Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

Факультет математики, фізики та інформаційних технологій

Кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

«Тригонометричні суми з многочленами з цілими коефіцієнтами»

«Exponential sums with the polynomial of integer coefficients»

Виконав: здобувач денної форми навчання
спеціальності 111 Математика
Освітня програма «Математика»

Карнаух Гліб Максимович

Керівник: доктор фіз.-мат. наук, проф. Варбанець С. П.

Рецензент: кандидат фіз.-мат. наук, доцент Савастру О. В.

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ ___ від _____________2024 р.

Завідувач кафедри

________ _____________________

(підпис) (прізвище, ініціали)

Захищено на засіданні ЕК №_______

протокол № ____ від ________ 2024 р.

Оцінка_____________/___ ___/_____

(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)

Голова ЕК

__________ _____________________

(підпис) (прізвище, ініціали)

Одеса – 2024

ЗМІСТ

ВСТУП

Тригонометричні суми вперше з'явилися в роботах К.Гаусса. В надалі ними займалися г. Вейль, г. Харді і Д. Літтлвуд, л. Морделл і багато інших. Після робіт І. М. Виноградова [6], присвячених розв'язанню проблем Варінга і Гольдбаха, в яких був значно розвинений і вдосконалений апарат тригонометричних сум, інтерес до цієї тематики зріс. Зокрема, з'явилося багато робіт і про раціональні тригонометричні сума.

Повною раціональною тригонометричною сумою називається сума виду

$$S(f,q)=\sum_{x=1}^{q}e^{2\pi i\frac{f(x)}{q}}$$

де, $f:\{1,2,...,q\}\to Z$ – функція.

Важливим окремим випадком є повні раціональні поліноміальні тригонометричні суми (окремий випадок сум Г. Вейля), коли в показнику експоненти стоїть многочлен з цілими коефіцієнтами. Хуа Ло Кен довів наступний результат

$$|S(f,q)|=O\left(q^{1-\frac{1}{n}}\right)$$

для будь-якого натурального q і будь-якого многочлена $f(x)=a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$, у якого $(a_1,a_2,...,a_n,q)=1$, причому стала в знаку O залежить тільки від n.

У 1948 р. А. Вейль отримав оцінку сум з простим знаменником, у цьому спеціальному випадку значно поліпшуючу оцінку Хуа Ло Кена. Він довів, що

$$|S(f,p)|\le(n-1)\sqrt{p},$$

для будь-якого простого p і будь-якого многочлена $f(x)=a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$, у якого $(a_n,p)=1$.

Метою дипломної роботи є розгляд тригонометричних сум з многочленами з цілими коефіцієнтами.

Предметом дипломної роботи є дослідження тригонометричних сум спеціального виду.

Для досягнення поставленої мети потрібно виконати наступні завдання:

1) Розглянути поняття тригонометричної суми та основних тверджень, пов'язаних з ним;
2) Виділити особливий клас тригонометричних сум з многочленами з цілими коефіцієнтами;
3) Показати практичні застосування тригонометричних сум з многочленами з цілими коефіцієнтами.

Структура дипломної роботи складається із вступу, двох основних розділів роботи, висновку та списку використаної літератури.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ПРО ТРИГОНОМЕТРИЧНІ СУМИ

1.1 Основні поняття

Означення 1.1 *Тригонометричною сумою називається кінцева сума* S *виду*

$$S = \sum_{\Omega} e^{2\pi i F(x_1,...,x_r)} \quad (1)$$

де $F(x_1,...,x_r)$ *– дійсна функція від* r *змінних і сумування ведеться по цілим точкам* $(x_1,...,x_r)$ *деякої області* Ω r*– вимірного простору,* $i^2 = -1$. Тригонометричними сумами називають і більш загальні суми S' виду

$$S' = \sum_{\Omega} G(x_1,...,x_r) e^{2\pi i F(x_1,...,x_r)} \quad (2)$$

де $G(x_1,...,x_r)$ – деяка комплекснозначна функція змінних $x_1,...,x_r$

Основною проблемою при вивченні суми S є проблема встановлення верхньої границі модуля S. Позначимо через T кількість цілих точок області Ω. Так як модуль кожного доданка суми (1) дорівнює 1, то для $|S|$ маємо тривіальну оцінку [1]

$$|S| \leq T \quad (3)$$

причому знак рівності тут має місце тоді і тільки тоді, коли всі значення функції $F(x_1,...,x_r)$ мають одну і ту ж дробову частину. Однак для досить широких класів функцій $F(x_1,...,x_r)$ і сукупностей Ω виявляється можливим встановити для $|S|$ верхню границю, більш точну, ніж вказана тривіальна, а саме границю виду

$$|S| \leq T\Delta \quad (4)$$

де Δ – зі збільшенням числа T цілих точок області Ω і можливою одночасною зміною вигляду функції $F(x_1,...,x_r)$ прямує до нуля. Цей множник Δ, відрізняє таку границю від тривіальної, називається знижувальним множником [2].

Вперше тригонометричні суми з'явилися у Гаусса в одному з його доведень закону взаємності квадратичних лишків. Суми, які вивчав Гаусс, мали вигляд (суми Гаусса) [3]

$$S = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i \frac{ax^2}{P}}, (a, P) = 1 \quad (5)$$

і Гаусс повністю розв'язав проблему поведінки $|S|$; він дав наступні точні вирази для $|S|$:

$$\left| \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i \frac{ax^2}{P}} \right| = \begin{cases} \sqrt{P}, \text{якщо } P \equiv 1 (\bmod 2) \\ 0, \text{якщо } P \equiv 2 (\bmod 4) \\ \sqrt{2P}, \text{якщо } P \equiv 0 (\bmod 4) \end{cases} \quad (6)$$

Ідея виведення цих виразів досить проста і полягає в тому, що від суми S переходять до нової, більш простої, яку вдається обчислити точно; для її пояснення варто розглянути випадок $P \equiv 1 (\bmod 2)$. Тут знаходимо

$$|S|^2 = \sum_{y=1}^{P} \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i \frac{a(y^2 - x^2)}{P}} = \sum_{h=0}^{P-1} S_h \quad (7)$$

