

УДК 517.764

І. М. Курбатова, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь

вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна

e-mail: irina.kurbatova27@gmail.com

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-0215-6060>

ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ F -ПЛАНАРНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ КВАЗІ-КЕЛЕРОВИХ ПРОСТОРІВ

В роботі вирішуються основні питання теорії F -планарних відображень квазі-келерових просторів: 1) для будь-якого квазі-келерового простору (V_n, g_{ij}, F_i^h) з'ясувати, допускає він F -планарні відображення зі збереженням майже комплексної структури в принципі чи ні; 2) якщо допускає, то знайти ті квазі-келерові простори $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, F_i^h)$, на які це відображення відбувається.

За допомогою методів, розроблених М. С. Синюковим в теорії геодезичних рівнянь ріманових просторів ми звели основні рівняння F -планарних відображень квазі-келерових просторів до нової форми, яка допускає ефективне дослідження і дозволяє отримати відповідь на питання 1) і 2) в результаті розв'язування системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих функцій з коефіцієнтами із V_n .

Зауважимо, що за рахунок великого n навіть розв'язати лінійну однорідну алгебраїчну систему може бути технічно дуже складно. Тому велике значення мають інші підходи до вирішення питань існування (або неіснування) F -планарних відображень для певних класів просторів. Як приклад ми виділили широкий клас квазі-келерових просторів, що містить симетричні і рекурентні простори і не допускає нетривіальних F -планарних відображень зі збереженням майже комплексної структури.

MSC: 57R30.

Ключові слова: рімановий простір, тензор Рімана, тензор Річчі, майже комплексна структура, келеровий простір, квазі-келеровий простір, F -планарне відображення.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2026.1\(47\).364553](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2026.1(47).364553)

Стаття надійшла до редакції: 06.03.2026. Затверджена до друку: 16.03.2026.

Опублікована: 15.09.2026.



Ця стаття поширюється на умовах ліцензії Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0).



1. Вступ

Ми продовжуємо дослідження F -планарних відображень многовидів, що наділені квазі-келеровою структурою ([2; 5; 6]) і є узагальненням геодезичних відображень ріманових просторів та голоморфно-проективних відображень келерових просторів ([3; 6]).

Нехай (V_n, g_{ij}, F_i^h) - рімановий простір з метричним тензором g_{ij} і афінорною структурою F_i^h .

За умов

$$F_\alpha^h F_i^\alpha = -\delta_i^h, \quad (1)$$

$$g_{i\alpha} F_j^\alpha = -g_{j\alpha} F_i^\alpha, \quad (2)$$

$$F_{i,j}^h = -F_{\alpha,\beta}^h F_i^\alpha F_j^\beta \quad (3)$$

структура F_i^h називається *квазі-келеровою*, а рімановий простір V_n з такою структурою - *квазі-келеровим*.

Розглянемо квазі-келерові простори (V_n, g_{ij}, F_i^h) і $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h)$. Основні рівняння F -планарного відображення ([3])

$$(V_n, g_{ij}, F_i^h) \longrightarrow (\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h),$$

при $n > 3$ в загальній за відображенням системі координат (x^i) мають вигляд

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_{(i} \delta_{j)}^h + \phi_{(i} F_{j)}^h, \quad (4)$$

$$F_i^h(x) = \bar{F}_i^h(x), \quad (5)$$

$$F_\alpha^h F_i^\alpha = -\delta_i^h,$$

$$F_{ij} = -F_{ji}, \quad \bar{F}_{ij} = -\bar{F}_{ji}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} F_{ij} &= g_{i\alpha} F_j^\alpha = g_{i\bar{j}}, & \bar{F}_{ij} &= \bar{g}_{i\alpha} F_j^\alpha = \bar{g}_{i\bar{j}}, \\ F_{i,j}^h &= -F_{\alpha,\beta}^h F_i^\alpha F_j^\beta, & F_{i|j}^h &= -F_{\alpha|\beta}^h F_i^\alpha F_j^\beta, \end{aligned} \quad (7)$$

де $\Gamma_{ij}^h, \bar{\Gamma}_{ij}^h$ символи Кристофеля $V_n, \bar{V}_n$, відповідно; $\psi_i(x), \phi_i(x)$ - деякі ковектори; дужками (i, j) позначено операцію симетрування; кома « $,$ » і вертикальна риска « $|$ » - знаки коваріантної похідної відносно зв'язності V_n і $\bar{V}_n$, відповідно.

