

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені І. І. МЕЧНИКОВА  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФІЗИКИ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ  
КАФЕДРА МЕТОДІВ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

# **ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ФРЕДГОЛЬМА**

ЕЛЕКТРОННИЙ МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК  
для здобувачів вищої освіти  
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти  
спеціальності 113 «Прикладна математика»

ОДЕСА  
ОНУ  
2024

**УДК 517.968.21 (076)**  
**I-73**

**Укладач:**

**Г. О. Фесенко**, к. фіз.-мат. н., доц. кафедри методів математичної фізики ОНУ імені І. І. Мечникова.

**Рецензенти:**

**А. О. Кореновський**, доктор фіз.-мат. н. проф., зав. кафедри математичного аналізу ОНУ імені І. І. Мечникова;

**О. Д. Кічмаренко**, доктор фіз.-мат. н., доц., зав. кафедри оптимального керування та економічної кібернетики ОНУ імені І. І. Мечникова.

*Рекомендовано вченою радою факультету математики,  
фізики та інформаційних технологій ОНУ імені І. І. Мечникова.  
Протокол № 7 від 30 квітня 2024 р.*

**I-73** **Інтегральне рівняння Фредгольма [Електронний ресурс]** : електрон. метод. посіб. для здобув. вищ. освіти першого (бакалавр.) рівня вищ. освіти спец. 113 «Прикладна матем.» / укладач: Г. О. Фесенко. – Одеса : Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2024. – 80 с. – 1,5 МБ.

*Електронний методичний посібник складено відповідно до програми зі спеціального курсу «Інтегральні рівняння у прикладних задачах» для здобувачів першого (бакалаврського) рівня навчання, спеціальності 113 Прикладна математика.*

*Розглянуто основні теми теорії інтегрального рівняння Фредгольма. Теоретичний матеріал супроводжується численними прикладами. Запропоновані завдання для самостійної роботи, які супроводжуються вказівками та варіанти робіт для підсумкового контролю з відповідями.*

**УДК 517.968.21 (076)**

## Зміст

Вступ .....	4
1. Інтегральне рівняння Фредгольма.....	5
2. Метод визначників Фредгольма.....	7
3. Ітераційні ядра. Побудова резольвенти.....	11
4. Інтегральне рівняння з виродженим ядром .....	22
5. Характеристичні числа та власні функції .....	26
6. Інтегральне рівняння Фредгольма з різницеви- ми ядрами.....	42
7. Однорідні інтегральні рівняння із виродженим ядром.....	44
8. Неоднорідні симетричні рівняння.....	45
9. Альтернатива Фредгольма .....	51
10. Застосування функції Гріна до розв'язання крайових задач .....	57
11. Крайові задачі з параметром та зведення їх до інтегральних рівнянь.....	62
12. Інтегральне рівняння Фредгольма 1-го роду.....	67
Варіанти прикладів для підсумкового контролю .....	75
Відповіді .....	77
Література .....	78

## **Вступ.**

Теорія інтегральних рівнянь займає важливе місце у системі підготовки фахівців з математики, прикладної математики, фізики, механіки, електроніки, матеріалознавства тощо. Інтегральні рівняння та методи їх дослідження широко використовуються у різних галузях науки й техніки, наприклад, у теорії пружності, теорії пластичності, гідродинаміці, акустиці, теорії руйнування та теорії керування.

Методичний посібник охоплює частину програми зі спеціального курсу «Інтегральні рівняння у прикладних задачах» для студентів з напрямів підготовки «математика», «прикладна математика».

Метою методичного посібника є ознайомлення студентів з основними поняттями, твердженнями, методами та застосуванням інтегрального рівняння Фредгольма. Всі поняття, теореми та твердження супроводжуються розв'язаними прикладами.

## 1. Інтегральне рівняння Фредгольма

*Лінійним інтегральним рівнянням Фредгольма 2-го роду* називається рівняння виду

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \quad (1)$$

де  $\varphi(x)$  – невідома функція,  $K(x,t), f(x)$  – відомі функції,  $x, t$  – дійсні змінні, що належать інтервалу  $(a,b)$ ,  $\lambda$  – числовий множник.

Функція  $K(x,t)$  є *ядром інтегрального рівняння* (1), припускається, що ядро визначено у квадраті  $\Omega\{a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$  на площині  $(x, t)$  та неперервно у  $\Omega$ , або його розриви такі, що подвійний інтеграл

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 dx dt$$

має скінченне значення.

Якщо  $f(x) \neq 0$ , рівняння (1) *неоднорідне*; якщо ж  $f(x) \equiv 0$ , то рівняння є *однорідним*.

Інтегральне рівняння виду

$$\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \quad (2)$$

що не містить невідому функцію  $\varphi(x)$  за межами інтегралу, називається *інтегральним рівнянням Фредгольма 1-го роду*.

Межі інтегрування  $a, b$  у рівняннях (1), (2) можуть бути як скінченними, так і нескінченними.

Розв'язком інтегральних рівнянь (1), (2) є функція  $\varphi(x)$ , що підчас підстановки у рівняння дає тотожність відносно  $x \in (a,b)$ .

**Приклад 1.** Показати, що функція  $\varphi(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$  є розв'язком інтегрального рівняння Фредгольма

$$\varphi(x) - \frac{\pi^2}{4} \int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt = \frac{x}{2},$$

де ядро має вигляд

$$K(x,t) = \begin{cases} \frac{x(2-t)}{2}, & 0 \leq x \leq t \\ \frac{t(2-x)}{2}, & t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

*Розв'язання.* Ліву частину рівняння запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \frac{\pi^2}{4} \int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt &= \varphi(x) - \frac{\pi^2}{4} \left\{ \int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt + \int_x^1 K(x,t)\varphi(t)dt \right\} = \\ &= \varphi(x) - \frac{\pi^2}{4} \left\{ \int_0^x \frac{t(2-x)}{2} \varphi(t)dt + \int_x^1 \frac{x(2-t)}{2} \varphi(t)dt \right\} = \\ &= \varphi(x) - \frac{\pi^2}{4} \left\{ \frac{(2-x)}{2} \int_0^x t \varphi(t)dt + \frac{x}{2} \int_x^1 (2-t) \varphi(t)dt \right\}. \end{aligned}$$

Підставимо у отриманий вираз  $\varphi(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$ , будемо мати

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi x}{2} - \frac{\pi^2}{4} \left\{ \frac{(2-x)}{2} \int_0^x t \sin \frac{\pi t}{2} dt + \frac{x}{2} \int_x^1 (2-t) \sin \frac{\pi t}{2} dt \right\} = \\ = \sin \frac{\pi x}{2} - \frac{\pi^2}{4} \left\{ (2-x) \left( -\frac{t}{\pi} \cos \frac{\pi t}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sin \frac{\pi t}{2} \right) \Big|_{t=0}^{t=x} + x \left( -\frac{2-t}{\pi} \cos \frac{\pi t}{2} - \frac{2}{\pi^2} \sin \frac{\pi t}{2} \right) \Big|_{t=x}^{t=1} \right\} = \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Отже, отримано, що  $\frac{x}{2} \equiv \frac{x}{2}$ , звідки маємо, що функція  $\varphi(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$  є розв'язком даного рівняння.

**Задачі для самостійного розв'язання.** Перевірити які з даних функцій є розв'язками інтегральних рівнянь.

$$1. \quad \varphi(x) = 1, \quad \varphi(x) + \int_0^1 x(e^{xt} - 1)\varphi(t)dt = e^x - 1.$$

$$2. \quad \varphi(x) = 2e^x \left( x - \frac{1}{3} \right), \quad \varphi(x) + 2 \int_0^1 e^{x-t} \varphi(t)dt = 2xe^x.$$

$$3. \quad \varphi(x) = 1 - \frac{2 \sin x}{1 - \pi/2}, \quad \varphi(x) - \int_0^\pi \cos(x+t)\varphi(t)dt = 1.$$

$$4. \quad \varphi(x) = \sqrt{x}, \quad \varphi(x) - \int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt = \sqrt{x} + \frac{x}{15}(4x^{3/2} - 7), \quad K(x,t) = \begin{cases} \frac{x(2-t)}{2}, & 0 \leq x \leq t \\ \frac{t(2-x)}{2}, & t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$5. \quad \varphi(x) = e^x, \quad \varphi(x) + \lambda \int_0^1 \sin(xt) \varphi(t) dt = 1.$$

$$6. \quad \varphi(x) = \cos x, \quad \varphi(x) - \int_0^\pi (x^2 + 1) \cos t \varphi(t) dt = \sin x.$$

$$7. \quad \varphi(x) = xe^{-x}, \quad \varphi(x) - 4 \int_0^\infty e^{-(x+t)} \varphi(t) dt = (x-1)e^{-x}.$$

$$8. \quad \varphi(x) = \cos 2x, \quad \varphi(x) - 3 \int_0^\pi K(x,t) \varphi(t) dt = \cos x, \quad K(x,t) = \begin{cases} \sin x \cos t, & 0 \leq x \leq t \\ \sin t \cos x, & t \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$9. \quad \varphi(x) = \frac{4C}{\pi}, \quad C - \text{довільна константа}, \quad \varphi(x) - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \sin x \frac{\sin^2 t}{t} \varphi(t) dt = 0.$$

## 2. Метод визначників Фредгольма

Розв'язок рівняння Фредгольма 2-го роду

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t) \varphi(t) dt = f(x)$$

знаходиться за формулою

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t; \lambda) f(t) dt, \quad (3)$$

де функція  $R(x,t; \lambda)$  називається *резольвентой Фредгольма* рівняння (1) та визначається рівністю

$$R(x,t; \lambda) = \frac{D(x,t; \lambda)}{D(\lambda)}$$

за умовою, що  $D(\lambda) \neq 0$ . Тут  $D(x,t; \lambda)$ ,  $D(\lambda)$  – степеневі ряди по  $\lambda$

$$D(x,t; \lambda) = K(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n(x,t) \lambda^n, \quad (4)$$

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} C_n \lambda^n, \quad (5)$$

коефіцієнти яких визначаються за формулами

$$B_n(x,t) = \int_a^b \dots \int_a^b \begin{vmatrix} K(x,t) & K(x,t_1) & \dots & K(x,t_n) \\ K(t_1,t) & K(t_1,t_1) & \dots & K(t_1,t_n) \\ K(t_2,t) & K(t_2,t_1) & \dots & K(t_2,t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(t_n,t) & K(t_n,t_1) & \dots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n \quad (6)$$

причому

$$B_0(x,t) = K(x,t)$$

$$C_n = \int_a^b \dots \int_a^b \begin{vmatrix} K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2) & \dots & K(t_1,t_n) \\ K(t_2,t_1) & K(t_2,t_2) & \dots & K(t_2,t_n) \\ K(t_3,t_1) & K(t_3,t_2) & \dots & K(t_3,t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(t_n,t_1) & K(t_n,t_2) & \dots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n. \quad (7)$$

Функція  $D(x,t;\lambda)$  – *мінор Фредгольма*, а  $D(\lambda)$  – *визначник Фредгольма*. У випадку, коли ядро  $K(x,t)$  обмежено або інтеграл

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x,t) dx dt$$

має скінченне значення, ряди (4), (5) збігаються для всіх значень  $\lambda$ , а, значить, є цілими аналітичними функціями від  $\lambda$ .

Резольвента  $R(x,t;\lambda) = \frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}$  є аналітичною функцією від  $\lambda$ , крім тих значень, які є нулями функції  $D(\lambda)$ . Останні є полюсами резольвенти  $R(x,t;\lambda)$ .

**Приклад 2.** За допомогою визначників Фредгольма знайти резольвенту ядра  $K(x,t) = xe^t$ ,  $a=0, b=1$ .

*Розв'язання.* Маємо  $B_0(x,t) = xe^t$ . Далі

$$B_1(x,t) = \int_0^1 \begin{vmatrix} xe^t & xe^{t_1} \\ t_1 e^t & t_1 e^{t_1} \end{vmatrix} dt_1 = 0, \quad B_2(x,t) = \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} xe^t & xe^{t_1} & xe^{t_2} \\ t_1 e^t & t_1 e^{t_1} & t_1 e^{t_2} \\ t_2 e^t & t_2 e^{t_1} & t_2 e^{t_2} \end{vmatrix} dt_1 dt_2 = 0,$$

так як визначники під знаком інтеграла дорівнюють нулеві, очевидно, що і наступні  $B_n(x,t) = 0$ . Знайдемо коефіцієнти  $C_n$

$$C_1 = \int_0^1 K(t_1,t_1) dt_1 = \int_0^1 t_1 e^{t_1} dt_1 = 1, \quad C_2 = \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} t_1 e^{t_1} & t_1 e^{t_2} \\ t_2 e^{t_1} & t_2 e^{t_2} \end{vmatrix} dt_1 dt_2 = 0.$$

Очевидно, що і всі наступні  $C_n = 0$ . Згідно з формулами (3), (4) у цьому випадку, маємо

$$D(x, t; \lambda) = K(x, t) = xe^t, \quad D(\lambda) = 1 - \lambda.$$

Таким чином,

$$R(x, t; \lambda) = \frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)} = \frac{xe^t}{1 - \lambda}.$$

Застосуємо отриманий результат до розв'язання інтегрального рівняння

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 xe^t \varphi(t) dt = f(x), \quad \lambda \neq 1.$$

Згідно з формулою (3)

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \frac{xe^t}{1 - \lambda} f(t) dt.$$

У часному випадку, для  $f(x) = e^{-x}$ , отримаємо

$$\varphi(x) = e^{-x} + \frac{\lambda}{1 - \lambda} x.$$

**Задачі для самостійного розв'язання.**

1. Показати, що для рівняння  $\varphi(x) = x + \lambda \int_0^1 xt \varphi(t) dt$  визначник Фредгольма

$$D(\lambda) = 1 - \lambda/3, \text{ а мінор Фредгольма } D(x, t; \lambda) = xt.$$

2. Показати, що для рівняння  $\varphi(x) = x + \lambda \int_0^1 (xt + t^2) \varphi(t) dt$  маємо

$$D(\lambda) = 1 - 2\lambda/3 - \lambda^2/72, \quad D(x, t; \lambda) = xt + t^2 + \lambda \left( \frac{1}{2} xt^2 - \frac{1}{3} xt - \frac{1}{3} t^2 + \frac{1}{4} t \right).$$

3. Показати, що якщо  $K(x, t) = f_1(x)f_2(t)$  та  $K(x, t) = \int_a^b f_1(x)f_2(x) dx = A$ , то

$D(\lambda) = 1 - \lambda A$ ,  $D(x, t; \lambda) = f_1(x)f_2(t)$  та розв'язок відповідного неоднорідного інтегрального рівняння з правою частиною  $f(x)$  має вигляд

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda f_1(x)}{1 - \lambda A} \int_0^1 f(t) f_2(t) dt.$$

4. Показати, що якщо  $K(x,t) = f_1(x)g_1(t) + f_2(x)g_2(t)$ , то  $D(\lambda)$  буде поліномом другого ступеня відносно  $\lambda$ . Взагалі, якщо  $K(x,t) = \sum_{m=1}^n f_m(x)g_m(t)$ , то  $D(\lambda)$  буде поліномом  $n$ -го ступеня відносно  $\lambda$ .

Користуючись визначниками Фредгольма, знайти резольвенти наступних ядер:

5.  $K(x,t) = 2x - t, 0 \leq x, t \leq 1$ .                      6.  $K(x,t) = x^2t - xt^2, 0 \leq x, t \leq 1$ .  
 7.  $K(x,t) = \sin x \cos t, 0 \leq x, t \leq 2\pi$ .                      8.  $K(x,t) = \sin x \cos t, 0 \leq x, t \leq 2\pi$ .

Обчислення за формулами (6), (7) коефіцієнтів  $B_n(x,t), C_n$  рядів (4), (5) практично можливо у рідких випадках, але з цих формул отримуються рекурентні співвідношення

$$B_n(x,t) = C_n K(x,t) - n \int_a^b K(x,s) B_{n-1}(s,t) ds \quad (8)$$

$$C_n = \int_a^b B_{n-1}(s,s) ds \quad (9)$$

Знаючи, що коефіцієнт  $C_0 = 1$  та  $B_0(x,t) = K(x,t)$ , за формулами (9) та (8) знаходяться послідовно  $C_1, B_1(x,t), C_2, B_2(x,t), \dots$

**Приклад.** Використовуючи формули (8), (9), знайти резольвенту ядра  $K(x,t) = x - 2t, 0 \leq x, t \leq 1$ .

*Розв'язання.* Маємо  $C_0 = 1$  та  $B_0(x,t) = x - 2t$ . Використовуючи формулу (9), знайдемо

$$C_1 = \int_0^1 (-s) ds = -\frac{1}{2}.$$

За формулою (8) отримаємо

$$B_1(x,t) = -\frac{x-2t}{2} - \int_0^1 (x-2s)(s-2t) ds = -x - t + 2xt + \frac{2}{3}.$$

Далі будемо мати

$$C_2 = \int_0^1 \left( -2s + 2s^2 + \frac{2}{3} \right) ds = \frac{1}{3},$$

$$B_2(x,t) = \frac{x-2t}{3} - 2 \int_0^1 (x-2s) \left( -s-t+2st + \frac{2}{3} \right) ds = 0,$$

$$C_3 = C_4 = \dots = 0, \quad B_3(x,t) = B_4(x,t) = \dots = 0.$$

Відповідно,

$$D(\lambda) = 1 + \lambda/2 + \lambda^2/6, \quad D(x,t;\lambda) = x - 2t + (x+t-2xt-2/3)\lambda.$$

Резольвента даного ядра буде

$$R(x,t;\lambda) = \frac{x-2t+(x+t-2xt-2/3)\lambda}{1+\lambda/2+\lambda^2/6}.$$

**Задачі для самостійного розв'язання.** Використовуючи рекурентні співвідношення (8), (9), знайти резольвенти наступних ядер

- |  |  |
|--|--|
| 1. $K(x,t) = x+t+1, \quad -1 \leq x, t \leq 1.$      | 2. $K(x,t) = 1+3xt, \quad 0 \leq x, t \leq 1.$                   |
| 3. $K(x,t) = 4xt - x^2, \quad 0 \leq x, t \leq 1$    | 4. $K(x,t) = e^{x-t}, \quad 0 \leq x, t \leq 1.$                 |
| 5. $K(x,t) = \sin(x+t), \quad 0 \leq x, t \leq 2\pi$ | 6. $K(x,t) = x - \operatorname{sh}t, \quad -1 \leq x, t \leq 1.$ |

За допомогою резольвенти розв'язати наступні інтегральні рівняння

- |   |  |
|---|--|
| 1. $\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin(x+t)\varphi(t)dt = 1.$    | 2. $\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (2x-t)\varphi(t)dt = \frac{\pi}{6}.$ |
| 3. $\varphi(x) - \int_0^{2\pi} \sin x \cos t \varphi(t)dt = \cos 2x.$ | 4. $\varphi(x) + \int_0^1 e^{x-t}\varphi(t)dt = e^x$                   |
| 5. $\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (4xt - x^2)\varphi(t)dt = x.$       |  |

### 3. Ітераційні ядра. Побудова резольвенти

Нехай маємо інтегральне рівняння Фредгольма

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \tag{1}$$

Інтегральне рівняння (1) можемо розв'язувати *методом послідовних наближень*.

