимо знаменник у вигляді $x^2 + px + q = (x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}$. Оскільки квадратний тричлен в знаменнику не має дійсних коренів, то його дискримінант $\frac{p^2}{4} - q < 0$. Позначимо $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$. Виконуючи заміну $x + \frac{p}{2} = t$, отримаємо

$$\int \frac{1}{x^2+px+q} dx = \int \frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2+a^2} dx = \int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{\frac{t^2}{a^2} + 1} = \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{\left(\frac{t}{a}\right)^2 + 1} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C.$$

Повертаючись тепер до старої змінної, тобто підставивши $t = x + \frac{p}{2}$, $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$, отримаємо початковий інтеграл.

4. $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} dx$. Для обчислення цього інтеграла, як і в попередньому випадку, представимо підінтегральну функцію у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} &= \frac{\frac{M}{2}(2x+p) + N - p\frac{M}{2}}{(x^2+px+q)^k} = \\ &= \frac{M}{2} \cdot \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k} + \frac{N - p\frac{M}{2}}{(x^2+px+q)^k}. \end{aligned}$$

Для обчислення інтеграла від першого доданка справа, очевидно, достатньо виконати заміну $t = x^2 + px + q$. Тоді отримаємо

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k} dx = \frac{1}{-k+1} (x^2+px+q)^{-k+1} + C.$$

Для обчислення інтеграла від другого доданка, як і в попередньому випадку, виділимо повний квадрат з квадратного тричлена в знаменнику. Тоді після заміни змінної $t = x + \frac{p}{2}$ він зведеться до інтеграла виду $\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}$. Позначимо цей інтеграл через I_k і виведемо рекурентну формулу для обчислення цього інтеграла. Будемо застосовувати формулу інтегрування частинами. Маємо

$$\begin{aligned} I_k &= \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \left[\begin{array}{ll} u = \frac{1}{(t^2+a^2)^k}, & dv = dt \\ du = -\frac{2kt}{(t^2+a^2)^{k+1}} dt, & v = t \end{array} \right] = \\ &= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k \int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^{k+1}} dt = \\ &= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k \int \frac{t^2+a^2-a^2}{(t^2+a^2)^{k+1}} dt = \\ &= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} - 2ka^2 \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k+1}} = \end{aligned}$$

$$= \frac{t}{(t^2 + a^2)^k} + 2kI_k - 2ka^2 I_{k+1}.$$

Звідси знаходимо

$$I_{k+1} = \frac{1}{2ka^2} \left[\frac{t}{(t^2 + a^2)^k} + (2k - 1)I_k \right] \quad (k = 1, 2, \dots).$$

При цьому, як вже обчислено раніше,

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C.$$

Отже, і в цьому випадку ми отримали правило обчислення інтеграла від дробу четвертого виду.

З основної теореми алгебри випливає, що кожний многочлен з дійсними коефіцієнтами може бути поданим у вигляді добутку скінченного числа лінійних множників виду $x - a$ та квадратичних множників виду $x^2 + px + q$, де $\frac{p^2}{4} - q < 0$. А саме, справедлива рівність

$$Q(x) = A(x - a_1)^{k_1} \dots (x - a_r)^{k_r} (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{m_s},$$

де k_i і m_i — цілі невід'ємні числа.

Використовуючи це представлення, можна показати, що справедлива наступна

Теорема. Нехай $\frac{P(x)}{Q(x)}$ — правильний дріб, знаменник якого $Q(x)$ допускає вказане розвинення. Тоді цей дріб єдиним чином може бути представленим у вигляді суми простих дробів, тобто,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{ij}}{(x - a_i)^j} + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{m_i} \frac{M_{ij}x + N_{ij}}{(x^2 + p_ix + q_i)^j}.$$

Вище вже показано, що інтеграл від кожного простого дробу можна виразити через елементарні функції. Таким чином, справедлива

Теорема (про інтегрування раціональної функції). Кожний раціональний дріб має первісну, яка виражається через елементарні функції, а саме, через раціональні, логарифмічні та функції арктангенса.

Приклад 1. Обчислити $\int \frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x} dx$. В першу чергу звернемо увагу на те, що підінтегральна функція є правильним дробом і тому цілу частину виділяти не треба. Розвинемо знаменник на множники: $x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2$. Тоді підінтегральна функція може бути подана у вигляді

$$\frac{2x^2 - 3x + 3}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2},$$

де A, B, C – сталі коефіцієнти. Для їх знаходження приведемо вираз справа до спільного знаменника і, прирівнюючи чисельники отриманих дробів, знайдемо

$$2x^2 - 3x + 3 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx.$$

Оскільки ця тотожність справедлива для всіх x , окрім $x = 0, x = 1$, то коефіцієнти цих многочленів при однакових степенях x співпадають. Прирівнюючи їх, отримаємо систему лінійних рівнянь

$$\left. \begin{array}{lcl} x^2 : & 2 & = A + B, \\ x : & -3 & = -2A - B + C, \\ x^0 : & 3 & = A. \end{array} \right\}$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо $A = 3, B = -1, C = 2$. Підставивши ці значення в розвинення підінтегральної функції і обчислюючи відповідні інтеграли, отримуємо

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - 3x + 3}{x^3 - 2x^2 + x} dx &= \int \left(\frac{3}{x} + \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} \right) dx = \\ &= 3 \ln |x| - \ln |x-1| - \frac{2}{x-1} + C = \ln \frac{|x|^3}{|x-1|} - \frac{2}{x-1} + C. \end{aligned}$$

Приклад 2. Обчислити $I = \int \frac{x dx}{x^3+1}$. Знову маємо інтеграл від правильного дробу. Як і в попередньому прикладі, розвинемо знаменник на множники:

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1).$$

Розвиваємо підінтегральний вираз з неозначеними коефіцієнтами

$$\frac{x}{x^3 + 1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Mx + N}{x^2 - x + 1},$$

звідки $x = A(x^2 - x + 1) + (Mx + N)(x + 1)$. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x , складаємо систему лінійних рівнянь для знаходження чисел A , M , N :

$$\left. \begin{array}{l} x^2 : \quad 0 = A + M, \\ x : \quad 1 = -A + M + N, \\ x^0 : \quad 0 = A + N. \end{array} \right\}$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо $A = -\frac{1}{3}$, $M = N = \frac{1}{3}$. Тому

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x \, dx}{x^3 + 1} = \int \left(\frac{-\frac{1}{3}}{x + 1} + \frac{\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}}{x^2 - x + 1} \right) dx \\ &= -\frac{1}{3} \ln |x + 1| + \frac{1}{3} \int \frac{x + 1}{x^2 - x + 1} dx. \end{aligned}$$

Обчислимо окремо

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{x + 1}{x^2 - x + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \operatorname{arctg} \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 - x + 1) + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

Піставивши це в попередню рівність, маємо

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{3} \ln |x + 1| + \frac{1}{3} I_1 = \\ &= -\frac{1}{3} \ln |x + 1| + \frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

Метод Остроградського. Цей метод інтегрування раціональних дробів призначений для виділення раціональної частини з інтегралу від раціональної функції. А саме, використовуючи відзначене вище розвинення

знаменника $Q(x)$, інтеграл від правильного дробу подається у вигляді

$$\begin{aligned} \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx &= \int \frac{P(x)}{A \prod_{i=1}^r (x - a_i)^{k_i} \prod_{j=1}^s (x^2 + p_j x + q_j)^{m_j}} dx = \\ &= \frac{R_{k_1 + \dots + k_r + 2(m_1 + \dots + m_s) - r - 2s - 1}(x)}{\prod_{i=1}^r (x - a_i)^{k_i - 1} \prod_{j=1}^s (x^2 + p_j x + q_j)^{m_j - 1}} + \\ &+ \int \frac{S_{r + 2s - 1}(x)}{\prod_{i=1}^r (x - a_i) \prod_{j=1}^s (x^2 + p_j x + q_j)} dx, \end{aligned}$$

де многочлени $R_{k_1 + \dots + k_r + 2(m_1 + \dots + m_s) - r - 2s - 1}(x)$ и $S_{r + 2s - 1}(x)$ степеня $k_1 + \dots + k_r + 2(m_1 + \dots + m_s) - r - 2s - 1$ и $r + 2s - 1$, відповідно, мають невизначені коефіцієнти. Ці коефіцієнти знаходяться потім за умови рівності похідних лівої та правої частин записаної рівності. Таким чином, обчислення інтеграла від правильного дробу зводиться до обчислення інтеграла від іншого правильного дробу, у якого в знаменнику всі множники лише в першому степені. Тим самим відпадає необхідність у використанні отриманої вище рекурентної формули для обчислення інтегралів від простого дробу четвертого виду.

6.3.2 Інтеграли виду $\int R(\sin x, \cos x) dx$

Інтеграли вказаного виду, де $R(u, v)$ – раціональна функція змінних u і v , також можуть бути виражені через елементарні функції. Задача обчислення цих інтегралів за допомогою відповідної заміни змінної може бути зведена до обчислення інтеграла від раціональної функції. Справді, якщо покладемо $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, то отримаємо

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2},$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2 dt}{1 + t^2}.$$

Якщо всі ці представлення підставити у початковий інтеграл, то, очевидно, отримаємо інтеграл від раціональної відносно змінної t функції.

Відзначимо, що в деяких випадках інтеграли вказаного виду можуть бути обчислені і більш простим способом. Наприклад, інтеграл виду

$$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x) dx,$$

де $R(u, v)$ – раціональна функція двох змінних, зводиться до інтеграла $\int Q(t) dt$, де Q – раціональна функція однієї змінної. Справді, достатньо використати наступні рівності

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1 + t^2}.$$

Тоді заміна змінної $t = \operatorname{tg} x$ приводить до інтеграла $\int Q_1(t) \frac{dt}{1+t^2}$, де Q_1 – раціональна функція, а отже і $Q(t) = \frac{Q_1(t)}{1+t^2}$ – раціональна функція.

Приклади

$$\begin{aligned} 1. \quad \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} &= [t = \operatorname{tg} x] = \int \frac{(1 + t^2)^2}{t^4} dt = \\ &= -\frac{1}{3t^3} - \frac{2}{t} + t + C = -\frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x - 2 \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \int \operatorname{tg}^3 x dx &= \left[t = \operatorname{tg} x, \quad dx = \frac{dt}{1 + t^2} \right] = \int \frac{t^3}{1 + t^2} dt = \\ &= \int \frac{(t^3 + t) - t}{1 + t^2} dt = \int t dt - \int \frac{t}{1 + t^2} dt = \\ &= \frac{t^2}{2} - \left[1 + t^2 = z, \quad dz = 2t dt \right] = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z} = \\ &= \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(1 + t^2) + C = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln |\cos x| + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad \int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx &= \int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x} \sin x \, dx = \left[\begin{array}{l} t = \cos x, \\ dt = -\sin x \, dx \end{array} \right] = \\
&= - \int \frac{t^4}{(1-t^2)^2} dt = - \left[\begin{array}{ll} u = t^3, & dv = \frac{t \, dt}{(1-t^2)^2} \\ du = 3t^2 \, dt, & v = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-t^2} \end{array} \right] = \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^3}{1-t^2} + \frac{3}{2} \int \frac{t^2}{1-t^2} dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^3}{1-t^2} - \frac{3}{2} \int \frac{(1-t^2) - 1}{1-t^2} dt = \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^3}{1-t^2} - \frac{3}{2} \int dt + \frac{3}{2} \int \frac{dt}{1-t^2} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{t^3}{t^2-1} - \frac{3}{2}t + \frac{3}{4} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} - \frac{3}{2} \cos x + \frac{3}{4} \ln \left| \frac{1+\cos x}{1-\cos x} \right| + C.
\end{aligned}$$

При обчисленні інтегралів від тригонометричних функцій часто виявляються корисними наступні формули пониження степеня:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

Покажемо їх застосування на прикладі.

$$\begin{aligned}
4. \quad \int \sin^2 x \cos^4 x \, dx &= \frac{1}{4} \int \sin^2 2x \cos^2 x \, dx = \\
&= \frac{1}{8} \int (\sin^2 2x + \sin^2 2x \cos 2x) \, dx = \\
&= \int \left(\frac{1}{16} (1 - \cos 4x) + \frac{1}{8} \sin^2 2x \cos 2x \right) dx = \\
&= \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C.
\end{aligned}$$

6.3.3 Інтеграли виду $\int R\left(x^{\frac{p_1}{q_1}}, \dots, x^{\frac{p_n}{q_n}}\right) dx$

Інтеграли вказаного виду, де R – раціональна функція своїх аргументів, а числа p_i і q_i – натуральні, можуть бути зведеними до інтегралу від раціональної функції. Для цього достатньо знайти число N – найменше спільне кратне всіх знаменників q_i і зробити заміну змінної $x = t^N$.