де S_h позначає суму доданків подвійної суми з умовою $y = x + h (\bmod P)$ і, отже, може бути представлено у вигляді

$$S_h = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i \frac{a(2hx + h^2)}{P}} \quad (8)$$

Тим самим в показнику експоненти замість многочлена другого степеня $f(x) = \frac{ax^2}{P}$, який був в сумі $f(x)$, отримано многочлен першого степеня $f(x) = \frac{a(2hx + h^2)}{P}$, тобто отримали лінійну сумму по x, яка точно обчислюється (сума членів геометричної прогресії). Очевидно, $S_h = P$, якщо $h = 0$, і $S_h = 0$, якщо $h > 0$. Тому

$$|S|^2 = P, |S| = \sqrt{P} \quad (9)$$

Сума Гаусса є окремим випадком більш загальної раціональної тригонометричної суми (або «повної раціональної тригонометричної суми») [4]

$$S=\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i\frac{f(x)}{P}} \quad (10)$$

де $f(x)=a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n, n>1, (a_1,...,a_n,P)=1$

У випадку простого $P=p$ Морделл (1932 г.) дав для цієї суми оцінку

$$|S|<np^{1-\frac{1}{n}} \quad (11)$$

яку А. Вейль (1948 г.), слідуючи одній ідеї Хассе (1934 г.), замінив наступною:

$$|S|<n\sqrt{p} \quad (12)$$

Оцінка А. Вейля в сенсі порядку зростання (при постійному n) зі зростанням p, взагалі кажучи, непокращувана - можна вказати необмежену кількість випадків, коли модуль суми буде не менше ніж $\sqrt{p}$. Дійсно, при $n=2$ модуль, рівний $\sqrt{p}$, має всяка сума Гаусса з умовою $p>2$. А при будь-якому $n>2$ і кожному p з умовою $\frac{n}{p-1}$ модуль, навіть більший ніж $\sqrt{p}$, неодмінно має щонайменше одна з сум виду [4]

$$S=\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i\frac{ax^n}{p}}, 0<a<p \quad (13)$$

Доведення останнього твердження таке: легко виводимо тотожність

$$W=\sum_{a=1}^{p-1}\left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i\frac{ax^n}{p}}\right|^2=\sum_{a=1}^{p}\sum_{y=1}^{p}\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i\frac{a(y^n-x^n)}{p}}-p^2 \quad (14)$$

звідки, помічаючи що порівняння

$$y^n\equiv x^n \pmod p \quad (15)$$

при заданому x має n розв’язків, якщо x не ділиться на p, і має один розв’язок, якщо x ділиться на p, отримаємо

$$W=p(p-1)n+p-p^2=p(p-1)(n-1) \quad (16)$$

Отже, що щонайменше для одного значення a з умовою $0<a<p$ будемо мати

$$|S|^2\geq(n-1)p, |S|\geq\sqrt{(n-1)p}>\sqrt{p} \quad (17)$$

Найкращу оцінку суми (10) у випадку складеного P дав Хуа (1940 р.). Він встановив нерівність

$$|S| \geq c(n)P^{1-\frac{1}{n}} \quad (18)$$

Ця нерівність чудова тим, що при постійному n в сенсі порядку зростання правій частині зі зростанням P воно, взагалі кажучи, вже не може бути замінено істотно кращим. Останнє випливає з наявності при всякому простому p з умовою $(n, p) = 1$ сум S [5]

$$S = \sum_{x=1}^{p^n} e^{2\pi i \frac{ax^n}{p^n}}, (a, p) = 1 \quad (19)$$

кожна з яких, дорівнює $P^{1-\frac{1}{n}}$, $P = p^n$.

Дійсно, покладаючи $x = y + zp^{n-1}$, отримаємо

$$S = \sum_{y=1}^{p^{n-1}} \sum_{z=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{a\left(y^n + ny^{n-1}zp^{n-1}\right)}{p^n}} = \sum_{y=1}^{p^{n-1}} S_y, S_y = \sum_{z=0}^{p-1} e^{2\pi i \left(\frac{ay^n}{p^n} + \frac{any^{b-1}z}{p}\right)} \quad (20)$$

Але, $S_y = p$, якщо y ділиться на p, і $S_y = 0$ в іншому випадку. Тому

$$S = p^{n-2}p = p^{n-1} = P^{1-\frac{1}{n}} \quad (21)$$

Раціональна тригонометрична сума входить як окремий випадок у ще більш загальний клас сум виду

$$S = S(\alpha_n, ..., \alpha_1) = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i f(x)} \quad (22)$$

де $f(x) = a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ і $\alpha_n, ..., \alpha_1$ – будь-які дійсні числа.

Перший загальний метод знаходження нетривіальних оцінок сум (22) дав Г. Вейль (1916), задовго до згаданих результатів Морделла та Хуа. Тому цим сумам присвоєно назву суми Г. Вейля. Ідея методу Г. Вейля заснована на тотожності (вважаємо $y = x + h$)

$$|S|^2 = \sum_{y=1}^{P} \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i (f(y) - f(x))} = \sum_{h=-P+1}^{P-1} S_h, S_h = \sum_{\max(1,1-h) \leq x \leq \min(P, P-h)} e^{2\pi i ((f(x+h) - f(x)))} \quad (23)$$

яка заміняє $|S|^2$ сумою $< 2P$ доданків S_h, причому S_h є сумою, аналогічною сумі S, але більш простою. Дійсно, число доданків суми S_h не перевищує P, а в показнику кожного доданка замість $f(x)$ стоїть різниця

$$f(x+h) - f(x) = n\alpha_n h x^{n-1} + \dots \quad (24)$$

дорівнює нулю при $h = 0$ і є многочленом степені $n-1$ в противному випадку. Оцінка суми S, одержувана за допомогою методу Г. Вейля, може бути дана наступною теоремою [5]:

Нехай $\alpha_n = \frac{a}{q} + \frac{\theta t}{q^2}, (a,q) = 1, 0 < q \le P^n, 1 \le t \le q$

Тоді при деякому $c(n,\varepsilon)$ більше одиниці, будемо мати нерівність

$$|S| \le c(n,\varepsilon) P^{1+\varepsilon} \left(P^{-1} + tq^{-1} + tP^{-n+1} + qP^{-n}\right)^{\rho_0} \quad (25)$$

$\rho_0 = 2^{-n+1}, \varepsilon > 0$ – як завгодно мала постійна.