Для цього покладемо

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)\lambda^n \tag{2}$$

де функції  $\psi_n(x)$  визначаються за формулами

$$\psi_1(x) = \int_a^b K(x,t) f(t) dt,$$

$$\psi_2(x) = \int_a^b K(x,t) \psi_1(t) dt = \int_a^b K_2(x,t) f(t) dt,$$

$$\psi_3(x) = \int_a^b K(x,t) \psi_2(t) dt = \int_a^b K_3(x,t) f(t) dt \text{ і так далі.}$$

Тут

$$K_2(x,t) = \int_a^b K(x,z) K_1(z,t) dz, \quad K_3(x,t) = \int_a^b K(x,z) K_2(z,t) dz$$

і взагалі

$$K_n(x,t) = \int_a^b K(x,z) K_{n-1}(z,t) dz, \quad n = 2, 3, \dots, \quad (3)$$

Причому  $K_1(x,t) \equiv K(x,t)$ . Функції  $K_n(x,t)$ , що визначаються формулами (3), називаються *ітераційними ядрами*. Для них справедливо співвідношення

$$K_n(x,t) = \int_a^b K_m(x,s) K_{n-m}(s,t) ds, \quad (4)$$

де  $m$  – будь яке натуральне число, менше за  $n$ .

Резольвента інтегрального рівняння (1) визначається через ітераційні ядра за формулою

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x,t) \lambda^{n-1}, \quad (5)$$

де ряд у правій частині називається *рядом Неймана* ядра  $K(x,t)$ . Він збігається для

$$|\lambda| < \frac{1}{B}, \quad B = \sqrt{\int_a^b \int_a^b K^2(x,t) dx dt} \quad (6)$$

Розв'язок рівняння Фредгольма 2-го роду (1) виражається формулою

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t;\lambda) f(t) dt. \quad (7)$$

Межа (6) є суттєвою для збіжності ряду (5). Однак розв'язок рівняння (1) може існувати і для значень  $|\lambda| > \frac{1}{B}$ . Розглянемо приклад

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 \varphi(t) dt = 1. \quad (8)$$

Тут  $K(x,t) \equiv 1$ , та, відповідно,

$$B^2 = \int_0^1 \int_0^1 K^2(x,t) dx dt = \int_0^1 \int_0^1 dx dt = 1.$$

Таким чином, умова (6) дає, що ряд (5) збігається для  $|\lambda| < 1$ .

Розв'язуючи рівняння (8) як рівняння із виродженим ядром (див. наст. параграф), отримаємо  $(1-\lambda)C = 1$ , де  $C = \int_0^1 \varphi(t) dt$ . Для  $\lambda = 1$  це рівняння нерозв'язуване, а значить, для  $\lambda = 1$  інтегральне рівняння (8) розв'язків не має. Звідси випливає, що у колі радіуса, більшого за одиницю, послідовні наближення для рівняння (8) не можуть збігатися. Однак для  $|\lambda| > 1$  рівняння (8) розв'язуване.

Дійсно, якщо  $\lambda \neq 1$ , то функція  $\varphi(x) = \frac{1}{1-\lambda}$  є розв'язком даного рівняння, що легко перевірити безпосередньою підстановкою.

Для деяких рівнянь Фредгольма ряд Неймана (5) для резольвенти збігається для будь яких значень  $\lambda$ . Покажемо це.

Нехай маємо два ядра  $K(x,t)$  та  $L(x,t)$ . Ядра називаються *ортогональними*, якщо виконуються дві умови

$$\int_a^b K(x,z)L(z,t) dz = 0, \quad \int_a^b L(x,z)K(z,t) dz = 0 \quad (9)$$

для будь яких допустимих значень  $x, t$ .

Наприклад, ядра  $K(x,t) = xt$  та  $L(x,t) = x^2 t^2$  ортогональні на та  $[-1,1]$ . Дійсно,

$$\int_{-1}^1 (xz)(z^2 t) dz = xt \int_{-1}^1 z^3 dz = 0, \quad \int_{-1}^1 (x^2 z^2)(zt) dz = x^2 t \int_{-1}^1 z^3 dz = 0.$$

Існують також ядра, що ортогональні самі собі. Для таких ядер  $K_2(x,t) \equiv 0$ , де  $K_2(x,t)$  – друге ітераційне ядро. У цьому випадку, очевидно, усі наступні

ітераційні ядра також дорівнюють нулеві, і резольвента співпадає з ядром  $K(x, t)$

**Приклад.**  $K(x, t) = \sin(x - 2t)$ ,  $0 \leq x, t \leq 2\pi$ .

Маємо

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin(x - 2z) \sin(z - 2t) dz &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\cos(x + 2t - 3z) - \cos(x - 2t - z)] dz = \\ &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{3} \sin(x + 2t - 3z) + \sin(x - 2t - z) \right] \Bigg|_{z=0}^{z=2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Таким чином, в цьому випадку резольвента ядра дорівнює самому ядру

$$R(x, t; \lambda) \equiv \sin(x - 2t),$$

і ряд Неймана (5) складається із одного доданку, і очевидно, збігається для будь якого  $\lambda$ .

Ітераційні ядра  $K_n(x, t)$  можна безпосередньо виразити через дане ядро  $K(x, t)$  за формулою

$$K_n(x, t) = \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b K(x, s_1) K(s_1, s_2) \dots K(s_{n-1}, t) ds_1 ds_2 \dots ds_{n-1}. \quad (10)$$

Усі ітераційні ядра  $K_n(x, t)$ , починаючи із  $K_2(x, t)$ , будуть неперервними функціями у квадраті  $\Omega \{a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$ , якщо початкове ядро  $K(x, t)$  є сумованим із квадратом у  $\Omega$ .

Якщо дане ядро  $K(x, t)$  є симетричним, то всі ітераційні ядра  $K_n(x, t)$  також є симетричними.

**Приклад.** Знайти ітераційні ядра для ядра  $K(x, t) = x - t$ , якщо  $a = 0, b = 1$ .

*Розв'язання.* Використовуючи формули (3), знайдемо послідовно

$$K_1(x, t) = x - t, \quad K_2(x, t) = \int_0^1 (x - s)(s - t) ds = \frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3},$$

$$K_3(x, t) = \int_0^1 (x - s) \left( \frac{s+t}{2} - st - \frac{1}{3} \right) ds = -\frac{x-t}{12},$$

$$K_4(x, t) = -\frac{1}{12} \int_0^1 (x - s)(s - t) ds = -\frac{1}{12} K_2(x, t) = -\frac{1}{12} \left( \frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3} \right),$$

$$K_5(x,t) = -\frac{1}{12} \int_0^1 (x-s) \left( \frac{s+t}{2} - st - \frac{1}{3} \right) ds = -\frac{1}{12} K_3(x,t) = \frac{x-t}{12^2},$$

$$K_6(x,t) = \frac{1}{12^2} \int_0^1 (x-s)(s-t) ds = \frac{1}{12^2} K_2(x,t) = \frac{1}{12^2} \left( \frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3} \right).$$

Звідки маємо, що ітераційні ядра мають вид ( $k=1,2,3\dots$ )

$$1) \quad \text{для } n=2k-1: K_{2k-1}(x,t) = \frac{(-1)^{k-1}}{12^{k-1}} (x-t),$$

$$2) \quad \text{для } n=2k: K_{2k}(x,t) = \frac{(-1)^{k-1}}{12^{k-1}} \left( \frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3} \right).$$

**Приклад.** Знайти ітераційні ядра  $K_1(x,t)$  та  $K_2(x,t)$ , якщо  $K(x,t) = e^{\min[x,t]}$ ,  $a=0$ ,  $b=1$ .

*Розв'язання.* За визначенням маємо

$$\min[x,t] = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq t \\ t, & t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Тому можемо записати ядро у вигляді

$$K(x,t) = \begin{cases} e^x, & 0 \leq x \leq t \\ e^t, & t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Це ядро є симетричним, тобто  $K(x,t) = K(t,x)$ .

Маємо, що  $K_1(x,t) = K(x,t)$ . Знайдемо друге ітераційне ядро

$$K_2(x,t) = \int_0^1 K(x,s)K_1(s,t)ds = \int_0^1 K(x,s)K(s,t)ds.$$

Тут

$$K(x,s) = \begin{cases} e^x, & 0 \leq x \leq s \\ e^s, & s \leq x \leq 1 \end{cases} \quad K(s,t) = \begin{cases} e^s, & 0 \leq s \leq t \\ e^t, & t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Так як дане ядро  $K(x,t)$  симетричне, то достатньо знайти  $K_2(x,t)$  тільки для  $x > t$ .

Маємо

$$K_2(x,t) = \int_0^t K(x,s)K(s,t)ds + \int_t^x K(x,s)K(s,t)ds + \int_x^1 K(x,s)K(s,t)ds.$$

У інтервалі  $(0, t)$  маємо  $s < t < x$ , тому

$$\int_0^t K(x,s)K(s,t)ds = \int_0^t e^s e^s ds = \int_0^t e^{2s} ds = \frac{e^{2t} - 1}{2}.$$

У інтервалі  $(t, x)$  маємо  $t < s < x$ , тому

$$\int_t^x K(x, s)K(s, t)ds = \int_t^x e^s e^t ds = e^{x+t} - e^{2t}.$$

У інтервалі  $(x, 1)$  маємо  $s > x > t$ , тому

$$\int_x^1 K(x, s)K(s, t)ds = \int_x^1 e^x e^t ds = (1-x)e^{x+t}.$$

Додаванням обчислених інтегралів, отримаємо

$$K_2(x, t) = (2-x)e^{x+t} - \frac{e^{2t} + 1}{2}, \quad (x > t).$$

Вираз для  $K_2(x, t)$ , якщо  $x < t$  отримаємо, якщо поміняємо місцями аргументи, тобто

$$K_2(x, t) = (2-t)e^{x+t} - \frac{e^{2x} + 1}{2}, \quad (x < t).$$

Таким чином, друге ітераційне ядро має вигляд

$$K_2(x, t) = \begin{cases} (2-t)e^{x+t} - \frac{e^{2x} + 1}{2}, & 0 \leq x \leq t \\ (2-x)e^{x+t} - \frac{e^{2t} + 1}{2}, & t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

**Зауваження.** Якщо ядро  $K(x, t)$ , що задано різними аналітичними виразами у квадраті  $\Omega$ , не є симетричним, то необхідно окремо розглянути випадок  $x < t$ .

Будемо мати

$$K_2(x, t) = \int_a^b K(x, s)K(s, t)ds = \int_a^x + \int_x^t + \int_t^b$$

**Приклад.** Знайти ітераційні ядра  $K_1(x, t)$  та  $K_2(x, t)$ , якщо  $a=0, b=1$

$$K(x, t) = \begin{cases} x+t, & 0 \leq x \leq t \\ x-t, & t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

*Розв'язання.* Маємо  $K_1(x, t) = K(x, t)$

$$K_2(x, t) = \int_0^1 K(x, s)K(s, t)ds,$$

$$\text{де } K(x, s) = \begin{cases} x+s, & 0 \leq x < s \\ x-s, & s < x \leq 1 \end{cases}, \quad K(s, t) = \begin{cases} s+t, & 0 \leq s < t \\ s-t, & t < s \leq 1 \end{cases}$$

Так як ядро не є симетричним, то під час знаходження  $K_2(x,t)$  розглянемо окремо два випадки: 1)  $x < t$  та 2)  $x > t$ .

1) Нехай  $x < t$ , тоді  $K_2(x,t) = I_1 + I_2 + I_3$ , де

$$I_1 = \int_0^x (x-s)(s+t)ds = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2t}{2}, \quad I_2 = \int_x^t (x+s)(s+t)ds = \frac{5t^3}{6} - \frac{5x^3}{6} + \frac{3xt^2}{2} - \frac{3x^2t}{2},$$

$$I_3 = \int_t^1 (x+s)(s-t)ds = \frac{t^3}{6} + \frac{xt^2}{2} - xt + \frac{x-t}{2} + \frac{1}{3}.$$

Після додавання отриманих інтегралів, отримаємо

$$K_2(x,t) = t^3 - \frac{2}{3}x^3 - x^2t + 2xt^2 - xt + \frac{x-t}{2} + \frac{1}{3}, \quad (x < t).$$

2) Нехай  $x > t$ ,  $K_2(x,t) = I_1 + I_2 + I_3$ , де

$$I_1 = \int_0^t (x-s)(s+t)ds = \frac{3}{6}xt^2 - \frac{5}{6}t^3, \quad I_2 = \int_x^t (x-s)(s-t)ds = \frac{x^3}{6} - \frac{t^3}{6} - \frac{x^2t}{2} + \frac{xt^2}{2},$$

$$I_3 = \int_x^1 (x+s)(s-t)ds = -\frac{5x^3}{6} + \frac{3x^2t}{2} + \frac{x-t}{2} - xt + \frac{1}{3}.$$

Після додавання отриманих інтегралів, отримаємо

$$K_2(x,t) = -t^3 - \frac{2}{3}x^3 + x^2t + 2xt^2 - xt + \frac{x-t}{2} + \frac{1}{3}, \quad (x > t).$$

Отже, друге ітераційне ядро має форму

$$K_2(x,t) = \begin{cases} t^3 - \frac{2}{3}x^3 - x^2t + 2xt^2 - xt + \frac{x-t}{2} + \frac{1}{3}, & 0 \leq x < t \\ -t^3 - \frac{2}{3}x^3 + x^2t + 2xt^2 - xt + \frac{x-t}{2} + \frac{1}{3}, & t < x \leq 1 \end{cases}$$

Аналогічно знаходяться інші ітераційні ядра  $K_n(x,t)$ ,  $n = 3, 4, \dots$

**Приклад.** Методом послідовних наближень розв'язати інтегральне рівняння

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi(t)dt + \sin \pi x$$

*Розв'язання.* У даному рівнянні  $\lambda = 1/2$ ,  $K(x,t) = 1$ . Тому

$$B^2 = \int_0^1 \int_0^1 |K(x,t)|^2 dxdt = 1$$

та умова  $|\lambda| < 1/B$  виконується. У якості першого наближення приймемо  $\psi_0(x) = \sin \pi x$  та побудуємо наступні наближення

$$\psi_1(x) = \sin \pi x + \frac{1}{2} \int_0^1 \psi_0(t) dt = \sin \pi x + \frac{1}{2} \int_0^1 \sin \pi t dt = \sin \pi x + \frac{1}{\pi},$$

$$\psi_2(x) = \sin \pi x + \frac{1}{2} \int_0^1 \psi_1(x) dt = \sin \pi x + \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \sin \pi t + \frac{1}{\pi} \right) dt = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi},$$

$$\psi_3(x) = \sin \pi x + \frac{1}{2} \int_0^1 \psi_2(x) dt = \sin \pi x + \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \sin \pi t + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \right) dt = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{4\pi}.$$

$n$ -наближення можна записати у формі

$$\psi_n(x) = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2^2\pi} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}\pi} = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}.$$

Точний розв'язок знаходимо як межу

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x) = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sin \pi x + \frac{2}{\pi}.$$

**Приклад.** Розв'язати методом ітераційних ядер інтегральне рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \frac{x}{1+t^2} \varphi(t) dt + 1 + x^2.$$

*Розв'язання.* Знайдемо послідовність ітераційних ядер

$$K_0(x, t) = K(x, t) = \frac{x}{1+t^2},$$

$$K_1(x, t) = \int_0^1 K(x, s) K(s, t) ds = \int_0^1 \frac{x}{1+s^2} \frac{s}{1+t^2} dt = \frac{\ln 2}{2} \frac{x}{1+t^2},$$

$$K_2(x, t) = \int_0^1 K(x, s) K_1(s, t) ds = \frac{\ln 2}{2} \int_0^1 \frac{x}{1+s^2} \frac{s}{1+t^2} dt = \left( \frac{\ln 2}{2} \right)^2 \frac{x}{1+t^2},$$

.....

$$K_m(x, t) = \left( \frac{\ln 2}{2} \right)^m \frac{x}{1+t^2}$$

Знайдемо резольвенту

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K_m(x, t) = \frac{x}{1+t^2} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \left( \frac{\ln 2}{2} \right)^m = \frac{x}{1+t^2} \frac{2}{2 - \lambda \ln 2}.$$

Радіус збіжності ряду  $|\lambda| < 2 / \ln 2 \approx 2.885$ . Для даного рівняння

$$B^2 = \int_0^1 \int_0^1 |K(x,t)|^2 dx dt = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2}{(1+t^2)^2} dx dt = \frac{\pi+2}{24} \Rightarrow \frac{1}{B} \approx 2.161.$$

Таким чином, область збіжності ряду  $\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K_m(x,t)$  для резольвенти  $R(x,t;\lambda)$  виявилась ширшою, ніж продиктовано умовою  $|\lambda| < 1/B$ . Використовуючи формулу (3) з п.2, знайдемо розв'язок

$$\varphi(x) = 1 + x^2 + \frac{2}{2 - \lambda \ln 2} \int_0^1 \frac{x}{1+t^2} (1+t^2) dt = 1 + x^2 + \frac{4x}{2 - \lambda \ln 2}.$$

Безпосередньою підстановкою можливо впевнитися, що знайдений розв'язок задовольняє даному рівнянню не тільки для значень  $\lambda$ , що належать області збіжності ряду, але і для будь яких значень  $\lambda \neq 2/\ln 2$ .

**Задачі для самостійного розв'язання.** Знайти ітераційні ядра вказаних ядер для заданих  $a, b$

1.  $K(x,t) = x-t, a = -1, b = 1.$
2.  $K(x,t) = \sin(x-t), a = 0, b = \pi/2, n = 2, 3.$
3.  $K(x,t) = x + \sin t, a = -\pi, b = \pi.$
4.  $K(x,t) = (x-t)^2, a = -1, b = 1, n = 2, 3.$
5.  $K(x,t) = xe^t, a = 0, b = 1.$
6.  $K(x,t) = e^x + \cos t, a = 0, b = \pi.$

У наступних задачах знайти  $K_2(x,t)$

7.  $K(x,t) = e^{|x-t|}, a = 0, b = 1.$
8.  $K(x,t) = e^{|x+t|}, a = -1, b = 1.$

**Приклад.** Побудова резольвенти інтегрального рівняння з допомогою ітераційних ядер.

Розглянемо інтегральне рівняння

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 xt \varphi(t) dt = f(x). \quad (11)$$

Тут  $K(x,t) = xt, a = 0, b = 1$ . Послідовно знайдемо

$$K_1(x,t) = xt, K_2(x,t) = \int_0^1 (xz)(zt) dz = \frac{xt}{3}, K_3(x,t) = \frac{1}{3} \int_0^1 (xz)(zt) dz = \frac{xt}{3^2}, \dots, K_n(x,t) = \frac{xt}{3^{n-1}}.$$

Згідно з формулою (5)

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x, t) \lambda^{n-1} = xt \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{3}\right)^{n-1} = \frac{3xt}{3-\lambda}, \quad |\lambda| < 3.$$

Враховуючи формулу (7) розв'язок інтегрального рівняння (11) запишеться у формі

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \frac{3xt}{3-\lambda} f(t) dt.$$

У випадку  $f(x) = x$  отримаємо

$$\varphi(x) = \frac{3x}{3-\lambda}, \quad \lambda \neq 3.$$

**Задачі для самостійного розв'язання.** Побудувати резольвенти наступних ядер

1.  $K(x, t) = e^{x+t}, a = 0, b = 1.$
2.  $K(x, t) = \sin x \cos t, a = 0, b = \pi/2.$
3.  $K(x, t) = xe^t, a = -1, b = 1.$
4.  $K(x, t) = (1+x)(1-t), a = -1, b = 0.$
5.  $K(x, t) = x^2 t^2, a = -1, b = 1.$
6.  $K(x, t) = xt, a = -1, b = 1.$

Якщо  $M(x, t), N(x, t)$  – два ортогональних ядра, то резольвента,  $R(x, t; \lambda)$ , що відповідає ядру  $K(x, t) = M(x, t) + N(x, t)$ , дорівнює сумі резольвент  $R_1(x, t; \lambda), R_2(x, t; \lambda)$ , що відповідають кожному з цих ядер.

