

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра математичного аналізу

Дипломна робота

бакалавра

на тему: **«ВМО мартінгали та їх властивості»**

«BMO martingales and their properties»

Виконала: студентка денної форми навчання
спеціальності 111 Математика
Цеховська Ксенія Ігорівна

Керівник: доктор фіз.-мат. наук, проф.
Кореновський А. О.

Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доц.
Вартанян Г.М.

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ ____ від «____» _____ р.
Завідувач кафедри

Захищено на засіданні ЕК № _____
Протокол № ____ від «____» ____ р.
Оцінка _____ / _____ / _____
Голова ЕК

ЗМІСТ

Вступ	3
1 Попередні результати	5
2 Мартингали	7
2.1 Визначення та деякі властивості	7
2.2 L_p -інтегрованість $\mathcal{E}(M)$	10
2.3 Формула Гірсанова	16
3 ВМО-Мартингали	19
3.1 Клас ВМО	19
3.2 Нерівність Джона-Ніренберга	21
3.3 Характеристики ВМО-мартингалу	26
3.4 Нерівність Феффермана	28
Висновки	30
Список літератури	31

ВСТУП

Актуальність теми.

Теорія мартингалів становить важливий сучасний напрямок в теорії ймовірностей. Незважаючи на те, що теорія мартингалів є одним з найбільш вивчених розділів теорії ймовірностей або, точніше, теорії випадкових процесів, інтенсивні дослідження продовжуються досі. Зокрема, за останнє десятиліття було опубліковано нові простіші доведення відомих тверджень.

Вивчення сучасної стохастичної фінансової математики немислимо без гарного знання теорії мартингалів. Саме мартингальний підхід виявився найбільш плідним у останніх досягненнях фінансової математики.

Як відомо, експоненціальні мартингали відіграють важливу роль у різних питаннях щодо абсолютної неперервності ймовірнісних законів випадкових процесів. Однак $\mathcal{E}(M)$ не завжди є рівномірно інтегрованим мартингалом, і часто важко перевірити рівномірну інтегрованість $\mathcal{E}(M)$. У 1960 році І.В. Гірсанов показав, що якщо $\langle M \rangle_\infty$ обмежений, то $\mathcal{E}(M)$ є рівномірно інтегрованим мартингалом. У 1972 році це твердження було доведено І.І. Гіхман і А.В. Скороход при $\exp((1 + \delta)\langle M \rangle_\infty) \in L_1$ для деяких $\delta > 0$, а потім за Р.С. Ліпстер і А.Н. Ширяєв, коли $\exp((\frac{1}{2} + \delta)\langle M \rangle_\infty) \in L_1$ для деяких $\delta > 0$. Після цього А.А. Новіков теж показав гарний критерій.

У дипломній роботі ми розглянемо саме мартингали у просторі функцій з обмеженими середніми коливаннями.

Простір BMO - функцій був введений Ф. Джоном і Л. Ніренбергом і дали перший важливий результат щодо BMO - функцій. У 1971 С. Фефферман характеризує простір BMO - функцій як двоїстим простору Харді H_1 . Це один із найважливіших результатів у теорії H_1 . З іншого боку, в 1972 році Р. К. Гетур і М. Дж. Шарп ввели концепцію конформного мартингалу.

Мета та завдання роботи.

Метою представленої дипломній роботі є встановлення поняття BMO -мартингалу та деяких його властивостей. Досягненню мети сприяють наступні основні задачі дипломної роботи.

- 1) Дати визначення BMO -мартингалу та вивчити його основні власти-

вості.

- 2) Показати застосування BMO -мартингалу для доведення теореми Джона-Ніренберга.
- 3) Встановити характеристики BMO -мартингалу.
- 4) Розглянути нерівність Феффермана.

Робота має реферативний характер.

Структура роботи.

Дипломна робота загальним обсягом 32 сторінки складається з вступу, трьох розділів, які поділяються на підрозділи, висновків, списку використаних джерел, що містить 14 найменувань.

У першому розділі представлені попередні результати, які нам знадобляться для формулювання визначень і теорем, в тому числі для доведення теорем, у наступних розділах.

У другому розділі сформулюємо визначення мартінгала та деяких його властивостей. Розглянемо L_p -інтегрованість $\mathcal{E}(M)$, важливий критерій, який сформулював А. А. Новіков та формулу Гірсанова.

У третьому розділі сформулюємо поняття BMO -мартингалу та вивчимо його основні властивості. Розглянемо застосування BMO -мартингалу для доведення теореми Джона-Ніренберга та нерівності Феффермана. Встановимо основні характеристики BMO -мартингалу.

РОЗДІЛ 1

ПОПЕРЕДНІ РЕЗУЛЬТАТИ

В цьому розділі проводиться огляд відомих результатів, які ми будемо використовувати у подальшому.

Означення 1.1. Множина Ω — простір елементарних подій, а елементи цієї множини $w_1, w_2, w_3, \dots$ називають елементарними подіями.

Означення 1.2. Система підмножин $\mathcal{F}$ множини Ω називається σ -алгеброю множин, якщо:

- 1) $\Omega \in \mathcal{F}$;
- 2) з того, що $A \in \mathcal{F}$ випливає, що $\bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$;
- 3) з того, що $A_n \in \mathcal{F}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ випливає, що $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Означення 1.3. Нехай $(\Omega, \mathcal{F})$ - вимірний простір. Ймовірністю (або ймовірнісною мірою) на цьому просторі називається абстрактна невід’ємна міра P , визначена на $\mathcal{F}$, із загальною масою, що дорівнює 1.

Система $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ називається ймовірнісним простором.

Іншими словами, P є невід’ємною функцією множини, визначеною на $\mathcal{F}$, такою, що $P(\Omega) = 1$, і задовольняє наступній властивості. Для кожної послідовності попарних множин, які не перетинаються $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, маємо $P\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum P(A_n)$.

Означення 1.4. Ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ називається повним, якщо кожна підмножина A з Ω , що міститься в множині нульової P -міри, належить σ -алгебрі $\mathcal{F}$ (отже має P -міру нуль).

Означення 1.5. Вимірним простором називається пара $(\Omega, \mathcal{F})$, де $\mathcal{F}$ — σ -алгебра підмножин Ω .

Означення 1.6. Нехай функція f задана на вимірній множині E . Цю функцію називають вимірною, якщо для будь-якого $\lambda \in \mathbb{R}$ множина

$$E(f > \lambda) = \{x \in E: f(x) > \lambda\}$$

вимірний.

Нехай $(\Omega, \mathcal{F})$ - вимірний простір і T - підмножина $\mathbb{R}$.

Означення 1.7. Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — ймовірнісний простір і нехай задана функція $X: T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Якщо при будь-якому $t \in T$ випадкова величина $X_t \in \mathcal{F}$ -вимірною, то X називається випадковою функцією або випадковим процесом.

Означення 1.8. Сукупність σ -підалгебр $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$, $t \in T$, називається фільтрацією, якщо $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ для будь-яких $s, t \in T$ таких, що $s \leq t$.

Означення 1.9. Випадкова величина $\tau: \Omega \rightarrow T$ називається моментом зупинки фільтрації $\mathcal{F}_t$, якщо

$$\forall t \in T \quad \{w \in \Omega: \tau(w) \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Означення 1.10. Випадковий процес $X: T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ називається узгодженим з фільтрацією $\mathcal{F}_t$, якщо випадкова величина X_t вимірний щодо $\mathcal{F}_t$ при кожному $t \in T$.

Для доведення подальших результатів нам знадобиться Теорема Тейлора.

Теорема 1.1 (Тейлора). *Нехай функція f визначена в околі I точки x_0 і має в цьому околі похідні до $(n - 1)$ -го порядку включно, а в точці x_0 має похідну n -го порядку. Тоді справедлива рівність*

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 \\ + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \quad \text{при } x \rightarrow x_0. \end{aligned}$$

Доведення цієї теореми можна знайти у [1].