Нагадаємо, що F -планарне відображення вважається тривіальним, якщо $\psi_i = \phi_i = 0$. Тому нетривіальні F -планарні відображення (V_n, g_{ij}, F_i^h) на $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h)$ з основними рівняннями (4) можуть бути такими:

$$I \quad \psi_i = 0, \quad \phi_i \neq 0;$$

$$II \quad \psi_i \neq 0, \quad \phi_i = 0;$$

$$III \quad \psi_i \neq 0, \quad \phi_i \neq 0.$$

У випадку I F -планарне відображення називають *канонічним*; у випадку II воно є геодезичним відображенням ([1; 6]); відображення III називають *F -планарними основного типу*.

Раніше ми довели, що квазі-келерові простори не допускають нетривіальних геодезичних і канонічних F -планарних відображень, а в рівняннях (4)

$$\psi_\alpha F_i^\alpha = -\phi_i, \quad \phi_\alpha F_i^\alpha = \psi_i \quad (8)$$

і що вектор ψ_i є градієнтним, тобто існує інваріант $\psi(x)$ такий, що

$$\psi_i = \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^i}. \quad (9)$$

Далі ми розглядаємо F -планарні відображення квазі-келерових просторів основного типу.

Дослідження проводяться в тензорній формі, локально, в класі достатньо гладких функцій.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

2. ЛІНІЙНА ФОРМА ОСНОВНИХ РІВНЯНЬ F -ПЛАНАРНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ КВАЗІ-КЕЛЕРОВИХ ПРОСТОРІВ

1°. Будемо далі операцію згортання з афіном позначати таким чином:

$$A_{\bar{i} \dots}^{\dots} = A_{\alpha \dots}^{\dots} F_i^\alpha, \quad A_{\dots}^{\bar{i} \dots} = A_{\dots}^{\alpha \dots} F_\alpha^i$$

і називати *сполученням* по відповідному індексу. Очевидно, що з огляду на (1)

$$A_{\bar{i} \dots}^{\dots} = -A_{i \dots}^{\dots}, \quad A_{\dots}^{\bar{i} \dots} = -A_{\dots}^{i \dots}$$

При цьому вважаємо, що сполучення проводиться після коваріантного диференціювання, тобто

$$A_{i,j}^h = A_{\alpha,j}^h F_i^\alpha.$$

2°. Розглянемо квазі-келерові простори (V_n, g_{ij}, F_i^h) і $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h)$, які знаходяться в F -планарному відображенні

$$(V_n, g_{ij}, F_i^h) \longrightarrow (\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h).$$

Як відомо, $\bar{g}_{ij|k} = 0$, тому рівняння (4) може бути записане в іншій формі:

$$\bar{g}_{ij,k} = 2\psi_k \bar{g}_{ij} + \psi_i \bar{g}_{jk} + \psi_j \bar{g}_{ik} - \psi_i \bar{F}_{jk} - \psi_j \bar{F}_{ik} \quad (10)$$

Легко бачити, що (4) і (10) - еквівалентні форми основних рівнянь F -планарних відображень. Вони є системами нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних відносно $\bar{g}_{ij}$ і ψ_i . Сучасна теорія диференціальних рівнянь не дає регулярних методів розв'язування таких систем. Тому ми скористаємось методами, розробленими М. С. Синюковим в теорії геодезичних рівнянь ріманових просторів ([1]) і зведемо (10) до нової форми, яка допускає ефективне дослідження.