Істотним недоліком цієї оцінки є швидка втрата її точності зі зростанням n. Дійсно, права частина нерівності (25) значно перевищує степінь $P^{1-\rho_0}$, показник якої зі зростанням n вельми швидко наближається до одиниці, оскільки ρ_0, являючись величиною порядку 2^{-n} відносно n, дуже швидко наближається до нуля.

Проте ця оцінка зіграла помітну роль у розвитку теорії чисел: вона дозволила дати перші, хоча і далеко не досконалі рішення ряду важливих проблем цієї області математики.

1.2 Тригонометричні суми з многочленами з цілими коефіцієнтами

Перш за все, відзначимо два класичних співвідношення при роботі з раціональними тригонометричними сумами, які надалі будуть часто використовуватись.

А) *Значення «розривного множника»:*

$$\sum_{x=1}^{q} e^{2\pi i \frac{ax}{q}} = \begin{cases} q, \text{якщо } a \equiv 0 (\operatorname{mod} q) \\ 0, \text{якщо } a \neq 0 (\operatorname{mod} q) \end{cases} \quad (26)$$

Б) *Перетворення квадрата модуля суми:*

$$\left| \sum_{x \in X} e^{2\pi i F(x)} \right|^2 = \sum_{x_1, x_2 \in X} e^{2\pi i (F(x_1) - F(x_2))} \quad (27)$$

Повні раціональні поліноміальні тригонометричні суми з простим знаменником

$$S = S(f, p) = \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{f(x)}{p}} \quad (28)$$

де $f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ – многочлен з цілими коефіцієнтами, у якого $p - 1 \geq n \geq 2$ і $(a_n, p) = 1$

Такі суми можна оцінити тривіально:

$$|S| \leq p \quad (29)$$

але тривіальні оцінки не мають практичної цінності в додатках.

Тому постає завдання нетривіальної оцінки S, тобто оцінки виду

$$|S| \leq p\delta \quad (30)$$

де δ – понижуючий множник, $0 \leq \delta < 1$.

Найвідомішою нетривіальною оцінкою поліноміальної суми є класичний результат Вейля [8]:

$$|S| \leq (n-1)\sqrt{p} \quad (31)$$

В цій оцінці $\delta = \dfrac{n-1}{\sqrt{p}}$

У разі, коли на n, коефіцієнти $f(x)$ (а, можливо, і на p) накладені деякі додаткові умови, то можна отримати оцінки, які будуть кращі оцінки Вейля.

Це зроблено, наприклад, Карацубою А. А.

Теорема (Карацуба А.А.) *Нехай:*

$$f(x) = ax + bx^n \quad (32)$$

де $(a, p) = (b, p) = 1$ *і* $2 \le n \le p-1$. *Тоді маємо:*

$$|S(f, p)| \le \left(\frac{n-1}{p} \right)^{\frac{1}{4}} p \quad (33)$$

Наступні дві теореми отримані подібним чином. У них містяться оцінки сум для інших класів многочленів.

Теорема 1. *Має місце оцінка [7]*

$$\left| \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{ax' + bx^n}{p}} \right| \le \left(\frac{\frac{n}{m}(m, p-1)^3 - 1}{p} \right)^{\frac{1}{4}} p \quad (34)$$

де $p \ge 3$ *– просте число,* m, n, a, b *– натуральні числа,* $2 \le n \le p-1$, $m \mid n, m < n, (a, p) = (b, p) = 1$

<u>Доведення</u>. Позначимо $(m, p-1) = l$. Маємо

$$\begin{aligned} |S|^4 &= \frac{1}{p-1} \sum_{t=1}^{p} \left| \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{at^m x^m + bt^n x^n}{p}} \right|^4 - \frac{p^4}{p-1} \le \frac{l}{p-1} \sum_{t_1, t_2 = 1}^{p} \left| \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{t_1 x^m + t_2 x^n}{p}} \right|^4 - \frac{p^4}{p-1} = \\ &= \frac{l}{p-1} \sum_{t_1, t_2 = 1}^{p} \sum_{x_1, x_2, y_1, y_2 = 1}^{p} e^{2\pi i \frac{t_1 \left(x_1^m + y_1^m - x_2^m + y_2^m \right) + t_2 \left(x_1^n + y_1^n - x_2^n + y_2^n \right)}{p}} - \frac{p^4}{p-1} = \frac{p^2 l N}{p-1} - \frac{p^4}{p-1} \end{aligned} \quad (35)$$

де N – число розв'язків системи конгруенцій

$$\begin{cases} x_1^m + y_1^m \equiv x_2^m + y_2^m \pmod p \\ x_1^n + y_1^n \equiv x_2^n + y_2^n \pmod p \\ 1 \le x_1, y_1, x_2, y_2 \le p \end{cases} \quad (36)$$

Нехай $n = km$. Тоді $N = N_1 + N_2$, де N_1 – число розв'язків системи:

$$\begin{cases} x_1^m \equiv x_2^m \pmod p \\ y_1^m \equiv y_2^m \pmod p \\ 1 \le x_1, y_1, x_2, y_2 \le p \end{cases} \quad (37)$$

а N_2 – число розв'язків системи

$$\begin{cases} x_1^m \neq x_2^m (\operatorname{mod} p) \\ x_1^m + y_1^m \equiv x_2^m + y_2^m (\operatorname{mod} p) \\ x_1^n + y_1^n \equiv x_2^n + y_2^n (\operatorname{mod} p) \\ 1 \le x_1, y_1, x_2, y_2 \le p \end{cases} \quad (38)$$

Варто зазначити, що

$$N_1 = (1 + (p-1)l)^2 \quad (39)$$

Дійсно, зафіксуємо x_1. Якщо $x_1 = p$, то $x_2 = p$. Якщо ж $1 \le x_1 \le p-1$, то x_2 може приймати рівно l різних значень.

