

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра оптимального керування та економічної кібернетики

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

**«Побудова апостеріорного оцінювача для
скінченно-елементної апроксимації задачі на власні
значення»**

**«Construction of an a posteriori estimator for finite-element
approximation of eigenvalues problem»**

Виконав: здобувач денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика
Освітня програма «Прикладна математика»
Решнін Микита Анатолійович

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доц. Вербіцький В. В. _____

Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доц. Таїрова М.С.

Рекомендовано до захисту:

Захищено на засіданні ЕК № _____

Протокол засідання кафедри

Протокол № ____ від _____ 2023 р.

№ ____ від _____ 2023 р.

Оцінка _____ / _____ / _____

Завідувач кафедри

Голова ЕК

Одеса — 2023 р.

ЗМІСТ

| | |
|--|-----------|
| Вступ | 3 |
| 1 Постановка задачі | 4 |
| 2 Метод скінченних елементів | 5 |
| 2.1 Варіаційне формулювання задачі | 5 |
| 2.2 Побудова скінченно-елементної апроксимації | 7 |
| 3 Побудова апостеріорного оцінювача | 10 |
| 3.1 Оцінювач похибки | 10 |
| 3.2 Оцінювач із залишковою помилкою | 15 |
| 4 Обчислювальний експеримент | 20 |
| 4.1 Обчислення власних значень та функцій | 20 |
| 4.2 Обчислення апостеріорних оцінок | 22 |
| Висновки | 24 |
| Список літератури | 25 |
| ДОДАТОК А | 26 |

ВСТУП

Об'єктом дослідження роботи є спектральна задача для оператора Штурма-Ліувілля. Ця задача часто виникає при розв'язуванні задач математичної фізики[2].

Предметом дослідження є апроксимація методом скінченних елементів [7] спектральної задачі для оператора Штурма-Ліувілля.

Метод скінченних елементів (МСЕ, англ.: FEM — finite element method) є одним із найпоширеніших методів розв'язування крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь і для рівнянь у частинних похідних. З метою оптимізації використання наявних обчислювальних ресурсів і знаходження наближення до розв'язку задачі з гарантованою точністю, на практиці використовують адаптивні схеми методу скінченних елементів[4]. Мета адаптивного МСЕ — побудова наближеного розв'язку із заданою точністю при мінімальних обчислювальних затратах. Основа більшості схем адаптування — апостеріорні (на основі вже знайденого наближення) оцінки похибок на скінченних елементах[8].

Мета роботи — отримання нових знань і практичного досвіду для розв'язання спектральних задач методом скінченних елементів.

РОЗДІЛ 1

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Оператором Штурма-Ліувуля називається лінійний оператор L , що має вигляд:

$$Lu = -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x),$$

де $x \in [a, b]$, $p \in C^1([a, b])$, $q \in C([a, b])$, $p(x) \geq 0$, $q(x) \geq 0$.

Розглянемо задачу на власні значення для оператора Штурма-Ліувуля:

$$Lu = \lambda u(x), x \in [a, b]; \quad (1.1)$$

$$u(a) = 0, u'(b) = 0, \quad (1.2)$$

Задача (1.1)-(1.2) є задачею Штурма-Ліувуля і, як відомо, має злічену множину дійсних власних чисел

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$$

та відповідну їй множину власних функцій $u_i(x)$.

Треба побудувати скінченно-елементну апроксимацію цієї задачі з використанням лінійних безперервних сплайнів на рівномірній сітці.

Розглянути апостеріорний оцінювач помилки скінченно-елементної апроксимації власної функції.

Мовою пакета MATLAB написати програмний додаток, який знаходить перше власне значення та відповідну власну функцію скінченно-елементної апроксимації спектральної задачі та обчислює значення апостеріорного оцінювача помилки скінченно-елементної апроксимації власної функції.

Провести обчислювальні експерименти.

РОЗДІЛ 2

МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

2.1. Варіаційне формулювання задачі

Слабким розв'язком задачі

$$Au = f$$

називають функцію $u \in V$, де V — вибраний простір, таку, що дійсне співвідношення

$$a(u, v) = (f, v), \forall v \in V,$$

де $a(u, v) = (Au, v)$ — білінійна форма, а (f, v) — скалярний добуток у H . У випадку задачі на власні значення маємо:

$$a(u, v) = \lambda(u, v), \forall v \in V \quad (2.1)$$

Побудуємо варіаційне формулювання і запишемо слабкий розв'язок крайової задачі (1.1)-(1.2). Помножимо рівняння (1.1) на довільну функцію $v \in H^1(a, b)$, а потім проінтегруємо від a до b . До першого інтеграла в лівій частині отриманої рівності,

$$-\int_a^b (pu')' v dx + \int_a^b quv dx = \int_a^b \lambda uv dx$$

Застосуємо формулу інтегрування частинами, тоді

$$-pu'v|_a^b + \int_a^b pu'v' dx + \int_a^b quv dx = \lambda \int_a^b uv dx$$

Оскільки v - довільна функція з $H^1(a, b)$, а за умовою задачі $u'(b) = 0$ то

$$\int_a^b (pu'v' + quv) dx + p(a)u'(a)v(a) = \lambda \int_a^b uv dx$$

Позначимо

$$a(u, v) = \int_a^b (pu'v' + quv) dx + p(a)u'(a)v(a)$$

$$\lambda(u, v) = \lambda \int_a^b uv dx$$

Отримали готову варіаційну форму

$$a(u, v) = \lambda(u, v) \quad (2.2)$$

Визначимо скінченновимірний підпростір простору $H^1(a, b)$

$$V_h = v_h \in S_h^{(1,0)} : v_h(a) = 0$$

Варіаційному формулюванню поставимо у відповідність наступну скінченновимірну задачу. Знайдемо таке $\lambda_h \in R$ та $u_h \in V$, що

$$a(u_h, v_h) = \lambda(u_h, v_h), \forall v_h \in V_h \quad (2.3)$$

Зауважимо, що при $v(a) = 0$

$$a(u, v) = \int_a^b (pu'v' + quv) dx.$$

Збіжності власних значень та функцій задачі (2.3) до власних значень та функцій задачі (1.1)-(1.2) є наслідком загальної теорії апроксимації задач на власні значення методом скінченних елементів [3]. Наведемо теорему про обіжність власних значень:

