Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
(повне найменування вищого навчального закладу)

Інститут математики, економіки і механіки
(повне найменування інституту/факультету)

диференціальних рівнянь
(повна назва кафедри)

Дипломна робота

бакалавра
(освітньо-кваліфікаційний рівень)

на тему: **«Про асимптотику розв'язків диференціальних рівнянь першого порядку з правильно та швидко змінними нелінійностями»**

« Asymptotic methods of the solution of nonlinear differential first order equations»

Виконала: студентка денної форми навчання
спеціальності 6.040201 Математика

Голуб Тетяна Вікторівна
(прізвище, ім'я, по-батькові)

Керівник к.ф.- м.н. професор,завідувач кафедри диференціальних рівнянь Євтухов В.М.
(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали, підпис)

Рецензент к.ф.- м.н. доцент Шарай Н.В.
(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№_____ від ________________ р.

Завідувач кафедри

_____ __________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Захищено на засіданні ДЕК №___
протокол №____ від ____________ р.

Оцінка_____________/___ ___/_____
(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)

Голова ДЕК

_______ ____________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Одеса – 2017 року

ЗМІСТ

ВСТУП

Однією з найважливіших завдань якісної теорії диференціальних рівнянь є вивчення асимптотичної поведінки розв'язків істотно нелінійних неавтономних звичайних диференціальних рівнянь. Зокрема, звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, дозволених відносно похідної, що містять в правій частині суму доданків з різними нелінійностями.

Рівняння такого типу почали вивчати досить давно. Перші результати були отримані в кінці століття для диференціальних рівнянь, поліноміальних щодо незалежної змінної, шуканої функції і її похідної. Вивченням таких рівнянь займалися, зокрема, Е.Борель, Е.Лінделеф, Г.Харді. Ними були встановлені властивості безперервно-диференційних розв’язків таких рівнянь. Згодом були отримані і асимптотичні подання розв’язків.

У роботах А.В. Костіна отримані результати були поширені на поліноміальні щодо невідомої функції та її похідної диференціальні рівняння першого порядку з монотонними коефіцієнтами загального вигляду.

З появою в математиці понять правильно і швидко змінних функцій стали досліджуватися властивості розв’язків диференціальних рівнянь, що містять нелінійності даного типу. Однак більша частина результатів в даному напрямку відноситься до диференціальних рівнянь другого порядку і вище. Питання про асимптотичні властивості розв’язків звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, дозволених відносно похідної, що містять в правій частині суму доданків з правильно і швидко змінними нелінійностями раніше не вивчали.

Рівнянням саме такого типу присвячена дана робота. Вона складається з двох розділів.

У першому розділі наводяться основні положення теорії правильно і швидко змінних функцій.

У другому розділі досліджується питання існування та асимптотичної поведінки розв'язків рівняння $y'=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k p_k(t)\varphi_k(y)$,

де

$\alpha_k \in \{-1;1\}$, $k=\overline{1,m}$,

$p_k:[a,\omega)\to(0,+\infty)$, $p_k\in C([a,\omega))$, $k=\overline{1,m}$,

$\varphi_k:\Delta_{Y_0}\to(0,+\infty)$, $k=\overline{1,m}$,

при $k=\overline{1,l}$, $l<m$ $\varphi_k\in C^1(\Delta_{Y_0})$,

φ_k - правильно змінні порядку λ_k при $y\to Y_0$,

при $k=\overline{l+1,m}$ $\varphi_k\in C^2(\Delta_{Y_0})$,

φ_k - швидко змінні при $y\to Y_0$,

$$Y_0=\begin{cases}\text{або } 0,\\ \text{або } \pm\infty,\end{cases}$$

Δ_{Y_0} - одностороння околиця Y_0.

ВИСНОВКИ

В даній роботі розглядалось диференційне рівняння виду

$$y' = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(t) \varphi_k(y), \tag{2.1}$$

де

$\alpha_k \in \{-1;1\}$, $k = \overline{1,m}$,

$p_k : [a,\omega) \to (0,+\infty)$, $p_k \in C([a,\omega))$, $k = \overline{1,m}$,

$\varphi_k : \Delta_{Y_0} \to (0,+\infty)$, $k = \overline{1,m}$,

при $k = \overline{1,l}$, $l < m$ $\varphi_k \in C^1(\Delta_{Y_0})$,

φ_k - правильно змінні порядку λ_k при $y \to Y_0$,

при $k = \overline{l+1,m}$ $\varphi_k \in C^2(\Delta_{Y_0})$,

φ_k - швидко змінні при $y \to Y_0$,

$$Y_0 = \begin{cases} \text{або } 0, \\ \text{або } \pm\infty, \end{cases}$$

Δ_{Y_0} - одностороня околиця Y_0.

Дослідилося питання існування і асимптотичної поведінки розв'язків рівняння (2.1) $y(t) \to Y_0$ при $t \uparrow \omega$.

Була отримана наступна теорема:

Теорема 2.2. *Нехай* $k \in \{l+1,...,m\}$, $\varphi_k \in C^3(\Delta_{Y_0})$. *Нехай, крім того,* $\forall \varphi_j$, $j \in \{l+1,...,m\} \setminus \{k\}$ *виконується умова* (2.6). *Тоді для існування у диференціального рівняння* (2.1) P_ω*-розв'язків , задовольняючих умовам*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_j(t)\varphi_j(y(t))}{p_k(t)\varphi_k(y(t))} = 0, \quad \forall j \in \{1,...,m\} \setminus \{k\}, \tag{2.10}$$

необхідно і достатньо, щоб інтеграли

$$\int_b^{Y_0} \frac{dy}{\varphi_k(y)}, \ \int_a^{\omega} p_k(t)dt$$

сходились або розходились одночасно, і дотримувалися умови:

$$-\mu\alpha_k I_k(t) > 0 \ \ \text{при} \ \ t \in (a, \omega), \qquad (2.11)$$

де $\mu = sign\varphi_k'(b)$,

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_j(t)\varphi_j\left([\varphi_k']^{-1}\left(-\alpha_k I_k^{-1}(t)\right)\right)}{p_k(t)\varphi_k\left([\varphi_k']^{-1}\left(-\alpha_k I_k^{-1}(t)\right)\right)} = 0, \quad \forall j \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{k\}. \qquad (2.12)$$

Більше того, для кожного такого розв'язку має місце при $t \uparrow \omega$ *асимптотичне представлення:*

$$\frac{1}{\varphi_k'(y(t))} = -\alpha_k I_k(t)[1 + o(1)], \qquad (2.13)$$

Причому таких розв'язків існує однопараметричне сімейство, якщо $\int_a^\omega p_k(t)dt = +\infty$.

Крім того, в роботі доведені деякі достатні умови виконання (2.12).

Робота проілюстрирована прикладами.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 144 с.
2. Marić V. Regular variation and differential equations. – Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Hong Kong; London; Milan; Paris; Singapore; Tokyo: Springer, 2000. – 132 c.
3. Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L. Regular variation. – Cambridge; New York; New Rochelle; Melbourne; Sydney: Cambridge University Press, 1987. – 510 c.
4. Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений.–М.: Наука, 1990. – 432 с.