**Приклад.** Знайти резольвенту ядра

$$K(x, t) = xt + x^2 t^2, \quad a = -1, b = 1.$$

*Розв'язання.* Ядра  $M(x, t) = xt, N(x, t) = x^2 t^2$  ортогональні на  $[-1, 1]$ . Тому резольвента ядра  $K(x, t)$  дорівнює сумі резольвент ядер  $M(x, t), N(x, t)$ .

Використовуючи результати прикладів 13 та 14, знайдемо

$$R_K(x, t; \lambda) = R_M(x, t; \lambda) + R_N(x, t; \lambda) = \frac{3xt}{3-2\lambda} + \frac{5x^2 t^2}{5-2\lambda}, \quad |\lambda| < 3/2.$$

**Задачі для самостійного розв'язання.** Знайти резольвенти ядер

1.  $K(x, t) = \sin x \cos t + \cos 2x \sin 2t, a = 0, b = \pi/2.$
2.  $K(x, t) = 1 + (2x-1)(2t-1), a = 0, b = 1.$

Вказана властивість розповсюджується на будь яку скінчену кількість ядер. Якщо ядра  $M^{(1)}(x,t), M^{(2)}(x,t), \dots, M^{(n)}(x,t)$  попарно ортогональні, то резольвента, що відповідає їх сумі

$$K(x,t) = \sum_{m=1}^n M^{(m)}(x,t),$$

дорівнює сумі резольвент, що відповідають кожному з доданків.

Будемо називати  $n$ -м *слідом* ядра  $K(x,t)$  величину

$$A_n = \int_a^b K_n(x,x) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (12)$$

де  $K_n(x,t)$  –  $n$ -е ітераційне ядро для ядра  $K(x,t)$ .

Має місце наступна формула для визначника Фредгольма  $D(\lambda)$

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \lambda^{n-1}. \quad (13)$$

Радіус збіжності степеневого ряду дорівнює найменшому з модулів характеристичних чисел.

### Задачі для самостійного розв'язання.

3. Нехай  $R(x,t;\lambda)$  резольвента деякого ядра  $K(x,t)$ . Показати, що резольвента рівняння

$$\varphi(x) - \mu \int_a^b R(x,t;\lambda) \varphi(t) dt = f(x)$$

дорівнює  $R(x,t;\lambda + \mu)$ .

4. Нехай

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x,t) dx dt = B^2, \quad \int_a^b \int_a^b K_n^2(x,t) dx dt = B_n^2,$$

де  $K_n(x,t)$  –  $n$ -е ітераційне ядро для ядра  $K(x,t)$ . Довести, що якщо  $B_2 = B^2$ , то для будь якого значення  $n$  буде виконуватися  $B_n = B^n$ .

#### 4. Інтегральні рівняння з виродженим ядром

Ядро  $K(x,t)$  інтегрального рівняння Фредгольма 2-го роду називається *виродженим*, якщо воно є сумою скінченного числа добутків функцій тільки від  $x$  на функції тільки від  $t$ , тобто якщо воно має вигляд

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^n a_k(x)b_k(t), \quad (1)$$

функції  $a_k(x)$ ,  $b_k(t)$ ,  $k=1,2,\dots,n$  будемо вважати неперервними у квадраті  $a \leq x,t \leq b$  та лінійно незалежними. Інтегральне рівняння із виродженим ядром (1)

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \left[ \sum_{k=1}^n a_k(x)b_k(t) \right] \varphi(t) dt = f(x) \quad (2)$$

розв'язується наступним способом.

Перепишемо (2) у формі

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^n a_k(x) \int_a^b b_k(t) \varphi(t) dt \quad (3)$$

та введемо позначення

$$\int_a^b b_k(t) \varphi(t) dt = C_k, \quad k=1,2,\dots,n. \quad (4)$$

Тоді рівняння (3) набуває вигляд

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^n C_k a_k(x), \quad (5)$$

де  $C_k$  – невідомі константи (тоді як функція  $\varphi(x)$  є невідомою).

Таким чином, розв'язання інтегрального рівняння із виродженим ядром зводиться до знаходження постійних  $C_k$ . Підставляючи вираз (5) у інтегральне рівняння (2), отримаємо

$$\sum_{m=1}^n \left[ C_m - \int_a^b b_m(t) \left\{ f(t) + \lambda \sum_{k=1}^n C_k a_k(t) \right\} dt \right] a_m(t) = 0.$$

В силу лінійної незалежності функцій  $a_m(x)$ ,  $m=1,2,\dots,n$ , будемо мати, що

$$C_m - \int_a^b b_m(t) \left\{ f(t) + \lambda \sum_{k=1}^n C_k a_k(t) \right\} dt = 0,$$

або

$$C_m - \lambda \sum_{k=1}^n C_k \int_a^b a_k(t) b_m(t) dt = \int_a^b b_m(t) f(t) dt, \quad m=1, 2, \dots, n.$$

Введемо позначення

$$a_{km} = \int_a^b a_k(t) b_m(t) dt, \quad f_m = \int_a^b b_m(t) f(t) dt,$$

отримаємо, що

$$C_m - \lambda \sum_{k=1}^n a_{km} C_k = f_m, \quad m=1, 2, \dots, n,$$

або у розгорнутій формі

$$\begin{cases} (1 - \lambda a_{11})C_1 - \lambda a_{12}C_2 - \dots - \lambda a_{1n}C_n = f_1 \\ -\lambda a_{21}C_1 - (1 - \lambda a_{22})C_2 - \dots - \lambda a_{2n}C_n = f_2 \\ \dots \\ -\lambda a_{n1}C_1 - \lambda a_{n2}C_2 - \dots - (1 - \lambda a_{nn})C_n = f_n \end{cases} \quad (6)$$

Для знаходження констант  $C_k$  маємо лінійну систему із  $n$  алгебраїчних рівнянь з  $n$  невідомими. Визначник цієї системи дорівнює

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1 - \lambda a_{22} & \dots & -\lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \dots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Якщо  $\Delta(\lambda) \neq 0$ , система (6) має єдиний розв'язок  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , який можна отримати за формулами Крамера

$$C_k = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & \dots & -\lambda a_{1k-1}f_1 - \lambda a_{1k+1} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & \dots & -\lambda a_{2k-1}f_2 - \lambda a_{2k+1} & \dots & -\lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda a_{n1} & \dots & -\lambda a_{nk-1}f_n - \lambda a_{nk+1} & \dots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix}, \quad k=1, 2, \dots, n \quad (8)$$

Розв'язком інтегрального рівняння (2) буде функція  $\varphi(x)$ , що визначається рівністю

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^n C_k a_k(x),$$

де коефіцієнти  $C_1, C_2, \dots, C_n$  визначаються за формулами (8).

**Зауваження.** Систему (6) можна отримати, якщо обидві частини рівності (5) послідовно помножити на  $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x)$  та проінтегрувати у межах від  $a$  до  $b$ , або підставити вираз (5) для  $\varphi(x)$  у рівність (4), замінив  $x$  на  $t$ .

**Приклад.** Розв'язати інтегральне рівняння

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x \cos t + t^2 \sin x + \cos x \sin t) \varphi(t) dt = x. \quad (9)$$

*Розв'язання.* Запишемо рівняння у наступній формі

$$\varphi(x) = \lambda x \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \varphi(t) dt + \lambda \sin x \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \varphi(t) dt + \lambda \cos x \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \varphi(t) dt + x.$$

Введемо позначення

$$C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \varphi(t) dt, \quad C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \varphi(t) dt, \quad C_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \varphi(t) dt, \quad (10)$$

де  $C_1, C_2, C_3$  – невідомі константи. Тоді (9) приймає вигляд

$$\varphi(x) = C_1 \lambda x + C_2 \lambda \sin x + C_3 \lambda \cos x + x. \quad (11)$$

Підставимо вираз (11) у рівність (10) та отримаємо

$$C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} (C_1 \lambda t + C_2 \lambda \sin t + C_3 \lambda \cos t + t) \cos t dt,$$

$$C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} (C_1 \lambda t + C_2 \lambda \sin t + C_3 \lambda \cos t + t) t^2 dt,$$

$$C_3 = \int_{-\pi}^{\pi} (C_1 \lambda t + C_2 \lambda \sin t + C_3 \lambda \cos t + t) \sin t dt,$$

або

$$C_1 \left( 1 - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} t \cos t dt \right) - C_2 \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \cos t dt - C_3 \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t dt = \int_{-\pi}^{\pi} t \cos t dt,$$

$$-C_1 \lambda \int_{-\pi}^{\pi} t^3 dt + C_2 \left( 1 - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \sin t dt \right) - C_3 \lambda \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos t dt = \int_{-\pi}^{\pi} t^3 dt,$$

$$-C_1 \lambda \int_{-\pi}^{\pi} t \sin t dt - C_2 \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt + C_3 \left( 1 - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \sin t dt \right) = \int_{-\pi}^{\pi} t \sin t dt.$$

Після обчислення інтегралів у рівняннях, отримано систему алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих  $C_1, C_2, C_3$

$$\begin{cases} C_1 - \lambda\pi C_3 = 0 \\ C_2 + 4\lambda\pi C_3 = 0 \\ -2\lambda\pi C_1 - \lambda\pi C_2 + C_3 = 2\pi \end{cases} \quad (12)$$

Визначник цієї системи  $\Delta(\lambda) = 1 + 2\lambda^2\pi^2 \neq 0$ . Система має єдиний розв'язок

$$C_1 = \frac{2\lambda\pi^2}{1 + 2\lambda^2\pi^2}, \quad C_2 = -\frac{8\lambda\pi^2}{1 + 2\lambda^2\pi^2}, \quad C_3 = \frac{2\pi}{1 + 2\lambda^2\pi^2}.$$

Підставляючи знайдені значення констант у (11), отримає розв'язок даного інтегрального рівняння

$$\varphi(x) = \frac{2\lambda\pi}{1 + 2\lambda^2\pi^2} (\lambda\pi x - 4\lambda\pi \sin x + \cos x) + x.$$

**Приклад.** Розв'язати інтегральне рівняння

$$\varphi(x) - \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{1}{\pi} \sin x \sin t + t \right) \varphi(t) dt = \sin 2x$$

*Розв'язання.* Ядро даного рівняння вироджене

$$\lambda = 1, \quad a_1(x) = \frac{1}{\pi} \sin x, \quad a_2(x) = 1, \quad b_1(t) = \sin t, \quad b_2(t) = t, \quad f(x) = \sin 2x.$$

Знайдемо коефіцієнти  $a_{km} = \int_a^b a_k(t) b_m(t) dt$ ,  $f_m = \int_a^b b_m(t) f(t) dt$  системи

$$C_m - \lambda \sum_{k=1}^n a_{km} C_k = f_m, \quad m = \overline{1, n}$$

$$a_{11} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} \sin^2 t dt = 1, \quad a_{12} = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t dt = 0, \quad a_{21} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} t \sin t dt = 2, \quad a_{22} = \int_{-\pi}^{\pi} t dt = 0,$$

$$f_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \sin 2t dt = 0, \quad f_2 = \int_{-\pi}^{\pi} t \sin 2t dt = -\pi.$$

Система набуває вигляду

$$\begin{aligned} 0 \cdot C_1 + 0 \cdot C_2 &= 0 \\ -2C_1 + C_2 &= -\pi \end{aligned}$$

Розв'язок цієї системи  $C_1 = C$ ,  $C_2 = 2C - \pi$ ,  $C$  - довільна константа. Розв'язком даного інтегрального рівняння буде функція

$$\varphi(x) = \sin 2x + C \frac{1}{\pi} \sin x + (2C - \pi) \cdot 1 = \sin 2x - \pi + C \left( \frac{1}{\pi} \sin x + 2 \right).$$

**Задачі для самостійного розв'язання.** Розв'язати наступні інтегральні рівняння із виродженим ядром.

$$1. \varphi(x) - 4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \varphi(t) dt = 2x - \pi.$$

$$2. \varphi(x) - \int_{-1}^1 e^{\arcsin x} \varphi(t) dt = \operatorname{tg} x.$$

$$3. \varphi(x) - \lambda \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{tg} t \varphi(t) dt = \operatorname{ctg} x.$$

$$4. \varphi(x) - \lambda \int_0^1 \cos(q \ln t) \varphi(t) dt = 1.$$

$$5. \varphi(x) - \lambda \int_0^1 \arccos t \varphi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$6. \varphi(x) - \lambda \int_0^1 \left( \ln \frac{1}{t} \right)^p \varphi(t) dt = 1, \quad p > -1.$$

$$7. \varphi(x) - \lambda \int_0^1 (x \ln t - t \ln x) \varphi(t) dt = \frac{6}{5}(1-4x).$$

$$8. \varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi/2} \sin x \cos t \varphi(t) dt = \sin x.$$

$$9. \varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} |\pi - t| \sin x \varphi(t) dt = x.$$

$$10. \varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} \sin(x-t) \varphi(t) dt = \cos x.$$

$$11. \varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} (\sin x \cos t - \sin 2x \cos 2t + \sin 3x \cos 3t) \varphi(t) dt = \cos x.$$

$$12. \varphi(x) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[ x - \frac{1}{2}(3t^2 - 1) + \frac{1}{2}t(3x^2 - 1) \right] \varphi(t) dt = 1.$$

## 5. Характеристичні числа та власні функції

Однорідне інтегральне рівняння Фредгольма 2-го роду

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t) \varphi(t) dt = 0 \tag{1}$$

завжди має *тривіальний* розв'язок  $\varphi(x) \equiv 0$ .

Значення параметра  $\lambda$ , для яких це рівняння має нетривіальні розв'язки  $\varphi(x) \neq 0$ , називаються *характеристичними числами* рівняння (1) або ядра  $K(x,t)$ , а кожний ненульовий розв'язок цього рівняння називається *власною функцією*, що відповідає характеристичному числу  $\lambda$ . На відміну від характеристичного числа, будемо називати *власним значенням* величину  $\mu = 1/\lambda$ .

Число  $\lambda = 0$  не є характеристичним числом, так як для  $\lambda = 0$  із (1) випливає, що  $\varphi(x) \equiv 0$ .

**Приклад.** Критична швидкість валу.

Відомо, що для деякої величини швидкості обертання валу, що називається критичною, вал починає коливатися навколо своєї поздовжньої осі.

Для визначення критичних швидкостей валу використовується наступний факт з теорії пружних балок: для будь якої пружної балки з довільними умовами на її границях завжди існує функція впливу  $G(x, \xi)$ , що описує відхилення балки у даному напрямку, наприклад, у напрямку осі  $Oy$ , у довільній точці балки  $M(x)$ , що викликається одиничним навантаженням, застосованої в іншій точці  $N(\xi)$  балки та діючої у вибраному напрямку.

Внаслідок принципу взаємності Бетті-Максвелла у теорії пружності функція впливу  $G(x, \xi)$  є симетричною, тобто

$$G(x, \xi) = G(\xi, x).$$

Нехай  $p(x)$  є неперервним розподілом навантаження вздовж балки. Тоді навантаження між  $x$  та  $x+dx$  дорівнює  $p(x)dx$ . Із принципу суперпозиції у теорії пружності випливає, що відхилення осі балки від положення рівноваги виражається наступним чином

$$y(x) = \int_0^1 G(x, \xi) p(\xi) d\xi, \quad 0 \leq x \leq 1$$

У випадку валу з лінійною щільністю  $\mu(x)$ , що обертається навколо осі  $Ox$  з кутовою швидкістю  $\omega$ , розподіл навантаження буде

$$p(x) = \omega^2 \mu(x) y(x),$$

де  $y(x)$  є відхилення центру тяжіння перерізу, що відповідає координаті  $x$ .

Підставляючи вираз для  $p(x)$  у отримане рівняння, будемо мати

$$y(x) = \omega^2 \int_0^1 G(x, \xi) \mu(\xi) y(\xi) d\xi, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Позначимо  $\omega^2 = \lambda$ ,

$$y(x) = \lambda \int_0^1 G(x, \xi) \mu(\xi) y(\xi) d\xi, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Таким чином, задача про знаходження критичної швидкості валу, що обертається, було зведено до знаходження значень  $\lambda$ , для яких останнє рівняння має ненульовий розв'язок.

Якщо ядро  $K(x,t)$  неперервно у квадраті  $\Omega\{a \leq x, t \leq b\}$  або є сумованим з квадратом у  $\Omega$ , причому числа  $a, b$  скінченні, то кожному характеристичному числу  $\lambda$  відповідає скінченне число лінійно незалежних власних функцій; число таких функцій називається *рангом* характеристичного числа. Різні характеристичні числа можуть мати різні ранги.

Для рівняння з виродженим ядром

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \left[ \sum_{k=1}^n a_k(x) b_k(t) \right] \varphi(t) dt = 0 \quad (2)$$

характеристичні числа є коренями алгебраїчного рівняння

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1 - \lambda a_{22} & \dots & -\lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \dots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \quad (3)$$

ступень якого  $p \leq n$ . Тут  $\Delta(\lambda)$  – визначник однорідної лінійної системи

$$\begin{cases} (1 - \lambda a_{11})C_1 - \lambda a_{12}C_2 - \dots - \lambda a_{1n}C_n = 0 \\ -\lambda a_{21}C_1 - (1 - \lambda a_{22})C_2 - \dots - \lambda a_{2n}C_n = 0 \\ \dots \\ -\lambda a_{n1}C_1 - \lambda a_{n2}C_2 - \dots - (1 - \lambda a_{nn})C_n = 0 \end{cases} \quad (4)$$

де величини  $a_{mk}, C_m$  ( $m, k = 1, 2, \dots, n$ ) мають той же зміст, що й у попередньому параграфі.

Якщо рівняння (3) має  $p$  коренів ( $1 \leq p \leq n$ ), то інтегральне рівняння (2) має  $p$  характеристичних чисел; кожному характеристичному числу  $\lambda_m$  ( $m = 1, 2, \dots, p$ ) відповідає ненульовий розв'язок

$$\begin{aligned} C_1^{(1)}, C_2^{(1)}, \dots, C_n^{(1)} &\rightarrow \lambda_1, \\ C_1^{(2)}, C_2^{(2)}, \dots, C_n^{(2)} &\rightarrow \lambda_2, \\ \dots & \\ C_1^{(p)}, C_2^{(p)}, \dots, C_n^{(p)} &\rightarrow \lambda_p \end{aligned}$$

системи (4). Відповідні цим розв'язкам ненульові розв'язки інтегрального рівняння (2), тобто власні функції, будуть мати вигляд

$$\varphi_1(x) = \sum_{k=1}^n C_k^{(1)} a_k(x), \varphi_2(x) = \sum_{k=1}^n C_k^{(2)} a_k(x), \dots, \varphi_p(x) = \sum_{k=1}^n C_k^{(p)} a_k(x)$$

Інтегральне рівняння з виродженим ядром має не більше ніж  $n$  характеристичних чисел та відповідних ним власних функцій.

У випадку довільного (невиродженого) ядра характеристичні числа є нулями визначника Фредгольма  $D(\lambda)$ , тобто полюсами резольвенти  $R(x,t;\lambda)$ .

Звідси випливає, що інтегральне рівняння Вольтерри  $\varphi(x) - \lambda \int_0^x K(x,t) \varphi(t) dt = 0$ , де

$K(x,t) \in L_2(\Omega_0)$ ,  $\Omega_0 \{0 \leq x, t \leq a\}$  не має характеристичних чисел (для нього визначник  $D(\lambda) = e^{-A\lambda}$ ).

**Зауваження.** Власні функції визначаються з точністю до постійного множника, тобто якщо  $\varphi(x)$  – власна функція, що відповідає деякому характеристичному числу  $\lambda$ , то і  $C\varphi(x)$ , де  $C$  – довільна постійна, також є власною функцією, що відповідає тому ж характеристичному числу  $\lambda$ .