Приклад

$$\int \frac{1 + \sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x}}{2 + \sqrt[6]{x}} dx = \left[\begin{array}{l} x = t^6, \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right] = \int \frac{1 + t^3 - 2t^2}{2 + t} \cdot 6t^5 dt.$$

6.3.4 Інтеграли виду $\int R\left(x, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^{1/m}\right) dx$

Для обчислення таких інтегралів покладемо $t = \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}$. Тоді отримаємо

$$t^m = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \implies \gamma t^m x + \delta t^m = \alpha x + \beta \implies x = \frac{\beta - \delta t^m}{\gamma t^m - \alpha} \equiv \varphi(t).$$

Оскільки φ – раціональна функція, композиція раціональних функцій є раціональною функцією і похідна φ' також раціональна, то в результаті такої заміни отримаємо інтеграл від раціональної функції

$$\int R(\varphi(t), t) \varphi'(t) dt.$$

Приклади.

$$\begin{aligned} 1. \quad & \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} = \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{dx}{x+1} = \\ & = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}, \quad \frac{x+1}{x-1} = t^3 \\ x = \frac{t^3+1}{t^3-1}, \quad dx = -\frac{6t^2 dt}{(t^3-1)^2} \end{array} \right] = \int t \cdot \frac{t^3-1}{2t^3} \cdot \frac{-6t^2 dt}{(t^3-1)^2} = \\ & = -3 \int \frac{dt}{t^3-1} = \dots \\ 2. \quad & \int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \\ x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = -\frac{4t dt}{(1+t^2)^2} \end{array} \right] = \end{aligned}$$

$$= \int \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2\right) \cdot t} \cdot \frac{-4t \, dt}{(1+t^2)^2} = - \int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} + C = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C.$$

6.4 Приклади обчислення інтегралів

$$\begin{aligned} 1. \int (5-x)e^{-2x} dx &= \left[\begin{array}{ll} u = 5-x & du = -dx \\ dv = e^{-2x} dx & v = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{array} \right] = \\ &= \frac{x-5}{2} \cdot e^{-2x} - \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx = \frac{x-5}{2}e^{-2x} + \frac{1}{4}e^{-2x} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \int \operatorname{arctg} \sqrt{7x-1} dx &= \\ &= \left[\begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} \sqrt{7x-1} & du = \frac{-1}{1+7x-1} \frac{7}{2\sqrt{7x-1}} dx \\ dv = dx & v = x \end{array} \right] = \\ &= x \operatorname{arctg} \sqrt{7x-1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{7x-1}} = \\ &= x \operatorname{arctg} \sqrt{7x-1} + \frac{1}{7} \sqrt{7x-1} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \int \frac{x}{\cos^2 x} dx &= \left[\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \frac{1}{\cos^2 x} dx & v = \operatorname{tg} x \end{array} \right] = \\ &= x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x dx = x \operatorname{tg} x - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \\ &= x \operatorname{tg} x - \left[\begin{array}{l} t = \cos x, \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right] = x \operatorname{tg} x + \int \frac{dt}{t} = \\ &= x \operatorname{tg} x + \ln |t| + C = x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \int \ln(3x^2+7) dx &= \left[\begin{array}{ll} u = \ln(3x^2+7) & du = \frac{6x}{3x^2+7} dx \\ dv = dx & v = x \end{array} \right] = \\ &= x \ln(3x^2+7) - 6 \int \frac{x^2}{3x^2+7} dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x \ln(3x^2 + 7) - 2 \int \frac{(3x^2 + 7) - 7}{3x^2 + 7} dx = \\
&= x \ln(3x^2 + 7) - 2x + \frac{14}{3} \int \frac{dx}{x^2 + \frac{7}{3}} = \\
&= x \ln(3x^2 + 7) - 2x + \frac{14}{3} \sqrt{\frac{3}{7}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{\frac{7}{3}}} + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{5.} \int x \cos^2 x dx &= \int x \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \\
&= \frac{1}{2} \left(\int x dx + \int x \cos 2x dx \right) = \\
&= \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{2} \left[\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \cos 2x dx & v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right] = \\
&= \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} x \sin 2x - \frac{1}{4} \int \sin 2x dx = \\
&= \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} x \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{6.} \int \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx &= \left[\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx & v = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 x} \end{array} \right] = \\
&= \frac{x}{2 \cos^2 x} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{x}{2 \cos^2 x} - \frac{1}{2} \operatorname{tg} x + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{7.} \int \frac{dx}{x \sqrt{9x^2 + 4}} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{x^2}}} = \left[t = \frac{1}{x}, dt = -\frac{dx}{x^2} \right] = \\
&= -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \frac{9}{4}}} = -\frac{1}{2} \ln \left(t + \sqrt{t^2 + \frac{9}{4}} \right) + C = \\
&= -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{9}{4}} \right) + C.
\end{aligned}$$

Контрольні питання

1. Невизначений інтеграл та його елементарні властивості.
2. Таблиця інтегралів.
3. Інтегрування частинами та заміна змінної.
4. Інтегрування раціональних функцій.
5. Інтегрування деяких спеціальних класів функцій.

Розділ 7. Визначений інтеграл (інтеграл Рімана)

7.1 Означення та елементарні властивості

Означення. Нехай на відрізку $[a, b]$ задана функція f . Розглянемо довільну систему точок $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Кожну таку систему назовемо розбиттям відрізка $[a, b]$, а саме розбиття будемо позначати через Π . Відрізки $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) називаються частинними відрізками розбиття. Найбільшу із довжин $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ частинних відрізків називають діаметром цього розбиття і позначають

$$d(\Pi) = \max_{0 \leq i \leq n-1} \Delta x_i.$$

В кожному із частинних відрізків $[x_i, x_{i+1}]$ виберемо довільним чином точку ξ_i і складемо суму

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Сума σ називається інтегральною сумою для функції f , яка відповідає заданому розбиттю Π і заданому способу вибору точок ξ_i .

Для кожного заданого розбиття множина усіх можливих інтегральних сум нескінченна, оскільки кожна інтегральна сума залежить від способу вибору точок ξ_i .

Означення. Число I називається границею інтегральних сум σ при прямуванні до нуля діаметра розбиття $d(\Pi)$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, яке залежить, взагалі кажучи, від ε , що для будь-якого розбиття Π відрізка $[a, b]$ діаметра $d(\Pi) < \delta$ при будь-якому спосо-

бові вибору точок ξ_i із частинних відрізків цього розбиття відповідна інтегральна сума σ задовольняє нерівність $|\sigma - I| < \varepsilon$, тобто

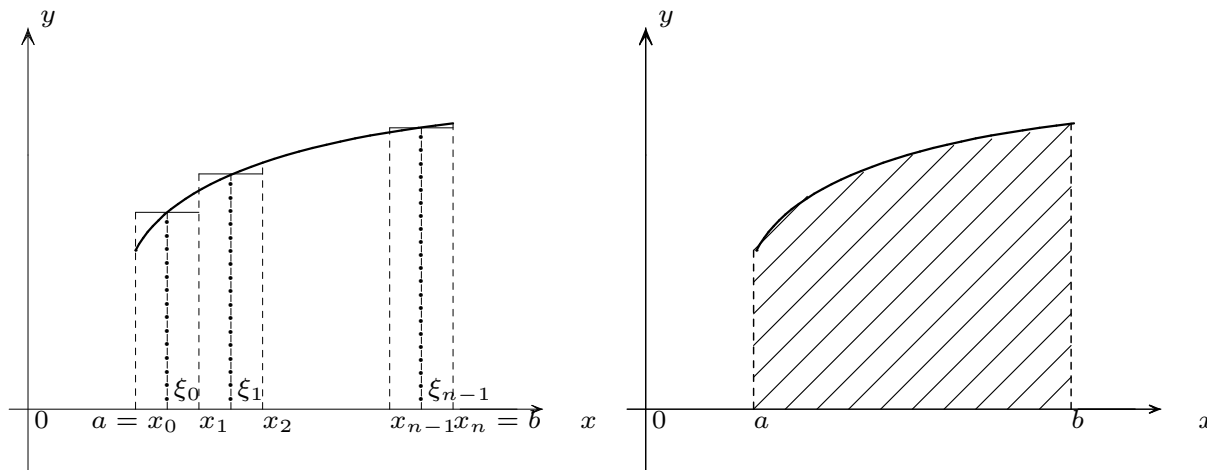
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \Pi, d(\Pi) < \delta \quad \forall \xi_i \in [x_i, x_{i+1}] \quad |\sigma - I| < \varepsilon.$$

Означення. Якщо існує скінченна границя інтегральних сум при прямуванні до нуля діаметра розбиття, то ця границя називається інтегралом від функції f по відрізку $[a, b]$ і позначається $\int_a^b f(x) dx$. У цьому випадку функція f називається інтегровною на відрізку $[a, b]$, а числа a і b називають верхньою та нижньою межами інтегрування, відповідно. У протилежному випадку кажуть, що функція f неінтегровна на $[a, b]$.

Отже,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{d(\Pi) \rightarrow 0} \sigma.$$

Геометричний сенс визначеного інтеграла



З геометричної точки зору інтегральна сума є сумою площ прямокутників висотою $f(\xi_i)$ і шириною $x_{i+1} - x_i$. Тому визначений інтеграл – границю інтегральних сум при прямуванні до нуля діаметра розбиття – можна інтерпретувати як площу (з урахуванням знака) криволінійної трапеції, обмеженої віссю Ox , прямими $x = a$, $x = b$ та графіком функції $y = f(x)$.

Теорема (необхідна умова інтегровності). Якщо функція f інтегровна на відрізку $[a, b]$, то вона обмежена на цьому відрізку.

Зауваження. Умова обмеженості функції не є достатньою для інтегровності, тобто існують обмежені неінтегровні функції. Наприклад, розглянута раніше функція Діріхле $\mathcal{D}$ обмежена і неінтегровна на будь-якому відрізку.

Приклад. Нехай $f(x) = c$, $a \leq x \leq b$. Тоді для довільного розбиття Π при будь-якому виборі точок ξ_i маємо $f(\xi_i) = c$ і тому

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i = c \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = c(b-a).$$

Таким чином, $\int_a^b c \, dx = c(b-a)$.

Теорема 1. Якщо функція f неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона інтегровна на цьому відрізку.

Теорема 2. Якщо функція f монотонна на відрізку $[a, b]$, то вона інтегровна на цьому відрізку.

Зауваження. З теореми 2 видно, що існують розривні інтегровні функції. Зокрема, монотонна функція може мати навіть нескінченну (але зчисленну) множину точок розриву.

Теорема 3. Якщо функція f обмежена на відрізку $[a, b]$ і має на цьому відрізку скінченну кількість точок розриву, то вона інтегровна на $[a, b]$.

Приклад 1. Функція

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

обмежена і неперервна всюди, за виключенням однієї точки. Отже, вона інтегровна на відрізку $[0, 1]$.

Приклад 2. Розглянемо обмежену функцію

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} \sin \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

У цієї функції множина точок розриву зчислення і функція не є монотонною. Але можна показати, що ця функція інтегровна.

Зауваження. Можна показати, що кожна обмежена функція, яка має зчисленну множину точок розриву, інтегровна.

7.2 Властивості інтегровних функцій

1. Інтегровність модуля. Якщо функція f інтегровна на $[a, b]$, то функція $|f|$ також інтегровна на цьому відрізку і при цьому

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Зауваження. Із інтегровності модуля не випливає інтегровність самої функції.

2. Лінійність інтеграла. Якщо функції f і g інтегровні на відрізку $[a, b]$, а числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то лінійна комбінація $\alpha f + \beta g$ також інтегровна на $[a, b]$ і

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

3. Інтегровність добутку. Якщо функції f і g інтегровні на $[a, b]$, то їх добуток також інтегровний на цьому відрізку.

4. Зміна значень функції. Нехай функція f інтегровна на $[a, b]$. Якщо довільним чином змінити її значення в скінченній кількості точок, то змінена функція також залишиться інтегровою і при цьому величина інтеграла не зміниться.

Наслідок. Якщо дві функції співпадають всюди на відрізку за виключенням скінченної кількості точок, то вони обидві одночасно або інтегровні, або неінтегровні. Якщо вони інтегровні, то їх інтеграли співпадають.

Зауваження. Зміна значень інтегрованої функції на зчисленній множині точок може призвести до неінтегрованої функції.

5. Інтегровність на підінтервалах. Якщо функція f інтегровна на відрізку $[a, b]$, то вона інтегровна на будь-якому відрізку $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Навпаки, якщо відрізок $[a, b]$ розбитий на два відрізки $[a, c]$ і $[c, b]$, на кожному з яких функція інтегровна, то вона інтегровна і на всьому відрізку $[a, b]$ і

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Означення. Нехай $b < a$ і функція f інтегровна на $[b, a]$. Тоді, за означенням, покладемо

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Далі, для функції f , визначеної в точці a , покладемо за означенням

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

Тоді властивість 5 інтегровності на підінтервалах можемо переписати у наступній формі.

Теорема (аддитивність інтеграла). Нехай a, b, c – довільні точки на дійсній прямій. Якщо функція f інтегровна на найбільшому із відрізків, утворених цими точками, то вона інтегровна і на двох інших відрізках і при цьому справедлива рівність

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

6. Монотонність інтеграла. Нехай функції f і g інтегровні на $[a, b]$ ($a < b$) і $f(x) \leq g(x)$ для всіх $x \in [a, b]$. Тоді

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Наслідок 1. Нехай функція f – невід’ємна на $[a, b]$ ($a < b$). Тоді

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

Наслідок 2. Нехай функція f інтегровна на $[a, b]$ і $m \leq f(x) \leq M$ для всіх $x \in [a, b]$. Тоді

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Зауваження. За умовами наслідку 2, знайдеться таке число $\mu \in [m, M]$, що

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b-a).$$

Наслідок 3. Якщо функція f неперервна на $[a, b]$, то знайдеться така точка $\xi \in [a, b]$, що

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a).$$

Зауваження. Наслідки 2 та 3 іноді називають теоремою про середнє значення. Вони тісно пов’язані з теоремою Лагранжа, яку також називають теоремою про середнє значення у диференціальному численні.

7.3 Інтеграл зі змінною верхньою межею

Нехай функція f інтегровна на відрізку $[a, b]$. Позначимо

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (x \in [a, b]).$$

За властивостями інтегровних функцій, f інтегровна на $[a, x]$ при кожному $x \in [a, b]$. Тому функція F визначена на $[a, b]$. Відзначимо, що $F(a) = 0$.

Функцію F називають інтегралом зі змінною верхньою межею, або невисначеним інтегралом Рімана.

Легко показати, що для кожної інтегровної на $[a, b]$ функції f інтеграл зі змінною верхньою межею – неперервна на $[a, b]$ функція.

Теорема (про диференційовність інтеграла зі змінною верхньою межею). *Нехай функція f інтегровна на $[a, b]$ і неперервна в точці $x_0 \in [a, b]$. Тоді функція F диференційовна в точці x_0 і $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Зауваження 1. Неперервність функції f в точці x_0 не є необхідною умовою диференційовності функції F в точці x_0 , тобто інтеграл зі змінною верхньою межею від розривної функції може виявитись диференційовним.

Приклад 1. Розглянемо функцію

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ця функція обмежена на відрізку $[0, 1]$ і має єдину точку розриву $x_0 = 0$. Отже, вона інтегровна на $[0, 1]$. Позначимо $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. Оскільки f неперервна в кожній точці $x \neq 0$, то, за попередньою теоремою, функція F диференційовна в кожній точці $x \in (0, 1]$ і $F'(x) = \sin \frac{1}{x}$. В точці $x_0 = 0$ функція f розривна і тому попередню теорему застосувати не можна. Але, можна показати, що існує права похідна $F'_+(0) = 0$.

Приклад 2. Нехай $f(x) = \operatorname{sign} x$, $-1 \leq x \leq 1$. Якщо $-1 \leq x < 0$, то $f(t) = -1$ ($-1 \leq t \leq x$) і $\int_{-1}^x f(t) dt = -(x - (-1)) = -(x + 1)$. Якщо ж

$$0 \leq x \leq 1, \text{ то } \int_{-1}^x f(t) dt = \int_{-1}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt = -1 + x.$$

Таким чином,

$$F(x) = \begin{cases} -(x + 1), & -1 \leq x < 0, \\ x - 1, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Легко бачити, що в точці $x_0 = 0$ функція F недиференційовна.