РОЗДІЛ 2

МАРТИНГАЛИ

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — повний ймовірнісний простір з фільтрацією $(\mathcal{F}_t)$, що задовольняє таким умовам:

- 1) $\mathcal{F}_0$ містить усі P -нульові набори $\mathcal{F}$,
- 2) $\mathcal{F}_t = \bigcap_{u>t} \mathcal{F}_u$ для всіх $t \geq 0$.

2.1. Визначення та деякі властивості

Означення 2.1. Дійснозначний випадковий процес $M = (M_t, \mathcal{F}_t)$ називається мартингалом (відповідно супермартингалом, субмартингалом), якщо

- 1) кожен M_t є $\mathcal{F}_t$ -вимірним, тобто M адаптований до фільтрації $(\mathcal{F}_t)$,
- 2) $M_t \in L_1$ для кожного t ,
- 3) якщо $s \leq t$, то $E[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s$ майже напевно (відповідно $E[M_t | \mathcal{F}_s] \leq M_s$, відповідно $\geq M_s$).

Означення 2.2. Адаптований процес $M = (M_t, \mathcal{F}_t)$ називається локальним мартингалом, якщо існує послідовність збільшення часу зупинки T_n з $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty$ майже напевно такий, що $(M_{t \wedge T_n} I_{\{T_n > 0\}}, \mathcal{F}_t)$ є мартингалом для кожного n .

Така послідовність (T_n) часів зупинки називається фундаментальною послідовністю. Нагадаємо, що час зупинки T - це випадкова величина, що приймає значення в $[0, \infty]$, такі, що $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ для кожного $t \geq 0$.

Протягом усієї роботи ми припускаємо, що будь-який локальний мартингал, адаптований до цієї фільтрації, є неперервним.

Позначимо через $\langle M \rangle$ неперервний процес зростання, такий, що $M^2 - \langle M \rangle$ також є локальним мартингалом. Нехай $t > 0$ і $\{T_i^n\}_{i=0,1,\dots,k_n}$ — послідовність часів зупинки така, що $0 = T_0^n \leq T_1^n \leq \dots \leq T_{k_n}^n = t$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq i < k_n} (T_{i+1}^n - T_i^n) = 0$. Тоді з відомого результату К. Долеанса-

Даде ([2]) впливає, що

$$\sum_{i=0}^{k_n-1} (M_{T_{i+1}^n} - M_{T_i^n})^2 \longrightarrow \langle M \rangle_t$$

за ймовірністю $n \rightarrow \infty$. Адаптований процес $X = (X_t, \mathcal{F}_t)$ називається напівмартингалом, якщо X_t можна записати як $M_t + A_t$, де M – локальний мартингал, а A – випадковий процес, який локально має обмежені варіації. Нехай $\langle X \rangle = \langle M \rangle$. Наступна формула відіграє надзвичайно важливу роль у стохастичному обчисленні.

Теорема 2.1 (Формула Іто). *Нехай $X = M + A$ – неперервний напівмартингал, а f – дійснозначна функція на R , яка двічі неперервно диференційована. Тоді*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle M \rangle_{s^*} \quad (2.1)$$

Зауважимо, що другий член у правій частині є стохастичним інтегралом.

Доведення. Нехай $f \in C^2$. Доведення по суті спирається на теорему Тейлора:

$$f(y) - f(x) = f'(x)(y - x) + \frac{1}{2} f''(x)(y - x)^2 + R(x, y) \quad (2.2)$$

де $|R(x, y)| \leq r(|y - x|)(y - x)^2$, такий, що $r : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ є зростаючою функцією, що задовольняє $\lim_{u \rightarrow 0} r(u) = 0$. Нехай тепер X – неперервний напівмартингал. Без втрати загальності можна взяти $X_0 = 0$ і далі, зупинившись на $T_m = \inf \{t : |X_t| \geq m\}$, ми можемо вважати, що X обмежений. Нехай t – фіксоване додатне число, а $\{T_i^n\}_{i=0,1,\dots,k_n}$ – послідовність часів зупинки така, що $0 = T_0^n \leq T_1^n \leq \dots \leq T_{k_n}^n = t$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq i < k_n} (T_{i+1}^n - T_i^n) = 0$. Тоді побачити неважко, що

$$\sum_{i=0}^{k_n-1} (X_{T_{i+1}^n} - X_{T_i^n})^2 \longrightarrow \langle X \rangle_t$$

за ймовірністю при $n \rightarrow \infty$. З (2.2) випливає, що

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) &= \sum_{i=0}^{k_n-1} \{f(X_{T_{i+1}^n}) - f(X_{T_i^n})\} \\ &= \sum_{i=0}^{k_n-1} f'(X_{T_i^n}) (X_{T_{i+1}^n} - X_{T_i^n}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k_n-1} f''(X_{T_i^n}) (X_{T_{i+1}^n} - X_{T_i^n})^2 + \sum_{i=0}^{k_n-1} R(X_{T_i^n}, X_{T_{i+1}^n}). \end{aligned}$$

Перша сума в останньому виразі збігається за ймовірністю до стохастичного інтеграла $\int_0^t f'(X_s) dX_s$, а друга сума збігається за ймовірністю до $\frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X \rangle_s$. Отже, залишилося розглянути третю суму. Щоб оцінити це, звернемо увагу на це

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_i r(|X_{T_{i+1}^n} - X_{T_i^n}|) = 0,$$

що випливає з припущення, що X обмежений і неперервний мартингал. Тоді

$$\left| \sum_{i=0}^{k_n-1} R(X_{T_i^n}, X_{T_{i+1}^n}) \right| \leq \max_{0 \leq i < k_n} r(|X_{T_{i+1}^n} - X_{T_i^n}|) \sum_{i=0}^{k_n-1} (X_{T_{i+1}^n} - X_{T_i^n})^2,$$

а права частина збігається за ймовірністю до 0 при $n \rightarrow \infty$. Отже, (2.1) виконується. $\square$

Формула Іто показує, що клас напівмартингалів є інваріантним щодо композиції з функцією C^2 .

Теорема 2.2. *Якщо M — неперервний локальний мартингал, то*

$$\mathcal{E}(M)_t = \exp \left(M_t - \frac{1}{2} \langle M \rangle_t \right) \quad (0 \leq t < \infty) \quad (2.3)$$

також локальний мартингал, такий що $\mathcal{E}(M)_0 = 1$.

Доведення. Застосовуючи формулу Іто з $X = M - \frac{1}{2} \langle M \rangle$ і $f(x) = e^x$,

отримуємо

$$\mathcal{E}(M)_t = 1 + \int_0^t \mathcal{E}(M)_s dM_s$$

що завершує доведення. $\square$

Приклад 2.1. Нехай $B = (B_t, \mathcal{F}_t)$ — одновимірний броунівський рух, що починається з 0. Для кожного $t > 0$ ми маємо

$$\begin{aligned} E[\mathcal{E}(B)_t] &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(x - \frac{t}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-t)^2}{2t}\right) dx \\ &= 1 \end{aligned}$$

і, отже, $\mathcal{E}(B)$ є мартингалом. Однак, оскільки $\mathcal{E}(B)_\infty = 0$ майже напевно, це не є рівномірно інтегрованим мартингалом.

Теорема 2.3. Якщо $X = (X^1, X^2, \dots, X^n)$ — це n -кортеж неперервних напівмартингалів і $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ має неперервні часткові похідні другого порядку, тоді

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) &= \sum_{i=1}^n \int_0^t D_i f(X_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \int_0^t D_{ij} f(X_s) d\langle X^i, X^j \rangle_s. \end{aligned}$$

Для доведення див.[3]

2.2. L_p -інтегрованість $\mathcal{E}(M)$

У цьому розділі ми покращуємо результати А. А. Новікова.