Аналогічно з y_1, y_2.

Оцінюючи N_2, фіксуємо x_1, x_2 з умовою $x_1^m \neq x_2^m (\operatorname{mod} p)$. Таких пар рівно $p^2 - (1 + (p-1)l)$. Тоді, якщо

$$x_1^m \equiv A (\operatorname{mod} p), x_2^m \equiv B (\operatorname{mod} p), A \neq B (\operatorname{mod} p) \quad (40)$$

то $y_2^m \equiv A - B + y_1^m (\operatorname{mod} p)$ і друге рівняння системи переписується у вигляді

$$\left(A - B + y_1^m\right)^k - y_1^{mk} + B^k - A^k \equiv 0 (\operatorname{mod} p) \quad (41)$$

Маємо

$$N_2 \le (k-1) l^2 \left(p^2 - (1 + (p-1)l)\right) \quad (42)$$

Дійсно, $\left(A - B + y_1^m\right)^k - y_1^{mk} + B^k - A^k$ представляє собою многочлен степені $k-1$ від y_1^m. За відомою теоремою Лагранжа такий многочлен має не більше $k-1$ коренів в полі лишків Z_p. Далі, для кожного кореня цього многочлена є не більше l значень для y_1 і не більше l значень для y_2.

Отримуємо

$$N = N_1 + N_2 \le (1 + (p-1)l)^2 + (k-1) l^2 \left(p^2 - (1 + (p-1)l)\right) \le kp(p-1) l^2 \quad (43)$$

Звідси

$$|S|^4 \le \frac{p^2 l N}{p-1} - \frac{p^4}{p-1} \le \frac{k l^3 p^3 (p-1)}{p-1} - \frac{p^4}{p-1} \le \left(k l^3 - 1\right) p^3 \quad (44)$$

Теорема доведена.

Теорема 2. *Справедлива оцінка [7]*

$$\left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{f(x)}{p}}\right| \le \left(\frac{k!n}{p}\right)^{\frac{1}{2k+2}} p \quad (45)$$

де $p \ge 3$ *– просте число,* $f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k + a_n x^n -$ *многочлен з цілими коефіцієнтами,*

$1 \le k < n \le p-1, (k+1) \mid n, (a_1, p) = (a_2, p) = \ldots = (a_k, p) = (a_n, p) = 1.$

Доведення. За допомогою міркувань, аналогічних міркуванням з доведенням теореми 1, отримуємо

$$|S|^{2k+2} \le \frac{p^{k+1} N}{p-1} - \frac{p^{2k+2}}{p-1} \quad (46)$$

де N – число розв’язків системи конгруенцій

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_{k+1} \equiv y_1 + y_2 + \ldots + y_{k+1} \pmod{p} \\ x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{k+1}^2 \equiv y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{k+1}^2 \pmod{p} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^k + x_2^k + \ldots + x_{k+1}^k \equiv y_1^k + y_2^k + \ldots + y_{k+1}^k \pmod{p} \\ x_1^n + x_2^n + \ldots + x_{k+1}^n \equiv y_1^n + y_2^n + \ldots + y_{k+1}^n \pmod{p} \\ 1 \le x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}, y_1, y_2, \ldots, y_{k+1} \le p \end{cases} \quad (47)$$

Нехай

$$P_j(z_1, z_2, \ldots, z_t) = z_1^j + z_2^j + \ldots + z_t^j \quad (48)$$

– j-а степенева сума, а

$$S_j(z_1, z_2, \ldots, z_t) = z_1 \ldots z_j + \ldots + z_{t-j+1} \ldots z_t \quad (49)$$

– j-й елементарний симетричний многочлен.

Використовуємо формули Ньютона:

$$P_j - P_{j-1} S_1 + P_{j-2} S_2 - \ldots + (-1)^{j-1} P_1 S_{j-1} + (-1)^j j S_j = 0 \quad (50)$$

при $1 \le j \le t$ і

$$P_j - P_{j-1} S_1 + P_{j-2} S_2 - \ldots + (-1)^{t-1} P_{j-t+1} S_{t-1} + (-1)^t P_{j-t} S_t = 0 \quad (51)$$

при $j > t$

Зафіксуємо $y_1, y_2, \ldots, y_{k+1}$ (таких наборів p^{k+1} штук)

Виражаємо через $y_1, y_2, ..., y_{k+1}$ елементарні симетричні многочлени від $x_1, x_2, ..., x_{k+1}$ (вони визначаються однозначно):

$$S_1(x_1, x_2, ..., x_{k+1}) = x_1 + x_2 + ... + x_{k+1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (52)$$
$$S_k(x_1, x_2, ..., x_{k+1}) = x_1 ... x_k + ... + x_2 ... x_{k+1}$$

При $(k+1) | n$ вираз

$$y_1^n + y_2^n + ... + y_{k+1}^n - x_1^n - x_2^n - ... - x_{k+1}^n \quad (53)$$

є многочленом степені $\frac{n}{k+1}$ відносно

$$S_{k+1}(x_1, x_2, ..., x_{k+1}) = x_1 x_2 ... x_{k+1} \quad (54)$$

із старшим коефіцієнтом $\pm(k+1)$

Відповідно, для S_{k+1} існує не більше $\frac{n}{k+1}$ значень, далі по $S_1, S_2, ..., S_{k+1}$ значення $x_1, x_2, ..., x_{k+1}$ визначаються однозначно з точністю до перестановки. Звідси отримуємо оцінку

$$N \le p^{k+1} \frac{n}{k+1} (k+1)! = p^{k+1} n k! \quad (55)$$

Відповідно,

$$|S|^{2k+2} \le \frac{p^{2k+2} n k!}{p-1} - \frac{p^{2k+2}}{p-1} \le n k!\, p^{2k+1} \quad (56)$$

при $nk! \le p$, звідки

$$|S| \le \left(n k!\, p^{2k+1}\right)^{\frac{1}{2k+2}} \quad (57)$$

при $nk! \le p$.