Теорема (основна теорема інтегрального числення). *Нехай функція f неперервна на відрізку $[a, b]$. Тоді вона має первісну на цьому відрізку. Однією з первісних є інтеграл зі змінною верхньою межею від цієї функції.*

Ця теорема є прямим наслідком попередньої теореми.

Теорема Ньютона – Лейбниця (основна формула інтегрального числення). *Нехай функція f неперервна на відрізку $[a, b]$ і Φ – будь-яка з її первісних на цьому відрізку. Тоді*

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a) \equiv \Phi(x) \Big|_a^b.$$

Диференціювання інтегралів

Нехай функція f неперервна на відрізку $[a, b]$. Тоді, за основною теоремою інтегрального числення, для кожного $x \in [a, b]$ справедлива рівність

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x).$$

Позначимо $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Припустимо, що функція u задана на відрізку $[\alpha, \beta]$, диференційовна на цьому відрізку і така, що $u(\tau) \in [a, b]$ ($\tau \in [\alpha, \beta]$). Розглянемо композицію $\Phi(\tau) = F(u(\tau))$. Застосовуючи теорему про диференціювання композиції, отримуємо, що функція Φ диференційовна на $[\alpha, \beta]$ і її похідна дорівнює $\Phi'(\tau) = F'(u(\tau))u'(\tau)$. Таким чином, ми довели наступну рівність:

$$\left(\int_a^{u(\tau)} f(t) dt \right)' = f(u(\tau))u'(\tau).$$

Аналогічно отримуємо

$$\left(\int_x^b f(t) dt \right)' = - \left(\int_b^x f(t) dt \right)' = -f(x).$$

Звідси для диференційовної на відрізку $[\alpha, \beta]$ функції v , такої, що $v(\tau) \in [a, b]$ ($\tau \in [\alpha, \beta]$), маємо

$$\left(\int_{v(\tau)}^b f(t) dt \right)' = - \left(\int_b^{v(\tau)} f(t) dt \right)' = -f(v(\tau))v'(\tau).$$

Приклад 1. Знайти похідну функції

$$F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \ln t dt.$$

Маємо

$$F'(x) = 3x^2 \ln(x^3) - 2x \ln(x^2) = x \ln x (9x - 4).$$

Приклад 2. Знайти точки екстремуму функції

$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt, \quad x > 0.$$

Маємо $F'(x) = \frac{\sin x}{x}$. Похідна F' обертається в нуль при $x = \pi k$ ($k = 1, 2, \dots$) і при переході через ці точки змінює свій знак. Тому у всіх точках виду $x = \pi k$ функція F має екстремуми.

7.4 Подальші властивості інтеграла Рімана

Означення. Функція називається неперервно диференційовною на відрізку, якщо її похідна неперервна на цьому відрізку. При цьому на кінцях відрізка похідна вважається односторонньою.

Теорема 1 (формула інтегрування частинами). *Нехай функції u і v неперервно диференційовні на відрізку $[a, b]$. Тоді справедлива рівність*

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

Теорема 2 (про заміну змінної у визначеному інтегралі). Нехай функція φ неперервно диференційовна на відрізку $[\alpha, \beta]$, а функція f неперервна на деякому відрізку, який містить у собі область значень функції φ . Нехай $\varphi(\alpha) = a$ і $\varphi(\beta) = b$. Тоді справедлива рівність

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

Приклад 1.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \sin x dx &= \left[\begin{array}{ll} u = x, & dv = \sin x dx \\ du = dx, & v = -\cos x \end{array} \right] = \\ &= -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = \pi + \sin x \Big|_0^{\pi} = \pi. \end{aligned}$$

Приклад 2. Виведемо рекурентну формулу для інтеграла

$$\begin{aligned} I_n \equiv \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x dx = \\ &= \left[\begin{array}{ll} u = \sin^{n-1} x, & dv = \sin x dx \\ du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x dx, & v = -\cos x \end{array} \right] = \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx = \\ &= 0 + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx = \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n). \end{aligned}$$

Звідси отримуємо $nI_n = (n-1)I_{n-2}$, або

$$I_n = \frac{(n-1)I_{n-2}}{n}.$$

Обчислимо

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Приклад 3. Обчислити

$$I \equiv \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx.$$

Перший спосіб. Покладемо $x = \sin t$, де $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Тоді отримаємо

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} \, dt = \frac{\pi}{4}.$$

Другий спосіб. Інтегруємо частинами

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx &= \left[\begin{array}{l} u = \sqrt{1-x^2}, \quad dv = dx \\ du = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx, \quad v = x \end{array} \right] \Big|_0^1 = \\ &= x\sqrt{1-x^2} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = - \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= - \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx + \arcsin x \Big|_0^1 = - \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Звідси отримуємо

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{\pi}{4}.$$

Істотне зауваження. Другий спосіб обчислення даного інтеграла наведений лише для того, щоб запобігти у майбутньому можливих помилок при обчисленні інтегралів. Насправді наведені міркування хибні, бо інтеграли $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$ і $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ не існують, оскільки функції під знаком цих інтегралів необмежені. Ці два інтеграли існують у так званому невластному сенсі, але такі інтеграли в цьому курсі не розглядаються.

Приклад 4. Обчислити

$$I \equiv \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

Покладемо $\pi - x = t$, $x = \pi - t$, $dx = -dt$. Тоді отримаємо

$$\begin{aligned} I &= - \int_{\pi}^0 \frac{(\pi - t) \sin t}{1 + \cos^2 t} dt = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t) \sin t}{1 + \cos^2 t} dt = \\ &= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt - \int_0^{\pi} \frac{t \sin t}{1 + \cos^2 t} dt = -\pi \operatorname{arctg}(\cos t) \Big|_0^{\pi} - I = \frac{\pi^2}{2} - I. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що $I = \frac{\pi^2}{4}$.

Теорема 3 (формула Тейлора із залишком в інтегральній формі). Нехай функція f має на відрізку з кінцями x_0 і x неперервні похідні до порядку $(n + 1)$ включно. Тоді справедлива рівність

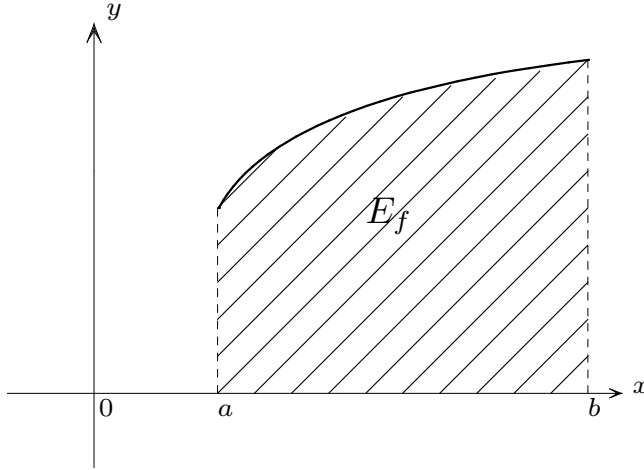
$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \\ &\quad + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt. \end{aligned}$$

Останній доданок називають залишком формули Тейлора в інтегральній формі.

7.5 Застосування інтеграла Рімана

7.5.1 Обчислення площ

Означення. Нехай f – невід’ємна функція на відрізку $[a, b]$. Підграфіком функції f будемо називати множину E_f усіх точок (x, y) , координати яких задовольняють нерівності $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq f(x)$.



Теорема. Нехай функція f невід'ємна і інтегровна на відрізку $[a, b]$. Тоді площа її підграфіка E_f дорівнює

$$m(E_f) = \int_a^b f(x) dx.$$

Приклад 1 (площа круга). Знайдемо площу круга $x^2 + y^2 \leq R^2$. Верхнє півколо задається рівнянням $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \leq x \leq R$. Тому площа верхнього півкруга дорівнює

$$\begin{aligned} S &= \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = 2 \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = [x = Rz] = \\ &= 2R^2 \int_0^1 \sqrt{1 - z^2} dz = \frac{\pi R^2}{2}, \end{aligned}$$

а отже, площа всього круга дорівнює πR^2 .

Приклад 2 (площа сектора). Знайдемо площу сектора круга радіуса R з кутом при вершині, радіанна міра якого дорівнює заданому φ .

Маємо

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{R \cos \varphi} x \operatorname{tg} \varphi dx + \int_{R \cos \varphi}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \\ &= \frac{R^2}{2} \cos \varphi \sin \varphi + \left[\begin{array}{l} x = R \cos t \\ dx = -R \sin t dt \end{array} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{R^2}{2} \cos \varphi \sin \varphi + \int_{\varphi}^0 (-R \sin t \sqrt{R^2(1 - \cos^2 t)}) dt = \\
&= \frac{R^2}{2} \cos \varphi \sin \varphi + R^2 \int_0^{\varphi} \sin^2 t dt = \frac{\varphi R^2}{2}.
\end{aligned}$$

Приклад 3. Знайти площу множини, обмеженої лініями $y = x^2 + 1$, $x + y = 3$.

Знайдемо абсциси точок перетину графіків

$$\begin{cases} y = x^2 + 1, \\ y = 3 - x. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Тому

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-2}^1 (3 - x) dx - \int_{-2}^1 (x^2 + 1) dx = \\
&= 9 - \frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^1 - \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_{-2}^1 = 9 - \frac{1}{2} + 2 - \frac{4}{3} - \frac{8}{3} - 2 = 4, 5.
\end{aligned}$$

7.5.2 Площа в полярних координатах

В полярних координатах положення точки на площині характеризується радіусом r – відстанню від точки до початку координат та кутом φ , утвореним радіус-вектором точки і додатним напрямком осі Ox . Будемо вважати, що $-\pi < \varphi \leq \pi$. Розглядаємо на площині множину, яка обмежена кривою, що задана рівнянням $r = r(\varphi)$ ($\alpha \leq \varphi \leq \beta$), та відрізками променів $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$. Припустимо, що функція $r(\varphi)$ неперервна і додатна на $[\alpha, \beta]$. Можна довести, що площа утвореної множини дорівнює

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$

Приклад 1 (спіраль Архімеда). Спіраль Архімеда задається рівнянням $r = a\varphi$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$), де параметр $a > 0$. Площа множини точок

площини, обмеженої спіраллю Архімеда, дорівнює

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \varphi^2 d\varphi = \frac{4\pi^3 a^2}{3}.$$

Приклад 2 (кардіоїда). Площа S , обмежена кардіоїдою $r = 1 + \cos \varphi$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$), дорівнює

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{3\pi}{2}.$$

7.5.3 Довжина шляху

Означення. Шляхом на декартовій площині називається відображення $t \mapsto (\varphi(t), \psi(t))$ відрізка $[\alpha, \beta]$ в $\mathbb{R}^2$, яке задається парою неперервних функцій φ і ψ .

Це означає, що кожному значенню $t \in [\alpha, \beta]$ ставиться у відповідність точка площини з координатами (x, y) , де $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.

Точка $(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$ називається початком шляху, а точка $(\varphi(\beta), \psi(\beta))$ – кінцем шляху. Множина усіх точок

$$\{(\varphi(t), \psi(t)) \in \mathbb{R}^2 : t \in [\alpha, \beta]\}$$

називається слідом шляху. Якщо маємо криву на площині, то з нею пов'язують такий шлях, для якого ця крива є його слідом. При цьому пара функцій $(\varphi(t), \psi(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$ називається параметричними рівняннями кривої.

Нехай Π – довільне розбиття відрізка $[\alpha, \beta]$ точками $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$. Позначимо $x_i = \varphi(t_i)$, $y_i = \psi(t_i)$ і утворимо суму $l_\Pi = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$. З геометричної точки зору ця сума є довжиною ламаної з вершинами у точках (x_i, y_i) , яка вписана в слід шляху.

Означення. Довжиною шляху називається $\sup_\Pi l_\Pi$, де точна верхня межа береться по всіляким розбиттям Π відрізка $[\alpha, \beta]$. Сам шлях позначається через $\gamma = (\varphi, \psi)$, а його довжина через $l_{(\gamma)}$.

Якщо функції φ і ψ неперервно диференційовні на відрізку $[\alpha, \beta]$, то шлях $\gamma = (\varphi, \psi)$ називається неперервно диференційовним, або шляхом класу C^1 .

Теорема (обчислення довжини шляху). Нехай $\gamma = (\varphi, \psi)$ неперервно диференційовний шлях на відрізку $[\alpha, \beta]$. Тоді

$$l_{(\gamma)} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

Приклад (циклоїда). Циклоїда визначається такими параметричними рівняннями $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, де параметр $a > 0$. Обчислимо довжину однієї арки циклоїди, тобто $0 \leq t \leq 2\pi$.

Маємо

$$x'(t) = a(1 - \cos t), \quad y'(t) = a \sin t,$$

$$\begin{aligned} l &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt = \\ &= 2a \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = -2a \cdot 2 \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8a. \end{aligned}$$

Як окремий випадок, розглянемо наступне питання: як обчислити довжину графіка функції?

Нехай на відрізку $[a, b]$ задана неперервно диференційовна функція f . Позначимо через Γ її графік, тобто $\Gamma = \{(x, y) : y = f(x), a \leq x \leq b\}$. Тоді Γ є слідом шляху (кривою), параметризація якого може бути представлена рівняннями $x = t$, $y = f(t)$ ($a \leq t \leq b$). Тому, за нашими припущеннями, довжина цієї кривої дорівнює

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Таким чином, ми отримали формулу для обчислення довжини графіка функції $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$).

7.5.4 Об'єм тіла обертання

Нехай на відрізку $[a, b]$ задана неперервна невід'ємна функція f . Розглянемо криволінійну трапецію, тобто підграфік функції f . Будемо обертати цю трапецію навколо осі Ox . Об'єм цього тіла обертання можна обчислити за формулою

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

7.5.5 Площа поверхні тіла обертання

Нехай на відрізку $[a, b]$ задана невід'ємна неперервно диференційовна функція f . Будемо обертати її графік навколо осі Ox . В результаті отримаємо деяку поверхню, площу якої можна обчислити за формулою

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Контрольні питання

1. Означення інтеграла Рімана та його елементарні властивості.
2. Інтегровність неперервної та монотонної функцій.
3. Властивості інтегралів.
4. Інтеграл зі змінною верхньою межею, неперервність та диференційовність.
5. Формула Ньютона - Лебниця.
6. Інтегрування частинами та заміна змінної.
7. Застосування інтегралів для обчислення площ.
8. Застосування інтегралів для обчислення шляху та довжини кривої.
9. Застосування інтегралів для обчислення об'ємів.
10. Застосування інтегралів для обчислення площ поверхні обертання.