3°. Введемо в V_n двічі коваріантний симетричний і невироджений тензор

$$a_{ij} = e^{2\psi} \bar{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta j}, \quad (11)$$

де $\psi(x)$ - інваріант такий, що

$$\psi_i = \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^i}.$$

З огляду на те, що $\bar{g}^{h\alpha} \bar{g}_{\alpha i} = \delta_i^h$, маємо

$$\bar{g}^{h\alpha}{}_{,j} \bar{g}_{\alpha i} + \bar{g}^{h\alpha} \bar{g}_{\alpha i,j} = 0.$$

Тому з урахуванням (10) коваріантна похідна a_{ij} в V_n приймає вигляд:

$$a_{ij,k} = \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik} - \lambda_i F_{jk} - \lambda_j F_{ik}. \quad (12)$$

Тут

$$a_{ij} = a_{i\bar{j}} \quad (13)$$

і

$$\lambda_i = -e^{2\psi} \psi_{\alpha} \bar{g}^{\alpha\beta} g_{\beta i}. \quad (14)$$

Легко довести, що вектор λ_i градієнтний. Дійсно, з (12) витікає

$$a_{\alpha\beta,k}g^{\alpha\beta} = (a_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta})_{,k} = 4\lambda_k,$$

до того ж $\lambda_i \neq 0$ при $\psi_i \neq 0$ і навпаки.

Має місце

Теорема 1. *Для того, щоб квазі-келеровий простір (V_n, g_{ij}, F_i^h) допускав нетривіальне F -планарне відображення зі збереженням майже комплексної структури, необхідно і достатньо, щоб в ньому існував двічі коваріантний симетричний невідроджений тензор a_{ij} , що задовольняє умовам (12, 13) при деякому векторі $\lambda_i \neq 0$.*

Доведення не наводиться через його повну аналогію з ([1]).

Диференціальні рівняння в коваріантних похідних (12) є новою більш ефективною для досліджень формою основних рівнянь F -планарних відображень квазі-келерових просторів тому, що мають лінійний характер відносно невідомих функцій a_{ij}, λ_i . Ми переходимо до вивчення питань існування (або не існування) таких дифеоморфізмів.

3. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ F -ПЛАНАРНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ КВАЗІ-КЕЛЕРОВИХ ПРОСТОРІВ

1°. Будемо вивчати основні рівняння F -планарних відображень квазі-келерових просторів в новій формі (12). Їх умови інтегрованості вигляд:

$$\begin{aligned} a_{\alpha i} R_{jkl}^{\alpha} + a_{\alpha j} R_{ikl}^{\alpha} &= \lambda_{i,l} g_{kj} + \lambda_{j,l} g_{ki} - \lambda_{i,k} g_{lj} - \lambda_{j,k} g_{li} + \\ &+ \lambda_{\bar{i},l} F_{kj} + \lambda_{\bar{j},l} F_{ki} - \lambda_{\bar{i},k} F_{lj} - \lambda_{\bar{j},k} F_{li} + \\ &+ \lambda_{\alpha} F_{i,l}^{\alpha} F_{kj} + \lambda_{\alpha} F_{j,l}^{\alpha} F_{ki} - \lambda_{\alpha} F_{i,k}^{\alpha} F_{lj} - \lambda_{\alpha} F_{j,k}^{\alpha} F_{li} - \\ &- \lambda_{\bar{i}} F_{jk,l} - \lambda_{\bar{j}} F_{ik,l} + \lambda_{\bar{i}} F_{jl,k} + \lambda_{\bar{j}} F_{il,k} \end{aligned} \quad (15)$$

Розв'язуючи це рівняння відносно $\lambda_{i,l}$, отримуємо:

$$\begin{aligned} 2n(n-2)\lambda_{i,l} &= 2(n-2)\nu g_{il} + n \left(a_{\alpha i} R_{\bar{\beta}.l}^{\alpha\beta} + a_{\alpha l} R_{\bar{\beta}.i}^{\alpha\beta} \right) \\ &+ (n-1) \left(2a_{\alpha\beta} R_{i.l}^{\alpha\beta} + a_{\alpha i} R_l^{\alpha} + a_{\alpha l} R_i^{\alpha} \right) \\ &+ 2a_{\alpha\beta} R_{\bar{i}.l}^{\alpha\beta} + a_{\alpha\bar{i}} R_l^{\alpha} + a_{\alpha\bar{l}} R_i^{\alpha}. \end{aligned} \quad (16)$$

де

$$\nu = \lambda_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}, \quad R_{\cdot i \cdot l}^{\alpha \beta} = g^{\delta\beta} R_{\cdot i\delta l}^{\alpha},$$

R_l^{α} - змішані компоненти тензора Річчі.