При $p < nk!$ оцінка стає гіршою за тривіальну. Теорема доведена.

Також відомі наступні оцінки:

1) Якщо $p \ge 3$ просте; a, b, n – натуральні; $p > n, \delta = (n, p-1), (a, p) = (b, p) = 1$, то

$$\left| \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{ax^n + bx}{p}} \right| \le \frac{p}{\sqrt{\delta}} \quad (58)$$

2) Якщо $p \geq 3$ просте; a, b, k, n – натуральні; $n \mid (p-1)$, $(n,k)=1, \delta=(k,p-1), (a,p)=(b,p)=1$, то

$$\left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{ax^n+bx^k}{p}}\right| \leq \frac{p}{\sqrt{n}} + (\delta-1)^{\frac{1}{2}} p^{\frac{3}{4}} \quad (59)$$

3) Якщо $(a,p)=(b,p)=(c,p)=1, n_1 \mid (p-1), n_2 \mid (p-1), (n_1,n_2)=(k,p-1)=(k,n_1)=1$, то

$$\left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{ax^{n_1}+bx^{n_2}+cx^k}{p}}\right| \leq \sqrt{2}\,\frac{p}{\sqrt[4]{n_2}} \quad (60)$$

Теорема 3. *Має місце оцінка [7]*

$$\left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{ax^n+bx^2}{p}}\right| \leq \left(\sqrt{\frac{3+(-1)^n}{2\delta}}\right) p \quad (61)$$

де $p \geq 7$ *– просте число,* $p \equiv 3 \pmod 4$, a, b, n *– натуральні числа,* $3 \leq n \leq p-1, (a,p)=(b,p)=1$, *а* $\delta=(n-1,p)$

Доведення. Позначимо

$$Y=\{y : 1 \leq y \leq p, y^n \equiv 1 \pmod p\},\; S=\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{ax^n+bx^2}{p}} \quad (62)$$

Тоді

$$|Y|=(n,p-1)=\delta \quad (63)$$

Маємо

$$\delta S=\sum_{y\in Y}\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{ax^n+bx^2y^2}{p}}=\sum_{x=1}^{p}\sum_{y\in Y} e^{2\pi i \frac{ax^n+by^2x^2}{p}} \quad (64)$$

Звідси

$$\delta|S| \leq \sum_{x=1}^{p}\left|\sum_{y\in Y} e^{2\pi i \frac{by^2x^2}{p}}\right| \quad (65)$$

Відповідно,

$$\delta^2|S|^2 \leq p\sum_{x=1}^{p}\sum_{y_1,y_2\in Y} e^{2\pi i \frac{b(y_1^2-y_2^2)x^2}{p}} \quad (66)$$

Нехай K_1 – множина пар $(y_1, y_2) \in Y \times Y$, таких, що $y_1^2 \equiv y_2^2 (\bmod p)$, а K_2 – множина всіх інших пар.

Тоді

$$\delta^2 |S|^2 \le p^2 |K_1| + p \sum_{(y_1, y_2) \in K_2} \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{b(y_1^2 - y_2^2) x^2}{p}} \quad (67)$$

Варто відмітити, що $(y_1, y_2) \in K_2$ тоді, і тільки тоді, коли $(y_2, y_1) \in K_2$ причому $(y_1, y_2) \neq (y_2, y_1)$.

Далі, якщо $(y_1, y_2) \in K_2$, то $y_1^2 - y_2^2$ – квадратичний лишок тоді, і тільки тоді, коли $y_2^2 - y_1^2$ – квадратичний нелишок, оскільки $p \equiv 3 (\bmod 4)$, тобто (-1)– квадратичний нелишок.

Тому для $(y_1, y_2) \in K_2$ маємо

$$\sum_{x=1}^{p} \left(e^{2\pi i \frac{b(y_1^2 - y_2^2) x^2}{p}} + e^{2\pi i \frac{b(y_2^2 - y_1^2) x^2}{p}} \right) = 0 \quad (68)$$

Дійсно, один із $b(y_1^2 - y_2^2)$ і $b(y_2^2 - y_1^2)$ – квадратичний лишок, інший – квадратичний нелишок.

Відповідно,

$$\delta^2 |S|^2 \le p^2 |K_1| + p \cdot 0 \cdot \frac{|K_2|}{2} = p^2 |K_1|$$

Якщо n непарне, то $|K_1| = \delta$, якщо n парне, то $|K_1| = 2\delta$.

Іншими словами, $|K_1| = \dfrac{3 + (-1)^n}{2\delta}$

Звідси

$$|S| = p \sqrt{\frac{3 + (-1)^n}{2\delta}} \quad (69)$$

Теорема доведена.

Теорема 4. *Справедлива оцінка [7]*

$$\left| \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{f(x) + g(x)}{p}} \right| \le \left(\delta_1^{-\frac{1}{2}} + \delta_2^{-\frac{1}{4}} + \ldots + \delta_t^{-\frac{1}{2^t}} + \left(\frac{k-1}{\sqrt{p}} \right)^{-\frac{1}{2^t}} \right) p \quad (70)$$

де $p \geq 3$ *– просте число,* $f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_k x^k$ *і* $g(x) = b_1 x^{n_1} ... + b_t x^{n_t}$ *– такі многочлени з цілими коефіцієнтами, що* $p-1 \geq n_r > k$ *і* $(p-1, n_r, k) = 1$ *при всіх* $1 \leq r \leq t$, $(a_k, p) = 1$, *а* $\delta_r = (p-1, n_r)$ *при всіх* $1 \leq r \leq t$.