Теорема 2.1. *Якщо простір метода V_h складається зі сплайнів першого степеня, то існує така додатна стала C , що для малих значень h виконується:*

$$\lambda_l \leq \lambda_l^h \leq \lambda_l + Ch^2\lambda_l, \quad l \leq \dim V_h,$$

де λ_l і λ_l^h є l -ми власними значеннями задачі Штурма-Ліувілля (1.1)-(1.2) та її скінченно-елементної апроксимації (2.3) відповідно.

Доведення. Це є частковий випадок теореми 6.1 [3]

□

Звернемо увагу на наступне. Згідно з теоремою 2.1 точність апроксимації залежить від власного значення, яке апроксимують. Отже, чим більший номер l власного значення, тим гірше його апроксимація. Але, слід зазначити, що у великій кількості прикладних задач необхідно визначити лише кілька перших власних значень, або навіть лише одне.

2.2. Побудова скінченно-елементної апроксимації

Розділимо проміжок $[a,b]$ на n рівних частин. Покладемо $h = \frac{1}{n}$. Визначимо простір лінійних безперервних сплайнів $S_h^{1,0}(a,b)$ з базисом $\{\varphi_i\}_{i=0}^n$:

$$\varphi_i = \begin{cases} \varphi_i^- = \frac{1}{h}(x - x_{i-1}), x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \varphi_i^+ = \frac{1}{h}(x_{i+1} - x), x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, x \in [a,b] \setminus [x_{i-1}, x_{i+1}]. \end{cases}$$

Варіаційна задача (2.3) є системою однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язок u_h задачі (2.3) будемо шукати в наступному вигляді:

$$u_h = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(x). \quad (2.4)$$

Необхідно знайти α_i . Підставляючи систему лінійних рівнянь (2.4) в варіаційну рівність (2.3), отримаємо

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i a(\varphi_i(x), \varphi_j(x)) = \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i (\varphi_i(x), \varphi_j(x)), j = \overline{1, n}$$

При цьому враховується, що варіаційна рівність буде виконуватися $\forall v_h \in V_h$, якщо воно буде виконуватися для всіх базисних функцій підпростору V_h . Помітимо також, що

$$a(\varphi_i(x), \varphi_j(x)) = a(\varphi_j(x), \varphi_i(x))$$

Розглянемо докладніше апроксимацію:

$$\begin{aligned}
a(\varphi_i(x), \varphi_i(x)) &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[(p(x)(\varphi_i^-(x))')^2 + q(x)(\varphi_i^-(x))^2 \right] dx + \\
&+ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[(p(x)(\varphi_i^+(x))')^2 + q(x)(\varphi_i^+(x))^2 \right] dx \approx \frac{1}{h^2} \cdot \\
&\cdot \left[\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} p(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x) \frac{(x_{i+1} - x)^2}{h^2} dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x) \frac{(x - x_{i-1})^2}{h^2} dx \right] \approx \\
&\approx \frac{p(x_{i-1}) + p(x_{i+1})}{h} + hq(x_i), \\
&i = \overline{1, n-1},
\end{aligned}$$

Зауважимо, що для апроксимації інтегралів використовувався метод трапецій:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{f(a) + f(b)}{2} (b - a).$$

Аналогічно

$$\begin{aligned}
a(\varphi_i(x), \varphi_{i+1}(x)) &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[((\varphi_i^+(x))'(\varphi_{i+1}^-(x))' + q(x)((\varphi_i^+(x))(\varphi_{i+1}^-(x))) \right] dx \approx \\
&\approx -\frac{p(x_{i-1}) + p(x_n)}{2h}, \\
&i = \overline{1, n-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a(\varphi_n(x), \varphi_n(x)) &= \int_{x_{n-1}}^{x_n} \left[((\varphi_n^-(x))')^2 + q(x)(\varphi_n^-(x))^2 \right] dx \approx \\
&\approx \frac{p(x_{n-1}) - p(x_n)}{2h} + \frac{h}{2} q(x_i).
\end{aligned}$$

Також розглянемо і праву частину варіаційної задачі (2.3)

$$\begin{aligned}
\lambda(\varphi_i(x), \varphi_i(x)) &= \lambda \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} (\varphi_i^-(x))^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\varphi_i^+(x))^2 dx \right] \approx \lambda \frac{2h}{3}, \\
&i = \overline{1, n-1},
\end{aligned}$$

$$\lambda(\varphi_i(x), \varphi_{i+1}(x)) = \lambda \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^+(x) \varphi_{i+1}^-(x) dx \approx \lambda \frac{h}{6},$$

$$i = \overline{1, n-1},$$

$$\lambda(\varphi_n(x), \varphi_n(x)) = \lambda \int_{x_{n-1}}^{x_n} (\varphi_n^-(x))^2 dx \approx \lambda \frac{h}{3}.$$