Розділ 8. Числові ряди

8.1 Означення та елементарні властивості

Нехай задана числова послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Символ $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$, або, що те ж саме, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, називається числовим рядом, а самі числа a_n називаються доданками або членами ряду. Позначимо $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $\dots$, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ($n = 1, 2, \dots$). Числа S_n називаються частинними сумами ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Означення. Якщо існує $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається збіжним, а число S називається сумою ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Якщо ж не існує скінченної границі послідовності частинних сум S_n , то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається розбіжним. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається до суми S , то це позначають так:

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Таким чином, з кожним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ми пов'язуємо послідовність його частинних сум $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, причому збіжність ряду ми визначаємо як збіжність послідовності частинних сум цього ряду (поняття збіжності послідовності вивчалось нами раніше). Навпаки, якщо задана послідовність $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, то легко скласти ряд, для якого ця послідовність буде послідовністю частинних сум. Справді, достатньо покласти $a_1 = S_1$, $a_2 = S_2 - S_1$, $\dots$, $a_n = S_n - S_{n-1}$ ($n = 2, 3, \dots$). Зрозуміло, що в цьому випадку будемо мати $a_1 + \dots + a_n = S_n$, тобто задані числа S_n є частинними сумами

побудованого нами ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Приклад 1 (геометрична прогресія). Геометричною прогресією називається така послідовність $1, q, q^2, \dots, q^{n-1}, \dots$, тобто $\{q^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$, де q – фіксоване число. Ряд $1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + \dots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ називається сумою геометричної прогресії. У цьому випадку доданки ряду дорівнюють $a_n = q^{n-1}$. Якщо $q = 1$, то, очевидно, $S_n = 1 + \dots + 1 = n$, $S_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$), і тому при $q = 1$ даний ряд розбігається. Раніше ми вже отримали наступну формулу суми перших n доданків геометричної прогресії при $q \neq 1$

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Отже, питання про збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ зводиться до питання про збіжність послідовності $S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}$. Зрозуміло, що можливі такі випадки.

a) $|q| < 1$. При цьому $S_n \rightarrow \frac{1}{1 - q}$ ($n \rightarrow \infty$), тобто наш ряд збігається і його сума дорівнює $S = \frac{1}{1 - q}$.

b) $|q| > 1$. Тоді послідовність S_n не має границі, тобто ряд розбігається.

c) $|q| = 1$. Випадок $q = 1$ вже розглянутий. Якщо ж $q = -1$, то, очевидно, $S_{2k} = 0$ и $S_{2k+1} = 1$, і, отже, послідовність частинних сум $\{S_n\}$ не має границі, тобто ряд розбігається.

Таким чином, прийшли до такого висновку

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1 - q} \quad \text{при} \quad |q| < 1,$$

а при $|q| \geq 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ розбігається.

Приклад 2. Розглянемо ряд

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

Маємо

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Тепер вже легко бачити, що $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$, а це означає, що заданий ряд збігається і його сума дорівнює $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Теорема (критерій Коші збіжності ряду). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається тоді і лише тоді, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер $N = N(\varepsilon)$, що при кожному $n \geq N$ і при кожному натуральному p справедлива нерівність

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon.$$

Ця теорема є прямим наслідком критерію Коші збіжності числової послідовності. Сума в останній нерівності називається відрізком Коші.

Наслідок (необхідна умова збіжності). Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Отже, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то його доданки прямують до нуля.

Обернене твердження хибне. Справді, для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ маємо: $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ і, разом з тим,

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

звідки випливає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$, тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ розбіжний.

Приклад. Гармонічним називається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Відрізок Коші цього ряду можна оцінити наступним чином:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p} \geq \frac{1}{n+p} \cdot p.$$

Якщо взяти $p = n$, то отримаємо, що $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}$. Це означає, що знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$ ($\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$), що для будь-якого $N \in \mathbb{N}$ існує $n \geq N$ (наприклад, $n = N$) і існує таке $p \in \mathbb{N}$ ($p = n$), для яких справедлива нерівність $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \right| \geq \varepsilon_0$. За критерієм Коші це означає, що гармонічний ряд розбігається.

Як правило, на практиці необхідна умова збіжності застосовується у наступній формі: якщо границя доданків ряду або не існує, або існує але відмінна від нуля, то ряд розбігається.

8.2 Елементарні властивості збіжних рядів

Нехай заданий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

і нехай m – фіксований номер. Тоді ряд

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+k} + \dots$$

називається залишком початкового ряду після m -го доданку.

Теорема 1. *Якщо збігається початковий ряд, то збігається будь-який із його залишків. Навпаки, якщо збігається принаймні один із залишків, то збігається і початковий ряд.*

Наслідок. *Ніяка скінченна кількість доданків ряду не впливає на його збіжність (але, звичайно, впливають на його суму) чи розбіжність. Іншими словами, якщо замінити, відкинути чи додати будь-яку скінченну кількість доданків ряду, то від цього його умова збіжності не порушиться.*

Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається. За теоремою 1, збігається також кожний із його залишків $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$. Позначимо суму залишку після m -го доданку через $r_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$.

Теорема 2. *Якщо ряд збігається, то послідовність його залишків $\{r_m\}$ прямує до нуля.*

Нехай задані два ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ називається сумою цих двох рядів. Якщо λ – дійсне число, то кажуть, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ отриманий з ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ шляхом множення його на число λ .

Теорема 3 (арифметичні властивості збіжних рядів). *Нехай ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігаються до сум A і B , відповідно. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ збігається і його сума дорівнює $A + B$. Якщо $\lambda \in \mathbb{R}$, то збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ до суми λA .*

Ця теорема є прямим наслідком теореми про арифметичні властивості збіжних послідовностей.

8.3 Ряди з невід’ємними доданками

Нехай $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – послідовність невід’ємних чисел. Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Послідовність його частинних сум задовольняє нерівність $S_n = S_{n-1} + a_n \geq S_{n-1}$, тобто ця послідовність S_n монотонно зростає. Застосувавши до неї критерій збіжності монотонної послідовності, отримаємо наступну теорему.

Теорема. *Нехай $a_n \geq 0$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається в тому і лише в тому випадку, коли послідовність його частинних сум S_n обмежена зверху.*

Приклад (узагальнений гармонічний ряд). Узагальненим гармонічним рядом називається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, де число $s > 0$. Раніше ми вже встановили, що при $s = 1$ цей ряд розбігається. Якщо $0 < s < 1$, то

$$S_n(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \dots + \frac{1}{n^s} \geq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = S_n(1),$$

і, в силу розбіжності гармонічного ряду, послідовність частинних сум узагальненого гармонічного ряду необмежена зверху, тобто узагальнений гармонічний ряд розбігається при $0 < s \leq 1$.

Іншим способом розбіжність узагальненого гармонічного ряду при $0 < s < 1$ можна довести так:

$$S_n(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \dots + \frac{1}{n^s} \geq n \cdot \frac{1}{n^s} = n^{1-s} \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty),$$

звідки випливає, що $S_n(s) \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$), тобто розбіжність ряду.

Розглянемо тепер випадок $s > 1$. Нехай $n \in \mathbb{N}$. Оберемо таке натуральне m , що $n < 2^m$. Тоді

$$\begin{aligned} S_n(s) &\leq S_{2^m-1}(s) = 1 + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} \right) + \left(\frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} \right) + \dots + \\ &+ \left(\frac{1}{(2^{m-1})^s} + \frac{1}{(2^{m-1}+1)^s} + \dots + \frac{1}{(2^m-1)^s} \right) \leq \\ &\leq 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^s} + 4 \cdot \frac{1}{4^s} + \dots + 2^{m-1} \cdot \frac{1}{(2^{m-1})^s} = \\ &= 1 + 2^{1-s} + (2^2)^{1-s} + \dots + (2^{m-1})^{1-s} = \\ &= 1 + 2^{1-s} + (2^{1-s})^2 + \dots + (2^{1-s})^{m-1} = \frac{1 - (2^{1-s})^m}{1 - 2^{1-s}} < \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \end{aligned}$$

(умова $s > 1$ використана в останній нерівності). Звідси випливає, що при $s > 1$ маємо $S_n(s) \leq \frac{1}{1-2^{1-s}}$, тобто послідовність частинних сум $\{S_n(s)\}$ обмежена зверху і, за теоремою, узагальнений гармонічний ряд збігається при $s > 1$.

Таим чином, отримали, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ збігається при $s > 1$ і розбігається при $0 < s \leq 1$. При $s \leq 0$ цей ряд, очевидно, розбігається, оскільки не виконується необхідна умова збіжності, тобто доданки ряду не прямують до нуля.

8.3.1 Ознака порівняння

Теорема (ознака порівняння). *Нехай задані два ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, де $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$). Припустимо, що другий ряд є*

мажорантним рядом для першого, тобто починаючи з деякого номера виконуються нерівності $a_n \leq b_n$. Тоді зі збіжності другого ряду випливає збіжність першого, а із розбіжності першого випливає розбіжність другого ряду.

Зауваження 1. У цій теоремі умова $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$) істотна. Без цієї умови теорема втрачає силу. Справді, якщо $a_n = -1$, $b_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$), то $a_n \leq b_n$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігається, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається.

Зауваження 2. У наведеній теоремі з розбіжності другого ряду не випливає розбіжність першого, а із збіжності першого не випливає збіжність другого ряду. Наприклад, $a_n = 0$, $b_n = 1$ ($n = 1, 2, \dots$).

Наслідок (ознака порівняння в граничній формі). Нехай задані два ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, де $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$). Припустимо, що існує (може бути навіть і нескінченна)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda.$$

Тоді

- а) якщо $\lambda = 0$, то із збіжності другого ряду випливає збіжність першого, а із розбіжності першого випливає розбіжність другого ряду;
- б) якщо $\lambda = +\infty$, то із збіжності першого ряду випливає збіжність другого, а із розбіжності другого випливає розбіжність першого ряду;
- в) якщо $0 < \lambda < +\infty$, то обидва ряди збігаються або розбігаються одночасно.

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n}.$$

Із нерівності $\sin x < x$ ($x > 0$) випливає, що $2^n \sin \frac{1}{3^n} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ($n = 1, 2, \dots$). Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ збігається (це – геометрична прогресія із знаменником $\frac{2}{3}$), то заданий ряд також збігається за ознакою порівняння.

Приклад 2. Раніше ми вже встановили за допомогою критерію Коші, що гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбігається. Доведемо його розбіжність з використанням ознаки порівняння. Порівняємо його з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Обчислимо частинні суми

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^n [\ln(k+1) - \ln k] = \\ &= (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \dots + (\ln(n+1) - \ln n) = \\ &= \ln(n+1) \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ розбіжний. Крім того, з рівності $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ випливає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lambda = 1$. Звідси, за ознакою порівняння в граничній формі, випливає, що ряди $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ і $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ збігаються або розбігаються одночасно. Оскільки, як вже встановлено, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ розбігається, то розбігається і початковий гармонічний ряд.

Приклад 3. Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{x}{n}\right)$, де $x \in \mathbb{R}$ – параметр. Зрозуміло, що цей ряд збігається при $x = 0$. Нехай $x \neq 0$. За відомим співвідношенням $1 - \cos \alpha \sim \frac{\alpha^2}{2}$ ($\alpha \rightarrow 0$), маємо $1 - \cos \frac{x}{n} \sim \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$ ($n \rightarrow \infty$). Тому в якості ряду для порівняння доцільно обрати ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, для якого $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \frac{x}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{x^2}{2} = \lambda$ ($0 < \lambda < \infty$). Із ознаки порівняння в граничній формі випливає, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ і початковий ряд збігаються або розбігаються одночасно (при $x \neq 0$). Раніше було показано, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збігається (це – узагальнений гармонічний ряд при $s = 2 > 1$). Тому збігається і початковий ряд при будь-якому x .

8.3.2 Ознака Даламбера

Теорема (ознака Даламбера). *Нехай заданий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ з додатними доданками. Припустимо, що існує таке число q , $0 < q < 1$, що*

починаючи з деякого номера N справедлива нерівність $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ ($n \geq N$).

Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається.

Зауваження 1. Із нерівності

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

не впливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Така нерівність означає лише те, що доданки ряду строго спадають, а з цього зовсім не впливає збіжність ряду, наприклад, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ і т. д.

Зауваження 2. Із нерівності

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \quad (n \geq N)$$

одразу впливає розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Справді, ця нерівність означає, що доданки ряду утворюють неспадну послідовність додатних чисел, і тому вони не прямують до нуля, тобто не виконана необхідна умова збіжності.

Наслідок (ознака Даламбера у граничній формі). Нехай заданий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ з додатними доданками. Припустимо, що існує (може бути навіть і нескінченна) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$. Тоді

- а) якщо $0 \leq \lambda < 1$, то заданий ряд збігається;
- б) якщо $1 < \lambda \leq \infty$, то заданий ряд розбігається;
- в) якщо ж $\lambda = 1$, то нічого визначеного щодо збіжності заданого ряду сказати не можна.

Перше твердження цього наслідку впливає з наведеної теореми, друге – із зауваження 2. Для доведення твердження в) наведемо приклади збіжного та розбіжного рядів, для яких $\lambda = 1$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбігається і $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збігається і $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.

8.3.3 Ознака Коші

Теорема (ознака Коші). *Нехай заданий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ з невід'ємними доданками. Припустимо, що існує таке число q , $0 < q < 1$, що починаючи з деякого номера N справедлива нерівність $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ ($n \geq N$). Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається.*

Зауваження 1. Якщо для нескінченної кількості номерів n справедлива нерівність $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається. Справді, у цьому випадку для нескінченної кількості номерів n виконується нерівність $a_n \geq 1$ і, отже, не виконана необхідна умова збіжності.

Це зауваження істотно відрізняється від зауваження 1 до ознаки Даламбера. Ряд може бути збіжним і таким, що для нескінченної кількості номерів n справедлива нерівність $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, наприклад, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \dots$. У зауваженні 1 до ознаки Даламбера важливо, що нерівність $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ справедлива для всіх номерів, починаючи з деякого.

Наслідок (ознака Коші в граничній формі). *Нехай заданий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ з невід'ємними доданками. Припустимо, що існує (може бути навіть нескінченна) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$. Тоді*

- a) якщо $0 \leq \lambda < 1$, то заданий ряд збігається;
- b) якщо $1 < \lambda \leq \infty$, то заданий ряд розбігається;
- c) якщо ж $\lambda = 1$, то нічого визначеного щодо збіжності заданого ряду сказати не можна.

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$. За ознакою Даламбера,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty),$$

і, отже, заданий ряд збігається.