З умов інтегрованості співвідношень (16), які ми не наводимо через їх громіздкість, знаходимо:

$$\begin{aligned} 2n(n-2)\nu_{,k} = \lambda_{\alpha} \Big(2n(n-2)R_k^{\alpha} + n(n-4)R_{\cdot \bar{\beta} \cdot k}^{\alpha \beta} - 3n^2 R_{\cdot \bar{\beta} \cdot \bar{k}}^{\alpha \beta} - 2n\delta_k^{\alpha} \tilde{R} \Big) + \\ + a_{\alpha\beta} \Big((B_{\gamma k, \delta}^{\alpha\beta} + B_{\gamma \delta, k}^{\alpha\beta}) g^{\gamma\delta} - (B_{\gamma \bar{k}, \delta}^{\alpha\beta} + B_{\gamma \delta, \bar{k}}^{\alpha\beta}) F^{\gamma\delta} \Big), \end{aligned} \quad (17)$$

де

$$\begin{aligned} B_{il}^{\alpha\beta} = (n-1) \Big(2R_{\cdot i \cdot l}^{\alpha\beta} + \delta_i^{\beta} R_l^{\alpha} + \delta_l^{\beta} R_i^{\alpha} \Big) \\ + 2R_{\cdot i \cdot \bar{l}}^{\alpha\beta} + F_i^{\beta} R_l^{\alpha} + F_l^{\beta} R_i^{\alpha} \\ + n \Big(\delta_i^{\beta} R_{\cdot \bar{\gamma} \cdot l}^{\alpha\gamma} + \delta_l^{\beta} R_{\cdot \bar{\gamma} \cdot i}^{\alpha\gamma} \Big). \end{aligned} \quad (18)$$

$$\tilde{R} = R_{\alpha\bar{\beta} \cdot \cdot}^{\alpha\beta}.$$

Співвідношення (12), (16) і (17) утворюють замкнену систему диференціальних рівнянь першого порядку типу Коші відносно шуканих функцій a_{ij} , λ_k та ν . Отже справедлива

Теорема 2. Для того, щоб квазі-келеровий простір (V_n, g_{ij}, F_i^h) допускав нетривіальне F -планарне відображення зі збереженням майже комплексної структури, необхідно і достатньо, щоб система диференціальних рівнянь (12), (16) і (17) мала в ньому нетривіальний розв'язок

$$a_{ij}(x) \Big(= a_{ji}(x), \quad \det \|a_{ij}(x)\| \neq 0 \Big), \quad \lambda_i(x) (\neq 0), \quad \nu(x),$$

що задовольняє умови $a_{ij} = a_{\bar{i}\bar{j}}$.

Зазначена система диференціальних рівнянь (12), (16) та (17) є лінійною з коефіцієнтами внутрішнього характеру відносно простору (V_n, g_{ij}, F_i^h) і в цьому просторі для будь-яких початкових значень

$$a_{ij}(x_{\circ}) = a_{ij}, \quad \lambda_i(x_{\circ}) = \lambda_i, \quad \nu(x_{\circ}) = \nu,$$

має не більш одного розв'язку і тому кількість довільних сталих в загальному розв'язку системи рівнянь (12), (16) та (17) (позначимо її (A)) за умови (13) не перевищує

$$N_o = (m + 1)^2, \quad (n = 2m).$$

2°. Питання про існування нетривіальних розв'язків системи (A) зводиться до дослідження умов інтегрованості її рівнянь та їх диференціальних продовжень, що являють собою алгебраїчну систему рівнянь відносно невідомих функцій з коефіцієнтами з V_n .