Отримали вираз:

$$(A_h - \lambda_h B_h)y = 0, \quad (2.5)$$

де матриці A, B розміру $n \times n$ такі, що:

$$(A_h)_{ij} = \begin{cases} \frac{p(x_{i-1})+p(x_{i+1})}{h} + hq(x_i), & i = j, i < n \\ \frac{p(x_{n-1})-p(x_n)}{2h} + \frac{h}{2}q(x_i), & i = n, j = n, \\ -\frac{p(x_{n-1})+p(x_n)}{2h}, & |i - j| = 1, \\ 0, & |i - j| > 1 \end{cases}$$

$$(B_h)_{ij} = \begin{cases} \frac{2h}{3}, & i = j, i < n \\ \frac{h}{3}, & i = n, j = n, \\ \frac{h}{6}, & |i - j| = 1, \\ 0, & |i - j| > 1 \end{cases},$$

$$\text{а } y = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T$$

Отримали симетричну, тридіагональну матрицю $A_h - \lambda_h B_h$. Знайдемо її власні числа λ , які й будуть власними числами поставленої задачі. А відповідні вектори — значеннями у вузлах сітки апроксимованих власних функцій.

РОЗДІЛ 3

ПОБУДОВА АПОСТЕРІОРНОГО ОЦІНЮВАЧА

3.1. Оцінювач похибки

Надалі у доведеннях будуть використовуватися досить відомі апріорні оцінки:

$$|u_j - u_{jh}|_{1,\Omega} \leq Ch^r, \quad (3.1)$$

$$\|u_j - u_{jh}\|_{0,\Omega} \leq Ch^r |u_j - u_{jh}|_{1,\Omega}, \quad (3.2)$$

$$|\lambda_j - \lambda_{jh}| \leq C |u_j - u_{jh}|_{1,\Omega}^2, \quad (3.3)$$

Тепер задамо деякі позначення. Нехай \mathcal{F} – множина усіх внутрішніх граней нашої сітки, тобто тих, які не лежать на $\partial\Omega$, а $\mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}$ – підмножина граней на T . Для кожної грані $F \in \mathcal{F}$ ми обираємо довільний одиничний вектор нормалі n_F та позначаємо T_{in} і T_{out} , де n_F направлений від T_{in} . Для $v_h \in V_h$ вводимо стрибок J_F нормальної похідної v_h по грані F :

$$J_F = \nabla (v_h|_{T_{\text{out}}}) \cdot n_F - \nabla (v_h|_{T_{\text{in}}}) \cdot n_F$$

Зазначимо, що значення J_F не залежить від вибору n_F .

Ми розглядаємо власну пару (λ_j, u_j) та відповідну скінченно-елементну апроксимацію (λ_{jh}, u_{jh}) . Надалі індекси j будуть опущені. Наша задача — оцінити похибку $e = u - u_h$.

Наступні Лема дають вирази, на основі яких ми й почнемо аналіз похибки.

Лема 3.1. *Для $v \in H_0^1(\Omega)$ дійсно*

$$\int_{\Omega} \nabla e \cdot \nabla v - \int_{\Omega} (\lambda u - \lambda_h u_h) v = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\int_T \lambda_h u_h v + \frac{1}{2} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F J_F v \right)$$

Доведення. Візьмемо $v \in H_0^1(\Omega)$. Інтегруючи по частинах на кожному елементі маємо

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla e \cdot \nabla v - \int_{\Omega} (\lambda u - \lambda_h u_h) v &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\int_T \lambda_h u_h v + \int_{\partial T} \frac{\partial e}{\partial n} v \right) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\int_T \lambda_h u_h v + \frac{1}{2} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F J_F v \right) \end{aligned}$$

Лема 3.2.

$$\int_{\Omega} (\lambda u - \lambda_h u_h) e = (\lambda + \lambda_h) \left(1 - \int_{\Omega} u u_h \right) = \frac{\lambda + \lambda_h}{2} \int_{\Omega} e^2.$$

Доведення. Легко доводиться з використанням того факту, що $\int_{\Omega} |u|^2 = \int_{\Omega} |u_h|^2 = 1$.

Задамо локальний оцінювач похибки η_T як

$$\eta_T = \left(h_T^2 \lambda_h^2 \|u_h\|_{0,T}^2 + \frac{1}{2} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} h_F \|J_F\|_{0,F}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

де h_F є діаметром грані F , тоді глобальний оцінювач похибки:

$$\eta = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Як заведено в у залишкових оцінювачах похибки, η_T складається з двох зважених виразів: L^2 норми об'ємного залишку, який звівся до $\lambda_h \|u_h\|_{0,T}$, та L^2 норми стрибка J_F .

Сітки згенеровані для адаптивного уточнення в задачах, що включають сингулярності, часто дуже нерівномірні. Але, якщо уточнення зроблено певним чином, то сімейство $\{\mathcal{T}_h\}$ може бути побудовано так, що регулярність сітки зберігається. Тому, цілком природно шукати оцінювач з константами, що залежать лише від регулярності сітки та не залежать від розміру елементів. Далі буде продемонстровано, що наш оцінювач η саме такий.

Наступна теорема надає верхню оцінку похибки.

Теорема 3.1. *Існує константа C , яка залежить тільки від регулярності*

\mathcal{T}_h , така, що

$$|e|_{1,\Omega} \leq C\eta + \left(\frac{\lambda + \lambda_h}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \|e\|_{0,\Omega}$$

Доведення. Нехай $e^I \in V_h$ таке, що

$$\|e - e^I\|_{0,T} \leq Ch_T |e|_{1,\tilde{T}} \quad (3.4)$$

та

$$\|e - e^I\|_{0,F} \leq Ch_F^{\frac{1}{2}} |e|_{1,\tilde{T}}, \quad (3.5)$$

де \tilde{T} об'єднання усіх елементів, що мають спільну вершину з T . Ми можемо взяти, наприклад, усереднюючу інтерполяцію e .