За ознакою Коші,

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2} \sqrt[n]{n} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty),$$

і, отже, заданий ряд збігається.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$. До цього ряду зручно застосувати ознаку Даламбера

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(2n+1)!}{(2(n+1)+1)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (2n+1)(2n+2)(2n+3)} = \\ &= \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

За ознакою Даламбера заданий ряд збігається.

Приклад 3. До ряду

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \dots$$

жодна з ознак Даламбера чи Коші у граничній формі не може бути застосованою, оскільки не існує границь $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ і $\sqrt[n]{a_n}$ при $n \rightarrow \infty$. В той же час, оскільки

$$a_n = \begin{cases} 2^{-k}, & n = 2k - 1, \\ 3^{-k}, & n = 2k, \end{cases}$$

то $\sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{2^{-n/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ і, за ознакою Коші у неграничній формі, заданий ряд збігається.

8.3.4 Інтегральна ознака

Нехай на півпрямій $[1, +\infty)$ задана функція f , інтегровна на кожному відрізку $[1, x]$ ($x > 1$). Якщо існує $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x f(t) dt$, то кажуть, що невластний

інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ збігається і позначають цю границю $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x f(t) dt = \int_1^{+\infty} f(t) dt$.

Теорема (інтегральна ознака збіжності). *Нехай невід'ємна функція f монотонно незростаюча на $[1, +\infty)$. Тоді числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ збігається в тому і лише в тому випадку, коли збігається невластний інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$.*

Приклад 1 (узагальнений гармонічний ряд). Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ ($s > 0$). Для дослідження його збіжності покладемо $f(x) = x^{-s}$. Функція $f(x) = x^{-s}$ ($s > 0$) додатна і спадає на $[1, +\infty)$. Щоб застосувати інтегральну ознаку, обчислимо $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s}$. Маємо

$$\int_1^x \frac{dt}{t^s} = \begin{cases} \frac{x^{1-s}-1}{1-s}, & s \neq 1, \\ \ln x, & s = 1. \end{cases}$$

Якщо $s > 1$, то $\int_1^x \frac{dt}{t^s} \rightarrow \frac{1}{s-1}$ ($x \rightarrow +\infty$), тобто невластний інтеграл збігається і, отже, збігається і заданий ряд. Якщо ж $s \leq 1$, то $\int_1^x \frac{dt}{t^s} \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow +\infty$), тобто невластний інтеграл розбіжний і, отже, розбігається і заданий ряд.

Приклад 2. Розглянемо ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ ($p > 0$). Покладемо $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^p}$ і застосуємо інтегральну ознаку. Маємо

$$\int_2^x \frac{dt}{t(\ln t)^p} = \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{dz}{z^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p} ((\ln x)^{1-p} - (\ln 2)^{1-p}), & p \neq 1, \\ \ln \ln x - \ln \ln 2, & p = 1. \end{cases}$$

Якщо $p > 1$, то при $x \rightarrow +\infty$ невластний інтеграл збігається і, отже, збігається і заданий ряд. Якщо ж $p \leq 1$, то невластний інтеграл розбіжний і тому розбігається і заданий ряд.

8.4 Знакозмінні ряди. Ознака Лейбниці

Означення. Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається знакозмінним, якщо його доданки по чергово міняють знак, тобто якщо $a_n \cdot a_{n+1} < 0$ ($n = 1, 2, \dots$).

Знакозмінний ряд можна записати у вигляді

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n,$$

де $u_n \geq 0$.

Теорема Лейбниця. Якщо модулі доданків u_n знакозмінного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ монотонно спадають до нуля, то цей ряд збігається.

Знакозмінний ряд, який задовольняє умову теореми Лейбниця, називають рядом лейбницівського типу. Теорема Лейбниця стверджує, що ряд лейбницівського типу збігається.

Приклад. Розглянемо узагальнений напівгармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$. Якщо $s \leq 0$, то цей ряд розбігається, оскільки його доданки не прямують до нуля. При $s > 0$ модулі доданків ряду $u_n = \frac{1}{n^s}$ монотонно прямують до нуля і тому заданий ряд є рядом лейбницівського типу. За теоремою Лейбниця, він збігається. Раніше ми показали, що ряд, складений із модулів доданків, – узагальнений гармонічний ряд – збігається при $s > 1$ і розбігається при $s \leq 1$. Таким чином, збіжність узагальненого напівгармонічного ряду при $0 < s \leq 1$ обумовлена не тим, що його доданки малі, а взаємною інтерференцією доданків різних знаків.

Зауваження. Умову монотонності в теоремі Лейбниця не можна відкинути, тобто знакозмінний ряд, доданки якого прямують до нуля не монотонно, може виявитись розбіжним.

Теорема (оцінка залишку ряду лейбницівського типу). Залишок після n -го доданку ряду лейбницівського типу має такий же знак, як і його перший доданок, а модуль залишку не більший, ніж модуль його першого доданку.

8.5 Абсолютна та умовна збіжність.

Перестановки рядів

Означення. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається абсолютно збіжним, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, складений із модулів його доданків. Ряд називається умовно збіжним, якщо він збіжний, а ряд, складений із модулів його доданків, розбігається.

Наприклад, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ збігається (за теоремою Лейбниця), а ряд із модулів його доданків $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – гармонічний ряд – розбігається. Таким чином, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ збігається умовно.

Теорема (про збіжність абсолютно збіжного ряду). *Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається абсолютно, то він збігається.*

Перестановки рядів

Нехай заданий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Переставимо його доданки довільним чином і в результаті отримаємо новий ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$, який називається перестановкою заданого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Як відомо, доданки скінченної суми можна переставляти довільним чином, в результаті чого сума не змінюється. Для рядів ця властивість, взагалі кажучи, не має місця. Але справедлива наступна теорема.

Теорема (про перестановку абсолютно збіжного ряду). *Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається абсолютно. Тоді при будь-якій перестановці його доданків переставлений ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ також збігається і його сума дорівнює сумі початкового ряду.*

Наступна теорема показує, що таку властивість задовольняють лише абсолютно збіжні ряди.

Теорема Рімана (про перестановку умовно збіжного ряду). *Нехай ряд збігається умовно. Тоді для будь-якого числа α існує така перестановка цього ряду, що переставлений ряд збігається до числа α . Далі, початковий ряд можна переставити так, щоб часткові суми переставленого ряду розбігались до $+\infty$, чи $-\infty$, або ж не мали ні скінченної, ні нескінченної границь.*

8.6 Множення рядів. Теорема Коші

Розглянемо два ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Складемо усі можливі добутки $a_i b_j$ і розташуємо їх у матрицю

$$\begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & \dots \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 & \dots \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Елементи цієї нескінченної матриці різними способами можна розташувати у послідовність і, таким чином, отримувати різні ряди.

Теорема Коші (про добуток абсолютно збіжних рядів). *Нехай ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігаються абсолютно. Тоді ряд, доданками якого є усі можливі добутки $a_i b_j$, які розташовані у довільному порядку, збігається і його сума дорівнює добутку сум заданих рядів.*

8.7 Нескінченні добутки

Означення. Нехай $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ – послідовність дійсних чисел. Покладемо $\Pi_1 = p_1$, $\Pi_2 = p_1 p_2$, ..., $\Pi_n = p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_n$, Якщо послідовність $\{\Pi_n\}$ має скінченну, відмінну від нуля, границю, то кажуть, що нескінченний добуток збігається, і позначають $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_n$. У протилежному випадку кажуть, що нескінченний добуток $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ розбігається.

Приклад 1. Обчислити $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$. Тут $p_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$,

$$\begin{aligned} \Pi_n = p_1 \dots p_n &= \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \\ &= \frac{2^2 - 1}{2^2} \cdot \frac{3^2 - 1}{3^2} \dots \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} = \\ &= \frac{(2-1)(2+1)}{2 \cdot 2} \cdot \frac{(3-1)(3+1)}{3 \cdot 3} \dots \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+2}{n+1},$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_n = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{2}$. Отже, заданий нескінченний добуток збігається і

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Приклад 2. Обчислити $\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\varphi}{2^n}$ ($|\varphi| < \frac{\pi}{2}$). Маємо $p_n = \cos \frac{\varphi}{2^n}$,

$$\begin{aligned} \Pi_n &= \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{4} \cdot \dots \cdot \cos \frac{\varphi}{2^n} = \\ &= \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{4} \cdot \dots \cdot \left(\cos \frac{\varphi}{2^n} \sin \frac{\varphi}{2^n} \right) \frac{1}{\sin \frac{\varphi}{2^n}} = \\ &= \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{4} \cdot \dots \cdot \cos \frac{\varphi}{2^{n-1}} \left(\frac{1}{2} \sin \frac{\varphi}{2^{n-1}} \right) \frac{1}{\sin \frac{\varphi}{2^n}} = \\ &= \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{4} \cdot \dots \cdot \cos \frac{\varphi}{2^{n-2}} \cdot \frac{1}{2} \sin \frac{\varphi}{2^{n-2}} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sin \frac{\varphi}{2^n}} = \dots \\ &= \frac{1}{2^n} \sin \varphi \frac{1}{\sin \frac{\varphi}{2^n}}, \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_n = \sin \varphi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/2^n}{\sin(\varphi/2^n)} = \frac{\sin \varphi}{\varphi} \quad (\varphi \neq 0).$$

Якщо ж $\varphi = 0$, то кожний $p_n = 1$, $\Pi_n = 1$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_n = 1$. Таким чином, заданий нескінченний добуток збігається при будь-якому φ ($|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) і

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\varphi}{2^n} = \begin{cases} \frac{\sin \varphi}{\varphi}, & \varphi \neq 0, \quad |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \varphi = 0. \end{cases}$$

Елементарні властивості нескінченних добутоків

Теорема 1 (необхідна умова збіжності). Якщо нескінченний добуток $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ збігається, то $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1$.

Теорема 2. Для того, щоб нескінченний добуток $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ ($p_n > 0$) збігався, необхідно та достатньо, щоб збігався ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$.

Теорема 3. Нехай задана послідовність чисел $a_n > -1$ ($n = 1, 2, \dots$) одного знака. Нескінченний добуток $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ збігається тоді і лише тоді, коли збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Приклад 1. Раніше ми вже розглядали добуток $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$. Тут $a_n = -\frac{1}{(n+1)^2}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$ збігається і, отже, збігається і заданий добуток.

Приклад 2. Розглянемо добуток $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$. У цьому прикладі $a_n = -\frac{1}{n+1}$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n+1}\right)$ розбігається. Тому розбігається і заданий добуток. Оскільки множники $p_n = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$ то частинні добутки $0 < P_n = P_{n-1} \cdot p_n < P_{n-1}$ спадають. Оскільки нескінченний добуток розбігається, то його частинні добутки прямують до нуля.

Приклад 3. Дослідимо на збіжність $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$. Маємо

$$p_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1 + \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} - 1,$$

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} - 1 = \frac{n - \sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{-1}{\sqrt{n^2+1}} \cdot \frac{1}{n + \sqrt{n^2+1}} \sim -\frac{1}{2n^2}.$$

При $n = 1, 2, \dots$ маємо $a_n < 0$ і $|a_n| \sim \frac{1}{2n^2}$, і тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається. Таким чином, збігається і заданий добуток.

Контрольні питання

1. Збіжні та розбіжні числові ряди. Критрій Коші. Елементарні властивості. Приклади (геометрична прогресія).
2. Ряди з невід'ємними доданками. Гармонічний та узагальнений гармонічний ряди.
3. Ознака порівняння, ознаки Даламбера та Коші, інтегральна ознака.
4. Знакозмінні ряди, теорема Лейбниця.
5. Абсолютна та умовна збіжність. Теорема Рімана.
6. Нескінченні добутки та їх властивості.

Розділ 9. Функціональні послідовності та ряди

9.1 Означення та приклади

Нехай на деякій множині E задана послідовність функцій $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Припустимо, що для будь-якого фіксованого $x \in E$ числова послідовність $f_n(x)$ має границю при $n \rightarrow \infty$. Тоді для $x \in E$ отримуємо $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \equiv f(x)$, де f – деяка функція, визначена на E . Цю функцію називають граничною функцією заданої послідовності і кажуть, що задана послідовність збігається до функції f поточно.

Приклад 1. Нехай $f_n(x) = x^n$ ($0 \leq x \leq 1$). Тоді для $0 \leq x < 1$ маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0,$$

а $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$. Тому отримали

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Таким чином, задана послідовність неперервних функцій збігається до розривної функції.

Приклад 2. Нехай $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ ($x \geq 0$). Тоді

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+nx} = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Приклад 3. Нехай $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ ($x \in \mathbb{R}$). Кожна функція f_n – непарна. Із нерівності $2|a| \leq 1 + a^2$ отримуємо, що $|f_n(x)| \leq \frac{|nx|}{1+|nx|^2} \leq \frac{1}{2}$ при всіх $x \in \mathbb{R}$. Якщо ж $x = \frac{1}{n}$, то $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$. Легко бачити, що

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Нехай на деякій множині E задана послідовність функцій $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Припустимо, що для кожного фіксованого $x \in E$ числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається. Позначимо його суму через $f(x)$. У цьому випадку будемо казати, що функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається поточково на множині E до функції f .

Зауваження. Із наданих означень видно, що поточкова збіжність функціонального ряду еквівалентна поточковій збіжності послідовності його частинних сум $f_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$.

Приклад 4. Нехай заданий функціональний ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ ($x \in \mathbb{R}$). При кожному фіксованому $x \neq 0$ цей ряд є геометричною прогресією із знаменником $q = \frac{1}{1+x^2}$ ($|q| < 1$). Тому

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2 \quad (x \neq 0).$$

Якщо $x = 0$, то, очевидно, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0$. Таким чином,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \begin{cases} 1 + x^2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

тобто сума ряду, доданки якого – неперервні функції, виявилась розривною функцією.

9.2 Рівномірна збіжність

Означення. Нехай на множині E задана послідовність функцій f_n ($n = 1, 2, \dots$), яка збігається на E поточково до функції f . Кажуть, що послідовність $\{f_n\}$ збігається рівномірно до функції f на множині E , якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер N , залежний лише від ε (і не залежний від x), що для кожного $n \geq N$ і для кожного $x \in E$ справедлива нерівність $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Означення поточної збіжності на множині E в кванторах можна записати наступним чином:

$$\forall x \in E \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon, x) : \forall n \geq N |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

а рівномірної збіжності – так:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \forall x \in E |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

В означенні поточної збіжності номер N залежить, взагалі кажучи, від ε і від x , а в означенні рівномірної збіжності номер N залежить лише від ε і не залежить від x . Інакше кажучи, поточкова збіжність буде рівномірною, якщо для заданого $\varepsilon > 0$ номер N можна підібрати так, щоб він згодився одразу для всіх $x \in E$.