Для першої групи рівнянь (A) умови інтегрованості виходять з (15) заміною в них коваріантної похідної вектора λ_i виразом (16) в формі:

$$a_{\alpha\beta} T_{ijkl}^{\alpha\beta} + \lambda_\alpha P_{ijkl}^\alpha = 0, \quad (19)$$

де

$$\begin{aligned} T_{ijkl}^{\alpha\beta} = & 2n(n-2) \left(\delta_i^\alpha R_{jlk}^\beta + \delta_j^\alpha R_{ilk}^\beta \right) - \\ & - \left(B_{\gamma k}^{\alpha\beta} g_{l\delta} - B_{\gamma l}^{\alpha\beta} g_{k\delta} \right) \left(O_{ij}^{\gamma\delta} + O_{ji}^{\gamma\delta} \right), \end{aligned} \quad (20)$$

$$O_{ij}^{\gamma\beta} = \delta_i^\gamma \delta_j^\beta + F_i^\gamma F_j^\beta, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} P_{ijkl}^\alpha = & F_{i,l}^\alpha F_{kj} + F_{j,l}^\alpha F_{ki} - F_{i,k}^\alpha F_{lj} - F_{j,k}^\alpha F_{li} - \\ & - F_i^\alpha \left(F_{jk,l} - F_{jl,k} \right) - F_j^\alpha \left(F_{ik,l} - F_{il,k} \right), \end{aligned} \quad (22)$$

B_{kl}^{ij} визначені формулою (18).

Аналогічно умови інтегрованості другої і третьої груп рівнянь (A) з урахуванням (12), (16) та (17) можна представити у вигляді

$$a_{\alpha\beta} L_{ikl}^{\alpha\beta} + \lambda_\alpha M_{ikl}^\alpha = 0, \quad (23)$$

$$a_{\alpha\beta} \tilde{L}_{kl}^{\alpha\beta} + \lambda_\alpha \tilde{M}_{kl}^\alpha + \nu S_{kl} = 0, \quad (24)$$

відповідно. Тут $L_{ikl}^{\alpha\beta}$, M_{ikl}^α , $\tilde{L}_{kl}^{\alpha\beta}$, $\tilde{M}_{kl}^\alpha$, S_{kl} - деякі тензори з компонентами внутрішнього характеру відносно V_n , які ми не наводимо через їх громіздкість.

Таким чином, умови інтегрованості системи (A) мають вигляд (19), (23), (24). Позначимо їх (B). Зауважимо, що (B) та їх диференціальні

продовження, які будемо позначати $(B_1), (B_2), \dots$, утворюють систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно a_{ij}, λ_i, ν з коефіцієнтами з V_n . Так як кількість невідомих функцій дорівнює $(m+1)^2$, що знайдеться таке натуральне число s , (B_s) та подальші продовження будуть наслідками $(B), (B_1), (B_2), \dots, (B_{s-1})$.

Має місце

Теорема 3. *Квазі-келеровий простір (V_n, g_{ij}, F_i^h) допускає F -планарне відображення зі збереженням майже комплексної структури тоді і тільки тоді, коли система рівнянь $(B), (B_1), (B_2), \dots, (B_{s-1})$ має в V_n розв'язок*

$$a_{ij}(x) \left(= a_{ji}(x) \right), \quad \lambda_i(x), \quad \nu(x),$$

причому $\det \|a_{ij}(x)\| \neq 0$, $a_{i\bar{j}} = a_{ij}$, $\lambda_i \neq 0$.

3°. Максимальне число суттєвих параметрів r , тобто початкових значень

$$a_{ij}(x_o) = a_{ij}, \quad \lambda_i(x_o) = \lambda_i, \quad \nu(x_o) = \nu,$$

від яких залежить в даному V_n загальний розв'язок системи (A) , називають *ступенем рухливості простору (V_n, g_{ij}, F_i^h) відносно F -планарних відображень*. В нашому випадку

$$r \leq N_o = (m+1)^2.$$

Тут r досягає максимуму N_o тоді і тільки тоді, коли система (A) має в просторі V_n розв'язок при будь-яких початкових значеннях і отже коли ця система цілком інтегровна. В такому разі умови (B) виконуються тожньо відносно a_{ij}, λ_i і ν .