Маємо

$$\int_{\Omega} |\nabla e|^2 = \int_{\Omega} \nabla e \cdot \nabla (e - e^I) + \int_{\Omega} (\lambda u - \lambda_h u_h) e^I.$$

Отже, згідно з Лемою 3.1 та $v = e - e^I$, маємо

$$\int_{\Omega} |\nabla e|^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left[\int_T \lambda_h u_h (e - e^I) + \frac{1}{2} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F J_F (e - e^I) \right] + \int_{\Omega} (\lambda u - \lambda_h u_h) e,$$

та використовуючи Лему 3.2, нерівність Коші-Буняковського, (3.4) та (3.5), отримуємо

$$\int_{\Omega} |\nabla e|^2 \leq C\eta |e|_{1,\Omega} + \frac{(\lambda + \lambda_h)}{2} \|e\|_{0,\Omega}^2$$

що і треба було довести.

Зауваження 3.1. Як наслідок попередньої теореми та апіорної оцінки (3.2), глобальний оцінювач дає верхню межу похибки в енергетичній нормі в точності до мультиплікативної константи та виразу вищого порядку.

$$|e|_{1,\Omega} \leq C(\eta + h^r |e|_{1,\Omega})$$

Нам треба показати, що наші локальні оцінювачі похибки η_T ефективні у сенсі визначення елементів, з великою локальною похибкою.

Для $T \in \mathcal{T}_h$, нехай $b_T \in H_0^1(T)$ є стандартною бульбашковою функцією.

Використовуючи масштабуючи аргументи такі, які використовуються при доведенні стандартних локальних зворотних нерівностей, можна побачити, що існує константа C , що залежить лише від регулярності елемента T , така, що

$$\|u_h b_T\|_{0,T} \leq \|u_h\|_{0,T} \leq C \left(\int_T |u_h|^2 b_T \right)^{\frac{1}{2}}$$

та

$$|u_h b_T|_{1,T} \leq \frac{C}{h_T} \|u_h\|_{0,T}.$$

Наступна Лема дає верхню оцінку об'ємного залишку.

Лема 3.3. *Існує константа C , що залежить лише від регулярності елемента T , така, що*

$$h_T \lambda_h \|u_h\|_{0,T} \leq C \left(|e|_{1,T} + h_T \|\lambda u - \lambda_h u_h\|_{0,T} \right)$$

Доведення. Візьмемо $v = u_h b_T$. Використовуючи $\int_T \nabla u_h \cdot \nabla v = 0$, отримуємо

$$\lambda_h \int_T u_h v = \int_T \nabla e \cdot \nabla v - \int_T (\lambda u - \lambda_h u_h) v$$

звідки легко доводимо використовуючи (3.4) та (3.5).

Тепер нехай для $F \in \mathcal{F}$, T_F^1 та T_F^2 – це елементи з \mathcal{T}_h , що мають спільну F , і нехай $b_F \in H_0^1(T_F^1 \cup T_F^2)$ – поелементна функція. Далі знову використовуючи масштабуючи аргументи, легко побачити, що існує константа C така, що

$$\|b_F\|_{0,T_F^i} \leq C h_F^{d/2} \quad \text{та} \quad |b_F|_{1,T_F^i} \leq \frac{C}{h_{T_F^i}} \|b_F\|_{0,T_F^i}, \quad i = 1, 2.$$

Наступна Лема визначає верхню межу значення стрибка для локального оцінювача похибки.

Лема 3.4. *Існує константа C , що залежить лише від регулярності T_F^1 та T_F^2 , така, що*

$$h_F^{\frac{1}{2}} \|J_F\|_{0,F} \leq C \left(|e|_{1,T_F^1 \cup T_F^2} + h_F \|\lambda u - \lambda_h u_h\|_{0,T_F^1 \cup T_F^2} \right)$$

Доведення. Для усіх $v \in H_0^1(T_F^1 \cup T_F^2)$ згідно з Лемою 3.1

$$\int_F J_F v = \int_{T_F^1 \cup T_F^2} \nabla e \cdot \nabla v - \int_{T_F^1 \cup T_F^2} (\lambda u - \lambda_h u_h) v - \lambda_h \int_{T_F^1 \cup T_F^2} u_h v$$

Взявши $v = b_F$ в цьому рівнянні та використавши факт, що J_F постійний, та Лему 3.3, доводимо теорему.

Отже, можемо довести верхню оцінку локального оцінювача похибки.

Теорема 3.2. *Нехай T^* це об'єднання T та сусідніх елементів T' , що мають спільну з T грань. Існує така додатна константа C , що залежить лише від регулярності елементів T^* , така, що*

$$\eta_T \leq C \left(|e|_{1,T^*} + h_T \|\lambda u - \lambda_h u_h\|_{0,T^*} \right)$$

Доведення. Виводиться напряду з Лем 3.3 та 3.4.