Тепер бачимо, що властивість рівномірної збіжності не слабша за властивість поточної збіжності, тобто із рівномірної збіжності випливає поточкова збіжність. Обернене твердження не має місця. Може виявитись, що для кожного $\varepsilon > 0$ і для $x \in E$ знайдеться номер $N = N(\varepsilon, x)$, але для всіх одразу $x \in E$ номер N , незалежний від x , може і не існувати. Наведемо відповідний приклад.

Приклад 1. Нехай $f_n(x) = x^n$ ($x \in E \equiv (0, 1)$). Ми вже бачили, що

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \equiv 0 \quad (0 < x < 1).$$

Якби послідовність $\{x^n\}$ збігалась до функції f рівномірно, то нерівність $|x^n - f(x)| < \varepsilon$ при достатньо великих n ($n \geq N(\varepsilon)$) повинна була б виконуватись одразу для всіх $x \in E$. Але це не так, оскільки при фіксованому n маємо $\lim_{x \rightarrow 1-0} x^n = 1$, і тому в будь-якому лівому півоколі точки $x_0 = 1$ при фіксованому n знайдеться така точка $x_n < 1$, що $x_n^n > \frac{1}{2}$. Тому, якщо ми візьмемо $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, то отримаємо нерівність $|x_n^n - 0| \geq \varepsilon_0$. Отже, маємо

$$\exists \varepsilon_0 \left(\varepsilon_0 = \frac{1}{2} \right) : \forall N \exists n \geq N \ (n = N) \exists x_n = x_n(\varepsilon, n) \in E :$$

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0.$$

Це означає, що задана послідовність не є рівномірно збіжною на множині E .

У цьому прикладі "погані" точки x_n , тобто такі, в яких справедлива нерівність $|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0$, знаходяться поблизу точки $x_0 = 1$. Якщо ми відокремимося від x_0 , тобто розглянемо послідовність $\{x^n\}$ на множині $E_\delta = (0, 1 - \delta]$, де $\delta > 0$ – довільне число, то збіжність заданої послідовності до функції $f(x) \equiv 0$ на множині E_δ вже стане рівномірною. Справді, у цьому випадку

$$|f_n(x) - f(x)| = x^n \leq (1 - \delta)^n < \varepsilon \quad (0 \leq x \leq 1 - \delta),$$

якщо лише $n \geq N(\varepsilon)$, де $N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{\ln \varepsilon}{\ln(1-\delta)} \right\rceil + 1$ не залежить від $x \in E_\delta$.

Приклад 2. Для послідовності функцій $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ ($x \in E \equiv \mathbb{R}$) раніше ми показали, що

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Тому $|f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) при кожному фіксованому $x \in \mathbb{R}$. Але ж при фіксованому n найбільшого значення функція $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ досягає в точці $x_n = \frac{1}{n}$ і це значення дорівнює $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$. Таким чином, для $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ нерівність $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_0$ не може бути виконаною одразу для всіх $x \in \mathbb{R}$. Отже, послідовність $\{f_n\}$ збігається до функції $f \equiv 0$ на $\mathbb{R}$, але нерівномірно, тобто

$$\exists \varepsilon_0 \left(\varepsilon_0 = \frac{1}{2} \right) : \forall N \exists n \geq N \ (n = N) \exists x_n \left(x_n = \frac{1}{n} \right) :$$

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0.$$

Якщо ж зафіксувати число $\delta > 0$, то неважко показати, що на множині $E_\delta = [\delta, +\infty)$ послідовність функцій $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ збігається рівномірно. Справді, нерівність

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{n\delta} < \varepsilon \quad (x \in E_\delta)$$

виконується, якщо $n \geq N(\varepsilon)$, де $N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon\delta} \right\rceil + 1$ не залежить від $x \in E_\delta$.

Геометричний сенс рівномірної збіжності полягає в тому, що починаючи з номера N графіки функцій $f_n(x)$ розташовані в ε -смугі графіка функції f .

Рівномірна збіжність ряду означається як рівномірна збіжність послідовності його частинних сум.

Означення. Нехай на множині E задана послідовність функцій $\{u_n\}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається рівномірно збіжним на множині E , якщо він збігається поточно на E і послідовність його частинних сум рівномірно збігається до суми ряду на множині E .

Іншими словами, означення рівномірної збіжності функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, який збігається до функції f на множині E , можна сформулювати наступним чином. Позначимо через $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ частинні суми ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ — залишок після n -го доданку. Тоді $S_n(x) + r_n(x) = f(x)$, а рівномірна збіжність ряду означає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер N (який залежить лише від ε), що для всіх $n \geq N$ і для всіх $x \in E$ справедлива нерівність $|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Але, оскільки $|S_n(x) - f(x)| = |r_n(x)|$, то отримуємо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \forall x \in E |r_n(x)| < \varepsilon.$$

Це в свою чергу означає, що залишок ряду рівномірно прямує до нуля. Таким чином, отримали наступне еквівалентне означення рівномірної збіжності ряду.

Означення. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називається рівномірно збіжним на множині E , якщо послідовність його залишків після n -го доданку $\{r_n\}$ рівномірно прямує до нуля на множині E .

Це означення вигідніше порівняно з попереднім тим, що воно використовує лише доданки початкового ряду і не використовує суму самого ряду $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Приклад 1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ поточно збігається на інтервалі $(-1, 1)$, оскільки він є сумою геометричної прогресії із знаменником x , $|x| < 1$. Дослідимо його на рівномірну збіжність. Для цього розглянемо залишок

$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}$. При фіксованому x і $n \rightarrow \infty$ маємо $r_n(x) \rightarrow 0$.

Це означає, що заданий ряд збігається при кожному x , тобто поточково. Якщо ж зафіксувати n і спрямувати x до $1 - 0$, то отримаємо, що $\frac{x^{n+1}}{1-x} \rightarrow +\infty$, тобто якщо x близький до 1, то $r_n(x)$ набуває великих значень. Це означає, що нерівність $|r_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x} < \varepsilon$ одразу для всіх $x \in (-1, 1)$ не може справджуватись, яким би великим номер n ми б не обрали. Таким чином, наш ряд збігається на $(-1, 1)$, але нерівномірно.

З іншого боку, на будь-якому відрізку $[-q, q]$, де $0 < q < 1$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ збігається рівномірно. Справді, у цьому випадку

$$|r_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| \leq \frac{q^{n+1}}{1-q}, \quad (x \in [-q, q]).$$

Звідси випливає, що послідовність $\{r_n(x)\}$ рівномірно збігається до нуля на $[-q, q]$, тобто заданий ряд збігається рівномірно на $[-q, q]$.

Приклад 2. Розглянемо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$. Маємо

$$r_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x^2)^n}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Якщо x фіксоване, то $r_n(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Це означає, що ряд збіжний при будь-якому $x \in \mathbb{R}$, тобто він збігається поточково. Якщо зафіксуємо n , то при прямуванні x до нуля отримуємо, що $r_n(x) \rightarrow 1$, а це означає, що нерівність $|r_n(x)| = \frac{1}{(1+x^2)^n} < \varepsilon$ при $0 < \varepsilon < 1$ не може виконуватись одразу для всіх $x \in \mathbb{R}$, яким би великим номер n ми б не взяли. Таким чином, $r_n(x) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), але нерівномірно. Отже, заданий ряд збігається на $\mathbb{R}$ нерівномірно.

Зауваження. Нехай заданий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (x \in E).$$

Розглянемо величини

$$\mu_n = \sup_{x \in E} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| = \sup_{x \in E} |r_n(x)|.$$

Тоді означення рівномірної збіжності цього ряду на множині E можна сформулювати наступним чином.

Ряд збігається рівномірно на множині E , якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 0$.

Справді, якщо $\mu_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), то для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер N , що для всіх $n \geq N$ виконується нерівність $\mu_n < \varepsilon$, тобто для всіх $x \in E$ справедлива нерівність $|r_n(x)| < \varepsilon$, а отже заданий ряд збігається рівномірно. Навпаки, якщо $r_n(x)$ рівномірно прямує до нуля, то для всіх $x \in E$ виконується нерівність $|r_n(x)| < \varepsilon$. Тому і $\mu_n = \sup_{x \in E} |r_n(x)| \leq \varepsilon$, тобто $\mu_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Приклад 3. Дослідити на рівномірну збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$ на множині $\mathbb{R}$.

Заданий ряд є рядом лейбніцівського типу і тому, згідно з теоремою про оцінку залишку ряду лейбніцівського типу, $|r_n(x)| \leq \frac{1}{x^2+n+1} \leq \frac{1}{n+1}$. Таким чином, $\mu_n \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), і, отже, заданий ряд збігається рівномірно на $\mathbb{R}$.

9.2.1 Критерій Коші

Теорема (критерій Коші рівномірної збіжності послідовності). Для того щоб послідовність функцій $\{f_n\}$ рівномірно збігалась на множині E до деякої функції, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$ існував такий номер N , залежний лише від ε , що для довільних номерів $n, m \geq N$ і для кожного $x \in E$ виконувалась нерівність $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Для рядів цю теорему можна сформулювати наступним чином.

Теорема (критерій Коші рівномірної збіжності функціонального ряду). Для того щоб функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ рівномірно збігався на множині E , необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$ існував такий номер N , залежний лише від ε , що для всіх $n \geq N$, $p \in \mathbb{N}$ і для будь-якого $x \in E$ виконувалась нерівність $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon$.

9.2.2 Ознака Вейерштрасса

Теорема (ознака Вейерштрасса рівномірної збіжності функціонального ряду). *Нехай заданий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ($x \in E$). Припустимо, що існує числова послідовність $\{a_n\}$, така, що $|u_n(x)| \leq a_n$ ($n = 1, 2, \dots$) для всіх $x \in E$, і числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається. Тоді заданий ряд збігається рівномірно на E .*

Зауваження 1. Ознака Вейерштрасса є лише достатньою умовою рівномірної збіжності функціонального ряду. Справді, розглянутий раніше приклад з ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$ показує, що цей ряд збігається рівномірно на $\mathbb{R}$, але оцінити зверху його доданки можна лише доданками розбіжного числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Зауваження 2. Ознака Вейерштрасса надає достатню умову не лише рівномірної, а й абсолютної збіжності ряду. Це одразу випливає з нерівності

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \quad (x \in E).$$

Зауваження 3. Ознака Вейерштрасса полягає у тому, що із збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, где $\alpha_n = \sup_{x \in E} |u_n(x)|$, випливає рівномірність (і абсолютна) збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множині E .

Приклад 4. Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$ на $\mathbb{R}$. Використовуючи очевидну нерівність $2|a| \leq 1 + a^2$, знаходимо мажорантний числовий ряд

$$\left| \frac{x}{1+n^4x^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \frac{|n^2x|}{1+(n^2x)^2} \leq \frac{1}{2} \frac{1}{n^2}.$$

Оскільки числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{n^2}$ збігається, то заданий функціональний ряд збігається рівномірно на $\mathbb{R}$.

Приклад 5. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ збігається рівномірно на множині $\mathbb{R}$, оскільки $\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ і числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збігається.

Раніше ми вже бачили такі приклади, коли послідовність неперервних функцій може збігатись до розривної функції. Така ситуація може виявитись лише у випадку, коли ця послідовність збігається нерівномірно.

9.3 Рівномірна збіжність та неперервність

Теорема (про неперервність рівномірно збіжної послідовності неперервних функцій). *Нехай на відрізку $[a, b]$ задана послідовність функцій $\{f_n\}$, яка збігається до функції f рівномірно на $[a, b]$. Якщо всі функції f_n неперервні в точці $x_0 \in [a, b]$, то і гранична функція f також неперервна в точці x_0 .*

Зауваження. Як відзначено вище, умову рівномірної збіжності у цій теоремі не можна відкинути. Справді, раніше ми навели приклад послідовності неперервних функцій $f_n(x) = x^n$, яка на відрізку $[0, 1]$ збігається, але гранична функція

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

розривна.

З іншого боку, вимога рівномірної збіжності не є необхідною для того, щоб гранична функція була неперервною. Іншими словами, існує послідовність неперервних функцій, яка збігається до неперервної функції, але нерівномірно. Таку послідовність $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ ми вже наводили у якості прикладу.

Для рядів наведена вище теорема може бути сформульована у наступному вигляді.

Теорема (про неперервність суми рівномірно збіжного ряду неперервних функцій). *Нехай на відрізку $[a, b]$ задана послідовність неперервних в точці $x_0 \in [a, b]$ функцій u_n , така, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається рівномірно на $[a, b]$. Тоді сума цього ряду є неперервною в точці x_0 функцією.*

Почленний перехід до границі під знаком інтеграла та почленне інтегрування ряду

Нехай задана послідовність інтегровних на відрізку $[a, b]$ функцій f_n і нехай послідовність $\{f_n\}$ збігається на $[a, b]$ поточно до функції f . Поставимо питання: чи зобов'язана функція f бути інтегровою на $[a, b]$ і чи справедлива рівність

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx ?$$

Негативні відповіді на ці запитання дають наступні приклади.

Приклад 1. Нехай $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ – послідовність всіх раціональних точок з відрізка $[0, 1]$. Позначимо

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{r_1, \dots, r_n\}, \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus \{r_1, \dots, r_n\}. \end{cases}$$

Тоді кожна функція f_n інтегровна на відрізку $[0, 1]$, оскільки вона має лише скінченну кількість точок розриву $\{r_1, \dots, r_n\}$. З іншого боку, легко бачити, що $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \mathcal{D}(x)$, де $\mathcal{D}$ – функція Діріхле. Але ми знаємо, що функція Діріхле неінтегровна на відрізку $[0, 1]$.

Отже, ми побудували послідовність інтегровних функцій, яка збігається до неінтегрової функції. Наступний приклад показує, що навіть якщо гранична функція інтегровна, то границя інтегралів не зобов'язана дорівнювати інтегралу від граничної функції.

Приклад 2. Покладемо $f_n(0) = f_n(\frac{1}{n}) = f_n(1) = 0$, $f_n(\frac{1}{2n}) = n$, а на відрізках $[0, \frac{1}{2n}]$, $[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}]$ і $[\frac{1}{n}, 1]$ вважаємо функцію f_n лінійною. Легко бачити, що $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ для всіх $x \in [0, 1]$, і, отже, гранична функція $f(x) \equiv 0$ ($x \in [0, 1]$) інтегровна і $\int_0^1 f(x) dx = 0$. З іншого боку, легко обчислити, що $\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2}$, і тому граничний перехід під знаком інтеграла недопустимий.