Спочатку доведемо наступний результат, з якого можна вивести простий критерій. Важливо, що константа $\frac{\sqrt{p}}{2(\sqrt{p}-1)}$ є найкращою з можливих, і тоді її доказ надзвичайно простий.

Теорема 2.4. Нехай $1 < p < \infty$ і $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Припустимо, що

$$\sup_T E \left(\exp \left(\frac{\sqrt{p}}{2(\sqrt{p}-1)} M_T \right) \right) < \infty,$$

де супремум береться для всіх обмежених часів зупинки T . Тоді $\mathcal{E}(M)$ є L_q -обмеженим мартингалом.

Доведення. Для $1 < p < \infty$ нехай $r = \frac{(\sqrt{p}+1)}{(\sqrt{p}-1)}$. Тоді експонента, спряжена з r , дорівнює $s = \frac{(\sqrt{p}+1)}{2}$, і звернемо увагу, що $(q - \sqrt{\frac{q}{r}})$, $s = \frac{\sqrt{p}}{2(\sqrt{p}-1)}$ шляхом простого обчислення. Оскільки маємо

$$\mathcal{E}(M)^q = \exp \left(\sqrt{\frac{q}{r}} M - \frac{q}{2} \langle M \rangle \right) \exp \left\{ \left(q - \sqrt{\frac{q}{r}} \right) M \right\},$$

застосування нерівності Гельдера показує, що для будь-якого часу зупинки S

$$\begin{aligned} E(\mathcal{E}(M)_S^q) &\leq E(\mathcal{E}(\sqrt{qr}M)_s)^{\frac{1}{r}} E \left(\exp \left\{ \left(q - \sqrt{\frac{q}{r}} \right) s M_S \right\}^{\frac{1}{s}} \right) \\ &\leq \sup_T E \left(\exp \left\{ \frac{\sqrt{p}}{2(\sqrt{p}-1)} M_T \right\} \right)^{\frac{1}{s}} < \infty. \end{aligned}$$

На цьому доведення закінчено. □

Теорема 2.5. Припустимо, що

$$\sup_T E \left(\exp \left(\frac{1}{2} M_T \right) \right) < \infty,$$

де супремум береться для всіх обмежених часів зупинки T . Тоді $\mathcal{E}(M)$ — рівномірно інтегрований мартингал.

Доведення. Нехай $0 < a < 1$ і виберіть $p > 1$ так, що $\frac{\sqrt{p}}{(\sqrt{p}-1)} < \frac{1}{a}$. Тоді за припущенням $\mathcal{E}(aM)$ є L_q -обмеженим мартингалом, отже, очевидно, є рівномірно інтегрованим мартингалом. Оскільки

$$\mathcal{E}(aM) = \mathcal{E}(M)^{a^2} \exp(a(1-a)M),$$

за допомогою нерівності Гельдера з показниками a^{-2} і $(1-a^2)^{-1}$ ми знахо-

ДИМО

$$\begin{aligned} 1 = E(\mathcal{E}(aM)_\infty) &\leq E(\mathcal{E}(M)_\infty)^{a^2} E\left(\exp\left(\frac{a}{1+a}M_\infty\right)\right)^{1-a^2} \\ &\leq E(\mathcal{E}(M)_\infty)^{a^2} E\left(\exp\left(\frac{1}{2}M_\infty\right)\right)^{2a(1-a)} \end{aligned}$$

Другий доданок у правій частині збігається до 1 як $a \rightarrow 1$. Отже, маємо $1 \leq E(\mathcal{E}(M)_\infty)$, що завершує доведення. $\square$

Приклад 2.2. Для $0 < a < \infty$ нехай $\tau_a = \inf\{t > 0 : B_t = a\}$. Нехай тепер $\lambda > 0$. Тоді $\sup_T E\left[\exp\left(\frac{1}{2}B_T^{\tau_a}\right)\right] \leq e^a$ і тому $E\left(\mathcal{E}\left(\sqrt{2\lambda}B^{\tau_a}\right)_\infty\right) = 1$ за Теоремою 2.3. Тоді маємо

$$E[\exp(-\lambda\tau_a)] = \exp(-a\sqrt{2\lambda}),$$

і, застосування формули інверсії для перетворення Лапласа дає

$$P(\tau_a = t) = \sqrt{2\pi t^3} a \exp\left(-\frac{a^2}{2t}\right).$$

Зауважимо, що твердження, протилежне до цієї теореми, невірне. Як наслідок можна отримати наступний критерій, оскільки

$$E\left(\exp\left(\frac{1}{2}M_T\right)\right) \leq E\left(\exp\left(\frac{1}{2}(M)_T\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

за кожного часу зупинки T .

Наслідок 2.1 (А. А. Новіков [5]). . *Припустимо, що*

$$E\left(\exp\left(\frac{1}{2}(M)_\infty\right)\right) < \infty.$$

Тоді $\mathcal{E}(M)$ — рівномірно інтегрований мартингал.

Це відомо як критерій Новікова. Зауважимо, що $\frac{1}{2}$ є найкращою константою в цих критеріях. Дотримуючись ідеї Новікова, наведемо її на прикладі нижче.

Приклад 2.3. Для $0 < a < 1$ визначимо час зупинки

$$T = \inf \{t : B_t \leq at - 1\},$$

і встановимо $M = B^T$. Тоді легко побачити, що $M_\infty - \frac{1}{2}\langle M \rangle_\infty = (a - \frac{1}{2})T - 1$ і тоді

$$\begin{aligned} E(\mathcal{E}(M)_\infty) &= e^{-1} E\left(\exp\left(\left(a - \frac{1}{2}\right)T\right)\right) \\ &\leq e^{-1} E\left(\exp\left(\frac{a^2}{2}T\right)\right) \end{aligned}$$

Оскільки $1 \geq E(\mathcal{E}(aM)_\infty) = E\left(\exp\left(\frac{a^2}{2}T\right)\right) e^{-a}$, маємо

$$E\left(\exp\left(\frac{a^2}{2}\langle M \rangle_\infty\right)\right) = E\left(\exp\left(\frac{a^2}{2}T\right)\right) \leq e^a.$$

Однак, оскільки $E(\mathcal{E}(M)_\infty) \leq e^{a-1} < 1$, $\mathcal{E}(M)$ не є рівномірно інтегрованим мартингалом.

Далі на прикладі, ми проілюструємо, що константу $\frac{\sqrt{p}}{2(\sqrt{p}-1)}$ в Теоремі 2.4 не можна замінити меншим числом.

Приклад 2.4. Нехай $B = (B_t, \mathcal{F}_t)_{0 \leq t < \infty}$ — одновимірний броунівський рух із $B_0 = 0$. Ми встановили

$$\tau = \inf \{t \geq 0 : B_t \leq t - 1\},$$

що, очевидно, є часом зупинки. Оскільки $0 < \tau < \infty$ і $B_\tau = \tau - 1$, ми маємо $\mathcal{E}(B^\tau)_\infty = \exp(\frac{\tau}{2-1})$, з чого відразу випливає, що $E(\exp(\frac{\tau}{2})) \leq e$. Тоді $E(\mathcal{E}(B^\tau)_\infty) = 1$ за критерієм Новікова. Звернемо увагу, що $E(\exp(\frac{\tau}{2})) = e$. Очевидно, що якщо $0 < a \leq 1$, то $\exp(\frac{a^2\tau}{2}) \in L_1$ і тому $\mathcal{E}(aB^\tau)$ — рівномірно інтегрований мартингал. З іншого боку, для $b > 1$ маємо $\exp(\frac{b^2\tau}{2}) \notin L_1$, тому що $E(\mathcal{E}(bB^\tau)_\infty) \leq e^{-b} E(\exp(\frac{\tau}{2})) \leq e^{-b+1} < 1$. Нехай тепер $1 < \lambda < \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p}-1}$. Звернемо увагу, що $\frac{q(2\lambda-1)}{\lambda^2} > 1$. Нехай $M = \alpha B^\tau$, де $\alpha = \frac{1}{\lambda}$, і розглянемо експоненційний мартингал $\mathcal{E}(M)$. При $0 < \alpha < 1$, це рівномірно інтегрований

мартингал. Оскільки $B_\tau = \tau - 1$, за визначенням τ ми знаходимо

$$\begin{aligned} E \left(\exp \left(\frac{1}{2} \lambda M_\infty \right) \right) &= E \left(\exp \left(\frac{1}{2} B_\tau \right) \right) \\ &= E \left(\exp \left(\frac{1}{2} \tau \right) \right) e^{-\frac{1}{2}} \\ &= e^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Однак оскільки $\mathcal{E}(M)_\infty^q = e^{-\alpha q} \exp \left\{ \frac{1}{2} \frac{q(2\lambda-1)}{\lambda^2} \tau \right\} \notin L_1$, $\mathcal{E}(M)$ не є L_q -обмеженим мартингалом.