<u>Доведення</u>. Позначимо

$$S = \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{f(x)+g(x)}{p}} \quad (71)$$

Доведення проведемо індукцією по t.

При $t = 1$ маємо:

$$f(x) + g(x) = a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_k x^k + b_1 x^{n_1}, S = \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_k x^k + b_1 x^{n_1}}{p}} \quad (72)$$

Позначимо

$$Y = \{y : 1 \leq y \leq p, y^{n_1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)\} \quad (73)$$

Тоді $|Y| = (n_1, p-1) = \delta_1$, звідки

$$\delta_1 S = \sum_{y \in Y} \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{a_1 xy + a_2 x^2 y^2 + ... + a_k x^k y^k + b_1 x^{n_1} y^{n_1}}{p}} = \sum_{x=1}^{p} \sum_{y \in Y} e^{2\pi i \frac{a_1 xy + a_2 x^2 y^2 + ... + a_k x^k y^k + b_1 x^{n_1}}{p}} \quad (73)$$

Відповідно,

$$\delta_1 |S| = \sum_{x=1}^{p} \left| \sum_{y \in Y} e^{2\pi i \frac{a_1 xy + a_2 x^2 y^2 + ... + a_k x^k y^k + b_1 x^{n_1}}{p}} \right| = \sum_{x=1}^{p} \left| \sum_{y \in Y} e^{2\pi i \frac{a_1 xy + a_2 x^2 y^2 + ... + a_k x^k y^k}{p}} \right| \quad (74)$$

Далі скористаємося нерівністю про середнє арифметичне і середнє квадратичне:

$$\delta_1 |S|^2 \leq p \sum_{x=1}^{p} \left| \sum_{y \in Y} e^{2\pi i \frac{a_1 xy + a_2 x^2 y^2 + ... + a_k x^k y^k}{p}} \right|^2 = p \sum_{x=1}^{p} \sum_{y_1, y_2 \in Y} e^{2\pi i \frac{a_1 x (y_1 - y_2) + a_2 x^2 (y_1^2 - y_2^2) + ... + a_k x^k (y_1^k - y_2^k)}{p}} \leq$$
$$\leq p \sum_{y_1, y_2 \in Y} e^{2\pi i \frac{a_1 x (y_1 - y_2) + a_2 x^2 (y_1^2 - y_2^2) + ... + a_k x^k (y_1^k - y_2^k)}{p}} \quad (75)$$

Якщо $y_1, y_2 \in Y$ і $y_1 \neq y_2$, то $y_1^k - y_2^k \neq 0 (\mathrm{mod}\, p)$

Розбиваємо Y^2 на дві множини:

$$Y^2 = Y \times Y = (Y^2) \cup (Y^2)' \quad (76)$$

де

$$\left(Y^2\right) = \{(y_1, y_2): y_1, y_2 \in Y, y_1 = y_2\} \ (77)$$

і

$$\left(Y^2\right)' = \{(y_1, y_2): y_1, y_2 \in Y, y_1 \neq y_2\} \ (78)$$

Тоді $\left|\left(Y^2\right)\right| = \delta_1$ і $\left|\left(Y^2\right)'\right| = \delta_1^2 - \delta_1$

Маємо

$$\delta_1^2 |S|^2 \leq p \sum_{(y_1,y_2)\in\left(Y^2\right)} \left| \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{a_1 x(y_1-y_2)+a_2x^2\left(y_1^2-y_2^2\right)+\ldots+a_k x^k\left(y_1^k-y_2^k\right)}{p}} \right| +$$

$$+ p \sum_{(y_1,y_2)\in\left(Y^2\right)'} \left| \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{a_1 x(y_1-y_2)+a_2x^2\left(y_1^2-y_2^2\right)+\ldots+a_k x^k\left(y_1^k-y_2^k\right)}{p}} \right| \leq p^2\delta_1 + p\left(\delta_1^2 - \delta_1\right)(k-1)\sqrt{p} \quad (79)$$

(тут застосована відома оцінка Вейля до кожної із сум).

Звідси

$$|S|^2 \leq \frac{p^2}{\delta_1} + p^{\frac{3}{2}}(k-1) \ (80)$$

Відповідно,

$$|S| \leq \frac{p}{\sqrt{\delta}} + p^{\frac{3}{4}}\sqrt{k-1} = p\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}} + \left(\frac{k-1}{\sqrt{p}}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \ (81)$$

Для $t = 1$ оцінка доведена.

Нехай тепер вона доведена для деякого $t-1, t \geq 2$. Доведемо її для t.

Нехай, як і раніше,

$$Y = \left\{y : 1 \leq y \leq p, y^{n_1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)\right\}, |Y| = (n_1, p-1) = \delta_1 \ (82)$$

Міркуючи аналогічно, отримуємо

$$\delta_1 |S| \leq \sum_{x=1}^{p} \left| \sum_{y\in Y} e^{2\pi i \frac{a_1 xy + a_2 x^2 y^2 + \ldots + a_k x^k y^k + b_2 x^{n_2} y^{n_2} + \ldots + b_t x^{n_t} y^{n_t}}{p}} \right| \ (83)$$

Відповідно,

$$\delta_1^2 |S|^2 \leq p^2\delta_1 + \left(\delta_1^2 - \delta_1\right)p^2\left(\delta_2^{-\frac{1}{2}} + \delta_3^{-\frac{1}{4}} + \ldots + \delta_t^{-\frac{1}{2^{t-1}}} + \left(\frac{k-1}{\sqrt{p}}\right)^{\frac{1}{2^{t-1}}}\right) \ (84)$$

Звідки,

$$|S|^2 \le \frac{p^2}{\delta_1} + p^2\left(\delta_2^{-\frac{1}{2}} + \delta_3^{-\frac{1}{4}} + \ldots + \delta_t^{-\frac{1}{2^{t-1}}} + \left(\frac{k-1}{\sqrt{p}}\right)^{\frac{1}{2^{t-1}}}\right) \quad (85)$$

Отже,

$$|S| \le p\left(\delta_1^{-\frac{1}{2}} + \delta_2^{-\frac{1}{4}} + \ldots + \delta_t^{-\frac{1}{2^t}} + \left(\frac{k-1}{\sqrt{p}}\right)^{\frac{1}{2^t}}\right) \quad (86)$$

Теорема доведена.