Зауваження 3.2. Вираз $h_T \|\lambda u - \lambda_h u_h\|_{0,T^*}$ у попередній теоремі є виразом вищого порядку. Взагалі кажучи, для кожного $T' \in \mathcal{T}_h$,

$$\begin{aligned} h_{T'} \|\lambda u - \lambda_h u_h\|_{0,T'} &\leq \frac{|\lambda - \lambda_h|}{|\lambda_h|} \lambda_h h_{T'} \|u_h\|_{0,T'} + \lambda h_{T'} \|u - u_h\|_{0,T'} \\ &\leq C h^{2r} \eta_{T'} + \lambda h_{T'} \|e\|_{0,T'} \end{aligned}$$

остання нерівність виникає в наслідок (3.3) та визначення $\eta_{T'}$. Відзначимо, що перший вираз у правій частині є асимптотично незначним відносно локального оцінювача $\eta_{T'}$, а другий вираз — відносно локальної похибки $\|e\|_{1,T'}$

Отже, теорема, наведена вище, показує, що оцінювач похибки елемента T обмежений зверху енергетичною похибкою на T^* , з точністю до мультиплікативної константи та членами вищого порядку, а саме,

$$\eta_T \leq C |e|_{1,T^*} + \mathcal{O}(h^{2r}) \eta_{T^*} + \mathcal{O}(h_T) \|e\|_{0,T^*}.$$

де, $\eta_{T^*}^2 = \sum_{T \in T^*} \eta_T^2$.

Отже, η_T є ефективним оцінювачом похибки в тому сенсі, що коли η_T великий, похибка в околі елемента T також повинна бути великою. Таким

чином, η_T правильно вказує на елементи, на яких потрібно уточнення, принаймні тоді, коли глобальний член $\frac{|\lambda - \lambda_h|}{|\lambda_h|}$ достатньо малий.

3.2. Оцінювач із залишковою помилкою

Метою цього розділу є визначення нового оцінювача похибки, який не включає об'ємну частину η_T . Для досягнення цього ми доведемо, що граничні залишки переважають над об'ємними залишками в точності до членів вищого порядку.

Нехай \mathcal{N} — множина внутрішніх вершин \mathcal{T}_h (тобто вершини $P \notin \partial\Omega$). Для $P \in \mathcal{N}$, нехай $\Omega_P = \bigcup \{T \in \mathcal{T}_h : P \in T\}$. Нехай $\varphi_P \in V_h$ — базисна функція з $\text{supp } \varphi_P = \Omega_P$ і h_P — діаметр Ω_P . Нарешті, нехай $\mathcal{F}_P \subset \mathcal{F}$ — підмножина граней, що містять вершину P , і $\mathcal{T}_P = \{T \in \mathcal{T}_h : T \ni P\}$.

Надалі використовується таке співвідношення між базисними функціями і розривами.

Лема 3.5. *Для всіх $P \in \mathcal{N}$ маємо*

$$\lambda_h \int_{\Omega_P} u_h \varphi_P = \sum_{F \in \mathcal{F}_P} \frac{\text{meas}(F)}{d} J_F.$$

Доведення. Інтегруючи по частинах маємо

$$\lambda_h \int_{\Omega_P} u_h \varphi_P = \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla \varphi_P = \sum_{F \in \mathcal{F}_P} \frac{\text{meas}(F)}{d} J_F.$$

Наступним кроком є доведення локальної оцінки для об'ємної частини залишку.

Лема 3.6. *Для всіх $P \in \mathcal{N}$ маємо*

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_P} h_T^2 \lambda_h^2 \|u_h\|_{0,T}^2 \leq C \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_P} h_F \|J_F\|_{0,F}^2 + h_P^4 \lambda_h^2 \|\nabla u_h\|_{0,\Omega_P}^2 \right),$$

де C — константа, що залежить лише від регулярності сітки.

Доведення. Позначимо через u_h^P проєкцію u_h на константи в просторі $L^2(\Omega_P)$. Тоді маємо

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_P} h_T^2 \lambda_h^2 \|u_h\|_{0,T}^2 \leq h_P^2 \lambda_h^2 \|u_h\|_{0,\Omega_P}^2 = h_P^2 \lambda_h^2 \left(\|u_h - u_h^P\|_{0,\Omega_P}^2 + \|u_h^P\|_{0,\Omega_P}^2 \right). \quad (3.6)$$

Тепер,

$$\begin{aligned} \|u_h^P\|_{0,\Omega_P}^2 &= \frac{(d+1)^2}{\text{meas}(\Omega_P)} \left(\int_{\Omega_P} u_h^P \varphi_P \right)^2 \\ &\leq \frac{2(d+1)^2}{\text{meas}(\Omega_P)} \left\{ \left[\int_{\Omega_P} (u_h^P - u_h) \varphi_P \right]^2 + \left(\int_{\Omega_P} u_h \varphi_P \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Використовуючи Лему 3.5 і нерівність Коші-Буняковського в попередній оцінці, маємо

$$\|u_h^P\|_{0,\Omega_P}^2 \leq C \left(\|u_h - u_h^P\|_{0,\Omega_P}^2 + \frac{1}{\lambda_h^2 \text{meas}(\Omega_P)} \sum_{F \in \mathcal{F}_P} h_F^{d-1} \|J_F\|_{0,F}^2 \right).$$

Таким чином, підставляючи вирази вище в (3.2), використовуючи стандартну оцінку для $L^2(\Omega_P)$ проєкції та факт, що h_F , h_P і $\text{meas}(\Omega_P)^{1/d}$ еквівалентні, ми завершуємо доведення.

Тепер ми готові визначити простіший оцінювач.

$$\tilde{\eta}_T = \left(\frac{1}{2} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} h_F \|J_F\|_{0,F}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

і відповідний глобальний оцінювач похибки.

$$\tilde{\eta} = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \tilde{\eta}_T^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Наступна теорема показує, що цей оцінювач є глобально надійним і локально ефективним з точністю до членів вищого порядку.