Вимагаючи, щоб перша група (19) рівнянь (B) виконувалася тожньо відносно a_{ij}, λ_i , отримуємо:

$$T_{ijkl}^{\alpha\beta} + T_{ijkl}^{\beta\alpha} = 0,$$

$$P_{ijkl}^{\alpha} = 0.$$

Звідси після певних алгебраїчних перетворень витікає, що

$$F_{i,j}^h = 0$$

і

$$R_{ijk}^h = \frac{R}{n(n+2)} \left(\delta_k^h g_{ij} - \delta_j^h g_{ik} + F_k^h F_{ij} - F_j^h F_{ik} + 2F_i^h F_{kj} \right).$$

Це свідчить про те, що наше (V_n, g_{ij}, F_i^h) необхідно є келеровим простором сталої голоморфної кривини.

І навпаки, якщо (V_n, g_{ij}, F_i^h) -келеровий простір сталої голоморфної кривини, то легко перевірити, що рівняння (B) виконуються тотожно.

Викнується

Теорема 4. *Серед квазі-келерових просторів (V_n, g_{ij}, F_i^h) келерові простори сталої голоморфної кривини і тільки вони мають максимальний ступінь рухливості відносно F -планарних відображень зі збереженням майже комплексної структури.*

4. F -ПЛАНАРНІ ВІДОБРАЖЕННЯ СПЕЦІАЛЬНИХ КВАЗІ-КЕЛЕРОВИХ ПРОСТОРІВ

Розглянемо квазі-келеровий простір (V_n, g_{ij}, F_i^h) , в якому виконуються деякі умови. По-перше, зауважимо, що з огляду на (41) співвідношення (22) і (21) дають нам

$$P_{\gamma\delta\xi\eta}^\alpha O_{ij}^{\gamma\delta} O_{kl}^{\xi\eta} = 0.$$

Тоді з (19) маємо:

$$a_{\alpha\beta} \tilde{T}_{ijkl}^{\alpha\beta} = 0, \quad (25)$$

де

$$\tilde{T}_{ijkl}^{\alpha\beta} = T_{\gamma\delta\xi\eta}^{\alpha\beta} O_{ij}^{\gamma\delta} O_{kl}^{\xi\eta}.$$

Якщо тензор $T_{ijkl}^{\alpha\beta}$ в (19) задовольняє умови

$$\tilde{T}_{ijkl,m}^{\alpha\beta} = \tilde{T}_{\gamma\delta\xi\eta}^{\alpha\beta} A_{ijklm}^{\gamma\delta\xi\eta}, \quad (26)$$

де $A_{ijklm}^{\gamma\delta\xi\eta}$ - довільний тензор типу (4.5), то з (25) витікає:

$$a_{\alpha\beta,m} \tilde{T}_{ijkl}^{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta} \tilde{T}_{ijkl,m}^{\alpha\beta} = 0,$$

і отже

$$a_{\alpha\beta,m} \tilde{T}_{ijkl}^{\alpha\beta} = 0. \quad (27)$$

З огляду на (12) і (20) останні співвідношення можна представити в такому вигляді:

$$\begin{aligned} & n \left(\lambda_i Q_{jmk} + \lambda_j Q_{imk} - \lambda_{\bar{i}} Q_{\bar{j}mk} - \lambda_{\bar{j}} Q_{\bar{i}mk} - \right. \\ & \left. - g_{mi} \lambda_\gamma Q_{jkl}^\gamma - g_{mj} \lambda_\gamma Q_{ikl}^\gamma - F_{mi} \lambda_\gamma Q_{\bar{j}kl}^\gamma - F_{mj} \lambda_\gamma Q_{\bar{i}kl}^\gamma \right) + \\ & + g_{ki} A_{jml} + g_{kj} A_{iml} - g_{li} A_{jmk} - g_{lj} A_{imk} + \\ & + F_{ki} A_{\bar{j}ml} + F_{kj} A_{\bar{i}ml} - F_{li} A_{\bar{j}mk} - F_{lj} A_{\bar{i}mk} = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