Звернемо увагу, що критерій Новікова працює не тільки для $\mathcal{E}(M)$, але й для $\mathcal{E}(-M)$, і, до речі, $\mathcal{E}(-M)$ не є завжди рівномірно інтегрованим мартингалом, навіть якщо $\mathcal{E}(M)$ обмежений.

Лема 2.1. *Нехай $a, b > 0$ і $\tau = \inf \{t : B_t \notin (-a, b)\}$. Тоді маємо*

$$E \left(\exp \left(\frac{1}{2} \theta^2 \tau \right) \right) = \frac{\cos \left(\frac{a-b}{2} \theta \right)}{\cos \left(\frac{a+b}{2} \theta \right)} \quad \left(0 \leq \theta < \frac{\pi}{a+b} \right).$$

Доведення. Спочатку ми покажемо, дотримуючись гарної ідеї Д. Лепінгля, що процес X , заданий за допомогою

$$X_t = \exp \left(\frac{1}{2} \theta^2 t \right) \cos \theta \left(B_t - \frac{b-a}{2} \right) \quad (0 \leq t < \infty)$$

є локальним мартингалом. Для цього нехай

$$F(x, y) = \exp \left(\frac{1}{2} \theta^2 x \right) \cos \theta \left(y - \frac{b-a}{2} \right).$$

Тоді зрозуміло, що $X_t = F(t, B_t)$. Оскільки $F(x, y)$ двічі неперервно диференційована, формула Іто дає

$$X_t = \cos \left(\frac{b-a}{2} \theta \right) - \theta \int_0^t \exp \left(\frac{1}{2} \theta^2 s \right) \sin \theta \left(B_s - \frac{b-a}{2} \right) dB_s$$

Таким чином, X є локальним мартингалом. З іншого боку, з визначення τ

випливає, що $|B_\tau - \frac{b-a}{2}| = \frac{a+b}{2}$ і так

$$\begin{aligned} X_\tau &= \exp\left(\frac{1}{2}\theta^2 T\right) \cos\theta\left(B_\tau - \frac{b-a}{2}\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}\theta^2 \tau\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\theta\right) \end{aligned}$$

Нехай тепер $0 \leq \theta < \frac{\pi}{a+b}$. Тоді $|B_{t \wedge \tau} - \frac{b-a}{2}| \theta \leq \frac{a+b}{2\theta} < \frac{\pi}{2}$, і так

$$X_{t \wedge \tau} \geq \exp\left\{\frac{1}{2}\theta^2(t \wedge \tau)\right\} \cos\left(\frac{a+b}{2}\theta\right) > 0$$

Таким чином, X^τ є додатним супермартингалом, з чого випливає, що

$$\cos\left(\frac{a+b}{2}\theta\right) E\left(\exp\left(\frac{1}{2}\theta^2 \tau\right)\right) \leq E(X_0) = \cos\left(\frac{a-b}{2}\theta\right)$$

тобто,

$$E\left(\exp\left(\frac{1}{2}\theta^2 \tau\right)\right) \leq \frac{\cos\left(\frac{a-b}{2}\theta\right)}{\cos\left(\frac{a+b}{2}\theta\right)} < \infty.$$

Поєднання цього результату з визначенням X показує, що $X_\tau^* \in L_1$, що означає, що $E(X_T) = E(X_0)$. Оскільки $X_0 = \cos\left(\frac{a-b}{2}\theta\right)$ і $X_\tau = \exp\left(\frac{1}{2}\theta^2 \tau\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\theta\right)$, відразу випливає висновок. $\square$

Теорема 2.6. Якщо $\|M\|_\infty < \frac{\pi}{2}$, то

$$E\left(\exp\left(\frac{1}{2}\langle M \rangle_\infty\right)\right) < \infty.$$

Однак існує локальний мартингал M такий, що $\|M\|_\infty = \frac{\pi}{2}$ і $\exp\left(\frac{1}{2}\langle M \rangle_\infty\right) \notin L_1$.

Доведення. По суті, достатньо перевірити цю теорему у випадку, коли $M = B^\zeta$ за певний час зупинки ζ , оскільки будь-який неперервний локальний мартингал можна звести до зупиненого броунівського руху за допомогою неперервної зміни часу. По-перше, припустимо, що $\|M\|_\infty < \frac{\pi}{2}$, і розглянемо час зупинки $\tau = \inf\{t : B_t \notin (-d, d)\}$ де $\|M\|_\infty < d < \frac{\pi}{2}$. Тоді, оскільки

$\langle M \rangle_\infty = \zeta < \tau$ і $1 < \frac{\pi}{2d}$, то з леми 2.1 випливає, що

$$E \left(\exp \left(\frac{1}{2} \langle M \rangle_\infty \right) \right) \leq E \left(\exp \left(\frac{1}{2} \tau \right) \right) \leq \frac{1}{\cos d} < \infty$$

З іншого боку, нехай $\tau = \inf \{t : |B_t| = \frac{\pi}{2}\}$ і рівномірний мартингал $M = B^\tau$. Тоді знаходимо

$$\begin{aligned} E \left(\exp \left(\frac{1}{2} \tau \right) \right) &= \lim_{\theta \rightarrow 1} E \left(\exp \left(\frac{1}{2} \theta^2 \tau \right) \right) \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 1} \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2} \theta} = \infty \end{aligned}$$

за лемою. Таким чином теорема доведена. $\square$

2.3. Формула Гірсанова

У цьому розділі ми вважаємо, що експоненціальний процес $\mathcal{E}(M)$, заданий формулою (1.3), є рівномірно інтегрованим мартингалом. Це означає, що $d\hat{P} = \mathcal{E}(M)_\infty dP$ також є мірою ймовірності на Ω . Позначимо через $\hat{E}[\cdot]$ очікування над Ω відносно $\hat{P}$. Зауважте, що властивість мартингалу не є інваріантною за такою зміною закону. У 1960 році вирішення цієї проблеми описав І. В. Гірсанов ([8]). Він отримує, що при абсолютно неперервній зміні міри ймовірності броунівський рух перетворюється на суму броунівського руху і другого процесу з вибірковими функціями, які є абсолютно неперервними відносно міри Лебега. У 1974 р. природне узагальнення цього результату було отримано Х. Ван Шуппенем і Е. Вонгом ([9]).

Лема 2.2. *Y є локальним мартингалом відносно $\hat{P}$ тоді й тільки тоді, коли $Y\mathcal{E}(M)$ є локальним мартингалом відносно P .*

Доведення. Нехай Y — локальний мартингал відносно $\hat{P}$. Без втрати загальності можна вважати, що Y є мартингалом. Тоді для всіх $s < t$ і $A \in \mathcal{F}_s$,

$$\int_A Y_t d\hat{P} = \int_A Y_s d\hat{P}$$

Оскільки $d\hat{P} = \mathcal{E}(M)_T dP$ на $\mathcal{F}_T$ для кожного часу зупинки T , ми маємо

$$\int_A Y_t \mathcal{E}(M)_t dP = \int_A Y_s \mathcal{E}(M)_s dP$$

А саме, $Y\mathcal{E}(M)$ є мартингалом відносно P . З цього аргументу відразу випливає зворотнє. $\square$

Далі нехай $\mathcal{L}$ (відповідно $\hat{\mathcal{L}}$) позначає клас усіх неперервних локальних мартингалів відносно P (відповідно $\hat{P}$).