Теорема 3.3. *Існує константа C , що залежить лише від регулярності*

\mathcal{T}_h , така що

$$|e|_{1,\Omega} \leq C \left[\tilde{\eta} + \left(\frac{\lambda + \lambda_h}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \|e\|_{0,\Omega} + \lambda_h^{\frac{3}{2}} h^2 \right]$$

та

$$\tilde{\eta}_T \leq C \left(|e|_{1,T^*} + h_T \|\lambda u - \lambda_h u_h\|_{0,T^*} \right).$$

Доведення. Теорема 3.2 дає другу оцінку, наведену вище, тоді як Теорема 3.1 приводить до

$$|e|_{1,\Omega}^2 \leq C \left(\tilde{\eta}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \lambda_h^2 \|u_h\|_{0,T}^2 + \frac{\lambda + \lambda_h}{2} \|e\|_{0,\Omega}^2 \right)$$

З Лема 3.6 випливає

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \lambda_h^2 \|u_h\|_{0,T}^2 \leq C \left(\tilde{\eta}^2 + h^4 \lambda_h^2 \|\nabla u_h\|_{0,\Omega}^2 \right)$$

З цих двох оцінок і отримуємо нашу теорему.

Зауваження 3.3. Перша оцінка в теоремі вище включає додатковий член $\lambda_h^{\frac{3}{2}} h^2$, який, за дуже слабкими умовами, також є вищого порядку. Насправді оскільки власні функції оператора Лапласа є аналітичними в Ω і $-\Delta u = \lambda u$ не може тотожно дорівнювати нулю в будь-якій відкритій підмножині. Тому, згідно з Лемою 1.5.4 [9], якщо існує диск $D \subset \Omega$ і константа $\kappa > 0$ такі, що

$$\min_{\substack{T \in \mathcal{T}_h \\ T \subset D}} h_T \geq \kappa h \quad \forall \mathcal{T}_h \quad (3.7)$$

тоді існує константа $c > 0$, така що $|e|_{1,\Omega} \geq ch$. Тому, у цьому випадку, член $\lambda h^{\frac{3}{2}} h^2$ є асимптотично незначним порівняно з $|e|_{1,\Omega}$. Зауважимо, що локальна квазірівномірність (3.7) виконується у всіх практичних випадках.

Результат попередньої теореми можна поліпшити для найменшого власного значення. Насправді відповідна власна функція задовольняє $u > 0$, тому розумно вважати, що $u_h > 0$ також. (Це, як правило, відбувається на практиці; наприклад, це завжди вірно у двовимірному випадку, коли кути всіх трикутників не перевищують $\frac{\pi}{2}$). У цьому випадку член $\lambda_h^{\frac{3}{2}} h^2$ можна

виключити з надійної оцінки. Це безпосередньо впливає з наступної леми, яка показує, що об'ємні залишки пригнічені стрибками, коли $u_h > 0$.

Лема 3.7. *Якщо $u_h > 0$, то існує константа $C > 0$, залежна лише від регулярності \mathcal{T}_h , така що*

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \lambda_h^2 h_T^2 \|u_h\|_{0,T}^2 \leq C \sum_{F \in \mathcal{F}} h_F \|J_F\|_{0,F}^2.$$

Доведення. Маємо

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \lambda_h^2 h_T^2 \|u_h\|_{0,T}^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \lambda_h^2 h_T^2 u_h \left[\sum_{P \in \mathcal{N}} u_h(P) \varphi_P \right] \\ &= \sum_{P \in \mathcal{N}} u_h(P) \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \lambda_h^2 h_T^2 \int_T u_h \varphi_P \right) \\ &\leq \sum_{P \in \mathcal{N}} \lambda_h h_P^2 u_h(P) \left(\lambda_h \int_{\Omega} u_h \varphi_P \right) \\ &\leq \sum_{P \in \mathcal{N}} \lambda_h h_P^{1+\frac{d}{2}} u_h(P) \left[h_P^{1-\frac{d}{2}} \sum_{F \in \mathcal{F}_P} \frac{\text{meas}(F)}{d} |J_F| \right] \\ &\leq C \left[\sum_{P \in \mathcal{N}} \lambda_h^2 h_P^{2+d} |u_h(P)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{F \in \mathcal{F}} h_F \|J_F\|_{0,F}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

де ми використали те, що $u_h > 0$ для першої нерівності та Лему 3.5 для другої нерівності. Для останньої нерівності ми використали нерівність Коші-Буняковського двічі та регулярність сітки.

З іншого боку, за стандартними масштабувальними аргументами отримуємо наступну нерівність

$$h_T^d \sum_{P \in \mathcal{N}_T} |u_h(P)|^2 \leq C \|u_h\|_{0,T}^2$$

Тоді,

$$\sum_{P \in \mathcal{N}} h_P^{2+d} |u_h(P)|^2 \leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{2+d} \sum_{P \in \mathcal{N}_T} |u_h(P)|^2 \leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|u_h\|_{0,T}^2,$$

що і завершує доведення.

РОЗДІЛ 4

ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

4.1. Обчислення власних значень та функцій

Розглянемо задачу:

$$-u'' = \lambda u, x \in [0,1]; \quad (4.1)$$

$$u(0) = 0, u'(1) = 0, \quad (4.2)$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння (4.1) має вигляд:

$$u(x,y) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x).$$

Згідно з граничними умовами (4.2) $C_2 = 0$, тоді

$$u_i(x,y) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda_i}x); \quad i = 1,2,\dots$$

$$\lambda_i = \pi^2 \left(i - \frac{1}{2} \right)^2; \quad i = 1,2,\dots$$

Мовою пакета MATLAB написано програмний додаток, який знаходить перше власне значення та відповідну власну функцію скінченно-елементної апроксимації крайової задачі (4.1)-(4.2). Текст програмного додатка наведено у Додатку А.