де

$$\begin{aligned} Q_{ijkl} &= R_{\alpha\beta\gamma\delta} O_{ij}^{\alpha\beta} O_{kl}^{\gamma\delta}, \\ A_{iml} &= C_{\alpha m \beta} O_{il}^{\alpha\beta}, \\ C_{iml} &= -\lambda_\alpha Q_{ilm}^\alpha - \lambda_\alpha Q_{lim}^\alpha + g_{im} \lambda_\alpha Q_{.. \beta l}^\alpha + \lambda_i Q_{.lm}^\beta, \\ Q_{ijk}^h &= g^{h\alpha} Q_{\alpha ijk}, \quad Q_{..jk}^{hi} = g^{h\alpha} g^{i\beta} Q_{\alpha\beta jk}. \end{aligned}$$

Враховуючи те, що

$$Q_{ijkl} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} O_{ij}^{\alpha\beta} O_{kl}^{\gamma\delta} = R_{ijkl} + R_{\bar{i}jkl} + R_{ij\bar{k}l} + R_{ij\bar{k}\bar{l}},$$

за допомогою певних алгебраїчних перетворень з рівняння (8) при $\lambda_i \neq 0$ знаходимо

$$R_{ijkl} + R_{\bar{i}jkl} + R_{ij\bar{k}l} + R_{ij\bar{k}\bar{l}} = \frac{4R}{n(n+2)} \left(g_{li} g_{jk} - g_{ki} g_{jl} + F_{li} F_{jk} - F_{ki} F_{jl} + 2F_{ij} F_{lk} \right).$$

Таким чином, квазі-келеровий простір, в якому виконуються умови (26), виявився узагальнено F -плоским.

Справедлива

Теорема 5. *Квазі-келерові простори (V_n, g_{ij}, F_i^h) , що задовольняють умовам (26) і відмінні від узагальнено F -плоских, не допускають нетривіальних F -планарних відображень зі збереженням майже комплексної структури.*

Зауважимо, що симетричні і рекурентні ріманові простори задовольняють умовам (26), тому має місце

Теорема 6. *Симетричні і рекурентні квазі-келерові простори (V_n, g_{ij}, F_i^h) не допускають нетривіальних F -планарних відображень зі збереженням майже комплексної структури.*

Висновки

Ми розглядали ключові питання теорії F -планарних відображень квазі-келерових просторів:

1) як для будь-якого квазі-келерового простору (V_n, g_{ij}, F_i^h) з'ясувати, допускає він F -планарні відображення зі збереженням майже комплексної структури в принципі чи ні;

2) якщо допускає, то як знайти ті квазі-келерові простори $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, F_i^h)$, на які це відображення відбувається.

Для відповіді на перше з цих питань треба з'ясувати, чи має система нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних

$$\bar{g}_{ij,k} = 2\psi_k \bar{g}_{ij} + \psi_i \bar{g}_{jk} + \psi_j \bar{g}_{ik} - \psi_i \bar{F}_{jk} - \psi_j \bar{F}_{ik}$$

розв'язки

$$\bar{g}_{ij}(x) \left(= \bar{g}_{ji}(x), \quad \det \|\bar{g}_{ij}(x)\| \neq 0 \right), \quad \psi_i(x) (\neq 0)$$

за умови

$$\bar{F}_{ij} = -\bar{F}_{ji}.$$

Сучасна теорія диференціальних рівнянь не дає регулярних методів розв'язування таких систем. Тому ми скористалися методами, розробленими М. С. Синюковим в теорії геодезичних рівнянь ріманових просторів ([1]) і звели основні рівняння F -планарних відображень квазі-келерових просторів до нової форми, яка допускає ефективне дослідження (про це йдеться в Теоремі 1). За допомогою цієї нової форми відповідь на питання 1) і 2) можна отримати в результаті розв'язування системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих функцій з коефіцієнтами із V_n (Теореми 2,3).

Отже ми отримали ефективний і простий спосіб для будь-якого квазі-келерового простору (V_n, g_{ij}, F_i^h) з'ясувати, допускає він F -планарні відображення зі збереженням майже комплексної структури в принципі чи ні, і в разі позитивної відповіді знайти всі ті квазі-келерові простори $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, F_i^h)$, на які це відображення відбувається.