Теорема 2.7. *Для будь-якого $X \in \mathcal{L}$ процес $\hat{X} = \langle X, M \rangle - X$ належить до класу $\hat{\mathcal{L}}$ і $\langle \hat{X} \rangle = \langle X \rangle$ за будь-якої міри ймовірності. Крім того, відображення $\phi : X \mapsto \hat{X}$ є лінійним і бієктивним.*

Відображення $\phi : \mathcal{L} \rightarrow \hat{\mathcal{L}}$ називається перетворенням Гірсанова. Його також часто називають трансформацією дрейфу.

Доведення. Згідно з лемою 2.2, щоб побачити $\hat{X} \in \hat{\mathcal{L}}$, достатньо перевірити, що $\mathcal{E}(M)\hat{X} \in \mathcal{L}$. Очевидно, $\hat{X}$ є напівмартингалом щодо P , і зауважимо, що

$$\langle X, M \rangle_t = \int_0^t \mathcal{E}(M)_s^{-1} d\langle X, \mathcal{E}(M) \rangle_{s-}$$

Тоді за теоремою 2.3 маємо

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(M)_t \hat{X}_t &= \mathcal{E}(M)_0 \hat{X}_0 + \int_0^t \hat{X}_s d\mathcal{E}(M)_s + \int_0^t \mathcal{E}(M)_s d\hat{X}_s + \langle \mathcal{E}(M), \hat{X} \rangle_t \\ &= \int_0^t \hat{X}_s d\mathcal{E}(M)_s + \int_0^t \mathcal{E}(M)_s dX_s \end{aligned}$$

який належить до $\mathcal{L}$. Аналогічно, за теоремою 2.3 маємо

$$\left(\hat{X}_t^2 - \langle X \rangle_t \right) \mathcal{E}(M)_t = \int_0^t \left(\hat{X}_s^2 - \langle X \rangle_s \right) d\mathcal{E}(M)_s - 2 \int_0^t \hat{X}_s \mathcal{E}(M)_s dX_s,$$

з чого випливає, що $\hat{X}^2 - \langle X \rangle$ є локальним мартингалом відносно $\hat{P}$. Тоді зрозуміло, що $\langle \hat{X} \rangle = \langle X \rangle$. З цих фактів випливає, що відображення g є лінійним та ін'єктивним. Тому залишається показати сюр'єктивність. Оскільки $\hat{M} = \langle M \rangle - M$ і $\langle \hat{M} \rangle = \langle M \rangle$, ми маємо $\mathcal{E}(\hat{M}) = \mathcal{E}(M)^{-1}$, так

що для будь-якого $X' \in \hat{\mathcal{L}}X = \langle X', \hat{M} \rangle - X'$ належить до $\mathcal{L}$. Оскільки $\hat{X} = \langle X, M \rangle - X$ знаходиться в $\hat{\mathcal{L}}$, $X' - \hat{X} = \langle X', \hat{M} \rangle - \langle X, M \rangle$ також $\hat{P}$ -неперервний локальний мартингал зі скінченною варіацією на кожному кінцевому інтервалі. Це означає, що $X' = \hat{X}$. Таким чином теорема доведена. $\square$

Х. Ван Шуппенон і Е. Вонгом ([9]) спробували поширити це перетворення на неперервні справа локальні мартингали, і в 1977 р. узагальнення було повністю встановлено Е. Ленгларт ([4]). Він довів, що відображення $\phi : \mathcal{L} \rightarrow \hat{\mathcal{L}}$, задане

$$\phi(X)_t = X_t - \int_0^t \mathcal{E}(M)_s^{-1} d[X, \mathcal{E}(M)]_s$$

також чітко визначене і лінійне у загальних параметрах.

РОЗДІЛ 3

ВМО-МАРТИНГАЛИ

3.1. Клас ВМО

Означення 3.1. Дійснозначна локально інтегрована функція f , визначена на $\mathbb{R}^n$, знаходиться в $ВМО$, просторі функцій обмеженого середнього коливання, якщо

$$\sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q| dx < \infty$$

де супремум береться по всім кубам Q у $\mathbb{R}^n$, $|Q|$ позначає об'єм Q , і

$$f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) dx.$$

Нехай $M = (M_t, \mathcal{F}_t)$ — рівномірно інтегрований мартингал з $M_0 = 0$, а для $1 \leq p < \infty$ ми встановлюємо

$$\|M\|_{ВМО_p} = \sup_T \left\| E(|M_\infty - M_{T-}|^p \mid \mathcal{F}_T)^{1/p} \right\|_\infty \quad (3.1)$$

де супремум береться по всім моментам зупинки T .

Клас $\{M : \|M\|_{ВМО_p} < \infty\}$ обозначається $ВМО_p$, і помітим, що $\|\cdot\|_{ВМО_p}$ — норма в цьому просторі. З нерівності Гьольдера відразу слідує, що при $p < q$ $ВМО_q \subset ВМО_p$. Зауважимо, що якщо $M \in ВМО$ і T — час зупинки, то $M^T \in ВМО$ і

$$\|M^T\|_{ВМО_1} \leq \|M\|_{ВМО_1}.$$

Ми маємо справу виключно з неперервними локальними мартингалами. Зверніть увагу, що якщо $\|M\|_2 < \infty$, то

$$\|M\|_{ВМО_2} = \sup_T \left\| E(\langle M \rangle_\infty - \langle M \rangle_T \mid \mathcal{F}_T)^{1/2} \right\|_\infty,$$

що випливає з того, що $M^2 - \langle M \rangle$ — рівномірно інтегрований мартингал. Нехай тепер L_∞ — клас всіх обмежених мартингалів, а H_∞ — клас всіх

мартингалів M , для яких $\langle M \rangle_\infty$ обмежений. Оскільки $\|M\|_{BMO_1} \leq 2\|M\|_\infty$ і $\|M\|_{BMO_2} \leq \|\langle M \rangle_\infty\|_\infty^{\frac{1}{2}}$ ці два класи L_∞ і H_∞ , очевидно, містяться в BMO . Однак, як легко бачити, BMO не є ні L_∞ , ні H_∞ загалом, і далі не існує відношення включення між L_∞ і H_∞ . Наприклад, якщо $B = (B_t)$ — одномірний броунівський рух, то процес B зупинився в точці τ , де $\tau = \inf \{t : |B_t| = 1\}$, належить $L_\infty \setminus H_\infty$. З іншого боку, легко бачити, що $(B_{t \wedge 1}) \in H_\infty \setminus L_\infty$.

