Вісник Одеськ. держ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат.науки.- 1999.- Т.4, вип.4.- С.90-93.

УДК 514

А. В. Винник
Одесский государственный университет им. И. И. Мечникова

СВОЙСТВО ВЗАИМНОСТИ ПОВОРОТНЫХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ ДВУМЕРНЫХ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Повністю вивчено питання взаємності поворотних дифеоморфізмів двовимірних ріманових просторів. Доведено, що, якщо нетривіальний поворотний дифеоморфізм має властивість взаємності, то він є конформним і при цьому ріманові простори є просторами постійної гауссової кривини.

Полностью исследован вопрос о взаимности поворотных диффеоморфизмов двумерных римановых пространств. Доказано, что, если нетривиальный поворотный диффеоморфизм обладает свойством взаимности, то он является конформным и при этом римановы пространства являются пространствами постоянной гауссовой кривизны.

The question about reciprocity of rotary diffeomorphisms of two-dimensional Riemannian spaces has been completely investigated. It has been proved that if non-trivial rotary diffeomorphism has a property of reciprocity than it is conformal diffeomorphism and in this case Riemannian spaces are spaces with constant.

Введение. В работах С.Г. Лейко был введен новый тип диффеоморфизмов римановых пространств – поворотные диффеоморфизмы. Возникает вопрос о групповых свойствах этих диффеоморфизмов и в, частности, является ли обратный диффеоморфизм к поворотному также поворотным. В настоящей работе этот вопрос полностью решен для двумерных римановых пространств.

1. Рассмотрим двумерные римановы пространства V_2, $\bar{V}_2$ с метрическими тензорами g и $\bar{g}$ соответственно. Пусть $g_{ij}(x^1,x^2)$ $(i,j=1,2)$ – компоненты g в некоторой локальной карте. Для кривой $\gamma:(t_0,t_1)\to V_2$ с параметрическими уравнениями $x^h=x^h(t)$ построим векторы $\xi^h=\frac{dx^h}{dt}$, $\xi_1^h=\nabla_t\xi^h$, $\xi_2^h=\nabla_t\xi_1^h$. Здесь ∇_t – оператор ковариантного дифференцирования вдоль γ относительно римановой связности.

Обозначим через

$$s[\gamma]=\int\sqrt{\langle\xi,\xi\rangle}dt,\quad \theta[\gamma]=\int k(s)ds$$

функционалы длины и поворота кривой. Если $V_2\subset E_3$, то k – геодезическая кривизна кривой.

Определение 1. *Кривые, которые являются решениями вариационной изопериметрической задачи* extrem $\theta[\gamma]$, $s[\gamma]=\text{const}$ *с закрепленными концами, будем называть изопериметрическими экстремалями поворота (ИЭП).*

В работе [2] показано, что кривая риманова пространства является нетривиальной ИЭП с постоянной c только тогда, когда вдоль нее гауссова кривизна пространства не равна нулю и пропорциональна с этой постоянной кривизне кривой:

$$K(x(s))=ck(s) \tag{1}$$

K – гауссова кривизна, k – кривизна γ, s – длина дуги.

Геодезические кривые условимся называть тривиальными экстремалями поворота (вдоль них $\theta=0$, $\xi_1^h(t)=0$).

Определение 2. *Диффеоморфизм* $\rho:\bar{V}_2\to V_2$ *называем поворотным, если вследствие его каждая геодезическая кривая* $\bar{\gamma}$ *из риманова пространства* $\bar{V}_2$ *становится изопериметрической экстремалью поворота риманова пространства* V_2.

Если ρ - геодезический, то его называем тривиальным поворотным диффеоморфизмом.

Определение 3. *Поворотный диффеоморфизм* $\rho : V_2 \to V_2$ *обладает свойством взаимности, если обратный диффеоморфизм* $\rho^{-1} : V_2 \to \bar{V}_2$ *является поворотным.*

2. Установим диффеоморфизм $\rho : \bar{V}_2 \to V_2$ и потребуем, чтобы он являлся поворотным. Выясним, обладает ли ρ свойством взаимности. Пусть $\bar{\nabla}$, ∇ - римановы связности на $\bar{V}_2$, V_2 и $\bar{\Gamma}^h_{ij}$, Γ^h_{ij} - соответствующие кристоффели, построенные из метрических тензоров $\bar{g}_{ij}$, g_{ij} в данной локальной карте. Обозначим через

$$P^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} - \bar{\Gamma}^h_{ij} \tag{2}$$

тензор афинной деформации, порождённой ρ.