І. М. Виноградовим [9] була отримана наступна оцінка для сум Гаусса: якщо $(a,p)=1, \delta=(n,p-1)$*, то*

$$\left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{ax^n}{p}}\right| \le (\delta-1)\sqrt{p} \quad (87)$$

Наступна теорема уточнює цю оцінку в спеціальному випадку.

Теорема 5. *Має місце оцінка*

$$\left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{ax^n}{p}}\right| \le \frac{2n-1}{2\sqrt{2p}}\, p \quad (88)$$

де $p \ge 3$ *– просте число,* a, n *– натуральні числа, причому* $\frac{p-1}{n}$ *– непарне ціле і* $(a,p)=1$

<u>Доведення</u>. Маємо

$$\sum_{a=1}^{p}\left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{ax^n}{p}}\right|^2 = \sum_{a=1}^{p}\sum_{x_1=1}^{p}\sum_{x_2=1}^{p} e^{2\pi i \frac{a\left(x_1^n - x_2^n\right)}{p}} = \sum_{x_1=1}^{p}\sum_{x_2=1}^{p}\sum_{a=1}^{p} e^{2\pi i \frac{a\left(x_1^n - x_2^n\right)}{p}} = pN \quad (89)$$

де N – число розв’язків конгруенції $x_1^n \equiv x_2^n \pmod{p}$, тобто $N = 1 + n(p-1)$.

Далі,

$$\sum_{a=1}^{p-1}\left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{ax^n}{p}}\right|^2 = p\bigl(1+n(p-1)\bigr) - p^2 = \left(p^2 - p\right)(n-1) \quad (90)$$

Нехай g – первісний корінь по модулю p. І нехай $a \equiv g^{nh+t} \pmod{p}$, де h – ціле, $t \in \{0,1,\ldots,n-1\}$. Введемо позначення

$$S(a) = \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{ax^n}{p}} \quad (91)$$

для $a \in \{1, ..., p-1\}$

При однакових t (і різних h) суми $S(a)$ однакові. Суми $S(a)$ і $S(-a)$ однакові по модулю, причому у a і $(-a)$ різні t (так як із $-1 \equiv g^{nh'} (\operatorname{mod} p)$ слідує, що $-1 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{n}} \equiv g^{(p-1)h'} \equiv 1 (\operatorname{mod} p)$ – протиріччя)

Тоді

$$\sum_{t=0}^{n-1} \left| \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{g^t x^n}{p}} \right|^2 = \frac{(p^2 - p)(n-1)}{\frac{p-1}{n}} = pn(n-1) \quad (92)$$

і

$$2|S(a)|^2 = |S(a)|^2 + |S(-a)|^2 \le \sum_{t=0}^{n-1} \left| \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{g^t x^n}{p}} \right|^2 = pn(n-1) \quad (93)$$

Звідки,

$$|S(a)| \le \sqrt{\frac{pn(n-1)}{2}} \le \frac{2n-1}{2\sqrt{2p}} p \quad (94)$$

Теорема доведена.

РОЗДІЛ 2. ПРАКТИЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ СУМ

Нехай,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \quad (95)$$

- многочлен з цілими коефіцієнтами, T – натуральне число, p - просте число.

Позначимо через $N(f, p, T)$ кількість розв'язків конгруенції

$$f(x) \equiv y (\bmod p) \quad (96)$$

в множині

$$\{(x, y) : 0 \le x \le p-1, 0 \le y \le T-1\} \quad (97)$$

Використовуємо наступну лему:

Лема 1. *Нехай*

$$M = \max\left\{ \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{af(x)}{p}} \mid a \in \{1, 2, \ldots, p-1\} \right\} \quad (98)$$

Тоді

$$N(f, p, T) = T + \theta M \ln p \quad (99)$$

де θ *– дійсне число,* $|\theta \le 1|$

<u>Доведення</u>. Маємо

$$N(f, p, T) = \sum_{y=0}^{T-1} \sum_{x=0}^{p-1} \frac{1}{p} \sum_{a=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{a(f(x)-y)}{p}} \quad (100)$$

Відповідно,

$$N(f, p, T) = T + \frac{1}{p} \left| \sum_{a=0}^{p-1} \left(\sum_{y=0}^{T-1} e^{2\pi i \frac{-ay}{p}} \right) \left(\sum_{x=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{af(x)}{p}} \right) \right| \quad (101)$$

Звідси,

$$N(f, p, T) = T + \vartheta \frac{1}{p} \sum_{a=0}^{p-1} \left| \left(\sum_{y=0}^{T-1} e^{2\pi i \frac{-ay}{p}} \right) \right| \quad (102)$$

де $|\vartheta| \le 1$

Відома оцінка

$$\sum_{a=0}^{p-1}\left|\left(\sum_{y=0}^{T-1} e^{2\pi i\frac{-ay}{p}}\right)\right| \le p\ln p \quad (103)$$

Тому

$$N(f,p,T) = T + \theta M\ln p$$

де $|\theta| \le 1$. Лема доведена.

На основі цієї леми та оцінок з першого розділу тривіально виходять наступні теореми.

Теорема 6. *Нехай* $p \ge 3$ *– просте число,* m,n,a,b *– натуральні числа,* $2 \le n \le p-1$, $m \mid n, m < n, (a,p) = (b,p) = 1, f(x) = ax^m + bx^n$.