Тепер зауважимо, що мартингал $E[B_1^2 | \mathcal{F}_t]$ не лежить у BMO . До речі, якщо $M, N \in BMO$ і якщо f — липшицева функція на $\mathbb{R}^2$, тобто $|f(x, y) - f(x', y')| \leq c(|x - x'| + |y - y'|)$ для всіх $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, з константою $c > 0$, то мартингал L , який визначається рівністю $L_t = E(f(M_\infty, N_\infty) | \mathcal{F}_t)$ ($0 \leq t < \infty$) також знаходиться в BMO . Насправді, для будь-якого часу зупинки T маємо

$$\begin{aligned} E(|L_\infty - L_T| | \mathcal{F}_T) &\leq 2E(|f(M_\infty, N_\infty) - f(M_T, N_T)| | \mathcal{F}_T) \\ &\leq 2c(E(|M_\infty - M_T| | \mathcal{F}_T) + E(|N_\infty - N_T| | \mathcal{F}_T)) \\ &\leq 2c(\|M\|_{BMO_1} + \|N\|_{BMO_1}). \end{aligned}$$

Зокрема, мартингали $E(M_\infty \vee N_\infty | \mathcal{F})$ і $E(M_\infty \wedge N_\infty | \mathcal{F})$ належать класу BMO . З іншого боку, звідси випливає, що для кожного $p \geq 1$

$$\|M\|_{BMO_p} = \sup_T \frac{\|M_\infty - M_T\|_p}{P(T < \infty)^{\frac{1}{p}}}. \quad (3.2),$$

де супремум береться за всі часи зупинки T , що задовольняють $P(T < \infty) > 0$. Щоб показати це, нехай α_p буде правою частиною (3.2) для простоти. Тоді за визначенням $\| \cdot \|_{BMO_p}$

$$\begin{aligned} E(|M_\infty - M_T|^p) &= E(E(|M_\infty - M_T|^p | \mathcal{F}_T) I_{\{T < \infty\}}) \\ &\leq \|M\|_{BMO_p}^p P(T < \infty) \end{aligned}$$

з чого випливає, що $\alpha_p \leq \|M\|_{BMO_p}$. З іншого боку, для кожного $A \in \mathcal{F}_T$

маємо

$$\begin{aligned} E (E (|M_\infty - M_T|^p \mid \mathcal{F}_T) : A) &= E (|M_\infty - M_{T_A}|^p) \\ &\leq \alpha_p^p P (T_A < \infty) \\ &\leq \alpha_p^p P(A), \end{aligned}$$

з чого відразу випливає, що $\|M\|_{BMO_p} \leq \alpha_p$. Завершуємо цей розділ зауваженням М. Емері. Можна легко переконатися, що якщо $M \in BMO$, то для кожного ε з $0 < \varepsilon < 1$ існує константа $a > 0$, що задовольняє нерівність

$$P \left(\sup_{0 \leq t < \infty} |M_{T+t} - M_T| > a \mid \mathcal{F}_T \right) \leq 1 - \varepsilon \quad (3.3)$$

для будь-якого часу зупинки T . М. Емері показав у [6], що якщо існують дві константи $a \geq 0$ і $0 < \varepsilon < 1$ такі, що нерівність (3.3) справедлива для кожного часу зупинки T , то M належить до класу BMO .

3.2. Нерівність Джона-Ніренберга

Наступна нерівність, яка називається нерівністю Джона-Ніренберга, має принципове значення в нашому дослідженні.

Теорема 3.1. *Якщо $\|M\|_{BMO_1} < 1/4$, то для будь-якого часу зупинки T*

$$E (\exp (|M_\infty - M_T|) \mid \mathcal{F}_T) \leq \frac{1}{1 - 4\|M\|_{BMO_1}}. \quad (3.4)$$

Зауважимо, що безперервність вибірки M не є суттєвою для справедливості цієї нерівності. Для доведення цієї теореми скористаємося наступною лемою.

Лема 3.1 (Д. В. Струк [7]). *Нехай $X = (X_t, \mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq \infty}$ — праворуч неперервний процес з лівими границями. Якщо існує невід’ємна інтегрована випадкова величина U така, що*

$$E (|X_T - X_{S-}| \mid \mathcal{F}_S) \leq E (U \mid \mathcal{F}_S) \quad (3.5)$$

для будь-якої пари S, T часів зупинки з $S \leq T$, то нерівність

$$\beta P(X^* \geq \alpha + \beta) \leq E(U : X^* \geq \alpha) \quad (3.6)$$

виконується для кожного $\alpha, \beta > 0$. Тут $X^* = \sup_{0 \leq t \leq \infty} |X_t|$.

Доведення. Нехай $\alpha, \beta > 0$ задано і встановлено

$$S = \inf \{t \geq 0 : |X_t| \geq \alpha\}, \quad T = \inf \{t \geq 0 : |X_t| \geq \alpha + \beta\}.$$

Очевидно, що S і T - це час зупинки з $S \leq T$ майже напевно, і з визначень цих часів зупинки випливає, що

$$\{X^* > \alpha + \beta\} \subset \{|X_T - X_{S-}| \geq \beta, |X_S| \geq \alpha\}$$

і $\{|X_S| \geq \alpha\} \in \mathcal{F}_S$. Тоді за припущенням маємо

$$\begin{aligned} P(X^* > \alpha + \beta) &\leq \frac{1}{\beta} E(|X_T - X_{S-}| : |X_S| \geq \alpha) \\ &\leq \frac{1}{\beta} E(U : X^* \geq \alpha) \end{aligned}$$

з якого відразу випливає (3.6). □

Теорема 2.1. Припустимо, що $\|M\|_{BMO_1} < \frac{1}{4}$, і для зручності покладемо $c = \|M\|_{BMO_1}$. Тоді для будь-якої пари S, T часів зупинки з $S \leq T$

$$E(|M_T - M_S| \mathcal{F}_S) \leq E(|M_\infty - M_S| \mathcal{F}_S) \leq c$$

тож за лемою 3.1 маємо

$$\beta P\{(M^* - \beta)^+ \geq \alpha\} \leq \beta P(M^* \geq \alpha + \beta) \leq cP(M^* \geq \alpha)$$

для кожного $\alpha, \beta > 0$. З цього відразу випливає, що

$$\beta E((M^* - \beta)^+) \leq cE(M^*).$$

Встановивши $\beta = 2c$, ми маємо

$$2cE(M^* - 2c) \leq cE(M^*), \text{ that is, } E(M^*) \leq 4c.$$

Не важко перевірити, що умовна форма цієї нерівності є наступною: для будь-якого часу зупинки S

$$E\left(\sup_{S \leq t < \infty} |M_t - M_S| \mid \mathcal{F}_S\right) \leq 4c.$$

Тоді $E(M^* - M_S^* \mid \mathcal{F}_S) \leq 4c$, так що

$$E\left(\sup_{S \leq t < \infty} |M_t - M_S|^n \mid \mathcal{F}_S\right) \leq n!(4c)^n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

за енергетичними нерівностями. Отже, нерівність

$$E(\exp(|M_\infty - M_S|) \mid \mathcal{F}_S) \leq \frac{1}{1 - 4c}$$

дійсна для будь-якого часу зупинки S . □

Наслідок 3.1. *Нехай $1 < p < \infty$. Існує додатна константа C_p така, що для будь-якого рівномірно інтегрованого мартингалу M*

$$\|M\|_{BMO_1} \leq \|M\|_{BMO_p} \leq C_p \|M\|_{BMO_1}.$$

Доведення. Ліва нерівність відразу випливає з нерівності Єнсена. Щоб показати праву нерівність, достатньо розглянути випадок, коли $\|M\|_{BMO_1} > 0$. За теоремою 3.1 маємо

$$E\left(\exp\left(\frac{1}{8\|M\|_{BMO_1}} |M_\infty - M_T|\right) \mid \mathcal{F}_T\right) \leq 2$$

з чого можна легко зробити висновок. Наприклад, якщо $p \in \mathbb{N}$, то

$$\frac{1}{p! (8\|M\|_{BMO_1})^p} E(|M_\infty - M_T|^p \mid \mathcal{F}_T) \leq 2$$

а саме $\|M\|_{BMO_p} \leq 8 \cdot 2^{\frac{1}{p}} (p!)^{\frac{1}{p}} \|M\|_{BMO_1}$. □

Ми знову сформулюємо визначення BMO -мартингалу.

Означення 3.2. Нехай BMO — клас усіх рівномірно інтегрованих мартингалів M таких, що $\|M\|_{BMO_1} < \infty$. Мартингал M у BMO називається BMO -мартингалом.

Зрозуміло, що клас BMO залежить від основної міри ймовірності, і тому ми позначатимемо його $BMO(P)$ у разі необхідності.