Скінченноелементна апроксимація побудована з використанням лінійних неперервних сплайнів.

У Таблиці 4.1 приведені похибки першого власного значення скінченно-елементної апроксимації крайової задачі для різних рівномірних сіток з кроком $h = \frac{1}{n}$.

Табл. 4.1. Похибки власного значення скінченно-елементної апроксимації

| n | λ_1 | λ_1^h | $ \lambda_1 - \lambda_1^h $ |
|-----|-------------|---------------|-----------------------------|
| 10 | 2.4674 | 2.47248 | 5.0776e-03 |
| 20 | 2.4674 | 2.46867 | 1.2686e-03 |
| 40 | 2.4674 | 2.46772 | 3.1710e-04 |
| 80 | 2.4674 | 2.46748 | 7.9273e-05 |
| 160 | 2.4674 | 2.46742 | 1.9818e-05 |

Оскільки власна функція визначається з точністю до константи, то для порівняння u та u_h спочатку знайдемо:

$$C = \frac{\sum_{i=1}^n u(x_i) \cdot u_{hi}}{\sum_{i=1}^n u_{hi}^2}.$$

Покладемо

$$u_h = C u_h.$$

На Рис. 4.1 приведено графіки власної функції u та її апроксимації u_h .

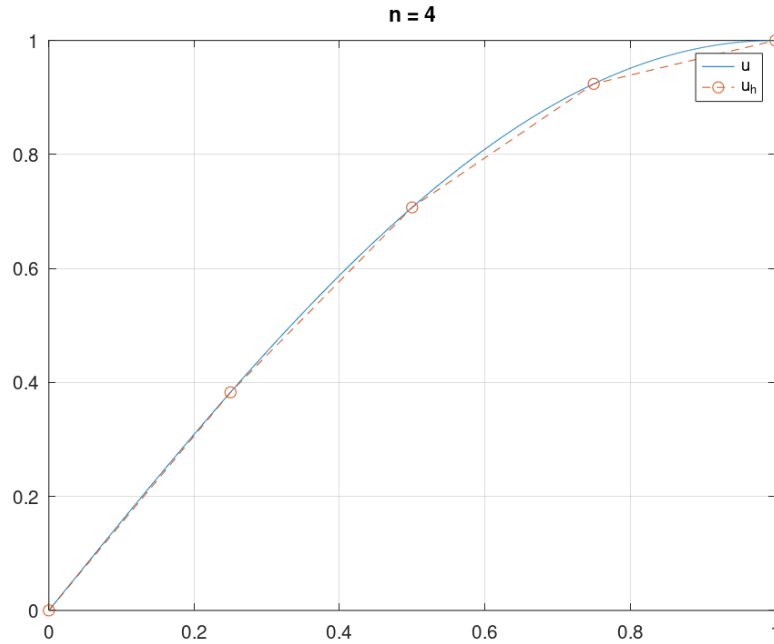


Рисунок 4.1. Функція u та її апроксимація u_h

4.2. Обчислення апостеріорних оцінок

У нашому випадку T_i – відрізок, а локальний оцінювач набуває вигляду:

$$\eta_{T_i} = \frac{1}{2} \left(\left(u'_h|_{T_{i-1}} - u'_h|_{T_i} \right)^2 + \left(u'_h|_{T_i} - u'_h|_{T_{i+1}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Глобальний оцінювач

$$\eta^2 = \sum_{i=1}^n \eta_{T_i}^2.$$

Щоб перевірити оцінку із зауваження 3.1, треба обчислити інтеграл

$$\begin{aligned} |e|_{1,\Omega} &= \int_0^1 (u' - u'_h)^2 dx = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (u' - u'_h)^2 dx. \end{aligned}$$

Для обчислення інтегралів скористаємося квадратурною формулою Гауса:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \left(f\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right) \right) + O(b-a)^5.$$

На Рис. 4.2 приведені значення локальних оцінювачів для $h = \frac{1}{8}$.

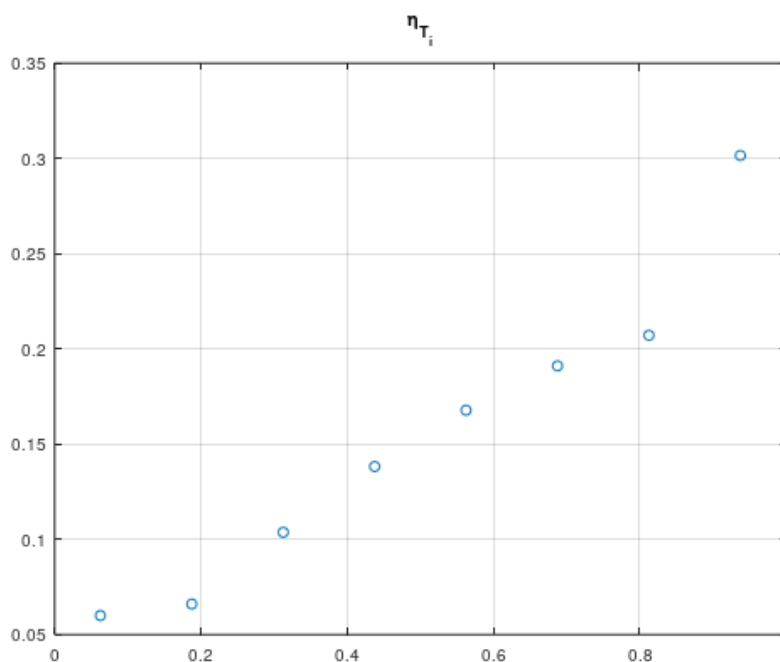


Рисунок 4.2. Значення локальних оцінювачів η_{T_i} для $h = \frac{1}{8}$

У Таблиці 4.2 приведені значення глобального оцінювача з помилкою $|u' - u'_h|_{1,\Omega}$ для різних сіток з кроком $h = \frac{1}{n}$.