Рассмотрим систему уравнений:

$$\bar{P}^h_{ij} = -P^h_{ij}, \tag{3}$$

$$P^h_{ij} = \lambda_i \delta^h_j + \lambda_j \delta^h_i + \psi^h g_{ij}, \tag{4}$$

$$\nabla_j \psi_i = \psi_i \left(\psi_j + \frac{K_j}{K} \right) + K\left(Ae^{\psi} + 1\right) g_{ij}, \tag{5}$$

$$\bar{P}^h_{ij} = \bar{\lambda}_i \delta^h_j + \bar{\lambda}_j \delta^h_i + \bar{\psi}^h \bar{g}_{ij}, \tag{6}$$

$$\bar{\nabla}_j \bar{\psi}_i = \bar{\psi}_i \left(\bar{\psi}_j + \frac{\bar{K}_j}{\bar{K}} \right) + \bar{K}\left(\bar{A} e^{\bar{\psi}} + 1\right) \bar{g}_{ij}, \tag{7}$$

где $\psi^h = -\varphi^h - 2\lambda^h$, величины λ_i представляют компоненты ковектора.

Тензоры Римана пространств $\bar{V}_2$ и V_2 $\left(\bar{R}^h_{ij\,k}, R^h_{ij\,k}\right)$ вследствие ρ связаны между собой соотношением:

$$\bar{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + P^h_{ij,k} - P^h_{ik,j} + 3P^h_{aj} P^a_{ik} - 3P^h_{ak} P^a_{ij}. \tag{8}$$

Вследствие уравнений (4), (5) и того, что в двумерных римановых пространствах тензор кривизны имеет специальный вид:

$$R^h_{ij\,k} = K(\delta^h_j g_{ik} - \delta^h_k g_{ij}),$$

после свертки (8) по h, k получаем:

$$\bar{K}\bar{g}_{ij} = \left(K\left(Ae^{\psi} + 2\right) - 2\Delta_1 \psi - 3\psi^a \lambda_a\right) g_{ij} - \nabla_j \lambda_i - 3\lambda_i \lambda_j + 2\psi_i \psi_j. \tag{9}$$

Из (3), учитывая (4) и (6), следует:

$$\psi^h g_{ij} = \frac{1}{3}\left(\psi_i + \bar{\psi}_i\right)\delta^h_j + \frac{1}{3}\left(\psi_j + \bar{\psi}_j\right)\delta^h_i - \bar{\psi}^h \bar{g}_{ij}. \tag{10}$$

Так как $\psi^h \neq 0$, то существуют a_h такие, что:

$$\psi^h a_h = 1 \quad ; \quad (a_1)^2 + (a_2)^2 > 0,$$

$$g_{ij} = \frac{1}{3}\left(\psi_i + \bar{\psi}_i\right) a_j + \frac{1}{3}\left(\psi_j + \bar{\psi}_j\right) a_i - \bar{\psi}^h a_h \bar{g}_{ij}.$$

В силу симметрии g_{ij} отсюда вытекает, что $\psi_i + \bar{\psi}_i = p a_i$, где p - некоторый инвариант.

Таким образом,

$$g_{ij} = \frac{2}{3} p a_i a_j - \psi^h a_h \bar{g}_{ij}, \tag{11}$$

$$\psi^h g_{ij} = \frac{p}{3} a_i \delta^h_j + \frac{p}{3} a_j \delta^h_i - \bar{\psi}^h g_{ij}.$$

Учитывая (11), получаем :

$$\bar{g}_{ij}\left(\bar{\psi}^h - \psi^h \bar{\psi}^k a_k\right) = -\frac{2}{3} p a_i a_j \psi^h + \frac{p}{3} a_i \delta^h_j + \frac{p}{3} a_j \delta^h_i. \tag{12}$$

Обозначим $\psi^h - \psi^h \psi^k a_k = \nu^h$.