**Приклад 1.** Знайти характеристичні числа та власні функції інтегрального рівняння

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^\pi (\cos^2 x \cos 2t - \cos 3x \cos^3 t) \varphi(t) dt = 0.$$

*Розв'язання:* Маємо

$$\varphi(x) = \lambda \cos^2 x \int_0^\pi \varphi(t) \cos 2t dt + \lambda \cos 3x \int_0^\pi \varphi(t) \cos^3 t dt.$$

Введемо позначення

$$C_1 = \int_0^\pi \varphi(t) \cos 2t dt, \quad C_2 = \int_0^\pi \varphi(t) \cos^3 t dt, \quad (5)$$

будемо мати

$$\varphi(x) = C_1 \lambda \cos^2 x + C_2 \lambda \cos 3x \quad (6)$$

Підставляючи (6) у (5), отримаємо лінійну систему однорідних рівнянь

$$\begin{aligned}
C_1 \left( 1 - \lambda \int_0^{\pi} \cos^2 t \cos 2t \, dt \right) - C_2 \lambda \int_0^{\pi} \cos 3t \cos 2t \, dt &= 0 \\
-C_1 \lambda \int_0^{\pi} \cos^5 t \, dt + C_2 \left( 1 - \lambda \int_0^{\pi} \cos^3 t \cos 3t \, dt \right) &= 0
\end{aligned} \tag{7}$$

Так як

$$\int_0^{\pi} \cos^2 t \cos 2t \, dt = \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^{\pi} \cos 3t \cos 2t \, dt = 0, \quad \int_0^{\pi} \cos^5 t \, dt = 0, \quad \int_0^{\pi} \cos^3 t \cos 3t \, dt = \frac{\pi}{8},$$

то систему (7) приймає вид

$$\begin{aligned}
\left( 1 - \frac{\lambda\pi}{4} \right) C_1 &= 0 \\
\left( 1 - \frac{\lambda\pi}{8} \right) C_2 &= 0
\end{aligned} \tag{8}$$

Рівняння для знаходження характеристичних чисел

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda\pi}{4} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\lambda\pi}{8} \end{vmatrix} = 0$$

Характеристичні числа:  $\lambda_1 = \frac{4}{\pi}$ ,  $\lambda_2 = \frac{8}{\pi}$ .

Для  $\lambda = \frac{4}{\pi}$  система (8) приймає вигляд

$$0 \cdot C_1 = 0, \quad \frac{1}{2} \cdot C_2 = 0$$

звідки  $C_2 = 0$ ,  $C_1$  довільне. Власна функція буде  $\varphi_1(x) = C_1 \lambda \cos^2 x$ , або, якщо покладемо  $C_1 \lambda = 1$ , отримаємо  $\varphi_1(x) = \cos^2 x$ .

Для  $\lambda = \frac{8}{\pi}$  система (8) приймає вигляд

$$(-1) \cdot C_1 = 0, \quad 0 \cdot C_2 = 0,$$

звідки  $C_1 = 0$ ,  $C_2$  довільне. Власна функція буде  $\varphi_2(x) = C_2 \lambda \cos 3x$ , або, якщо покладемо  $C_2 \lambda = 1$ , отримаємо  $\varphi_2(x) = \cos 3x$ .

Отже, характеристичні числа:

$$\lambda_1 = \frac{4}{\pi}, \quad \lambda_2 = \frac{8}{\pi},$$

відповідні власні функції:

$$\varphi_1(x) = \cos^2 x, \quad \varphi_2(x) = \cos 3x.$$

Однорідне рівняння Фредгольма може взагалі не мати характеристичних чисел та власних функцій, або може не мати дійсних характеристичних чисел та власних функцій.

**Приклад 2.** Однорідне рівняння Фредгольма

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (3x-2) t \varphi(t) dt = 0$$

не має характеристичних чисел та власних функцій.

Дійсно, маємо

$$\varphi(x) = \lambda (3x-2) \int_0^1 t \varphi(t) dt.$$

Покладемо

$$C = \int_0^1 t \varphi(t) dt, \quad (9)$$

отримаємо

$$\varphi(x) = C\lambda(3x-2). \quad (10)$$

Підставляючи (10) у (9), отримаємо

$$\left[ 1 - \lambda \int_0^1 (3t^2 - 2t) dt \right] \cdot C = 0. \quad (11)$$

Але, так як

$$\int_0^1 (3t^2 - 2t) dt = 0,$$

то з рівняння (11), маємо, що  $C = 0$ , та, відповідно,  $\varphi(x) \equiv 0$ .

Отже, дане однорідне рівняння для будь яких  $\lambda$  має тільки нульовий розв'язок  $\varphi(x) \equiv 0$ , а значить, воно не має характеристичних чисел та власних функцій.

**Приклад 3.** Рівняння

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (\sqrt{x}t - \sqrt{t}x) \varphi(t) dt = 0$$

не має дійсних характеристичних чисел та власних функцій.

Дійсно, маємо

$$\varphi(x) = C_1 \lambda \sqrt{x} - C_2 \lambda x, \quad (12)$$

де

$$C_1 = \int_0^1 t \varphi(t) dt, \quad C_2 = \int_0^1 \sqrt{t} \varphi(t) dt \quad (13)$$

Підставляючи (12) у (13), отримаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2}{5} \lambda\right) C_1 + \frac{\lambda}{3} C_2 &= 0 \\ -\frac{\lambda}{2} C_1 + \left(1 + \frac{2}{5} \lambda\right) C_2 &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Визначник цієї системи  $\Delta(\lambda) = 1 + \frac{\lambda^2}{150}$ . Для дійсних  $\lambda$  він не обертається в нуль, таким чином з (14) отримаємо  $C_1 = 0, C_2 = 0$ , а значить, для всіх дійсних  $\lambda$  дане рівняння має єдиний розв'язок, а саме нульовий:  $\varphi(x) \equiv 0$ . Отже, дане рівняння не має дійсних характеристичних чисел та власних функцій.

Взагалі, якщо ядро інтегрального рівняння Фредгольма вироджене, тобто має вигляд  $K(x, t) = \sum_{k=1}^n a_k(x) b_k(t)$ , то задача про знаходження власних чисел та власних функцій рівняння зводиться до пошуку власних значень деякої матриці. Дійсно, розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{k=1}^n C_k a_k(x),$$

де числа  $C_k$  – розв'язки однорідної системи

$$C_k - \lambda \sum_{k=1}^n a_{ki} C_k = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Цю систему можна переписати у матричній формі

$$(\mathbf{I} - \lambda \mathbf{A}) \mathbf{C} = 0 \quad \text{або} \quad (\mathbf{A} - \mu \mathbf{I}) \mathbf{C} = 0, \quad \lambda, \mu \neq 0,$$

де  $\mathbf{I}$  – одинична матриця,  $\mathbf{A} = (a_{ij})$ ,  $\mathbf{C}$  – вектор з чисел  $C_k$ . Таким чином, власні числа інтегрального рівняння співпадають з відмінними від нуля власними числами матриці  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  та можуть бути знайдені із рівняння

$$\det(\mathbf{A} - \mu \mathbf{I}) = 0$$

**Приклад.** Знайти власні числа  $\mu = 1/\lambda$  та власні функції інтегрального рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (xt - 2x^2) \varphi(t) dt.$$

*Розв'язання.* Ядро  $K(x,t) = xt - 2x^2$  – вироджене. Тут  $a_1(x) = x$ ,  $a_2(x) = -2x^2$ ,  $b_1(t) = t$ ,  $b_2(t) = 1$ . Знайдемо компоненти матриці  $\mathbf{A} = (a_{ij})$

$$a_{11} = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}, \quad a_{12} = -2 \int_0^1 x^3 dx = -\frac{1}{2}, \quad a_{21} = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}, \quad a_{22} = -2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

Рівняння для знаходження власних значень приймає вигляд

$$\det(\mathbf{A} - \mu \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} - \mu & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} - \mu \end{vmatrix} = \left( \mu + \frac{1}{6} \right)^2 = 0.$$

Відповідно, інтегральне рівняння має єдине власне значення  $\mu = -1/6$  (характеристичне число  $\lambda = -6$ ). Знайдемо відповідний власний вектор

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

звідки знайдемо, що  $C_1 = C_2 = C$ , де  $C$  – довільна константа. Таким чином, власною функцією даного інтегрального рівняння буде

$$\varphi(x) = -6(C_1 x - 2C_2 x^2) = Cx(1 - 2x).$$

**Приклад.** Дослідити розв'язки інтегрального рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 \cos t - x \sin t) \varphi(t) dt + \cos x$$

в залежності від значень параметра  $\lambda$ .

*Розв'язання.* Ядро рівняння  $K(x,t) = x^2 \cos t - x \sin t$  - вироджене, значить його розв'язання можна звести до розв'язання алгебраїчної системи, яку в матричній формі можна записати у вигляді

$$(\mathbf{I} - \lambda \mathbf{A})\mathbf{C} = \mathbf{F},$$

де  $\mathbf{F}$  - стовпчик коефіцієнтів  $f_i$  правої частини системи. Знайдемо компоненти матриці  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  та вектору  $\mathbf{F}$

$$a_1(x) = x^2, a_2(x) = x, b_1(t) = \cos t, b_2(t) = \sin t,$$

$$a_{11} = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos x dx = 4\pi, a_{12} = \int_{-\pi}^{\pi} x \cos x dx = 0, a_{21} = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x dx = 0, a_{22} = \int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx = -2\pi,$$

$$f_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx = \pi, f_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx = 0.$$

Система набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} 1-4\pi\lambda & 0 \\ 0 & 1+2\pi\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{I} - \lambda \mathbf{A}) = (1-4\pi\lambda)(1+2\pi\lambda) = 0 \text{ коли } \lambda = \frac{1}{4\pi} \text{ або } \lambda = -\frac{1}{2\pi}.$$

Для будь яких значень  $\lambda \neq -\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{4\pi}$  система має єдиний розв'язок

$$C_1 = \frac{\pi}{1-4\pi\lambda}, C_2 = 0.$$

В цьому випадку розв'язком інтегрального рівняння буде функція

$$\varphi(x) = \cos x + \frac{\lambda\pi}{1-4\pi\lambda} x^2.$$

Якщо  $\lambda = \frac{1}{4\pi}$ , то система

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

розв'язків не має. Відповідно, при даному значенні  $\lambda$  не має розв'язків і інтегральне рівняння.

Якщо  $\lambda = -\frac{1}{2\pi}$ , то розв'язком системи

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

будуть  $C_1 = \pi/3$ ,  $C_2 = C$  та відповідний розв'язок інтегрального рівняння

$$\varphi(x) = \cos x + \lambda(C_1 x^2 + C_2 x) = \cos x - x^2/6 + Cx.$$

**Задачі для самостійного розв'язання.** Знайти характеристичні числа та власні функції для наступних однорідних інтегральних рівнянь із виродженим ядром:

$$1. \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi/4} \sin^2 x \varphi(t) dt = 0.$$

$$2. \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin x \sin t \varphi(t) dt = 0.$$

$$3. \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin x \cos t \varphi(t) dt = 0.$$

$$4. \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} \cos(x+t) \varphi(t) dt = 0.$$

$$5. \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^1 (45x^2 \ln t - 9t^2 \ln x) \varphi(t) dt = 0.$$

$$6. \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^1 (2xt - 4x^2) \varphi(t) dt = 0.$$

$$7. \quad \varphi(x) - \lambda \int_{-1}^1 (5xt^3 + 4x^2 t) \varphi(t) dt = 0.$$

$$8. \quad \varphi(x) - \lambda \int_{-1}^1 (5xt^3 + 4x^2 t + 3xt) \varphi(t) dt = 0$$

$$9. \quad \varphi(x) - \lambda \int_{-1}^1 (x \operatorname{cht} - t \operatorname{sh}x) \varphi(t) dt = 0.$$

$$10. \quad \varphi(x) - \lambda \int_{-1}^1 (x \operatorname{cht} - t^2 \operatorname{sh}x) \varphi(t) dt = 0.$$

$$11. \quad \varphi(x) - \lambda \int_{-1}^1 (x \operatorname{cht} - t \operatorname{ch}x) \varphi(t) dt = 0.$$

Якщо  $n$ -повторне (ітераційне) ядро  $K_n(x, t)$  ядра  $K(x, t)$  є симетричним ядром, то можна стверджувати, що  $K(x, t)$  має принаймні одне характеристичне число (дійсне чи комплексне) і що  $n$ -і степені усіх характеристичних чисел – усі дійсні. У частому випадку, для кососиметричного ядра  $K(x, t) = -K(t, x)$  усі характеристичні числа чисто уявні:  $\lambda = \beta i$

Ядро  $K(x, t)$  інтегрального рівняння називається *симетричним*, якщо виконується умова  $K(x, t) = K(t, x)$  ( $a \leq x, t \leq b$ ).

Для інтегрального рівняння Фредгольма

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt = 0 \tag{1}$$

з симетричним ядром мають місце наступні теореми:

**Теорема 1.** Рівняння (1) має принаймні одне дійсне характеристичне число.

**Теорема 2.** Кожному характеристичному числу  $\lambda$  відповідає скінчене число  $q$  лінійно незалежних власних функцій рівняння (1), причому

$$q \leq \lambda^2 B^2, \quad B^2 = \int_a^b \int_a^b K^2(x,t) dx dt .$$

Число  $q$  називається *рангом* або *кратністю* характеристичного числа.

**Теорема 3.** Кожна пара власних функцій  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$ , що відповідають різним характеристичним числам  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , ортогональна

$$\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x) dx = 0 .$$

**Теорема 4.** В кожному скінченному інтервалі осі  $\lambda$  знаходиться скінчене число характеристичних чисел. Кількість  $m$  характеристичних чисел, що належать інтервалу  $-l < \lambda < l$ , визначається нерівністю

$$m \leq l^2 B^2 .$$

В тому випадку, коли ядро  $K(x,t)$  інтегрального рівняння (1) є функцією Гріна деякої задачі Штурма-Ліувілля, знаходження характеристичних чисел та власних функцій зводиться до розв'язання вказаної задачі Штурма-Ліувілля.

**Приклад 4.** Знайти характеристичні числа та власні функції однорідного рівняння

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} K(x,t)\varphi(t) dt = 0 ,$$

де

$$K(x,t) = \begin{cases} \cos x \sin t, & 0 \leq x \leq t \\ \cos t \sin x, & t \leq x \leq \pi \end{cases}$$

*Розв'язання.* Дане рівняння можна подати у формі

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \lambda \int_0^x K(x,t)\varphi(t) dt + \lambda \int_x^{\pi} K(x,t)\varphi(t) dt = \\ &= \lambda \sin x \int_0^x \cos t \varphi(t) dt + \lambda \cos x \int_x^{\pi} \sin t \varphi(t) dt \end{aligned} \tag{15}$$

Продиференціюємо (15)

$$\begin{aligned} \varphi'(x) = & \lambda \cos x \int_0^x \cos t \varphi(t) dt + \lambda \sin x \cos x \varphi(x) - \\ & - \lambda \sin x \int_x^\pi \sin t \varphi(t) dt - \lambda \sin x \cos x \varphi(x), \end{aligned}$$

або

$$\varphi'(x) = \lambda \cos x \int_0^x \cos t \varphi(t) dt - \lambda \sin x \int_x^\pi \sin t \varphi(t) dt \quad (16)$$

Повторне диференціювання дає

$$\begin{aligned} \varphi''(x) = & -\lambda \sin x \int_0^x \cos t \varphi(t) dt + \lambda \cos^2 x \varphi(x) - \\ & - \lambda \cos x \int_x^\pi \sin t \varphi(t) dt + \lambda \sin^2 x \varphi(x) = \\ = & \lambda \varphi(x) - \left[ \lambda \sin x \int_0^x \cos t \varphi(t) dt + \lambda \cos x \int_x^\pi \sin t \varphi(t) dt \right] \end{aligned}$$

Вираз у квадратних дужках дорівнює  $\varphi(x)$ , таким чином

$$\varphi''(x) = \lambda \varphi(x) - \varphi(x).$$

Із рівностей (15) та (16) знайдемо, що

$$\varphi(\pi) = 0, \varphi'(0) = 0.$$

Отже, дане інтегральне рівняння було зведено до наступної крайової задачі

$$\varphi''(x) - (\lambda - 1)\varphi(x) = 0, \quad (17)$$

$$\varphi(\pi) = 0, \varphi'(0) = 0. \quad (18)$$

Можливі три випадки.

$$1) \quad \lambda = 1.$$

Тоді рівняння (17) приймає вигляд  $\varphi''(x) = 0$ . Його загальний розв'язок буде

$$\varphi(x) = C_1 x + C_2$$

З крайових умов (18), отримаємо систему для знаходження постійних

$$C_1 \pi + C_2 = 0, C_1 = 0,$$

яка має єдиний розв'язок  $C_1 = 0, C_2 = 0$ , а відповідно, інтегральне рівняння має

тільки тривіальний розв'язок  $\varphi(x) \equiv 0$ .

$$2) \quad \lambda > 1.$$

Загальний розв'язок рівняння (17) має вигляд  $\varphi(x) = C_1 ch\sqrt{\lambda-1}x + C_2 sh\sqrt{\lambda-1}x$ .

Система для постійних має наступний вигляд

$$C_1 ch\pi\sqrt{\lambda-1} + C_2 sh\pi\sqrt{\lambda-1} = 0, C_2 = 0.$$

Існує єдиний розв'язок  $C_1 = 0, C_2 = 0$ , а відповідно, інтегральне рівняння має тільки тривіальний розв'язок  $\varphi(x) \equiv 0$ .

3)  $\lambda < 1$ .

Загальний розв'язок рівняння (17) має вигляд  $\varphi(x) = C_1 \cos\sqrt{1-\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{1-\lambda}x$ .

Система для постійних має наступний вигляд

$$C_1 \cos\pi\sqrt{1-\lambda} + C_2 \sin\pi\sqrt{1-\lambda} = 0, \sqrt{1-\lambda}C_2 = 0. \quad (19)$$

Для отримання рівняння для знаходження характеристичних чисел, визначник цієї системи прирівнюємо до нуля

$$\begin{vmatrix} \cos\pi\sqrt{1-\lambda} & \sin\pi\sqrt{1-\lambda} \\ 0 & \sqrt{1-\lambda} \end{vmatrix} = 0 \quad (20)$$

або  $\sqrt{1-\lambda} \cdot \cos\pi\sqrt{1-\lambda} = 0$ . За припущенням  $\sqrt{1-\lambda} \neq 0$ , тому  $\cos\pi\sqrt{1-\lambda} = 0$ . Звідки знайдемо, що  $\pi\sqrt{1-\lambda} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ . Усі корені рівняння (20) визначаються формулою

$$\lambda_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2, n \in \mathbb{Z}.$$

Для значень  $\lambda = \lambda_n$  система (19) приймає вигляд

$$C_1 \cdot 0 = 0, C_2 = 0.$$

Вона має незлічену множину ненульових розв'язків

$$C_1 = C, C_2 = 0,$$

де  $C$  – довільна константа. Значить, вихідне інтегральне рівняння має нескінчену множину розв'язків вигляду

$$\varphi(x) = C \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x.$$

Отже, характеристичні числа та власні функції даного інтегрального рівняння мають вигляд

$$\lambda_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2, \quad \varphi_n(x) = C \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

**Приклад 5.** Показати, що інтегральне рівняння із несиметричним ядром

$$K(x, t) = \sin \pi x \cdot \cos \pi t, \quad 0 \leq x, t \leq 1 \quad (21)$$

не має характеристичних чисел.