Зауваження 3.1. Нехай тепер Φ буде зростаючою опуклою функцією на $[0, +\infty[$ з $\Phi(0) = 0$, і нехай $M = (M_t)_{t \geq 0}$ — рівномірно інтегрований правий неперервний мартингал. Ми встановили

$$\|M\|_{BMO_\Phi} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \sup_T \left\| E \left(\Phi \left(\frac{1}{\lambda} |M_\infty - M_{T-}| \right) \mid \mathcal{F}_T \right) \right\|_\infty \leq 1 \right\},$$

де супремум береться за всі часи зупинки T . Норму BMO_Φ ввели Н. Л. Бассілі та Дж. Модьороді, і вони неявно довели, що якщо $\int_0^\infty \Phi(ct)e^{-t}dt < +\infty$ для деякої константи $c > 0$, то для будь-якого рівномірно інтегрованого неперервного мартингалу $M = (M_t)$

$$c_\Phi \|M\|_{BMO_1} \leq \|M\|_{BMO_\Phi} \leq C_\Phi \|M\|_{BMO_1}, \quad (3.7)$$

де $c_\Phi > 0$ і $C_\Phi > 0$ залежать лише від Φ . М. Кікучі показав, що якщо $A = (A_t)$ є адаптованим правим неперервним процесом, лівий потенціал якого обмежений константою $c > 0$, то нерівність

$$E(\Phi(A_\infty)) \leq \frac{1}{c} \left(\int_0^\infty \Phi(ct)e^{-t}dt \right) E(A_\infty) \quad (3.8)$$

виконується, і, використовуючи цю нерівність, він дав гарний доказ правої нерівності (3.7). По-перше, нехай

$$C_\Phi = \left(\inf \left\{ c > 0 : \int_0^\infty \Phi(ct)e^{-t}dt > 1 \right\} \right)^{-1}.$$

Тоді $0 < C_\Phi < \infty$ за припущенням. Оскільки $E(M^* - M_{T-}^* \mid \mathcal{F}_T) \leq$

$4\|M\|_{BMO_1}$ для кожного часу зупинки T з (3.8) випливає, що

$$E \left(\Phi \left(\frac{1}{4C_\Phi \|M\|_{BMO_1}} M^* \right) \right) \leq \frac{1}{4\|M\|_{BMO_1}} \left(\int_0^\infty \Phi \left(\frac{t}{C_\Phi} \right) e^{-t} dt \right) E(M^*) \leq 1$$

Поставлення цього в умовну форму дає

$$E \left(\Phi \left(\frac{1}{4C_\Phi \|M\|_{BMO_1}} \sup_t |M_{T+t} - M_{T-}| \right) \mid \mathcal{F}_T \right) \leq 1.$$

Тоді $\|M\|_{BMO_\Phi} \leq 4C_\Phi \|M\|_{BMO_1}$. Ліва нерівність є безпосереднім наслідком нерівності Єнсена.

Наступна нерівність, звана також нерівністю Джона-Ніренберга, було в роботі А. М. Гарсія для мартингалів з дискретним параметром і П. А. Мейером для загальних мартингалів.

Теорема 3.2. *Якщо $\|M\|_{B_M} < 1$, то для кожного часу зупинки T*

$$E (\exp (\langle M \rangle_\infty - \langle M \rangle_T) \mid \mathcal{F}_T) \leq \frac{1}{1 - \|M\|_{BMO_2}^2}.$$

Доведення. За визначенням $\|M\|_{BMO_2}$ маємо

$$E (\langle M \rangle_\infty - \langle M \rangle_T \mid \mathcal{F}_T) \leq \|M\|_{BMO_2}^2,$$

що випливає з того, що $M^2 - \langle M \rangle$ є рівномірно інтегрованим мартингалом. Тоді енергетичні нерівності дають

$$E ((\langle M \rangle_\infty - \langle M \rangle_T)^n \mid \mathcal{F}_T) \leq n! \|M\|_{BMO_2}^{2n}$$

Отже, при $\|M\|_{BMO_2} < 1$ отримуємо

$$\begin{aligned} E (\exp (\langle M \rangle_\infty - \langle M \rangle_T) \mid \mathcal{F}_T) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} E ((\langle M \rangle_\infty - \langle M \rangle_T)^n \mid \mathcal{F}_T) \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \|M\|_{BMO_2}^{2n} \\ &\leq \frac{1}{1 - \|M\|_{BMO_2}^2}, \end{aligned}$$

завершуючи доведення. $\square$

$\square$

3.3. Характеристики ВМО-мартингалу

Теорема 3.3. *Якщо $M \in \text{ВМО}$, то $\mathcal{E}(M)$ є рівномірно інтегрованим мартингалом.*

Доведення. Оскільки $\langle M \rangle_\infty < \infty$ майже напевно, $\mathcal{E}(M)_T > 0$ майже напевно для будь-якого часу зупинки T . Звернимо увагу, що

$$\mathcal{E}(M)_\infty / \mathcal{E}(M)_T = \exp \{ (M_\infty - M_T) - (\langle M \rangle_\infty - \langle M \rangle_T) / 2 \}.$$

Тоді за нерівністю Єнсена отримуємо

$$\begin{aligned} E[\mathcal{E}(M)_\infty \mid \mathcal{F}_T] &= E[\mathcal{E}(M)_\infty / \mathcal{E}(M)_T \mid \mathcal{F}_T] \mathcal{E}(M)_T \\ &\geq \exp \left(-\frac{1}{2} \|M\|_{\text{ВМО}_2}^2 \right) \mathcal{E}(M)_T, \end{aligned}$$

з чого випливає, що $\mathcal{E}(M) \in \mathcal{M}_u$. $\square$

Означення 3.3. Нехай $1 < p < \infty$. Ми говоримо, що $\mathcal{E}(M)$ задовольняє (A_p) , якщо

$$\sup_T \left\| E \left[\{ \mathcal{E}(M)_T / \mathcal{E}(M)_\infty \}^{1/(p-1)} \mid \mathcal{F}_T \right] \right\|_\infty < \infty, \quad (3.9)$$

де супремум береться за всі часи зупинки T . Зокрема, якщо

$$\sup_T \|\mathcal{E}(M)_T / \mathcal{E}(M)_\infty\|_\infty < \infty,$$

тоді ми говоримо, що він задовольняє (A_1) .

Теорема 3.4. *Наступні умови є еквівалентними.*

- 1) $M \in \text{ВМО}$.
- 2) $\mathcal{E}(M)$ задовольняє (A_p) для деякого $p \geq 1$.
- 3) $\sup_T \left\| E \left(\log^+ \frac{\mathcal{E}(M)_T}{\mathcal{E}(M)_\infty} \mid \mathcal{F}_T \right) \right\| < \infty$.

Доведення. Спочатку покажемо, що з 1) випливає 2). Для цього візьмемо

$p > 1$ таке, що $\|M\|_{\text{ВМО}_2} < \sqrt{2}(\sqrt{p} - 1)$. Тоді відповідно до теореми 2.1 маємо

$$E \left(\exp \left\{ \frac{1}{2(\sqrt{p} - 1)^2} (\langle M \rangle_\infty - \langle M \rangle_T) \right\} \mid \mathcal{F}_T \right) \leq C_p$$

для кожного часу зупинки T з константою $C_p > 0$. Нехай тепер $r = \sqrt{p} + 1$. Тоді експонента, спряжена з r , дорівнює $s = \frac{\sqrt{p}+1}{\sqrt{p}}$. Оскільки $\{s(\sqrt{p} - 1)^2\}^{-1} - r(p - 1)^{-2} = (p - 1)^{-1}$, маємо

$$\begin{aligned} & \{\mathcal{E}(M)_T / \mathcal{E}(M)_\infty\}^{\frac{1}{p-1}} \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{p-1} (M_\infty - M_T) - \frac{r}{2(p-1)^2} (\langle M \rangle_\infty - \langle M \rangle_T) \right\} \\ & \cdot \exp \left\{ \frac{1}{2s(\sqrt{p} - 1)^2} (\langle M \rangle_\infty - \langle M \rangle_T) \right\} \end{aligned}$$

Застосуємо нерівність Гельдера з показниками r і s :

$$\begin{aligned} & E \left(\{\mathcal{E}(M)_T / \mathcal{E}(M)_\infty\}^{\frac{1}{p-1}} \mid \mathcal{F}_T \right) \\ & \leq E \left(\mathcal{E} \left(-\frac{r}{p-1} M \right)_\infty / \mathcal{E} \left(-\frac{r}{p-1} M \right)_T \mid \mathcal{F}_T \right)^{\frac{1}{r}} \\ & \cdot E \left(\exp \left\{ \frac{1}{2(\sqrt{p} - 1)^2} (\langle M \rangle_\infty - \langle M \rangle_T) \right\} \mid \mathcal{F}_t \right)^{\frac{1}{s}} \end{aligned}$$

За теоремою 2.3 перше умовне сподівання в правій частині дорівнює 1.