Рассматривая (12) при $h = 1$ $(i, j = 1,2)$, получим:

$p a_1\left(1 - a_2 \psi^1\right) = p a_2\left(1 - a_1 \psi^1\right)$,

$p\left(a_1 - a_2\right) = 0$.

Откуда следует, что:

1) $p = 0$ и отсюда $\nu^h = 0$.

Если $p = 0$, т.е. $\bar{\psi}_i = -\psi_i$ и $\bar{\lambda}_i = -\lambda_i$, то $g_{ij} = -\bar{\psi}^h a_h \bar{g}_{ij}$ и ρ – конформный диффеоморфизм

2) $a_1 = a_2 = a$, $a \neq 0$.

Следовательно, $\nu^1 = \nu^2$,

$\psi^1 a_1 + \psi^2 a_2 = 1$, $a\left(\psi^1 + \psi^2\right) = 1$, $\psi^1 + \psi^2 = \dfrac{1}{a}$

$$\psi^1 - \psi^1 a\left(\psi^1 + \psi^2\right) = \psi^2 - \psi^2 a\left(\bar{\psi}^1 + \psi^2\right), \tag{13}$$

$a\psi^1\left(\bar{\psi}^1 + \bar{\psi}^2\right) = 0.$

Следовательно:

$\psi^1 = 0$ или $\bar{\psi}^1 + \bar{\psi}_2 = 0.$

Аналогично, рассматривая (12) при $h = 2$ $(i, j = 1,2)$, **получаем:**

$\psi^2 = 0$ или $\psi^1 + \bar{\psi}^2 = 0$.

Отсюда

$\bar{\psi}^1 + \bar{\psi}^2 = 0.$

Учитывая последнее равенство в (13), получим:

$\bar{\psi}^1 - \bar{\psi}^2 = 0$.

Следовательно, $\bar{\psi}^1 = \bar{\psi}^2 = 0$, что исключаем как тривиальный случай геодезических диффеоморфизмов. Итак, в нетривиальном случае возможно только $p = 0$, т.е. ρ – конформный.

Если ρ – конформный диффеоморфизм, то $\lambda_i = -\psi_i$ и (9) приобретает вид:

$$\bar{K} g_{ij} = \left(K\left(Ae^{\psi} + 2\right) + \Delta_1 \psi\right) g_{ij} + \nabla_j \psi_i - \psi_i \psi_j,$$

который с учетом (5) преобразуется следующим образом:

$$K g_{ij} = \left(K\left(Ae^{\psi} + 2\right) + \Delta_1 \psi\right) g_{ij} + \frac{\psi_i K_j}{K} + K\left(Ae^{\psi} + 1\right) g_{ij},$$

$$\bar{K}\bar{g}_{ij} = \left(K\left(2Ae^{\psi} + 3\right) + \Delta_1\psi\right)g_{ij} + \frac{\psi_i K_j}{K}.$$

Так как ρ – конформный, то $K_j = 0$ и, следовательно, $K = \text{const}$. Аналогично, можно показать, что $\bar{K} = \text{const}$, учитывая взаимность поворотно-конформных отображений. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *Если нетривиальный поворотный диффеоморфизм $\rho : \bar{V}_2 \to V_2$ обладает свойством взаимности, то он является конформным и при этом пространства $V_2, \bar{V}_2$ являются пространствами постоянной гауссовой кривизны.*

Заключение. Таким образом, доказанная теорема полностью решает вопрос о нетривиальных поворотных диффеоморфизмах, обладающих свойством взаимности.

1. Лейко С. Г. Поворотные диффеоморфизмы на поверхностях евклидова пространства //Математические заметки. - 1990. - Т.47, вып.3. - С.10-14.
2. Лейко С. Г. Вариационные задачи для функционалов поворота и спин-отображения псевдоримановых пространств //Изв. вузов. Математика. - 1992. - Вып.2.- С.62-71.