*Розв'язання.* Покажемо, що рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, t) \varphi(t) dt, \quad (22)$$

де ядро задано формулою (21), має тільки тривіальний розв'язок  $\varphi(x) \equiv 0$  ( $\lambda \neq 0$ ).

Дійсно, перепишемо рівняння (22) у формі

$$\varphi(x) = \lambda \sin \pi x \int_0^1 \cos \pi t \varphi(t) dt, \quad (23)$$

Позначимо

$$C = \int_0^1 \cos \pi t \varphi(t) dt,$$

тоді

$$\varphi(x) = C \lambda \sin \pi x.$$

Підставимо цей вираз для  $\varphi(x)$  в обидві частини (23), отримаємо

$$C \lambda \sin \pi x = C \lambda^2 \sin \pi x \int_0^1 \cos \pi t \sin \pi t \varphi(t) dt.$$

Але

$$\int_0^1 \cos \pi t \sin \pi t dt = 0$$

тому  $C \lambda \sin \pi x \equiv 0$ , звідки  $C = 0$ , а значить  $\varphi(x) \equiv 0$ . Таким чином, ядро (21) не має характеристичних чисел.

**Задачі для самостійного розв'язання.** Знайти характеристичні числа та власні функції однорідних рівнянь з симетричними ядрами, якщо ці ядра мають наступну форму:

1.  $K(x, t) = 1 + xt + x^2 t^2, \quad -1 \leq x, t \leq 1.$

2.  $K(x, t) = \begin{cases} x(t-1), & 0 \leq x \leq t \\ t(x-1), & t \leq x \leq 1 \end{cases}$

$$3. K(x,t) = \begin{cases} t(x+1), & 0 \leq x \leq t \\ x(t-1), & t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$4. K(x,t) = \begin{cases} (x+1)(t-2), & 0 \leq x \leq t \\ (t+1)(x-2), & t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$5. K(x,t) = \begin{cases} (x+1)(t-2), & 0 \leq x \leq t \\ (t+1)(x-2), & t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$6. K(x,t) = \begin{cases} \sin x \cos t, & 0 \leq x \leq t \\ \sin t \cos x, & t \leq x \leq \pi/2 \end{cases}$$

$$7. K(x,t) = \begin{cases} \sin x \cos t, & 0 \leq x \leq t \\ \sin t \cos x, & t \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$8. K(x,t) = \begin{cases} \sin x \cos(t-1), & -\pi \leq x \leq t \\ \sin t \cos(x-1), & t \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$9. K(x,t) = \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right), & 0 \leq x \leq t \\ \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right), & t \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$10. K(x,t) = \begin{cases} -e^{-t} shx, & 0 \leq x \leq t \\ -e^{-x} sht, & t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$11. K(x,t) = e^{-|x-t|}, -1 \leq x, t \leq 1$$

**Теорема Мерсера.** Якщо симетричне  $L_2$ - ядро  $K(x,t)$  неперервне та має лише додатні характеристичні числа (або не більш ніж скінченим числом від'ємних характеристичних чисел), то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(t)}{\lambda_n}$$

збігається абсолютно та рівномірно до ядра  $K(x,t)$ , так що справедлива формула

$$K(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(t)}{\lambda_n}.$$

Тут  $\varphi_n(x)$  – ортонормовані власні функції ядра  $K(x,t)$ . В загальному випадку симетричного  $L_2$ - ядро  $K(x,t)$  білінійний ряд збігається у середньому до ядра  $K(x,t)$ .

**Задачі для самостійного розв'язання.** Виходячи із розвинення ядра  $K(x,t)$  інтегрального рівняння, показати, що мають місце наступні співвідношення:

$$1. \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x \cdot \sin n\pi t}{n^2} = \begin{cases} x(t-1), & 0 \leq x \leq t \\ t(x-1), & t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$2. \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x \cdot \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi t}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq t \\ t, & t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

3. Показати, що якщо  $\lambda_1, \lambda_2$  ( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ) характеристичні числа ядра  $K(x,t)$ , то власні функції рівнянь

$$\varphi(x) - \lambda_1 \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = 0, \quad \psi(x) - \lambda_2 \int_a^b K(x,t)\psi(t)dt = 0$$

ортогональні, тобто

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = 0$$

4. Показати, що якщо  $K(x,t)$  – симетричне ядро, то друге ітераційне ядро  $K_2(x,t)$  має тільки додатні характеристичні числа.
5. Показати, що якщо ядро  $K(x,t)$  кососиметричне, тобто  $K(t,x) = -K(x,t)$ , то вся його характеристичні числа чисто уявні.
6. Показати, що якщо ядро  $K(x,t)$  симетричне, то має місце рівність

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^m} = A_m, \quad (m = 2, 3, \dots),$$

де  $\lambda_n$  – характеристичні числа,  $A_m$  –  $m$ -ті сліди ядра  $K(x,t)$ .

Резольвента симетричного ядра є мероморфною функцією від  $\lambda$ , для якої характеристичні числа інтегрального рівняння є простими полюсами. Її лишки відносно полюсів  $\lambda_i$  дають відповідні цим значенням  $\lambda_i$  власні функції (для будь якого значення  $t$ ).

**Задачі для самостійного розв’язання.** Знайти власні функції інтегральних рівнянь, резольвенти яких визначаються за наступними формулами:

$$1. \quad R(x,t;\lambda) = \frac{3 - \lambda + 3(1 - \lambda)(2x - 1)(2t + 1)}{\lambda^2 - 4\lambda + 3}.$$

$$2. \quad R(x,t;\lambda) = \frac{(15 - 6\lambda)xt + (15 - 10\lambda)x^2t^2}{4\lambda^2 - 16\lambda + 15}.$$

## 6. Інтегральне рівняння Фредгольма з різницевиими ядрами.

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} K(x-t)\varphi(t)dt, \quad (24)$$

де ядро  $K(x)$  є парна функція, періодично продовжена на всю вісь  $Ox$ , так що

$$K(x-t) = K(t-x).$$

Можна показати, що власні функції рівняння (24) є

$$\begin{cases} \varphi_n^{(1)}(x) = \cos nx, & n = 1, 2, \dots \\ \varphi_n^{(2)}(x) = \sin nx, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

а відповідні характеристичні числа

$$\lambda_n = \frac{1}{\pi a_n}, \quad (n = 1, 2, \dots),$$

де  $a_n$  – коефіцієнти Фур'є функції  $K(x)$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(x) \cos nxdx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Таким чином, кожному значенню  $\lambda_n$  відповідає дві лінійно незалежні власні функції  $\cos nx, \sin nx$ , так що кожне  $\lambda_n$  є двократне характеристичне число. Функція  $\varphi_0(x) \equiv 1$  також є власною функцією рівняння (24), що відповідає характеристичному числу

$$\lambda_0 = \frac{1}{\pi a_0},$$

де

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(x)dx.$$

Покажемо, наприклад, що  $\cos nx$  є власною функцією інтегрального рівняння

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi a_n} \int_{-\pi}^{\pi} K(x-t)\varphi(t)dt, \quad (25)$$

де

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(x) \cos nxdx.$$

Виконавши підстановку  $x-t=z$ , знайдемо

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} K(x-t) \cos ntdt &= - \int_{x+\pi}^{x-\pi} K(z) \cos n(x-z) dz = \\ &= \cos nx \int_{x-\pi}^{x+\pi} K(z) \cos nzdz + \sin nx \int_{x-\pi}^{x+\pi} K(z) \sin nzdz = \pi a_n \cos nx \end{aligned}$$

так як другий інтеграл дорівнює нулю в силу парності  $K(x)$ , а перший інтеграл є помножений на  $\pi$  коефіцієнт Фур'є  $a_n$  у розвиненні парної функції  $K(x)$ .

Отже,

$$\cos nx = \frac{1}{\pi a_n} \int_{-\pi}^{\pi} K(x-t) \cos ntdt,$$

а це означає, що  $\cos nx$  є власна функція рівняння (25). Аналогічно встановлюємо, що  $\sin nx$  є власною функцією інтегрального рівняння (25), що відповідає тому ж характеристичному числу  $1/\pi a_n$ .

### Задачі для самостійного розв'язання.

1. Знайти власні функції та відповідні характеристичні числа рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x-t) \varphi(t) dt.$$

2. Показати, що симетричне ядро

$$K(x,t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1-h^2}{1-2h \cos(x-t) + h^2}, \quad -\pi \leq x, t \leq \pi$$

має для  $|h| < 1$  власні функції  $1, \sin nx, \cos nx$ , що відповідають характеристичним числам  $1, 1/h_n, 1/h_n$ .

3. Знайти власні функції та відповідні характеристичні числа рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} K(x-t) \varphi(t) dt,$$

де  $K(x) = x^2$  ( $-\pi \leq x \leq \pi$ ) – періодична функція з періодом  $2\pi$ .

## 7. Розв'язання однорідних рівнянь з виродженим ядром

Однорідне інтегральне рівняння з виродженим ядром

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \left[ \sum_{k=1}^n a_k(x) b_k(t) \right] \varphi(t) dt = 0, \quad (1)$$

коли параметр  $\lambda$  не є його характеристичним числом (тобто  $\Delta(\lambda) \neq 0$ ), має єдиний нульовий розв'язок  $\varphi(x) \equiv 0$ . Якщо  $\lambda$  є характеристичним числом, тобто  $\Delta(\lambda) = 0$ , то окрім нульового розв'язку рівняння (1) має і ненульові розв'язки, якими є власні функції, що відповідають цьому характеристичному числу. Загальний розв'язок однорідного рівняння (1) отримується як лінійна комбінація цих власних функцій.

**Приклад.** Розв'язати рівняння

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} (\cos^2 x \cos 2t + \cos^3 t \cos 3x) \varphi(t) dt = 0.$$

*Розв'язання.* Характеристичні числа даного рівняння  $\lambda_1 = 4/\pi$ ,  $\lambda_2 = 8/\pi$ , а відповідні власні функції мають вигляд

$$\varphi_1(x) = \cos^2 x, \quad \varphi_2(x) = \cos 3x.$$

Загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$\varphi(x) = C \cos^2 x, \quad \text{якщо } \lambda = 4/\pi$$

$$\varphi(x) = C \cos 3x, \quad \text{якщо } \lambda = 8/\pi$$

$$\varphi(x) = 0, \quad \text{якщо } \lambda \neq 4/\pi, \lambda \neq 8/\pi$$

де  $C$  – довільна постійна. Останній, нульовий розв'язок отримується із загальних розв'язків для  $C = 0$ .

**Задачі для самостійного розв'язання.** Розв'язати наступні однорідні рівняння:

1.  $\varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} \cos(x+t) \varphi(t) dt = 0.$

2.  $\varphi(x) - \lambda \int_0^1 \arccos x \varphi(t) dt = 0.$

3.  $\varphi(x) - 2 \int_0^{\pi/4} \frac{\varphi(t)}{1 + \cos 2t} dt = 0.$

4.  $\varphi(x) - \frac{1}{4} \int_{-2}^2 |x| \varphi(t) dt = 0.$

5.  $\varphi(x) + 6 \int_0^1 (x^2 - 2xt) \varphi(t) dt = 0.$

## 8. Неоднорідні симетричні рівняння

Неоднорідне інтегральне рівняння Фредгольма 2-го роду

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \quad (1)$$

називається *симетричним*, якщо його ядро  $K(x,t)$  симетричне  $K(x,t) \equiv K(t,x)$ .

Якщо  $f(x)$  неперервна і параметр  $\lambda$  не співпадає з характеристичними числами  $\lambda_n$ , ( $n=1,2,\dots$ ) відповідного однорідного інтегрального рівняння

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = 0, \quad (2)$$

то рівняння (1) має єдиний неперервний розв'язок, який визначається за формулою

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda - \lambda_n} \varphi_n(x), \quad (3)$$

де  $\varphi_n(x)$  – власні функції рівняння (2),

$$a_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx. \quad (4)$$

Причому ряд, що стоїть у правій частині формули (3), збігається абсолютно та рівномірно у квадраті  $a \leq x, t \leq b$ .

Якщо параметр  $\lambda$  співпадає з одним із характеристичних чисел, наприклад  $\lambda = \lambda_k$  ранга  $q$  (кратність числа  $\lambda_k$ ), то рівняння (1), взагалі кажучи, не має розв'язків. Розв'язки існують тоді і тільки тоді, коли виконується  $q$  умов

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx = 0 \quad m = 1, 2, \dots, q, \quad (5)$$

тобто коли функція  $f(x)$  ортогональна до всіх власних функцій, що належать характеристичному числу  $\lambda_k$ . В цьому випадку рівняння (1) має безліч розв'язків, які містять  $q$  довільних констант та визначаються за формулами

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda - \lambda_n} \varphi_n(x) + C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \dots + C_q\varphi_q(x), \quad (6)$$

де  $C_i, i=1,2,\dots,q$  – довільні константи.

У випадку виродженого ядра

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^n a_k(x)b_k(t),$$

формули (3) та (6) будуть містити у правих частинах замість рядів скінченні суми.

Коли права частина рівняння (1) функція  $f(x)$  буде ортогональною до всіх власних функцій  $\varphi_n(x)$  рівняння (2), то розв'язком рівняння (1) буде сама ця функція  $\varphi(x) = f(x)$ .

**Приклад 1.** Розв'язати рівняння

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt = x, \quad (7)$$

де

$$K(x,t) = \begin{cases} x(t-1), & 0 \leq x \leq t \\ t(x-1), & t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

*Розв'язання.* Характеристичні числа та відповідні ним власні функції мають вигляд

$$\lambda_n = -\pi^2 n^2, \quad \varphi_n(x) = \sin(\pi n x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Якщо  $\lambda \neq \lambda_n$ , то розв'язком рівняння (7) буде

$$\varphi(x) = x - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda + n^2 \pi^2} \sin(\pi n x). \quad (8)$$

Знаходимо коефіцієнти Фур'є  $a_n$  правої частини рівняння

$$a_n = \int_0^1 x \sin(\pi n x) dx = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}.$$

Підставляючи у (8), отримаємо

$$\varphi(x) = x - \frac{\lambda}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(\lambda + n^2 \pi^2)} \sin(\pi n x).$$

Для  $\lambda = -n^2 \pi^2$  рівняння (7) не має розв'язків, так як

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} \neq 0.$$

**Приклад 2.** Розв'язати рівняння

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt = \cos \pi x,$$

де

$$K(x,t) = \begin{cases} (x+1)t, & 0 \leq x \leq t \\ (t+1)x, & t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

*Розв'язання.* Характеристичні числа мають вигляд

$$\lambda_0 = 1, \lambda_n = -\pi^2 n^2, n = 1, 2, \dots$$

та відповідні ним власні функції

$$\varphi_0(x) = 1, \varphi_n(x) = \sin(\pi nx) + n\pi \cos(\pi nx), n = 1, 2, \dots$$

Якщо  $\lambda \neq 1$  та  $\lambda \neq -n^2\pi^2$ , то розв'язок даного рівняння буде мати вигляд

$$\varphi(x) = \cos(\pi x) - \lambda \left[ \frac{a_0 e^x}{\lambda - 1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda + n^2 \pi^2} (\sin(\pi nx) + n\pi \cos(\pi nx)) \right],$$

і так як

$$a_0 = \int_0^1 e^x \cos(\pi x) dx = -\frac{1+e}{1+\pi^2}, a_n = \int_0^1 \cos(\pi x) (\sin(\pi nx) + n\pi \cos(\pi nx)) dx = \begin{cases} 0, & n \neq 1 \\ \pi/2, & n = 1 \end{cases}$$

то

$$\varphi(x) = \cos(\pi x) + \lambda \left[ \frac{1+e}{1+\pi^2} \frac{e^x}{\lambda-1} - \frac{\pi}{2(\lambda+\pi^2)} (\sin(\pi x) + \pi \cos(\pi x)) \right].$$

Якщо  $\lambda = 1$  та  $\lambda = -\pi^2$  ( $n=1$ ), то рівняння розв'язку не має, так як його права частина функція  $\cos(\pi x)$  не є ортогональною до відповідних власних функцій

$$\varphi_0(x) = e^x, \varphi_1(x) = \sin(\pi x) + \pi \cos(\pi x).$$

Якщо  $\lambda = -n^2\pi^2$ ,  $n = 2, 3, \dots$ , то дане рівняння має безліч розв'язків, що визначаються формулою (б)

$$\varphi(x) = \cos(\pi x) + \lambda \left[ \frac{1+e}{1+\pi^2} \frac{e^x}{\lambda-1} - \frac{\pi}{2(\lambda+\pi^2)} (\sin(\pi x) + \pi \cos(\pi x)) \right] + C (\sin(\pi nx) + n\pi \cos(\pi nx))$$

де  $C$  – довільна константа.

В деяких випадках **неоднорідне симетричне інтегральне рівняння можна звести до неоднорідної крайової задачі**. Це можна зробити, коли ядро  $K(x,t)$  інтегрального рівняння є функцією Гріна деякого лінійного диференціального оператора.

### Приклад 3. Розв'язати рівняння

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt = e^x, \quad (9)$$

де

$$K(x,t) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh}x \operatorname{sh}(t-1)}{\operatorname{sh}1}, & 0 \leq x \leq t \\ \frac{\operatorname{sh}t \operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh}1}, & t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Розв'язання. Перепишемо рівняння у формі

$$\varphi(x) = e^x + \frac{\lambda \operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh}1} \int_0^x \operatorname{sh}t \varphi(t) dt + \frac{\lambda \operatorname{sh}x}{\operatorname{sh}1} \int_x^1 \operatorname{sh}(t-1) \varphi(t) dt. \quad (10)$$

Після диференціювання двічі, отримаємо

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= e^x + \frac{\lambda \operatorname{ch}(x-1)}{\operatorname{sh}1} \int_0^x \operatorname{sh}t \varphi(t) dt + \frac{\lambda \operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}1} \int_x^1 \operatorname{sh}(t-1) \varphi(t) dt, \\ \varphi''(x) &= e^x + \frac{\lambda \operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh}1} \int_0^x \operatorname{sh}t \varphi(t) dt + \frac{\lambda \operatorname{sh}x}{\operatorname{sh}1} \int_x^1 \operatorname{sh}(t-1) \varphi(t) dt + \\ &+ \frac{\lambda \operatorname{ch}(x-1)}{\operatorname{sh}1} \operatorname{sh}x \varphi(x) + \frac{\lambda \operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}1} \operatorname{sh}(x-1) \varphi(x), \end{aligned}$$

або

$$\varphi''(x) = \varphi(x) + \lambda \varphi(x).$$

Покладемо у (10)  $x=0$  та  $x=1$ , отримаємо, що  $\varphi(0)=1$ ,  $\varphi(1)=e$ . Шукана функція  $\varphi(x)$  є розв'язком неоднорідної крайової задачі

$$\varphi''(x) - (\lambda+1)\varphi(x) = 0 \quad (11)$$

$$\varphi(0)=1, \varphi(1)=e \quad (12)$$

Розглянемо випадки:

1)  $\lambda+1=0$ ,  $\lambda=-1$ . Рівняння (11) має вигляд  $\varphi''(x)=0$ . Його загальний розв'язок

$$\varphi(x) = C_1 x + C_2.$$

Враховуючи крайові умови (12), отримаємо систему

$$C_2 = 1, C_1 + C_2 = e,$$

з якої  $C_1 = e-1$ ,  $C_2 = 1$  і, відповідно

$$\varphi(x) = (e-1)x + 1.$$

2)  $\lambda+1 > 0, \lambda > -1 (\lambda \neq 0)$ . Загальний розв'язок рівняння (11)

$$\varphi(x) = C_1 ch\sqrt{\lambda+1}x + C_2 sh\sqrt{\lambda+1}x.$$

З крайових умов (12) отримаємо систему для знаходження констант

$$C_1 = 1, C_1 ch\sqrt{\lambda+1} + C_2 sh\sqrt{\lambda+1} = e,$$

звідки

$$C_1 = 1, C_2 = \frac{e - ch\sqrt{\lambda+1}}{sh\sqrt{\lambda+1}}.$$

Шукана функція  $\varphi(x)$  має вигляд

$$\varphi(x) = \frac{sh\sqrt{\lambda+1}(1-x) + ech\sqrt{\lambda+1}x}{sh\sqrt{\lambda+1}}.$$

3)  $\lambda+1 < 0, \lambda < -1$ . Позначимо  $\lambda+1 = -\mu^2$ . Загальний розв'язок рівняння (11)

$$\varphi(x) = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x.$$

З крайових умов (12) отримаємо систему для знаходження констант

$$C_1 = 1, C_1 \cos \mu + C_2 \sin \mu = e, \quad (13)$$

тут в свою чергу можливі два випадки:

а)  $\mu$  не є коренем рівняння  $\sin \mu = 0$ . Тоді

$$C_1 = 1, C_2 = \frac{e - \cos \mu}{\sin \mu},$$

і відповідно,

$$\varphi(x) = \cos \mu x + \frac{e - \cos \mu}{\sin \mu} \sin \mu x, \quad \mu = \sqrt{-\lambda-1}.$$

б)  $\mu$  не є коренем рівняння  $\sin \mu = 0$ , тобто  $\mu = n\pi, n = 1, 2, \dots$ . Тоді система (13)

несумісна, і відповідно, дане рівняння (9) не має розв'язків. У даному випадку відповідне однорідне інтегральне рівняння

$$\varphi(x) + (1 + n^2 \pi^2) \int_0^1 K(x,t) \varphi(t) dt = 0 \quad (14)$$

має нетривіальні розв'язки, тобто числа  $\lambda_n = -(1 + n^2 \pi^2)$  є характеристичними числами, а функції  $\varphi_n(x) = \sin(n\pi x)$  – власні функції рівняння (14).