Аналогічне питання можна сформулювати і для рядів. А саме, чи можна інтегрувати збіжний ряд почленно? Іншими словами, чи справедлива рівність

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx ?$$

Використовуючи побудовані вище приклади, легко показати, що відповідь на це запитання негативна у тому сенсі, що сума поточно збіжного ряду інтегровних функцій може виявитись неінтегрованою, і навіть якщо вона буде інтегрованою, то все одно не можна гарантувати вказану рівність.

Побудовані вище приклади виявляються можливими тому, що збіжність у цих прикладах нерівномірна.

9.4 Рівномірна збіжність та інтегрування

Теорема (про граничний перехід під знаком інтеграла для послідовності неперервних функцій). *Нехай $\{f_n\}$ – послідовність неперервних на відрізку функцій, яка рівномірно збігається на $[a, b]$ до функції f . Тоді існує*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx,$$

тобто можна переходити до границі під знаком інтеграла.

Для рядів ця теорема може бути переформульованою наступним чином.

Теорема (про почленне інтегрування ряду з неперервними доданками). *Нехай $\{u_n\}$ – послідовність неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій така, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається рівномірно на $[a, b]$. Тоді справедлива рівність*

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx.$$

Зауваження. Можна показати, що в цій теоремі умову неперервності функцій f_n можна замінити більш слабкою умовою інтегровності цих функцій.

На завершення наведемо ще один приклад інтегровних функцій, яка поточно збігається до необмеженої, а отже, неінтегрованої функції. Покладемо

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ n, & 0 < x \leq \frac{1}{n}, \\ \frac{1}{x}, & \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

Тоді кожна функція f_n інтегровна на $[0, 1]$, оскільки вона обмежена і має єдину точку розриву $x_0 = 0$. Разом з тим, функція

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

необмежена і, отже, неінтегровна на $[0, 1]$.

9.5 Рівномірна збіжність та диференціювання

Нехай $\{f_n\}$ – послідовність диференційовних на відрізку $[a, b]$ функцій, яка поточно збігається до функції f . Раніше ми наводили приклади, які показують, що ми не можемо гарантувати навіть неперервності функції f . Якщо ж послідовність $\{f_n\}$ збігається до f рівномірно, то функція f вже буде неперервною. Поставимо запитання: чи можна гарантувати диференційовність функції f ? Покажемо, що відповідь на це питання негативна.

Приклад 1. Покладемо

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n}, & |x| \leq \frac{1}{n}, \\ |x|, & \frac{1}{n} < |x| \leq 1. \end{cases}$$

Легко переконатись у тому, що функції f_n диференційовні на $[-1, 1]$, а послідовність $\{f_n\}$ збігається до функції $f(x) = |x|$ рівномірно на $[-1, 1]$. Разом з тим гранична функція $f(x) = |x|$ недиференційовна в точці $x_0 = 0 \in [-1, 1]$.

Приклад 2. Послідовність функцій $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ рівномірно збігається до функції f , що тотожно дорівнює нулю на $\mathbb{R}$ (оскільки $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ ($x \in \mathbb{R}$)). Разом з тим $f'_n(x) = \cos nx$, а ця послідовність не має границі при $n \rightarrow \infty$, наприклад, у точці $x_0 = \pi$.

Перший приклад показує, що границя рівномірно збіжної послідовності диференційовних функцій може виявитись недиференційовною функцією в деякій точці x_0 , не дивлячись на те, що існує $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x_0)$. У другому прикладі існує $f'(x_0)$, але не існує $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x_0)$. Таким чином, для того щоб гарантувати можливість граничного переходу під знаком похідної, тобто рівність

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = f'(x),$$

за природною умовою, що послідовність $\{f_n\}$ збігається до функції f , мало вимагати рівномірної збіжності послідовності $\{f_n\}$ до функції f . Це зовсім природно навіть і з геометричної точки зору.

Нагадаємо, що неперервно диференційовною називаємо функцію, похідна якої є неперервною.

Теорема (про диференціювання границі послідовності неперервно диференційовних функцій). *Нехай $\{f_n\}$ – послідовність неперервно диференційовних на відрізку $[a, b]$ функцій. Припустимо, що в деякій точці $x_0 \in [a, b]$ числова послідовність $\{f_n(x_0)\}$ збігається, а функціональна послідовність $\{f'_n\}$ рівномірно збігається на $[a, b]$. Тоді початкова послідовність $\{f_n\}$ рівномірно збігається на $[a, b]$ до неперервно диференційовної функції f , причому для будь-якого $x \in [a, b]$ справедлива рівність*

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

В термінах рядів цю теорему можна сформулювати наступним чином.

Теорема (про почленне диференціювання ряду). *Нехай на відрізку $[a, b]$ задана така послідовність неперервно диференційовних функцій $\{u_n\}$, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається в деякій точці $x_0 \in [a, b]$, а ряд із похідних $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ збігається рівномірно на $[a, b]$. Тоді початковий ряд*

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ рівномірно збігається на всьому відрізку $[a, b]$, його сума є неперервно диференційовною функцією і справедлива рівність

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \quad (x \in [a, b]).$$

Зауваження. В двох останніх теоремах ми припускали умову неперервної диференційовності, тобто неперервності похідних. Можна показати, що достатньо було б припустити лише умову диференційовності, тобто існування похідних, але за такої умови можна гарантувати лише диференційовність граничної функції, а неперервності її похідної, звичайно, гарантувати не можна.

9.6 Перестановка граничних переходів

Теорема (про граничний перехід у границі функціональної послідовності). Нехай на відрізку $[a, b]$ задана послідовність функцій $\{f_n\}$, яка рівномірно збігається до функції f на $[a, b]$. Нехай точка $x_0 \in [a, b]$ і при кожному n існує $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = y_n$. Тоді послідовність $\{y_n\}$ має скінченну границю y_0 і існує $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$.

Зауваження. Ця теорема стверджує, що за вказаними умовами можна міняти місцями граничні переходи, а саме,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x).$$

У випадку, коли умови теореми не виконані, то така рівність може виявитись хибною.

Аналог цієї теореми для рядів має наступний вигляд.

Теорема (про почленний перехід до границі для рядів). Нехай на відрізку $[a, b]$ заданий рівномірно збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Нехай $x_0 \in [a, b]$ і для кожного n існує $\lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) = \alpha_n$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ збігається і

існує

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x).$$

Зауваження. Ця теорема надає достатню умову, за якої знаки суми і границі можна поміняти місцями.

Контрольні питання

1. Рівномірна збіжність функціональних послідовностей та рядів. Критерій Коші.
2. Ознаки Вейєрштрасса.
3. Рівномірна збіжність та неперервність.
4. Рівномірна збіжність та інтегрування.
5. Рівномірна збіжність та диференціювання.
6. Перестановка граничних переходів.

Розділ 10. Степеневі ряди та ряди Тейлора

Степеневим рядом називається ряд виду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, де x_0 – фіксована точка, $\{a_n\}$ – числова послідовність. Числа a_n ($n = 0, 1, \dots$) називаються коефіцієнтами ряду, точка x_0 – центром ряду.

Будемо розглядати ряди виду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, тобто вважаємо, що $x_0 = 0$.

Приклад. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ – сума геометричної прогресії. Цей ряд збігається при $|x| < 1$ і розбігається при $|x| \geq 1$.

10.1 Структура множини точок збіжності степеневого ряду

Перша теорема Абеля. *Нехай степеневий ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

збігається в деякій точці $x_1 \neq 0$. Тоді цей ряд збігається в кожній точці x , такій, що $|x| < |x_1|$.

Зауваження. Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збігається при $x = x_1$, то не можна гарантувати, що він збігається і при $x = -x_1$. Наприклад, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ збігається при $x = x_1 = -1$ і розбігається при $x = -x_1 = 1$.

Наслідок. *Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ розбігається в деякій точці x_1 , то для всіх x , таких, що $|x| > |x_1|$, цей ряд також розбігається.*

Теорема. *Множина точок збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ є непорожнім проміжком з центром в точці $x_0 = 0$. Це може бути одноточковою множиною $\{0\}$, інтервалом (можливо, і необмеженим), відрізком або напівінтервалом.*

Означення. Радіусом збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

називається невід’ємне число R (скінченне або таке, що дорівнює $+\infty$), що задовольняю таку властивість, що при $|x - x_0| < R$ цей ряд збігається, а при $|x - x_0| > R$ цей ряд розбігається. Існування такого числа R встановлено у попередній теоремі. Інтервал $(x_0 - R, x_0 + R)$ називається інтервалом збіжності степеневого ряду.

Очевидно, степеневий ряд збігається у точці $x = x_0$. Якщо множина точок збіжності ряду складається більше, ніж з однієї точки x_0 , то існує таке число R ($0 < R \leq +\infty$), що цей ряд збігається на інтервалі $(x_0 - R, x_0 + R)$ і розбігається зовні відрізка $[x_0 - R, x_0 + R]$, причому у всіх точках інтервала $(x_0 - R, x_0 + R)$ цей ряд збігається абсолютно.

Приклад 1. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$$

збігається лише в одній точці $x = 0$. Справді, якщо $x \neq 0$, то, за відомою рівністю $\lim_{n \rightarrow \infty} n! x^n = \infty$, заданий ряд розбігається, оскільки для нього не виконується необхідна умова збіжності. Отже, тут $R = 0$ і множина точок збіжності складається із єдиної точки $\{0\}$.

Приклад 2. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

збігається при $|x| < 1$ і розбігається при $|x| \geq 1$. Тут $R = 1$, інтервал збіжності $(-1, 1)$, на кінцях інтервалу збіжності заданий ряд розбігається. Таким чином, множиною точок збіжності заданого ряду є інтервал $(-1, 1)$.

Приклад 3. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

збігається при $|x| < 1$ за ознакою порівняння, оскільки $\left|\frac{x^n}{n}\right| \leq |x|^n$ (порівнюємо з геометричною прогресією). Якщо $|x| > 1$, то доданки заданого ряду прямують до ∞ і, отже, заданий ряд розбігається. Таким чином, радіус збіжності заданого ряду $R = 1$, інтервал збіжності $(-1, 1)$. При $x = -1$ заданий ряд має вигляд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Це – ряд лейбніцівського типу і тому він збіжний. При $x = 1$ отримуємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – гармонічний і, отже, розбіжний. Таким чином, на лівому кінці інтервалу збіжності заданий ряд збігається (умовно), а на правому – розбігається. Множина точок збіжності – напівінтервал $[-1, 1)$.

Приклад 4. Для ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

при $|x| \leq 1$ маємо $\left|\frac{x^n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$, тобто цей ряд, за ознакою порівняння, збігається на відрізку $[-1, 1]$. Якщо ж $|x| > 1$, то цей ряд розбігається, оскільки не виконується необхідна умова збіжності $\left(\frac{x^n}{n^2} \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)\right)$. Отже, радіус збіжності ряду $R = 1$, інтервал збіжності $(-1, 1)$, множина точок збіжності $[-1, 1]$.

Приклад 5. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

збігається при кожному $x \in \mathbb{R}$. Справді, оскільки

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

то, за ознакою Даламбера, отримуємо, що заданий ряд збігається. Маємо $R = +\infty$, інтервал збіжності $(-\infty, +\infty)$.

Теорема (обчислення радіуса збіжності степеневого ряду). Нехай заданий степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Якщо існує

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \equiv \rho > 0,$$

то радіус збіжності заданого ряду дорівнює $R = \frac{1}{\rho}$. Якщо для кожного n числа $a_n \neq 0$ і існує

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \equiv \rho^* > 0,$$

то

$$R = \frac{1}{\rho^*} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Зауваження 1. Якщо за умовами теореми вважати, що $\frac{1}{0} = +\infty$ і $\frac{1}{+\infty} = 0$, то теорема залишиться справедливою і у випадках $\rho = 0$ і $\rho = +\infty$.

Приклад 1. Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n.$$

Тут $a_n = n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, тобто $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}} = 1$. В точках $x = R = 1$ і $x = -R = -1$ ряд розбігається. Область його збіжності – інтервал $(-1, 1)$.

Приклад 2. Для ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} [3 + (-1)^n]^n x^n$$

маємо $a_n = [3 + (-1)^n]^n$, і границі із наведеної теореми не існують. Якщо $|x| < \frac{1}{4}$, то цей ряд, очевидно, збігається, а при $|x| > \frac{1}{4}$ розбігається. Таким чином, радіус збіжності дорівнює $R = \frac{1}{4}$. Якщо $x = \pm \frac{1}{4}$, то $|a_{2k} x^{2k}| = 4^{2k} \frac{1}{4^{2k}} = 1$, тобто доданки з парними номерами дорівнюють 1 і тому не виконується необхідна умова збіжності бо доданки ряду не прямують до нуля. Таким чином, область збіжності – інтервал $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

10.2 Рівномірна збіжність та неперервність суми

Теорема 1 (про рівномірну збіжність у інтервалі збіжності).

Нехай заданий степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

у якого радіус збіжності $R > 0$. Тоді для будь-якого r , такого, що $0 < r < R$, заданий ряд рівномірно збігається на $[-r, r]$.

Теорема 2 (про неперервність суми степеневого ряду). *Сума степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ з радіусом збіжності $R > 0$ є неперервною на інтервалі збіжності $(-R, R)$ функцією.*

Теорема 3. *Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ з радіусом збіжності $R > 0$ розбігається в точці $x = R$ або $x = -R$, то він не є рівномірно збіжним на $(-R, R)$.*

Зауваження. Степеневий ряд, у якого нескінченно багато відмінних від нуля коефіцієнтів, не може бути рівномірно збіжним на всій числовій осі.

Друга теорема Абеля. *Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ з радіусом збіжності $R > 0$ збігається при $x = R$, то він збігається рівномірно на $[0, R]$ і його сума є неперервною зліва в точці $x = R$ функцією.*

10.3 Почленне інтегрування та диференціювання

Як вже з'ясовано раніше, якщо радіус збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$0 < R \leq +\infty$, то його сума $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ – неперервна на $(-R, R)$ функція.

Теорема 1 (про почленне інтегрування степеневого ряду). Для будь-якого $x \in (-R, R)$ справедлива рівність

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Зауваження 1. Нехай заданий степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Тоді проінтегрований ряд має вигляд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Проінтегрований ряд має той же самий радіус збіжності, що і початковий ряд.