Тоді

$$N(f,p,T) = T + \theta\left(\frac{n}{m}(m,p-1)^3 - 1\right)^{\frac{1}{4}} p^{\frac{3}{4}}\ln p \quad (104)$$

де $|\theta| \le 1$

Теорема 7. *Нехай* $p \ge 3$ *– просте число,* $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k + a_nx^n$ *– многочлен з цілими коефіцієнтами,* $1 \le k < n \le p-1$, $(k+1) \mid n$, $(a_1,p) = (a_2,p) = \ldots = (a_k,p) = (a_n,p)$.

Тоді

$$N(f,p,T) = T + \theta((k-1)!n)^{\frac{1}{2k+2}} p^{1-\frac{1}{2k+2}}\ln p \quad (105)$$

де $|\theta| \le 1$

Теорема 8. *Нехай* $p \ge 7$ *– просте число,* $p \equiv 3 \pmod 4$, a,b,n *– натуральні числа,* $3 \le n \le p-1, (a,p) = (b,p) = 1$, *а* $\delta = (n-1,p), f(x) = ax^n + bx^2$

Тоді

$$N(f,p,T) = T + \theta\left(\sqrt{\frac{3+(-1)^n}{2\delta}}\right)p\ln p \quad (106)$$

де $|\theta| \le 1$

Теорема 9. *Нехай* $p \ge 3$ *– просте число,* $f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k$ *і* $g(x) = b_1 x^{n_1} \ldots + b_t x^{n_t}$ *– такі многочлени з цілими коефіцієнтами, що* $p - 1 \ge n_r > k$ *і* $(p-1, n_r, k) = 1$ *при всіх* $1 \le r \le t$, $(a_k, p) = 1$, *а* $\delta_r = (p-1, n_r)$ *при всіх* $1 \le r \le t$.

Тоді

$$N(f+g, p, T) = T + \theta \left(\delta_1^{-\frac{1}{2}} + \delta_2^{-\frac{1}{4}} + \ldots + \delta_t^{-\frac{1}{2^t}} + \left(\frac{k-1}{\sqrt{p}} \right)^{-\frac{1}{2^t}} \right) p \ln p \quad (107)$$

де $|\theta| \le 1$

Теорема 10. *Нехай* $p \ge 3$ *– просте число,* a, n *– натуральні числа, причому* $\frac{p-1}{n}$ *– непарне ціле і* $(a, p) = 1$, $f(x) = ax^n$

Тоді

$$N(f, p, T) = T + \theta \frac{2n-1}{2\sqrt{2p}} p \ln p \quad (108)$$

де $|\theta| \le 1$.

ВИСНОВОК

Як видається, отримання нових верхніх оцінок повних раціональних поліноміальних сум з простим знаменником пов'язане з пошуком нових евристичних методів.

У цьому сенсі яскравими роботами є статті Акулінічева Н.М. і Карацуби А. А. Доведення теорем 1, 2, 3, 4 у першому розділі базуються на ідеях цих авторів.

Можливо, відкрити нові горизонти в цій тематиці могло б допомогти вивчення нижніх оцінок таких сум. Проте, на сьогоднішній день найкращим результатом тут є оцінка Карацуби А. А., центральним моментом доведення якої є вдале застосування принципу Діріхле.

В першому розділі роботи були розглянуті теоретичні аспекти поняття тригонометричної суми, а також виведені різні верхні оцінки тригонометричних сум для многочленів з цілими коефіцієнтами.

В другому розділі роботи на основі доведеної леми, були виведені теореми, які пов’язані з теоремами першого розділу.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Dubickas A. Sums of Primes and Quadratic Linear Recurrence Sequences // Acta Mathematica Sinica, English Series, Dec., 2013, Vol. 29, N 12, pp. 2251-2260.
2. Erdos P. On some problems of Bellman and a theorem of Romanoff // Journal of Chinese Mathematical Society. 1951. 1.
3. Hua Loo Keng. Introduction to Number Theory. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1982.
4. Konyagin S. V., Shparlinski I. Character sums with exponential functions and their applications. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
5. Lee K. S. Enoch. On the sum of a prime and a Fibonacci number // International Journal of Number Theory, 2010, Vol. 6, N 7, pp. 1-8.
6. Schinzel A. Special Lucas Sequences, Including the Fibonacci Sequence, Modulo a prime // Baker A., Bollobas B., Hajnal A. (Eds.) A tribute of Paul Erdos. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. P. 349-357.
7. Somer L. Distribution of Residues of Certain Second-Order Linear Recurrences Modulo p // Berum G. E., Philippou A. N., Horadam A. F. (Eds.) Applications of Fibonacci Numbers. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1990. Vol. 3. P. 311-324.
8. Weil A. On some exponential sums // Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA. 1948. 34. N5. P. 204-207.
9. Романов Н. П. Uber einige Satze der additiven Zahlentheorie // Mathematische Annalen. 1934. 109. P. 668-678.
10. Varbanets P., Trigonometric sums and their applications, Ann. Univ. Sci. Budapest, E. Lorend, SectioCompututorica, 14, 1994, 219-240.
11. L. Balyas and P. Varbanets, Twisted exponential sums over the ring of Gaussian integers, Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp., 40 (2013), 95-103.

12. Pavel Varbanets and Sergey Varbanets Twisted exponential sums and the distribution of solutions of the congruence f(x,y)≡0(mod p^m) over Z[i] // Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. – 2013. –V.41. – pp.95–103.
13. Pavel Varbanets, Sergey Varbanets Generalized twisted exponential sum // Siauliai Math. Semin. – 2013. – V. 8(16). – pp.267–279.
14. Pavel Varbanets, Sergey Varbanets Exponential sums over norm groups // Siauliai Math. Semin. – 2014. – V. 9(17). – pp.83–92.
15. Pavel Varbanets, Sergey Varbanets Twisted exponential sums over the ring of Gaussian integers // Siauliai Math. Semin. – 2015. – 10(18). – pp.213–223.