**Задачі для самостійного розв'язання.** Розв'язати наступні інтегральні симетричні рівняння:

$$1. \quad \varphi(x) - \frac{\pi^2}{4} \int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt = \frac{x}{2}, \quad K(x,t) = \begin{cases} \frac{x(2-t)}{2}, & 0 \leq x \leq t \\ \frac{t(2-x)}{2}, & t \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

$$2. \quad \varphi(x) + \int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt = xe^x, \quad K(x,t) = \begin{cases} \frac{shx sh(t-1)}{sh1}, & 0 \leq x \leq t \\ \frac{sht sh(x-1)}{sh1}, & t \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

$$3. \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt = x-1, \quad K(x,t) = \begin{cases} x-t, & 0 \leq x \leq t \\ t-x, & t \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

$$4. \quad \varphi(x) - 2 \int_0^{\pi/2} K(x,t)\varphi(t)dt = \cos 2x, \quad K(x,t) = \begin{cases} \sin x \cos t, & 0 \leq x \leq t \\ \sin t \cos x, & t \leq x \leq \pi/2 \end{cases}.$$

$$5. \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} K(x,t)\varphi(t)dt = 1, \quad K(x,t) = \begin{cases} \sin x \cos t, & 0 \leq x \leq t \\ \sin t \cos x, & t \leq x \leq \pi \end{cases}.$$

$$6. \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt = x, \quad K(x,t) = \begin{cases} (x+1)(t-3), & 0 \leq x \leq t \\ (t+1)(x-3), & t \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

$$7. \quad \varphi(x) - \int_0^{\pi} K(x,t)\varphi(t)dt = \sin x, \quad K(x,t) = \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right), & 0 \leq x \leq t \\ \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), & t \leq x \leq \pi \end{cases}.$$

$$8. \quad \varphi(x) - \int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt = shx, \quad K(x,t) = \begin{cases} -e^{-t}shx, & 0 \leq x \leq t \\ -e^{-x}sht, & t \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

$$9. \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt = chx, \quad K(x,t) = \begin{cases} \frac{chx ch(t-1)}{sh1}, & 0 \leq x \leq t \\ \frac{sht ch(x-1)}{sh1}, & t \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

$$10. \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^1 |x-t|\varphi(t)dt = 1.$$

## 9. Альтернатива Фредгольма

Для інтегральних рівнянь Фредгольма мають місце теореми:

**Теорема 1. (Альтернатива Фредгольма).** Або неоднорідне лінійне рівняння 2- роду

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \quad (1)$$

має єдиний розв'язок для будь якої функції  $f(x)$  (із деякого достатньо широкого класу функцій), або відповідне однорідне рівняння

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = 0 \quad (2)$$

має принаймні один нетривіальний, тобто не дорівнюючий тотожно нулеві, розв'язок.

**Теорема 2.** Якщо для рівняння (1) має місце перший випадок альтернативи, то він має місце і для спряженого рівняння

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\psi(t)dt = g(x). \quad (3)$$

Однорідне інтегральне рівняння (2) та спряжене до нього рівняння

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\psi(t)dt = 0 \quad (4)$$

мають однакове скінчене число лінійно незалежних розв'язків.

**Зауваження.** Якщо функції  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$  є розв'язками однорідного рівняння (2), то їх лінійна комбінація  $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(x)$ ,  $C_i$  – довільні константи, також є розв'язком цього рівняння.

**Теорема 3.** Необхідною та достатньою умовою існування розв'язку  $\varphi(x)$  неоднорідного рівняння (1) у другому випадку альтернативи є умова ортогональності правої частини цього рівняння, тобто функції  $f(x)$ , до будь якого розв'язку  $\psi(x)$  спряженого до рівняння (2) однорідного рівняння (4)

$$\int_a^b f(x)\psi(x)dx = 0. \quad (5)$$

**Зауваження.** Під час виконання умови (5) рівняння (1) буде мати нескінченну множину розв'язків, так як цьому рівнянню буде задовольняти будь-яка функція виду  $\varphi(x) + \varphi(x)$ , де  $\varphi(x)$  – довільний розв'язок рівняння (1), а  $\varphi(x)$  – довільний розв'язок відповідного однорідного рівняння (2). Крім того, якщо рівнянню (1) задовольняють функції  $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ , то в силу лінійної залежності їх різниця  $\varphi_1(x) - \varphi_2(x)$  є розв'язком відповідного однорідного рівняння (2).

На практиці особливо важливе значення має альтернатива Фредгольма. Замість того, щоб доводити, що дане рівняння (1) має розв'язок, часто простіше буває довести, що відповідне однорідне рівняння (2) або спряжене до нього рівняння (4) мають тільки тривіальні розв'язки. Звідки в силу альтернативи випливає, що рівняння (1) дійсно має розв'язок.

**Зауваження. 1)** Якщо ядро  $K(x, t)$  інтегрального рівняння (1) симетричне, тобто  $K(x, t) = K(t, x)$ , то однорідне рівняння (4) співпадає з однорідним рівнянням (3), що відповідає рівнянню (1).

**2)** У випадку неоднорідного інтегрального рівняння із виродженим ядром

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \left[ \sum_{k=1}^n a_k(x) b_k(t) \right] \varphi(t) dt = f(x)$$

умова (5) ортогональності правої частини цього рівняння дає  $n$  рівностей

$$\int_a^b f(x) b_k(t) dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

### Приклад 1.

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (5x^2 - 3)t^2 \varphi(t) dt = e^x.$$

*Розв'язання.* Маємо

$$\varphi(x) = C\lambda(5x^2 - 3) + e^x, \tag{6}$$

де

$$C = \int_0^1 t^2 \varphi(t) dt. \tag{7}$$

Після підстановки (6) у (7), отримаємо

$$C = C\lambda \int_0^1 (5t^4 - 3t^2) dt + \int_0^1 t^2 e^t dt ,$$

звідки

$$C = e - 2 .$$

Дане рівняння для будь яких  $\lambda$  має єдиний розв'язок

$$\varphi(x) = \lambda(e - 2)(5x^2 - 3) + e^x ,$$

а відповідне однорідне рівняння

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (5x^2 - 3)t^2 \varphi(t) dt = 0$$

має єдиний нульовий розв'язок  $\varphi(x) \equiv 0$ .

## Приклад 2.

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 \sin \ln x \varphi(t) dt = 2x .$$

*Розв'язання.* Маємо

$$\varphi(x) = C\lambda \sin \ln x + 2x ,$$

де  $C = \int_0^1 \varphi(t) dt$ . Після підстановки  $\varphi(t)$  у інтеграл, знайдемо

$$C = C\lambda \int_0^1 \sin \ln t dt + 1 ,$$

звідки

$$C \left( 1 + \frac{\lambda}{2} \right) = 1 .$$

Якщо  $\lambda \neq -2$ , то дане рівняння має єдиний розв'язок

$$\varphi(x) = \frac{2\lambda}{2 + \lambda} \sin \ln x + 2x ,$$

відповідне однорідне рівняння має тільки тривіальний розв'язок  $\varphi(x) \equiv 0$ .

Якщо  $\lambda = -2$ , то дане рівняння не має розв'язків, так як права частина  $f(x) = 2x$  не є ортогональною до функції  $\sin \ln x$ . Відповідне однорідне рівняння має безліч розв'язків, так як із рівняння для визначення  $C$  ( $0 \cdot C = 0$ ) випливає, що  $C$  – довільна константа. Всі ці розв'язки визначаються формулою

$$\varphi(x) = C \sin \ln x, \quad C = -2C$$

### Приклад 3.

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} \cos(x+t) \varphi(t) dt = \cos 3x.$$

Розв'язання. Перепишемо рівняння у формі

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} (\cos x \cos t - \sin x \sin t) \varphi(t) dt = \cos 3x.$$

Звідки маємо

$$\varphi(x) = C_1 \lambda \cos x - C_2 \lambda \sin x + \cos 3x, \quad (8)$$

де

$$C_1 = \int_0^{\pi} \cos t \varphi(t) dt, \quad C_2 = \int_0^{\pi} \sin t \varphi(t) dt. \quad (9)$$

Після підстановки (8) у (9), отримаємо  $\varphi(t)$  у інтеграл, знайдемо

$$\begin{cases} C_1 = \int_0^{\pi} (C_1 \lambda \cos t - C_2 \lambda \sin t + \cos 3t) \cos t dt, \\ C_2 = \int_0^{\pi} (C_1 \lambda \cos t - C_2 \lambda \sin t + \cos 3t) \sin t dt, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} C_1 \left( 1 - \lambda \int_0^{\pi} \cos^2 t dt \right) + C_2 \lambda \int_0^{\pi} \sin t \cos t dt = \int_0^{\pi} \cos 3t \cos t dt, \\ -C_1 \lambda \int_0^{\pi} \cos t \sin t dt + C_2 \left( 1 + \lambda \int_0^{\pi} \sin^2 t dt \right) = \int_0^{\pi} \cos 3t \sin t dt, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} C_1 \left( 1 - \lambda \frac{\pi}{2} \right) = 0, \\ C_2 \left( 1 + \lambda \frac{\pi}{2} \right) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Визначник цієї системи дорівнює

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda \frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 1 + \lambda \frac{\pi}{2} \end{vmatrix} = 1 - \lambda^2 \frac{\pi^2}{4}.$$

1) Якщо  $\lambda \neq \pm \frac{2}{\pi}$  ( $\Delta(\lambda) \neq 0$ ), то система (10) має єдиний розв'язок  $C_1 = 0, C_2 = 0$ , відповідно, дане рівняння має єдиний розв'язок  $\varphi(x) = \cos 3x$ , а відповідне до нього однорідне рівняння має лише тривіальний розв'язок  $\varphi(x) \equiv 0$ .

2) Якщо  $\lambda = \frac{2}{\pi}$ , то система (10) набуває вигляду

$$\begin{cases} C_1 \cdot 0 = 0, \\ C_2 \cdot 2 = 0. \end{cases}$$

Звідки випливає, що  $C_2 = 0, C_1 = C$ , де  $C$  – довільна константа. Дане рівняння має нескінчену множину розв'язків, які даються формулою

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi} C \cdot \cos x + \cos 3x.$$

Відповідне однорідне рівняння має безліч розв'язків

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi} C \cdot \cos x.$$

3) Якщо  $\lambda = -\frac{2}{\pi}$ , то система (10) набуває вигляду

$$\begin{cases} C_1 \cdot 2 = 0, \\ C_2 \cdot 0 = 0. \end{cases}$$

Звідки  $C_1 = 0, C_2 = C$ , де  $C$  – довільна константа. Розв'язок даного рівняння має форму

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi} C \cdot \sin x + \cos 3x.$$

В даному прикладі ядро  $K(x, t) = \cos(x+t)$  заданого рівняння симетричне, права частина рівняння  $f(x) = \cos 3x$  ортогональна до функцій  $\cos x$  та  $\sin x$  на відрізку  $[0, \pi]$ .

**Задачі для самостійного розв'язання.** Дослідити на розв'язуваність для різних значень параметра  $\lambda$  наступні інтегральні рівняння:

$$1. \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} \cos^2 x \varphi(t) dt = 1.$$

$$2. \quad \varphi(x) - \lambda \int_{-1}^1 x e^t \varphi(t) dt = x.$$

$$3. \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} |x-t| \varphi(t) dt = x.$$

$$4. \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^1 (2xt - 4x^2) \varphi(t) dt = 1 - 2x.$$

$$5. \quad \varphi(x) - \lambda \int_{-1}^1 (x^2 - 2xt) \varphi(t) dt = x^3 - x.$$

$$6. \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{\pi} \cos x \cos t + \frac{1}{\pi} \sin 2x \sin 2t \right) \varphi(t) dt = \sin x.$$

**Приклад 4.** За яких значень параметрів  $\alpha, \beta$  розв'язуване інтегральне рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 xt^2 \varphi(t) dt + \alpha x + \beta \quad (11)$$

*Розв'язання.* Якщо  $\lambda$  не є характеристичним числом ядра  $K(x,t) = xt^2$ , то рівняння (11) розв'язуване для будь якої правої частини, тобто для будь яких  $\alpha, \beta$ .

Розглянемо відповідне однорідне рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 xt^2 \varphi(t) dt \quad (12)$$

Розв'язуючи (12) як рівняння із виродженим ядром, знайдемо, що  $\lambda = 4$  є характеристичним числом даного ядра. Відповідна власна функція буде  $\varphi(x) = x$  (з точністю до постійного множника).

Розглянемо однорідне рівняння, спряжене до рівняння (12)

$$\psi(x) = \mu \int_0^1 t x^2 \psi(t) dt \quad (13)$$

Характеристичним числом цього рівняння є  $\mu = 4$ . Відповідною власною функцією рівняння (13), буде  $\psi(x) = x^2$ . Тому неоднорідне рівняння (11) для  $\lambda = 4$  буде розв'язуваним тоді і тільки тоді, коли

$$\int_0^1 (\alpha x + \beta) x^2 dx = 0 \quad \text{або} \quad \alpha x + \beta = 0. \quad (14)$$

У якості прикладу розглянемо рівняння

$$\varphi(x) = 4 \int_0^1 xt^2 \varphi(t) dt + x + 1. \quad (15)$$

Тут  $\alpha = 1, \beta = 1$ , так що умова (14) не виконується: рівняння (15) нерозв'язуване.

Нехай маємо рівняння

$$\varphi(x) = 4 \int_0^1 xt^2 \varphi(t) dt + x - \frac{3}{4}, \quad (16)$$

де  $\alpha = 1, \beta = -3/4$ . Умова (14) виконується, а значить рівняння (15) розв'язуване.

Його розв'язок має вигляд

$$\varphi(x) = 4Cx + x - \frac{3}{4} = Cx - \frac{3}{4},$$

де  $C$  – довільна константа, з чого випливає, що розв'язок рівняння (16) не єдиний.

**Задачі для самостійного розв'язання.** За яких значень параметрів наступні інтегральні рівняння є розв'язувані

$$1. \quad \varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 xt \varphi(t) dt + \alpha x^2 + \beta x + \gamma. \quad 2. \quad \varphi(x) = \lambda \int_0^1 (x+t) \varphi(t) dt + \alpha e^x + \beta x.$$

$$3. \quad \varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi/2} xt \varphi(t) dt + \alpha x + \beta \sin x.$$

## 10. Застосування функції Гріна до розв'язання крайових задач

Теорію по темі «Функція Гріна одновимірних крайових задач» було наведено у основному курсі «Рівняння математичної фізики», що викладається на III курсі, інформацію можна знайти у навчальних посібниках [1,2].

Нехай дано диференціальне рівняння  $n$ -го порядку

$$L_n[y] = p_0(x)y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + p_n(x)y(x) = 0, \quad (1)$$

де функції  $p_i(x), i = \overline{1, n}$  неперервні на інтервалі  $[a, b], p_0(x) \neq 0$ , та крайові умови

$$U_k[y] \equiv \alpha_k y(a) + \alpha_k^{(1)} y'(a) + \dots + \alpha_k^{(n-1)} y^{(n-1)}(a) + \beta_k y(b) + \beta_k^{(1)} y'(b) + \dots + \beta_k^{(n-1)} y^{(n-1)}(b), k = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Лінійні форми  $U_1[y], U_2[y], \dots, U_n[y]$  є лінійно незалежними;

Припускаємо, що відповідна однорідна задача має лише тривіальний розв'язок  $y(x) \equiv 0$ .

**Теорема.** Якщо крайова задача  $L_n[y]=0$ ,  $U_k[y]=0$  має лише тривіальний розв'язок  $y(x) \equiv 0$ , то оператор  $L_n$  має єдину функцію Гріна  $G(x, y)$ .

**Зауваження.** Якщо крайова задача (1), (2) самоспряжена, то функція Гріна є симетричною. Справедливо і обернене твердження.

**Зауваження.** Якщо на одному з кінців інтервалу  $[a, b]$  коефіцієнт навколо старшої похідної обертається в нуль, наприклад,  $p_0(a)=0$ , то ставиться природна умова обмеженості розв'язку для  $x=a$ , а на іншій границі задається звичайна крайова умова.