Зауважимо, що теоретично питання остаточно вирішено, але практично за рахунок великого n навіть розв'язати лінійну однорідну алгебраїчну систему може бути технічно дуже складно. Тому велике значення

мають інші підходи до вирішення питань як існування, так і неіснування F -планарних відображень для певних класів просторів. Ми виділили широкий клас квазі-келерових просторів, серед яких містяться симетричні і рекурентні, який не допускає нетривіальних F -планарних відображень зі збереженням майже комплексної структури (Теореми 5,6).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Синюков, Н. С. (1979). *Геодезические отображения римановых пространств*. Наука.
2. Широков, А. П. (1969). Структуры на дифференцируемых многообразиях. *Итоги науки. Серия: Математика. Алгебра. Топология. Геометрия*. 1967, 127–188.
3. Микеш, Й., & Синюков, Н. С. (1983). О квазипланарных отображениях пространств аффинной связности. *Soviet Mathematics*, 27(1), 63–70.
4. Otsuki, T., & Tashiro, Y. (1954). On curves in Kahlerian spaces. *Math. J. Okayama Univ.*, 4, 57–78.
5. Grey, A., & Hervella, L. M. (1980). The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariant. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 123, 35–58.
6. Mikes, J., Stepanova, E., & Vanzurova, A. (2019). *Differential geometry of special mappings*. Palacky University Press.
7. Курбатова, І. (2025). F -планарні відображення спеціальних майже комплексних просторів. *Дослідження в математиці і механіці*, 28(2), 18–30.

Kurbatova I. M.

FUNDAMENTAL THEOREMS OF THE THEORY OF F -PLANAR MAPPINGS OF QUASI-KÄHLERIAN SPACES

Summary

The paper addresses the main issues of the theory of F -planar mappings of quasi-Kähler spaces: 1) for any quasi-Kähler space (V_n, g_{ij}, F_i^h) , find out whether it admits F -planar mappings with preservation of an almost complex structure in principle or not; 2) if it admits, then find those quasi-Kähler spaces $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, F_i^h)$, onto which this mapping occurs.

Using the methods developed by M. S. Sinyukov in the theory of geodesic equations of Riemannian spaces, we reduced the basic equations of F -planar mappings of quasi-Kähler spaces to a new form that allows for effective research and allows us to obtain an answer to questions 1) and 2) as a result of solving a system of linear homogeneous algebraic equations with unknown functions with coefficients from V_n .

Note that due to the large n , even solving a linear homogeneous algebraic system can be technically very difficult. Therefore, other approaches to solving the questions of existence (or non-existence) of F -planar mappings for certain classes of spaces are of great importance. As an example, we have singled out a wide class of quasi-Kähler spaces that contains symmetric and recurrent spaces and does not admit non-trivial F -planar mappings while preserving an almost complex structure.

Keywords: Riemannian space, Riemannian tensor, Ricci tensor, almost complex structure, Kählerian space, quasi-Kählerian space, F -planar mapping.

REFERENCES

1. Sinyukov, N. S. (1979). *Geodesicheskiye otobrazheniya rimanovikh prostranstv* [Geodesic mappings of Riemannian spaces]. Nauka. [in Russian].
2. Shirokov, A. P. (1969). *Struktury na differentsiruyemykh mnogoobraziyakh* [Structures on differentiable manifolds]. *Itogi nauki. Ser. Mat. Algebra. Topol. Geom. 1967*, 127–188. [in Russian].
3. Mikes, J., & Sinyukov, N. S. (1983). *O kvaziplanarnykh otobrazheniyakh prostranstv affinnoy svyaznosti* [On quasilplanar mappings of spaces of affine connection]. *Soviet Mathematics*, 27(1), 63–70. [in Russian].

4. Otsuki, T., & Tashiro, Y. (1954). On curves in Kahlerian spaces. *Math. J. Okayama Univ.*, 4, 57–78.
5. Grey, A., & Hervella, L. M. (1980). The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariant. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 123, 35–58.
6. Mikes, J., Stepanova, E., & Vanzurova, A. (2019). *Differential geometry of special mappings*. Palacky University Press.
7. Kurbatova, I. (2025). F -planar mappings of special almost complex spaces [F -planarni vidobrazhennia spetsialnykh maizhe kompleksnykh prostoriv]. *Doslidzhennia v matematytsi i mekhanitsi*, 28(2), 18–30. [in Ukrainian].