Далі ми покажемо, що з 2) випливає 3). Припустимо, що $\mathcal{E}(M)$ задовольняє умові (A_p) для $p > 1$. Тоді за нерівністю Єнсена знаходимо

$$\exp \left\{ \frac{1}{p-1} E \left(\log^+ \frac{\mathcal{E}(M)_T}{\mathcal{E}(M)_\infty} \mid \mathcal{F}_T \right) \right\} \leq E \left(\left\{ \frac{\mathcal{E}(M)_T}{\mathcal{E}(M)_\infty} \right\}^{1/(p-1)} \mid \mathcal{F}_T \right) + 1 \leq C_p$$

для кожного часу зупинки T з константою $C_p > 1$, незалежною від T . Тому маємо

$$E \left(\log^+ \frac{\mathcal{E}(M)_T}{\mathcal{E}(M)_\infty} \mid \mathcal{F}_T \right) \leq (p-1) \log C_p.$$

Нарешті, ми введемо 1) з 3). Звичайний аргумент зупинки дозволяє припустити, що M є рівномірно інтегрованим мартингалом. Тоді з 3) випливає,

що

$$\begin{aligned} E((M)_\infty - \langle M \rangle_T \mid \mathcal{F}_T) &= 2E\left(M_T - M_\infty + \frac{1}{2}(\langle M \rangle_\infty - \langle M \rangle_T) \mid \mathcal{F}_T\right) \\ &\leq 2E\left(\log^+ \frac{\mathcal{E}(M)_T}{\mathcal{E}(M)_\infty} \mid \mathcal{F}_T\right) \leq C \end{aligned}$$

для кожного часу зупинки T з константою $C > 0$. Отже, M належить до класу BMO , і встановлено еквівалентність 1), 2) і 3). $\square$

Зауваження 3.2. У випадку, коли M є правим неперервним локальним мартингалом, що задовольняє $-1 < \Delta M \leq C$ для деякої константи $C > 0$, неважко довести, що, якщо $\mathcal{E}(M)$ задовольняє (A_p) для деякого $p > 1$, тоді M є BMO -мартингалом.

3.4. Нерівність Феффермана

У цьому розділі ми доведемо добре відомий результат, що простір BMO можна ототожнити з двоїстим простором H_1 . Ключем до доказу є наступна нерівність, яка спочатку була отримана К. Фефферманом ([10]) у класичному аналізі та в [11] Р. К. Гетуром і М. Дж. Шарпом для неперервних мартингалів. Узагальнення на неперервні справа мартингали було встановлено в [12] П. А. Мейером. Нерівність Феффермана відіграє істотну роль у вирішенні різних питань про BMO -мартингали.

Теорема 3.5. *Якщо $X \in H_1$ і $Y \in BMO$, то*

$$E \left[\int_0^\infty |d\langle X, Y \rangle_s| \right] \leq \sqrt{2} \|X\|_{H_1} \|Y\|_{BMO_2}.$$

Доведення. Коротко нагадаємо доведення, яке надав Р. К. Гетур і М. Дж. Шарп. По-перше, зауважимо, що нерівність

$$E \left[\int_0^\infty |d\langle X, Y \rangle_s| \right]^2 \leq E \left[\int_0^\infty \langle X \rangle_s^{-1/2} d\langle X \rangle_s \right] E \left[\int_0^\infty \langle X \rangle_s^{1/2} d\langle Y \rangle_s \right]$$

виконується загалом. Перше математичне очікування у правій частині менше, ніж $2\|X\|_{H_1}$. З іншого боку, при інтегруванні частинами друге мате-

матичне очікування дорівнює

$$\begin{aligned}
 E \left[\langle X \rangle_\infty^{1/2} \langle Y \rangle_\infty - \int_0^\infty \langle Y \rangle_s d\langle X \rangle_s^{1/2} \right] &= E \left[\int_0^\infty (\langle Y \rangle_\infty - \langle Y \rangle_s) d\langle X \rangle_s^{1/2} \right] \\
 &= E \left[\int_0^\infty E[\langle Y \rangle_\infty - \langle Y \rangle_s \mid \mathcal{F}_s] d\langle X \rangle_s^{1/2} \right] \\
 &\leq \|Y\|_{BMO_2}^2 \|X\|_{H^1}.
 \end{aligned}$$

Таким чином теорема доведена. □

З нерівності Феффермана випливає, що $BMO \subset H_1^*$.

ВИСНОВКИ

У дипломній роботі сформулювали означення BMO -мартингалу та вивчили його основні властивості, показали застосування BMO -мартингалу для доведення теореми Джона-Ніренберга, встановили основні характеристики BMO -мартингалу та розглянули нерівність Феффермана з використанням BMO -мартингалів.

В результаті досліджень отримали багато корисних результатів у вивченні BMO -мартингалів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Коляда В. І., Кореновський А. А. Курс лекцій по математичному аналізу /В. І. Коляда, А. А. Кореновський. — М.: Одеса "Астропринт", 2009. — 367 с.
2. C. Dol4ans-Dade. Variation quadratique des martingales continues h droite, Ann. Math. Star. 40, 1969.— 284-289p.
3. R. Durrett. Brownian Motion and Martingales in Analysis, Belmont, Calif.,Wadsworth 1984.
4. E. Lengart. Transformation des martingales locales par changement absolument continu de probabilitg, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 39 1977.— 65-70.
5. A. A. Novikov. On an identity for stochastic integrals, Theor. Prob. Appl. 17, 1972.— 717-720 p.
6. M. Emery. Une ddfinition faible de BMO, Ann. Inst. Henri Poincar6, Prob.Statist. 21 no.1 1985.— 59-71.
7. D. W. Stroock. Applications of Fefferman-Stein type interpolation to a probability theory and analysis, Comm. Pure Appl. Math. 26 1973. — 477-495 p.
8. I. V. Girsanov. On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitution of measures, Theor. Prob. Appl. 5, 1960.— 285-301 p.
9. H. Van Schuppen and E. Wong. Transformation of local martingales under a change of law, Ann. Probab. 2, 1974.— 879-888 p.
10. C. Fefferman. Characterizations of bounded mean oscillation, Bull. Amer. Math.Soe. 77, 1971.— 587-588.
11. R. K. Getoor and M. J. Sharpe. Conformal martingales, Inventiones math. 16, 1972.— 271-308.
12. P. A. Meyer. Le dual de H^1 est BMO (cas continu), Seminaire de Probabilites VII, Universite de Strasbourg (Lecture Notes in Math. 321, pp.136-145), Berlin Heidelberg New York, Springer 1973.
13. P. A. Meyer. Un cours sur les intdgrales stochastiques, Seminaire de Probabi-

lites XII, Universite de Strasbourg (Lecture Notes in Math. 511, pp.245-400), Berlin Heidelberg New York, Springer 1976.

14. Kazamaki N. Continuous exponential martingales and BMO / N. Kazamaki. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1994. — 102 p. — (Series: Lecture Notes in Mathematics; Vol. 1579)