Розглянемо побудову функції Гріна для диференціального рівняння 2-го порядку вигляду

$$\begin{aligned} (p(x)y')' + q(x)y &= 0, \\ p(x) \neq 0, x \in [a, b], p(x) \in C^{(1)}[a, b], \end{aligned} \quad (3)$$

з граничними умовами

$$y(a) = y(b) = 0. \quad (4)$$

Припустимо, що  $y_1(x)$  є розв'язком рівняння (3), що визначається умовами

$$y_1(a) = 0, y_1'(a) = \alpha \neq 0.$$

Цей розв'язок взагалі кажучи, не зобов'язан задовольняти другій крайовій умові, тому будемо припускати, що  $y_1(b) \neq 0$ . Але функції виду  $C_1 y_1(x)$ , де  $C_1$  – довільна константа, очевидно, є розв'язками рівняння (3) та задовольняють крайовій умові

$$y(a) = 0.$$

Аналогічно знайдемо ненульовий розв'язок  $y_2(x)$  рівняння (3), причому такий, що задовольняє другу крайову умову

$$y_2(b) = 0.$$

Цій же умові будуть задовольняти усі розв'язки  $C_2 y_2(x)$ ,  $C_2$  – довільна константа

Будуємо функцію Гріна задачі (3), (4) у формі

$$G(x, y) = \begin{cases} C_1 y_1(x), & a \leq x < \xi \\ C_2 y_2(x), & \xi < x \leq b \end{cases} \quad (5)$$

виберемо константи таким чином, щоб виконувалися властивості 1<sup>о</sup>, 2<sup>о</sup>, теореми про визначальні властивості функції Гріна [див. 1, 2], тобто, щоб функція Гріна була неперервна за змінною  $x$  для фіксованого  $\xi$ ,  $x = \xi$ .

$$C_1 y_1(\xi) = C_2 y_2(\xi),$$

та похідна  $G'_x(x, y)$  у точці  $x = \xi$  має стрибок, що дорівнює  $1/p(\xi)$

$$C_2 y'_2(\xi) - C_1 y'_1(\xi) = 1/p(\xi).$$

Запишемо останні рівності у вигляді системи

$$\begin{cases} -C_1 y_1(\xi) + C_2 y_2(\xi) = 0 \\ -C_1 y'_1(\xi) + C_2 y'_2(\xi) = 1/p(\xi) \end{cases}$$

Визначник системи є визначник Вронського

$$W[y_1(x), y_2(x)] = W(x),$$

обчислений у точці  $x = \xi$  для лінійно незалежних розв'язків  $y_1(x)$  та  $y_2(x)$  рівняння (3), а значить, він є відмінним від нуля

$$W(\xi) \neq 0,$$

таким чином константи визначаються із системи за формулами

$$C_1 = \frac{y_2(\xi)}{p(\xi)W(\xi)}, \quad C_2 = \frac{y_1(\xi)}{p(\xi)W(\xi)}.$$

В результаті функція Гріна приймає вигляд

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{y_2(\xi)}{p(\xi)W(\xi)} y_1(x), & a \leq x < \xi \\ \frac{y_1(\xi)}{p(\xi)W(\xi)} y_2(x), & \xi < x \leq b \end{cases}$$

**Зауваження.** Обрані розв'язки  $y_1(x)$  та  $y_2(x)$  рівняння (3) є лінійно незалежними в силу припущення, що  $y_1(b) \neq 0$ . Дійсно, всі лінійно незалежні від  $y_1(x)$  розв'язки мають вигляд  $C_1 y_1(x)$ , та, відповідно, для  $C_1 \neq 0$  не обертаються у нуль у точці  $x = b$ , в якій, згідно з нашим вибором, обертається у нуль розв'язок  $y_2(x)$ .

**Зауваження.** Крайова задача для рівняння 2-го порядку виду

$$y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) = 0 \tag{6}$$

та крайовими умовами

$$y(a) = A, \quad y(b) = B \quad (7)$$

приводиться до розглянутої задачі (3), (4), таким чином

- 1) Лінійне рівняння (6) приводиться до (3) множенням (13) на  $p(x) = e^{\int p_1(x) dx}$ , у якості  $q(x)$  необхідно взяти  $p(x)p_2(x)$ .
- 2) Крайові умови (7) приводяться до (4) лінійною заміною шуканої функції

$$z(x) = y(x) - \frac{B-A}{b-a}(x-a) - A.$$

Така заміна не порушує лінійність рівняння (6), але на відміну від рівняння (6), тепер отримаємо рівняння із правою частиною  $L[z] = f(x)$ , де

$$f(x) = -\left[ A + \frac{B-A}{b-a}(x-a) \right] q(x) - \frac{B-A}{b-a} p(x)p_1(x).$$

Однак функцію Гріна будемо для однорідної задачі  $L[z] = 0$ ,  $z(a) = z(b) = 0$ , яка співпадає із задачею (3), (4).

**Приклад 1.** Знайти функцію впливу  $G(x, y)$  для балки, що лежить на опорах на границях  $x=0$  та  $x=1$ . Тут  $G(x, y)$  є переміщення паралельно осі  $Oz$  поперечного перерізу у точці  $x=y$ , що викликається дією одиничного навантаження, зосередженого у точці  $x=y$  та діючої паралельно осі  $Oz$ .

*Розв'язання.* Нехай  $R_0, R_1$  – невідомі реакції у точках опори, що викликані дією одиничного навантаження у точці  $x=y$ . Тоді згинаючий момент  $M$  у точці  $x$  балки буде дорівнювати

$$M = \begin{cases} -R_0 x, & 0 \leq x \leq y, \\ -R_1(1-x), & y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Для рівноваги системи трьох сил  $R_0, R_1$  та  $Q=1$  повинно виконуватись

$$1 - R_0 - R_1 = 0, \quad R_1 \cdot 1 = 1 \cdot y.$$

Звідки  $R_1 = 1, R_0 = 1 - y$ . Тоді згинаючий момент буде дорівнювати

$$M = M(x, y) = \begin{cases} -x(1-y), & 0 \leq x \leq y, \\ -y(1-x), & y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Відповідно, функція впливу  $G(x, y)$  повинна задовольняти диференціальному рівнянню згинаючого моменту

$$E_x I_x \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial x^2} = M(x, y) \quad (8)$$

та граничним умовам

$$G(0, y) = 0, \quad G(1, y) = 0. \quad (9)$$

Тут  $E_x$  – модуль Юнга,  $I_x$  – момент інерції поперечного перерізу балки відносно нейтральної осі, перпендикулярної до площини  $xOy$  у точці  $x$ . Для розв'язання крайової задачі (8), (9) використаємо інтеграл

$$M^*(x, y) = \int_0^1 M(x, z)M(z, y)F(z)dz,$$

де

$$F(x) = \frac{1}{E_x I_x}.$$

Дійсно,  $M^*(x, y)$  задовольняє граничним умовам (9), так як

$$M^*(0, y) = M^*(1, y) = 0.$$

$M^*(x, y)$  задовольняє диференціальному рівнянню (8), так як це симетрична функція  $x, y$ , що має для  $x \leq y$  наступне явне подання

$$M^*(x, y) = xy \int_0^1 (1-z)^2 F(z)dz - x \int_0^y (1-y)(1-z)F(z)dz - (1-y) \int_0^x z(x-z)F(z)dz,$$

з якого випливає, що

$$\frac{\partial M^*}{\partial x} = y \int_0^1 (1-z)^2 F(z)dz - \int_0^y (1-y)(1-z)F(z)dz - (1-y) \int_0^x zF(z)dz$$

а також

$$\frac{\partial^2 M^*}{\partial x^2} = -(1-y)x F(x) = \frac{M^*(x, y)}{E_x I_x}, \quad 0 \leq x \leq y.$$

Тому для випадку балки, що спирається своїми кінцями, отримаємо

$$G(x, y) = \int_0^1 M(x, z)M(z, y)F(z)dz.$$

**Приклад 2.** Привести до інтегрального рівняння наступну крайову задачу для нелінійного диференціального рівняння

$$\begin{aligned} y'' &= f(x, y(x)), 0 < x < 1, \\ y(0) &= y(1) = 0 \end{aligned}$$

*Розв'язання.* Функція Гріна для відповідної задачі

$$\begin{aligned} y'' &= 0, 0 < x < 1, \\ y(0) &= y(1) = 0, \end{aligned}$$

має наступний вигляд

$$G(x, \xi) = \begin{cases} (\xi - 1)x, & 0 \leq x < \xi \\ (x - 1)\xi, & \xi < x \leq 1 \end{cases}$$

Розглядаючи праву частину рівняння як відому функцію, отримаємо

$$y(x) = \int_0^1 G(x, \xi)f(\xi, y(\xi))d\xi.$$

Таким чином, розв'язання крайової задачі зводиться до розв'язання нелінійного інтегрального рівняння, ядром якого є функція Гріна.

## 11. Крайові задачі з параметром та їх зведення до інтегральних рівнянь

Розглянемо крайову задачу

$$L_n[y] = \lambda y + h(x) \tag{1}$$

$$U_k[y] = 0, k = 1, 2, \dots, n \tag{2}$$

де

$$L_n[y] = p_0(x)y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + p_n(x)y(x),$$

$$U_k[y] \equiv \alpha_k y(a) + \alpha_k^{(1)} y'(a) + \dots + \alpha_k^{(n-1)} y^{(n-1)}(a) + \beta_k y(b) + \beta_k^{(1)} y'(b) + \dots + \beta_k^{(n-1)} y^{(n-1)}(b), \quad k = \overline{1, n}.$$

Лінійні форми  $U_1[y], U_2[y], \dots, U_n[y]$  є лінійно незалежними;  $h(x)$  – задана неперервна функція;  $\lambda$  – числовий параметр.

Для  $f(x) \equiv 0$  крайова задача однорідна

$$L_n[y] = \lambda y, \quad U_k[y] = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

Ті значення  $\lambda$ , для яких крайова задача (3) має нетривіальні розв'язки  $y(x)$ , називаються *характеристичними числами* крайової задачі (3), а нетривіальні розв'язки – відповідними *власними функціями*.

**Теорема.** Якщо крайова задача  $L_n[y] = \lambda y, U_k[y] = 0, k = 1, 2, \dots, n$  має функцію Гріна  $G(x, \xi)$ , то крайова задача (1), (2) еквівалентна інтегральному рівнянню Фредгольма

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, \xi) y(\xi) d\xi + f(x), \quad (4)$$

де

$$f(x) = \int_a^b G(x, \xi) h(\xi) d\xi.$$

В частному випадку, однорідна крайова задача (3) еквівалентна однорідному інтегральному рівнянню

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, \xi) y(\xi) d\xi. \quad (5)$$

**Зауваження.** Так як  $G(x, \xi)$  – неперервне ядро, то до інтегрального рівняння можна застосовувати теорію Фредольма. Тому інтегральне рівняння (5) може мати не більше зліченного числа характеристичних чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ , що не мають межової точки  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty$ . Для всіх значень  $\lambda$ , відмінних від характеристичних, неоднорідне рівняння (4) має розв'язок для

будь якої неперервної правої частини  $f(x)$ . Цей розв'язок визначається формулою

$$y(x) = \lambda \int_a^b R(x, \xi; \lambda) f(\xi) d\xi + f(x),$$

де  $R(x, \xi; \lambda)$  – резольвента ядра  $G(x, \xi)$ . При цьому для будь яких фіксованих значень  $x, \xi \in [a, b]$  функція  $R(x, \xi; \lambda)$  є мероморфною функцією від  $\lambda$ , полюсами якої можуть бути лише характеристичні числа однорідного інтегрального рівняння (5).

**Приклад 1.** Звести крайову задачу

$$y'' + \lambda y = x, \tag{6}$$

$$y(0) = y(\pi/2) = 0 \tag{7}$$

до інтегрального рівняння.

*Розв'язання.* Знайдемо функцію Гріна  $G(x, \xi)$  для відповідної однорідної задачі

$$y'' = 0, \quad y(0) = y(\pi/2) = 0.$$

Так як лінійно незалежними розв'язками рівняння  $y'' = 0$ , що задовольняють даним крайовим умовам є функції  $y_1(x) = x, y_2(x) = x - \pi/2$ , то функцію Гріна шукаємо у формі

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{y_1(x)y_2(\xi)}{W(\xi)}, & 0 \leq x < \xi \\ \frac{y_1(\xi)y_2(x)}{W(\xi)}, & \xi < x \leq \pi/2 \end{cases}$$

де визначник Вронського має вигляд

$$W(\xi) = \begin{vmatrix} \xi & \xi - \pi/2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \pi/2.$$

Отже,

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi}\xi - 1\right)x, & 0 \leq x < \xi \\ \left(\frac{2}{\pi}x - 1\right)\xi, & \xi < x \leq \pi/2 \end{cases} \quad (8)$$

Далі, використовуючи функцію Гріна (8) як ядро інтегрального рівняння, отримаємо для  $y(x)$  наступне інтегральне рівняння

$$y(x) = f(x) - \lambda \int_0^{\pi/2} G(x, \xi) y(\xi) d\xi,$$

де

$$y(x) + \lambda \int_0^{\pi/2} G(x, \xi) y(\xi) d\xi = \frac{1}{6}x^3 - \frac{\pi^2}{24}x.$$

Отже, крайову задачу (6), (7) звели до інтегрального рівняння

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} G(x, \xi) \cdot \xi d\xi = \int_0^x \left(\frac{2}{\pi}x - 1\right) \xi^2 d\xi + \int_x^{\pi/2} \left(\frac{2}{\pi}\xi - 1\right) x \xi d\xi = \frac{1}{6}x^3 - \frac{\pi^2}{24}x.$$

**Зауваження.** Під час застосування методу інтегральних перетворень до крайових задач математичної фізики виникає необхідність знаходження ядра інтегрального перетворення. Як було показано у основному курсі Рівнянь математичної фізики [1,2] ядро повинно задовольняти відповідній задачі Штурма-Ліувілля

$$S[y(x)] = \frac{\lambda}{r(x)} y(x), \quad x \in (a, b)$$

$$U_i[y] = 0, \quad i = 0, 1$$

$S$  – оператор Штурма-Ліувілля,  $y(x)$  – власні функції,  $r(x)$  – функція-коефіцієнт навколо старшої похідної у рівнянні.

Причому розрізняють два випадки задачі Штурма-Ліувілля: а) регулярний – якщо аргумент невідомої функції змінюється на скінченному інтервалі; всі

функції коефіцієнти та їх похідні є неперервними на цьому інтервалі; функція-коефіцієнт навколо старшої похідної диференціального рівняння – строго додатна функція; б) нерегулярний – якщо порушується якась з перерахованих вище умов.

Було доведено, що задача Штурма-Ліувілля є самоспряженою задачею, а значить її розв’язок можна записати через функцію Гріна

$$y(x) = \lambda \int_a^b \frac{G(x, \xi)}{r(\xi)} y(\xi) d\xi, \quad S[y(x)] = \lambda S \left[ \int_a^b \frac{G(x, \xi)}{r(\xi)} y(\xi) d\xi \right]$$

Тобто, розв’язання задачі Штурма-Ліувілля є еквівалентним розв’язанню інтегрального рівняння. Можна довести і обернене твердження. Відповідне однорідне інтегральне рівняння Фредгольма з симетричним ядром (що впливає з властивостей функції Гріна самоспряженої задачі) має вигляд

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi = 0, \quad x \in (a, b),$$

$$K(x, \xi) = \frac{G(x, \xi)}{\sqrt{r(x)} \sqrt{r(\xi)}}.$$

**Задачі для самостійного розв’язання.** Привести до інтегральних рівнянь наступні крайові задачі

1.  $y'' = \lambda y + x^2, \quad y(0) = y(\pi/2) = 0.$
2.  $y'' = \lambda y + e^x, \quad y(0) = y(1) = 0.$
3.  $y'' + \frac{\pi^2}{4} y = \lambda y + \cos \frac{\pi x}{4},$   
 $y(-1) = y(1), y'(-1) = y'(1).$
4.  $y'' + \lambda y = 2x + 1,$   
 $y(0) = y'(1), y'(0) = y(1).$
5.  $y^{(4)} = \lambda y + 1,$   
 $y(0) = y'(0) = 0, y''(1) = y'''(1) = 0.$
6.  $y''' + \lambda y = 2x,$   
 $y(0) = y(1) = 0, y'(0) = y(1).$
7.  $y'' + \lambda y = e^x, \quad y(0) = y'(0), \quad y(1) = y'(1).$

## 12. Інтегральне рівняння Фредгольма 1-го роду

Інтегральним рівнянням Фредгольма 1-го роду називається рівняння виду

$$\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \quad (1)$$

що не містить невідому функцію  $\varphi(x)$  за межами інтегралу.

Питання про розв'язуваність таких рівнянь включає значні труднощі. Розглянемо, наприклад, рівняння

$$\int_0^1 (3x^2t + xt^2 + t^3)\varphi(t)dt = \sin x. \quad (2)$$

Легко бачити, що для будь якої неперервної функції  $\varphi(t)$  ліва частина рівняння (2) після виконання інтегрування буде являти собою поліном вигляду

$$P = Ax^2 + Bx + C,$$

який при будь яких значеннях коефіцієнтів  $A, B, C$  не дорівнює тотожно на  $[0,1]$  функції  $\sin x$  – правій частині рівняння (2). Відповідно, це рівняння у класі інтегрованих на  $[0,1]$  функцій розв'язків не має.

**Теорема Пікара.** Інтегральне рівняння Фредгольма 1-го роду має розв'язок, та причому єдиний, у класі  $L_2(a,b)$ , якщо виконуються умови:

1. Ядро  $K(x,t)$  – дійсне симетричне.

2. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 f_k^2 \quad (3)$$

є збіжним. Тут  $\lambda_k$  – характеристичні числа ядра  $K(x,t)$

$$f_k = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx, \quad (4)$$

де  $\varphi_k(x)$  – власні функції ядра  $K(x,t)$ , що відповідають  $\lambda_k$ .

3. Система власних функцій  $\{\varphi_k(x)\}$  є повною на  $[a, b]$ . Розв'язок рівняння

(1) у цьому випадку подається у вигляді

$$\varphi(x) = \sum_k \lambda_k f_k \varphi_k(x) \quad (5)$$

**Приклад 1.** Розв'язати інтегральне рівняння Фредгольма 1-го роду

$$\int_0^1 K(x, t) \varphi(t) dt = \sin^3 \pi x, \quad (6)$$

де

$$K(x, t) = \begin{cases} (1-x)t, & 0 \leq t \leq x \\ (1-t)x, & x \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (7)$$

*Розв'язання.* Характеристичні числа ядра (7)

$$\lambda_1 = \pi^2, \lambda_2 = (2\pi)^2, \dots, \lambda_n = (n\pi)^2, \dots$$

а відповідні власні функції

$$\varphi_1(x) = \sqrt{2} \sin \pi x, \varphi_2(x) = \sqrt{2} \sin 2\pi x, \dots, \varphi_n(x) = \sqrt{2} \sin n\pi x, \dots \quad (8)$$

Для визначення питання про розв'язуваність рівняння (6) для заданого формулою (7) ядра  $K(x, t)$  скористаємося теоремою Пікара. Умова 1 теореми, очевидно, виконується: ядро (7) дійсне та симетричне.

Права частина рівняння (6) може бути подана у формі

$$\sin^3 \pi x = \frac{3}{4} \sin \pi x - \frac{1}{4} \sin 3\pi x,$$

або

$$\sin^3 \pi x = \frac{3}{4\sqrt{2}} (\sqrt{2} \sin \pi x) - \frac{1}{4\sqrt{2}} (\sqrt{2} \sin 3\pi x) = \frac{3}{4\sqrt{2}} \varphi_1(x) - \frac{1}{4\sqrt{2}} \varphi_3(x),$$

де  $\varphi_1(x), \varphi_3(x)$  – власні функції із системи (8). Значить,

$$f(x) = \sin^3 \pi x$$

має наступні коефіцієнти розвинення за функціями системи (8)

$$f_1 = \frac{3}{4\sqrt{2}}, f_2 = 0, f_3 = -\frac{1}{4\sqrt{2}}, f_k = 0 \quad (k \geq 4).$$

Ряд (3) у даному випадку зводиться до скінченної суми

$$\sum_k \lambda_k f_k \varphi_k(x) = \left(\frac{3}{4\sqrt{2}}\right)^2 (\pi^2)^2 + \left(-\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2 (3^2 \pi^2)^2 = \frac{45}{16} \pi^4.$$

Значить, виконується умова 2 теореми.

Система власних функцій (8) є повною ортонормованою системою на  $[0,1]$ , таким чином умова 3 виконується.

Згідно з теоремою Пікара рівняння (6) має єдиний розв'язок, що подається у формі

$$\varphi(x) = \lambda_1 f_1 \varphi_1(x) + \lambda_3 f_3 \varphi_3(x),$$

що у даному випадку набуває вигляду

$$\varphi(x) = \frac{3\pi^2}{4} (\sin \pi x - 3 \sin 3\pi x). \quad (9)$$

Безпосередньою підстановкою можна впевнитися, що розв'язок (9) задовольняє даному рівнянню (6).