Зауваження 2. Якщо початковий ряд збігається при $x = R$, де $0 < R < +\infty$, то, за другою теоремою Абеля, він збігається рівномірно на $[0, R]$. Тому, застосовуючи теорему про почленне інтегрування загального функціонального ряду, отримуємо, що і проінтегрований ряд збігається при $x = R$, тобто ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{R^{n+1}}{n+1}.$$

Зауваження 3. Припустимо, що збігається ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{R^{n+1}}{n+1}.$$

Тоді, за другою теоремою Абеля, рівномірно на $[0, R]$ збігається також і ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Застосовуючи теорему про почленний перехід до границі, отримуємо, що існує

$$\lim_{x \rightarrow R-0} \int_0^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{R^{n+1}}{n+1}.$$

При цьому функція f може виявитись і неінтегрованою за Ріманом на $[0, R]$ (наприклад, f може бути необмеженою на $[0, R]$). Вираз $\lim_{x \rightarrow R-0} \int_0^x f(t) dt$ називається невластним інтегралом від функції f на $[0, R)$.

Теорема 2 (про почленне диференціювання степеневому ряду). Сума $f(x)$ степеневому ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

є диференційовною на інтервалі збіжності функцією, причому

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad (x \in (-R, R)).$$

Зауваження. Якщо продиференційований ряд збігається при $x = R$, тобто, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n R^{n-1}$, то, за другою теоремою Абеля продиференційований ряд збігається рівномірно на $[0, R]$. Таким чином, загальну теорему про почленне диференціювання функціонального ряду можна застосувати і при $x = R$. Згідно з цією теоремою отримаємо, що у цьому випадку існує $f'_-(R)$ і

$$f'_-(R) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n R^{n-1}.$$

Наслідок. Сума степеневому ряду є нескінченно диференційовною функцією на інтервалі збіжності а її похідні обчислюються шляхом почленного послідовного диференціювання доданків початкового ряду.

Зауваження. Згідно з цим наслідком, отримуємо наступну рівність

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k} \quad (x \in (-R, R)),$$

де $k = 0, 1, \dots$. Звідси, зокрема, випливає, що

$$f^{(k)}(0) = k! a_k \quad (k = 0, 1, \dots),$$

або $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ ($k = 0, 1, \dots$). Бачимо, що коефіцієнти степеневому ряду можна виразити через похідні суми степеневому ряду, які обчислені в центрі інтервалу збіжності.

Якщо заданий степеневий ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

то його коефіцієнти виражаються рівностями

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Означення. Функція f , яка задана в околі точки x_0 , називається аналітичною в точці x_0 , якщо в деякому околі цієї точки вона може бути представлена у вигляді суми степеневих рядів за степенями $(x - x_0)$, тобто

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)).$$

Як ми вже бачили, якщо функція f аналітична в точці x_0 , то вона нескінченно диференційовна в цій точці і справедливі рівності

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (k = 0, 1, \dots),$$

тобто коефіцієнти розвинення аналітичної функції в степеневий ряд виражаються через похідні цієї функції. Звідси випливає

Теорема (про єдиність розвинення аналітичної функції в степеневий ряд). Якщо функція f аналітична в точці x_0 , то її розвинення в ряд за степенями $(x - x_0)$ єдине, тобто коефіцієнти цього розвинення означаються однозначно. Іншими словами, якщо

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

при $|x - x_0| < \delta$, то $a_k = b_k$ ($k = 0, 1, \dots$).

10.4 Ряди Тейлора

Вище ми вже бачили, що сума степеневих рядів $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ з радіусом збіжності $R > 0$ є аналітичною, а отже, нескінченно диференційовною функцією, і справедлива рівність $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ ($k = 0, 1, \dots$).

Припустимо тепер, що функція f нескінченно диференційовна в точці x_0 . Розглянемо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, де $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Означення. Нехай функція f , яка задана в околі точки x_0 , нескінченно диференційовна в самій точці x_0 . Числа $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ ($n = 0, 1, \dots$) називаються коефіцієнтами Тейлора функції f в точці x_0 , а ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

називається рядом Тейлора функції f в околі точки x_0 .

Вище ми показали, що аналітична функція може бути представлена у вигляді суми степеневих рядів з коефіцієнтами $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, тобто в деякому околі точки x_0 вона може бути розвиненою в суму свого ряду Тейлора. Якщо ж відмовитись від умови аналітичності, то виявляється, що ряд Тейлора у своєму інтервалі збіжності може і не збігатись до функції f , а до зовсім іншої функції.

Розглянемо питання: за яких умов ряд Тейлора функції f збігається в деякому околі точки x_0 до самої функції f ? Іншими словами, за яких умов функція f допускає в деякому околі точки x_0 розвинення у вигляді суми степеневих рядів? Для дослідження цього питання будемо використовувати отриману раніше формулу Тейлора. Нагадаємо її.

Нехай функція f в інтервалі $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, де $\delta > 0$, має неперервні похідні до порядку $n + 1$ включно. Тоді справедлива рівність

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + r_n(x) \equiv \\ &\equiv f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + r_n(x), \end{aligned}$$

де залишок $r_n(x)$ можна представити у формі Лагранжа

$$r_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) (x - x_0)^{n+1},$$

де точка ξ знаходиться на інтервалі з кінцями x_0 і x .

Отже, формула Тейлора представляє функцію f в околі точки x_0 у вигляді частинної суми ряду Тейлора і залишку формули Тейлора. Якщо ми хочемо щоб ряд Тейлора збігався до функції f , то для цього, очевидно, необхідно і достатньо, щоб залишок формули Тейлора прямував до нуля при $n \rightarrow \infty$ при кожному фіксованому $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Звідси легко отримати наступну теорему.

Теорема (достатня умова розвинення функції в степеневий ряд). *Нехай функція f нескінченно диференційовна (тобто має похідні будь-якого порядку) в деякому околі $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 . Якщо всі похідні функції f обмежені в сукупності в цьому околі, тобто якщо існує така стала M , що*

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq M \quad (x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \quad n = 0, 1, \dots),$$

то ряд Тейлора функції f за степенями $(x - x_0)$ збігається до $f(x)$ для будь-якого $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, тобто справедлива рівність

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

10.5 Розвинення основних елементарних функцій

При $x_0 = 0$ ряд Тейлора називають рядом Маклорена. Раніше ми отримали розвинення за формулами Маклорена функцій e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ і $(1+x)^\alpha$. Побудуємо для цих функцій ряди Маклорена.

1. $f(x) = e^x$. Формула Тейлора (Маклорена) має вигляд

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x) \equiv \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + r_n(x),$$

$f^{(n)}(x) = e^x$ ($n = 0, 1, \dots$), і тому на будь-якому інтервалі $(-\delta, \delta)$ справедлива нерівність

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq e^\delta \quad (x \in (-\delta, \delta), \quad n = 0, 1, \dots).$$

Таким чином, виконана достатня умова розвинення функції в ряд Маклорена. Звідси випливає, що справедливе розвинення

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in (-\delta, \delta)).$$

Оскільки $\delta > 0$ довільне, то отримане розвинення справедливе для всіх $x \in \mathbb{R}$.

2. $f(x) = \sin x$. Формула Тейлора (Маклорена) має вигляд

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + r_n(x) \equiv \\ &\equiv \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_n(x). \end{aligned}$$

Далі,

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad f''(x) = -\sin x = \sin(x + \pi), \dots,$$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Всі похідні заданої функції обмежені в сукупності $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ ($x \in \mathbb{R}$, $n = 0, 1, \dots$). Таким чином, виконана достатня умова розвинення функції в ряд Маклорена і тому справедлива рівність

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \equiv \\ &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

3. $f(x) = \cos x$. Як і для функції $\sin x$, аналогічно отримуємо

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \equiv \\ &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

4. $f(x) = \ln(1+x)$. Формула Маклорена для функції $\ln(1+x)$ ($x > -1$) має вигляд

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + r_n(x) \equiv \\ &\equiv \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + r_n(x).\end{aligned}$$

Можна показати, що справедлива рівність

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \equiv \\ &\equiv \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad (x \in (-1, 1)).\end{aligned}$$

Ряд справа має радіус збіжності $R = 1$.

Розглянемо отриманий ряд на кінцях інтервала збіжності. При $x = -1$ ряд розбігається. Якщо ж $x = 1$, то отримуємо ряд лейбніцівського типу, тобто збіжний. Тому маємо розвинення

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n},$$

яке справедливе для $x \in (-1, 1]$. Зокрема, звідси випливає рівність

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \equiv 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2.$$

5. $f(x) = (1+x)^\alpha$. При $\alpha \in \{0, 1, \dots\}$ функція f є многочленом і тому ми опускаємо цей тривіальний випадок. Нехай $\alpha \notin \{0, 1, \dots\}$. Формула Маклорена має вигляд

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \\ &+ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + r_n(x) \equiv \\ &\equiv 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + r_n(x).\end{aligned}$$

Звідси можна отримати рівність

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \\ &+ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots \equiv \\ &\equiv 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n,\end{aligned}$$

де $|x| < 1$.

Ряд

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

називається біноміальним рядом. Радіус збіжності біноміального ряду $R = 1$.

Питання про збіжність цього ряду на кінцях інтервала збіжності досліджувати не будемо.

Приклад 1. Розвинути в ряд за степенями x функцію $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

Застосовуючи розвинення функції $(1+x)^\alpha$ при $\alpha = -1$, отримуємо

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \equiv \\ &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n,\end{aligned}$$

де $|x| < 1$. Це – сума геометричної прогресії із знаменником $q = -x$ з $|q| < 1$.

Приклад 2. Розвинути за степенями $x+1$ функцію $f(x) = \frac{1}{x(3x+1)}$.

Покладемо $x+1 = t$. Тоді функцію $f(x) = f(t-1) = \frac{1}{(t-1)(3t-2)} = \varphi(t)$ достатньо розвинути за степенями t . Розвиваючи з невизначеними коефіцієнтами та обчислюючи їх, знаходимо

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \frac{A}{t-1} + \frac{B}{3t-2} = \frac{1}{t-1} - \frac{3}{3t-2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{2}t} - \frac{1}{1-t} = \\ &= \frac{3}{2} \left(1 + \frac{3}{2}t + \left(\frac{3}{2}t\right)^2 + \left(\frac{3}{2}t\right)^3 + \dots \right) - (1 + t + t^2 + t^3 + \dots) =\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{3}{2} \right)^{n+1} - 1 \right] t^n.$$

Перше розвинення справедливе при $|\frac{3}{2}t| < 1$, тобто при $|t| < \frac{2}{3}$, а друге – при $|t| < 1$. Тому обидва розвинення справедливі при $|t| < \frac{2}{3}$. Таким чином, замінюючи t на $x + 1$, отримуємо

$$\frac{1}{x(3x+1)} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{3}{2} \right)^{n+1} - 1 \right] (x+1)^n,$$

де $|x+1| < \frac{2}{3}$, тобто $-\frac{5}{3} < x < -\frac{1}{3}$.

Приклад 3. Розвинемо в ряд Маклорена функцію $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Маємо

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n},$$

де $|x| < 1$. Оскільки в інтервалі збіжності степеневий ряд допускає почленне інтегрування, то отримуємо

$$\begin{aligned} f(x) = \operatorname{arctg} x &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \equiv x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \end{aligned}$$

де $|x| < 1$.

Вправи. Розвинути в ряди Маклорена гіперболічні функції $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ і $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Порівняйте отримані розвинення з розвиненнями відповідних тригонометричних функцій $\sin x$ і $\cos x$.

Контрольні питання

1. Степеневий ряд, перша теорема Абеля, радіус збіжності.
2. Обчислення радіуса збіжності, теорема Коші – Адамара.
3. Почленне диференціювання та інтегрування степеневих рядів.
4. Коефіцієнти Тейлора та ряд Тейлора.
5. Розвинення основних елементарних функцій.

Рекомендована література

1. Заболоцький М. В., Сторож О. Г., Тарасюк С. І. Математичний аналіз: Підручник – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007. – 416 с.
2. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз: Підручник: У двох частинах. Частина 1. – К.: Либідь, 1993. – 320 с.
3. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз: Підручник: У двох частинах. Частина 2. – К.: Либідь, 1994. – 304 с.
4. Ляшко І. І., Ємельянов В. Ф., Боярчук О. К. Математичний аналіз: Підручник: У 2 ч. / – К. : Вища шк., 1992. – Ч. 1. – 495 с.
5. Ляшко І. І., Ємельянов В. Ф., Боярчук О. К. Математичний аналіз: Підручник: У 2 ч. / – К. : Вища шк., 1992. – Ч. II. – 375 с.
6. Рудавський Ю. К. та ін. Математичний аналіз: Навчальний посібник. – Ч. I. – Львів: Видавництво Національного університету "Львівська політехніка", 2003. – 404 с.
7. Дюженкова Л. І., Колесник Т. І., Лященко М. Я. та ін. Математичний аналіз у задачах і прикладах: У 2 ч.: Навч. посіб. / – К.: Вища шк., 2002. – Ч. 1. – 462 с.
8. Дюженкова Л. І., Колесник Т. І., Лященко М. Я. та ін. Математичний аналіз у задачах і прикладах: У 2 ч.: Навч. посіб. / – К.: Вища шк., 2003. – Ч. 2. – 470 с.
9. Збірник задач з математичного аналізу. – 2-ге вид., виправ. і доп. / Укладачі: Ю. К. Рудавський та ін. – Львів: Видавництво Національного університету "Львівська політехніка", 2008. – Ч. I. – 352 с.

10. Збірник задач з математичного аналізу. – Ч. 2 / За ред. проф. Ю. К. Рудавського. – Львів: Видавництво Національного університету "Львівська політехніка", 2003. – 232 с.
11. Заболоцький М. В., Фединяк С. І., Філевич П. В., Червінка К. А. Практикум з математичного аналізу: Навчальний посібник. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2009. – 312 с.
12. Денисьєвський М. О., Курченко О. О., Нагорний В. Н., Нестеренко О. Н., Петрова Т. О., Чайковський А. В. Збірник задач з математичного аналізу. Функції однієї змінної. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2005. – 249 с.
13. Денисьєвський М. О., Чайковський А. В. Збірник задач з математичного аналізу. Функції кількох змінних. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2012. – 276 с.

Навчальне видання

Кореновський Анатолій Олександрович

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ
(елементарний курс)

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

В авторській редакції

Підп. до друку 22.04.2024. Формат 60x84/16.
Ум.-друк. арк. 11,51. Наклад 20 пр.
Зам. № 2787.

Видавець і виготовлювач
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4215 від 22.11.2011 р.
65082, м. Одеса, вул. Єлісаветинська, 12, Україна
Тел.: (048) 723 28 39, e-mail: druk@onu.edu.ua