Вимога повноти системи власних функцій  $\{\varphi_k(x)\}$  у теоремі Пікара є суттєвою. Проілюструємо це на наступному прикладі

### Приклад 2.

$$\int_0^1 t \varphi(t) dt = \frac{1}{3}, \quad (10)$$

*Розв'язання.* Характеристичне число даного ядра  $\lambda = 2$ , а відповідна до нього власна функція  $\psi(x) = 1$ . Очевидно, що «система» власних функцій, що складається із однієї функції  $\psi(x) = 1$  не може бути повною на  $[0,1]$ . Тому теорема Пікара не гарантує, що розв'язок рівняння (10) буде єдиним.

Безпосередньою підстановкою можна впевнитися, що розв'язками рівняння (10) будуть, наприклад поліноми виду

$$\varphi(x) = x + \alpha x^2 + \beta x^3,$$

якщо коефіцієнти  $\alpha, \beta$  зв'язані умовою  $5\alpha + 4\beta = 0$ . Очевидно, що всі такі розв'язки належать класу  $L_2(0,1)$ .

**Задачі для самостійного розв'язання.** Визначити розв'язуваність рівнянь

$$1. \int_0^1 (3x-2)t \varphi(t) dt = x^3 + 3x - 1.$$

$$2. \int_0^{2\pi} \cos(x+t)\varphi(t) dt = \pi \cos x$$

$$3. \int_0^{\pi} K(x,t)\varphi(t) dt = 3 \sin x - \sin 3x, \quad K(x,t) = \begin{cases} \frac{t(\pi-x)}{\pi}, & 0 \leq t \leq x \\ \frac{x(\pi-t)}{\pi}, & x \leq t \leq \pi \end{cases}$$

### **Метод твірних функцій**

Функція  $G(x, \xi)$  називається *твірною* функцією для системи функцій

$$g_0(t), g_1(t), \dots, g_n(t), \dots \quad (11)$$

якщо

$$G(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n g_n(t) x^n, \quad (12)$$

де  $C_n$  – константи.

Нехай маємо інтегральне рівняння

$$\int_a^b K(x,t)\rho(x)\varphi(t) dt = f(x), \quad (13)$$

де ядро  $K(x,t)$  є твірною функцією  $G(x,t)$  для деякої дійсної та ортогональної з вагою  $\rho(t) > 0$  на інтервалі  $(a,b)$  системи функцій  $\{g_k(t)\}$ , та нехай  $f(x)$  – аналітична у околі точки  $x=0$ . Будемо шукати розв'язок рівняння (13) у вигляді

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i g_i(x), \quad (14)$$

де  $a_i$  – невідомі константи. Підстановка (12) та (14) у (13) дає в силу ортогональності  $\{g_k(t)\}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n a_n \|g_n(t)\|^2 x^n = f(x), \quad (15)$$

де

$$\|g_n(t)\|^2 = \int_a^b g_n^2(t) \rho(t) dt.$$

Із (15) знайдемо

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n! C_n \|g_n(t)\|^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Підставляючи отримані значення  $a_n$  у (14), отримаємо вихідний розв'язок, який у випадку повноти системи (11) буде єдиним.

### Приклад 3. Розв'язати інтегральне рівняння

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{\sqrt{1+x^2-2xt}} dt = x-1. \quad (16)$$

*Розв'язання.* Функція

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2-2xt}}$$

є твірною для поліномів Лежандра  $P_n(t)$

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) x^n. \quad (17)$$

Шукаємо розв'язок рівняння (16) у формі

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i P_i(x). \quad (18)$$

Підставляючи (17) та (18) у (16) та враховуючи, що

$$\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1},$$

будемо мати

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2a_n}{2n+1} x^n = x+1.$$

Звідки  $a_0 = \frac{1}{2}$ ,  $a_1 = \frac{3}{2}$ ,  $a_n = 0$  ( $n \geq 2$ ). Отже, розв'язок даного рівняння знайдено

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}P_0(x) + \frac{3}{2}P_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x.$$

#### Приклад 4. Розв'язати інтегральне рівняння

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{xt}{1-x}}}{1-x} e^{-t} \varphi(t) dt = 1-x, \quad |x| < 1. \quad (19)$$

*Розв'язання.* Функція

$$G(x,t) = \frac{e^{-\frac{xt}{1-x}}}{1-x}$$

є твірною для поліномів Лагерра  $L_n(t)$

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(t) x^n. \quad (20)$$

Шукаємо розв'язок рівняння (19) у формі

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i L_i(x). \quad (21)$$

Після підстановки (20), (21) у (19), отримаємо

$$\int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(t) x^n e^{-t} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} a_i L_i(t) dt = 1-x.$$

В силу ортогональності поліномів Лагерра з вагою  $\rho(t) = e^{-t}$  на інтервалі  $(0, \infty)$ ,

будемо мати

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n!)^2 x^n a_n = 1 - x. \quad (22)$$

Тут використано

$$\|L_n\|^2 = \int_0^{\infty} e^{-t} L_n^2(t) dt = (n!)^2.$$

Прирівнюючи коефіцієнти навколо однакових степенів  $x$  у лівій та правій частинах (22), знайдемо  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = -1$ ,  $a_k = 0$  ( $k \geq 2$ ). Відповідно,

$$\varphi(x) = L_0(x) - L_1(x) = 1 - (1 - x) = x.$$

Отже,  $\varphi(x) = x$ .

**Приклад 5.** Твірну для поліномів Ерміта  $H_n(t)$  можна записати у вигляді

$$e^{-(x-t)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-t^2} H_n(t)}{n!} x^n \quad (23)$$

Цей розклад можна застосувати до розв'язання інтегрального рівняння

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-t)^2} \varphi(t) dt = f(x). \quad (24)$$

Задачі такого типу виникають у питаннях поширення тепла, коли шуканим є первісний розподіл джерел, який породжує заданий розподіл температур. Розв'язок шукаємо у формі

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i H_i(x). \quad (25).$$

Використовуючи ортогональність поліномів Ерміта та

$$\|H_n\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} H_n^2(t) dt = 2^n n! \sqrt{\pi},$$

зведемо рівняння (24) до

$$\sqrt{\pi} \sum_n a_n 2^n x^n = f(x).$$

## Звідки

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{2^n n! \sqrt{\pi}}.$$

В результаті розв'язок має вигляд

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_n \frac{f^{(n)}(0)}{2^n n!} H_n(x).$$

**Задачі для самостійного розв'язання.** Методом твірної функції розв'язати інтегральні рівняння

1.  $\int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{\sqrt{1+x^2-2xt}} dt = 2x^3 - 2x.$

2.  $\int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{\sqrt{1+x^2-2xt}} dt = \frac{1}{1-x}.$

3.  $\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{xt}{1-x}}}{1-x} e^{-t} \varphi(t) dt = 2 - x^2.$

## Варіанти прикладів для підсумкового контролю

1) Розв'язати інтегральні рівняння методом послідовних наближень.

$$1. \varphi(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{x-t} \varphi(t) dt + e^x$$

$$2. \varphi(x) = \int_0^1 x e^{x-t} \varphi(t) dt + e^x$$

$$3. \varphi(x) = \int_0^1 x t \varphi(t) dt + \sqrt{1-x^2}$$

$$4. \varphi(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x \sin t \varphi(t) dt + \sin x$$

$$5. \varphi(x) = \int_1^e \frac{\ln t}{x} \varphi(t) dt + \ln x$$

$$6. \varphi(x) = \int_0^1 \sqrt{x t} \varphi(t) dt + x$$

$$7. \varphi(x) = \int_1^2 \sqrt{\frac{x}{t^3}} \varphi(t) dt + x^{3/2}$$

$$8. \varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi t \sin x \varphi(t) dt + \cos x$$

2) Методом ітераційних ядер, знайти резольвенту та вказати область збіжності ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n K_n(x, t)$ . За допомогою резольвенти знайти розв'язок інтегрального рівняння для вказаного значення  $\lambda$  та перевірити його безпосередньою підстановкою.

$$9. \varphi(x) = \lambda \int_0^1 e^{x-t} \varphi(t) dt + e^x, \lambda = 2$$

$$10. \varphi(x) = \lambda \int_0^1 x e^{x-t} \varphi(t) dt + e^x, \lambda = -2$$

$$11. \varphi(x) = \lambda \int_0^1 x t \varphi(t) dt + \sqrt{1-x^2}, \lambda = 6$$

$$12. \varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi/2} x \sin t \varphi(t) dt + \sin x, \lambda = 4$$

$$13. \varphi(x) = \lambda \int_1^e \frac{\ln t}{x} \varphi(t) dt + \ln x, \lambda = e$$

$$14. \varphi(x) = \pi \int_0^1 (x t - t) \varphi(t) dt + \sin \pi x, \lambda = 3$$

3) Розв'язати або встановити нерозв'язуваність інтегральних рівнянь із виродженням ядром.

$$15. \varphi(x) = \int_0^\pi t g x \cos t \varphi(t) dt + \cos x$$

$$16. \varphi(x) = \int_0^1 t e^x \varphi(t) dt + e^{-x}$$

$$17. \varphi(x) = \int_0^1 \sqrt{x t} \varphi(t) dt + 5x$$

$$18. \varphi(x) = 2 \int_0^1 \frac{x}{t} \varphi(t) dt + 3 \ln x$$

$$19. \varphi(x) = 2x - 1 - \frac{\pi}{2} \int_0^1 (\cos \pi x - \sin \pi t) \varphi(t) dt$$

$$20. \varphi(x) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos(x-t) \varphi(t) dt + x$$

$$21. \varphi(x) = 2 - 3 \int_0^{\pi/2} \sin(x-2t) \varphi(t) dt$$

$$22. \varphi(x) = \int_0^1 (e^x t + x e^t) \varphi(t) dt + e^x$$

$$23. \varphi(x) = x^2 - 2 \int_0^1 (3xt-1) \varphi(t) dt$$

$$24. \varphi(x) = 8x^2 - 5x + \int_0^1 (3x+2t) \varphi(t) dt$$

$$25. \varphi(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\sin(3x-t) + \sin x) \varphi(t) dt + 3\pi \cos 2x$$

$$26. \varphi(x) = 2 \int_0^1 (\sin 2\pi(x-t) - 2) \varphi(t) dt + 5x$$

4) Знайти власні значення та власні функції наступних інтегральних рівнянь

$$27. \varphi(x) = \lambda \int_0^1 (1+2x) \varphi(t) dt$$

$$28. \varphi(x) = \lambda \int_0^1 (1-x^2) \varphi(t) dt$$

$$29. \varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi} x \sin t \varphi(t) dt$$

$$30. \varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi} \cos x \cos t \varphi(t) dt$$

$$31. \varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi} \sin(x+t) \varphi(t) dt$$

$$32. \varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi} \cos(x-t) \varphi(t) dt$$

$$33. \varphi(x) = \lambda \int_0^1 (\cos 2\pi x + 2x \sin 2\pi x + t \sin \pi x) \varphi(t) dt$$

$$34. \varphi(x) = \lambda \int_0^1 (\cos 2\pi(x-t) - 1) \varphi(t) dt$$

5) Дослідити розв'язки інтегральних рівнянь для різних значень параметра  $\lambda$

$$35. \varphi(x) = \lambda \int_0^1 (1+2x) \varphi(t) dt + 1 - \frac{3}{2}x$$

$$36. \varphi(x) = \lambda \int_0^1 x \varphi(t) dt + \sin 2\pi x$$

$$37. \varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi} \sin x \cos t \varphi(t) dt + \cos x$$

$$38. \varphi(x) = \lambda \int_0^1 x \sin 2\pi t \varphi(t) dt + x$$

$$39. \varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (1+xt) \varphi(t) dt + \sin \pi x$$

$$40. \varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi} \cos(x+t) \varphi(t) dt + 1$$

## Відповіді

- 1.**  $\varphi(x) = 2e^x$ .      **2.**  $\varphi(x) = e^x(1+2x)$ .      **3.**  $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2} + \frac{x}{2}$ .      **4.**  $\varphi(x) = \sin x + \frac{\pi x}{4}$ .  
**5.**  $\varphi(x) = \frac{2e-4}{x} + \ln x$ .      **6.**  $\varphi(x) = x + \frac{4}{5}\sqrt{x}$ .      **7.**  $\varphi(x) = x^{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1-\ln 2}$ .      **8.**  $\varphi(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}\sin x$ .  
**9.**  $\varphi(x) = -e^x$ .      **10.**  $\varphi(x) = (1-x)e^x$ .      **11.**  $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2} + 2x$ .      **12.**  $\varphi(x) = \sin x - \frac{\pi x}{3}$ .  
**13.**  $\varphi(x) = \ln x - \frac{2e}{x}$ .      **14.**  $\varphi(x) = \sin \pi x - \frac{2x}{\pi}$ .      **15.**  $\varphi(x) = \cos x - \frac{\pi}{2}\operatorname{tg} x$ .      **16.**  $\emptyset$ .      **17.**  $\varphi(x) = 4\sqrt{x} + 5x$ .  
**18.**  $\varphi(x) = 3\ln x - 2x$ .      **19.**  $\varphi(x) = C \cos x + 2x - 1 - \frac{2C}{\pi}$ .      **20.**  $\varphi(x) = x - 2\cos x$ .      **21.**  $\varphi(x) = 2 - 3\cos x$ .  
**22.**  $\varphi(x) = -3x$ .      **23.**  $\emptyset$ .      **24.**  $\varphi(x) = 4x(2-x)$       **25.**  $\varphi(x) = 3\pi \cos 2x - \pi C \cos 3x + 4C + 4$ .      **26.**  
 $\varphi(x) = \frac{5}{2\pi}(\cos 2\pi x + \sin 2\pi x) + 5x - 4$ .      **27.**  $\lambda = 6/7, \varphi(x) = C(1+2x)$ .      **28.**  
 $\lambda = 3/2, \varphi(x) = C(1-x^2)$ .      **29.**  $\lambda = 1/\pi, \varphi(x) = Cx$ .      **30.**  $\lambda = 1/\pi, \varphi(x) = C \cos x$ .      **31.**  
 $\lambda_{1,2} = \pm 2/\pi, \varphi_{1,2}(x) = C(\sin x \pm \cos x)$ .      **32.**  $\lambda = 2/\pi, \varphi(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ .      **33.**  
 $\lambda_1 = -\pi, \varphi_1(x) = \frac{\pi^2 C}{3}(\cos 2\pi x - \sin \pi x) - 2\pi Cx, \lambda_2 = \pi, \varphi_2(x) = \pi C(2 \cos 2\pi x + \sin \pi x)$ .  
**34.**  $\lambda_1 = -4, \varphi_1(x) = C; \lambda_2 = 2, \varphi_2(x) = C_1 \cos 2\pi x + C_2 \sin 2\pi x$ .      **35.**  $\lambda \neq 6/7, \varphi(x) = 1 - \frac{3}{2}x,$   
 $\lambda = 6/7, \varphi(x) = 1 - \frac{3}{2}x + C(1+2x)$ .      **36.**  $\lambda \neq 2, \varphi(x) = \sin 2\pi x, \lambda = 2, \varphi(x) = \sin 2\pi x + Cx$ .  
**37.**  $\forall \lambda \in \mathbf{R}, \varphi(x) = \cos x + \frac{\pi \lambda}{2} \sin x$ .      **38.**  $\lambda \neq -2\pi, \varphi(x) = \frac{2\pi x}{2\pi + \lambda}; \lambda = -2\pi, \emptyset$ .      **39.**  
 $\lambda \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \varphi(x) = \sin \pi x + \frac{2\lambda x / \pi}{1 - 2\lambda / 3}; \lambda = \frac{1}{2}, \emptyset;$        $\lambda = \frac{3}{2}, \varphi(x) = \sin \pi x + \frac{3}{2\pi}x + C$ .  
**40.**  $\lambda \neq \pm \frac{2}{\pi}, \varphi(x) = 1 - \frac{4\lambda}{2 + \lambda\pi} \sin x; \lambda = \frac{2}{\pi}, \varphi(x) = 1 - \sin x + C \cos x; \lambda = -\frac{2}{\pi}, \emptyset;$

## Література

1. Вайсфельд Н.Д. Рівняння математичної фізики : навч.-метод. посібн. для студентів «Прикладна математика» / Н.Д. Вайсфельд, В.В. Реут. – Одеса : Одеськ. нац. ун-т. ім. І.І. Мечникова, 2018. – 194 с.
2. Попов Г.Я. Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень : учб. посібн. / Г.Я. Попов, В.В. Реут, Н.Д. Вайсфельд. – Одеса : Астропринт, 1999. – 67 с.
3. Васишин Т.В. Інтегральні рівняння : навч. посібн. / Т.В. Васишин, Т.П. Гой, І.В. Федак. – Івано-Франківськ : Сімик, 2014. – 222 с.
4. Чорноіван Ю.О. Конспект лекцій з курсу інтегральних рівнянь та елементів функціонального аналізу : консп. лекц. / Ю.О. Чорноіван. – Київ, 2017. – 203 с.
5. Лопушанська Г.П., Пасічник О.В. Інтегральні рівняння і застосування : навч. посібн. / Г.П. Лопушанська, О.В. Пасічник. – Львів. : Львівський нац. ун-т. ім. Івана Франка, 2022. – 111 с.
6. Головач Г.П. Збірник задач з диференціальних та інтегральних рівнянь / Г.П. Головач, О.Ф. Калайда. – К. : Техніка, 1997. – 288 с.
7. Кривошея С.А. Диференціальні та інтегральні рівняння / С.А. Кривошея, М.О. Перестюк, В.М. Бурим. – К. : Либідь, 2004. – 408 с.

## Електронні інформаційні ресурси

1. <http://nbuv.gov.ua/> – Сайт Національної бібліотеки України імені В. І. Вернадського;
2. <http://lib.onu.edu.ua/> - Сайт Наукової бібліотеки Одеського національного університету ім. І.І. Мечникова.
3. <http://www.library.univ.kiev.ua/> - Сайт Наукової бібліотеки ім. М. Максимовича Київського національного університету ім. Тараса Шевченка.
4. <http://www.lnulibrary.lviv.ua/> - Сайт Наукової бібліотеки Львівського національного університету ім. Івана Франка.
5. <http://www.library.chun.edu.ua/> - Сайт Наукової бібліотеки Чернівецького національного університету ім. Юрія Федьковича.
6. <http://www.library.dnu.dp.ua/> - Сайт Наукової бібліотеки Дніпровського національного університету ім. Олеся Гончара.
7. <http://www.library.univer.kharkov.ua/> - Сайт центральної Наукової бібліотеки Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна.
8. <http://www.library.znu.edu.ua/> - Сайт Наукової бібліотеки Запорізького національного університету.

9. <http://www.dnrb.gov.ua/> – Сайт Державної науково-педагогічної бібліотеки України імені В.О. Сухомлинського;
10. <http://korolenko.kharkov.com/> – Сайт Харківської державної наукової бібліотеки імені В.Г. Короленка;
11. <http://scholar.google.com.ua/> - Сайт для пошуку наукової літератури з різних дисциплін і джерел: книги, статті, дисертації.

*Навчальне видання*

# **ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ФРЕДГОЛЬМА**

**ЕЛЕКТРОННИЙ МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК**

для здобувачів вищої освіти  
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти  
спеціальності 113 «Прикладна математика»

**Електронне практичне видання**

***Укладач:***

**Фесенко Ганна Олександрівна**

*В авторській редакції*

Затвердж. авт. 26.09.2024. Шрифт Times New Roman.  
Системні вимоги: операційна система сумісна з програмним забезпеченням  
для читання файлів формату PDF.  
Обсяг 1,5 МБ. Зам. № 2859.

Видавець і виготовлювач  
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4215 від 22.11.2011 р.  
вул. Університетська, 12, м. Одеса, 65082, Україна  
Тел.: (048) 723 28 39, e-mail: druk@onu.edu.ua