Табл. 4.2. Реальна похибка та апостеріорний оцінювач

| n | $ u' - u'_h _{1,\Omega}$ | η |
|-----|--------------------------|--------|
| 4 | 0.1256 | 0.7458 |
| 8 | 0.062923 | 0.4861 |
| 16 | 0.031474 | 0.3269 |
| 32 | 0.015739 | 0.2248 |

З результатів обчислювального експерименту можна зробити висновок, що у цьому випадку запропонований апостеріорний оцінювач дає значно завищену верхню оцінку похибки скінченно-елементної апроксимації власної функції.

ВИСНОВКИ

У роботі була розглянута спектральна задача для оператора Штурма-Ліувилля.

Побудована скінченно-елементна апроксимація спектральної задачі з використанням лінійних неперервних сплайнів.

Розглянуто апостеріорний оцінювач помилки скінченно-елементної апроксимації власної функції.

Мовою пакета MATLAB написано програмний додаток, який знаходить перше власне значення та відповідну власну функцію скінченно-елементної апроксимації спектральної задачі та обчислює значення апостеріорного оцінювача помилки скінченно-елементної апроксимації власної функції.

Проведено обчислювальні експерименти.

З результатів обчислювальних експериментів можна зробити висновок, що у цьому випадку запропонований апостеріорний оцінювач дає значно завищену верхню оцінку похибки скінченно-елементної апроксимації власної функції.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вербіцький В. В., Реут В. В. Введення в чисельні методи аналізу і диференціальних рівнянь: навчальний посібник / Одеса: Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 2018. 116 с.
2. Савула Я. Г. Числовий аналіз задача математичної фізики варіаційними методами. — Львів: видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004. — 221 с.
3. G. Strang, G. J. Fix, An Analysis of the Finite Element Method — Prentice Hall, 1973. 306 p.
4. Ainsworth M. J., Oden T. A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis. — Wiley, New York, 2000. 240 p.
5. Duran R. G., Padra Cl., Rodrigues R. A Posteriori Error Estimates for the Finite Element Approximation of Eigenvalue Problems // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 2011, November. <https://www.researchgate.net/publication/228713566>
6. Oden J. T., Leszek F. D. Applied Functional Analysis. — Taylor & Francis Group, 2018. 609 p.
7. Szabó B., Babuška I. Finite Element Analysis. Method, Verification and Validation.— John Wiley & Sons, 2021. 363 p.
8. Rüdiger Verfürth. A Posteriori Error Estimation Techniques for Finite Element Methods — Oxford, 2013. — 393 p.
9. I. Babuška, A. Miller, A feedback finite element method with a posteriori error estimation: Part I. The finite element method and some basic properties of the a posteriori error estimator // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 61, Issue 1, 1987 — pages 1-40.

Текст програмного додатка

```
function dip(n = 4)
    n
    a = 0;
    b = 1;
    x1 = linspace(a, b, 1000);
    lambda = pi^2/4
    u = sin(sqrt(lambda)*x1);
    [y, lambda_h] = find_lambda_h(a, b, n);
    lambda_h
    dlambdа = abs(lambda-lambda_h)

    x = linspace(a, b, n + 1);
    u_h = [0; y];
    c = sin(sqrt(lambda) * x) * u_h / (transpose(u_h) * u_h);
    u_h = transpose(u_h * c);

    figure(1);
    plot(x1, u, x, u_h,"o--");
    grid on;
    legend("u", "u_h");
    title(sprintf("n = %d", n))

    for i=1:n
        du_h(i) = (u_h(i+1) - u_h(i)) / (x(i+1) - x(i));
    end

    for i=2:n-1
        s = (du_h(i) - du_h(i-1))^2;
        s = s+(du_h(i+1) - du_h(i))^2;
        eta(i) = sqrt(s)/2;
```

```

end

eta(1)=abs(du_h(2) - du_h(1));
eta(n)=abs(du_h(n) - du_h(n-1));

figure(2);
xc_h=(x(2:n+1)+x(1:n))./2;
plot(xc_h, eta,"o");
grid on;
title('\eta_{T_i}');

eta_g=sqrt(eta*eta')

s=0;
for i=1:n
    x1=(x(i)+x(i+1))/2-(x(i+1)-x(i))/2/sqrt(3);
    x2=(x(i)+x(i+1))/2+(x(i+1)-x(i))/2/sqrt(3);
    s1=pi/2*cos(x1*pi/2)-du_h(i);
    s1=s1*s1;
    s2=pi/2*cos(x2*pi/2)-du_h(i);
    s2=s2*s2;
    s=s+(x(i+1)-x(i))/2*(s1+s2);
end

pn_e=sqrt(s)
endfunction

function [y, lambda_h] = find_lambda_h(a, b, n)
    h = (b-a)/n;
    x = linspace(a, b, n+1);
    p = ones(length(x), 1);
    q = zeros(length(x) - 1, 1);
    a_ii = ((p(1:n)+p(2:n+1))/h+h*q);
    a_ii1 = -(p(1:n-1)+p(2:n))/2/h;

```

```
A = diag(a_ii)+diag(a_ii1, 1)+diag(a_ii1, -1);
A(n, n) = A(n, n)/2;
b_ii = 2*h/3*ones(n, 1);
b_ii1 = h/6*ones(n-1, 1);
B = diag(b_ii)+diag(b_ii1, 1)+diag(b_ii1, -1);
B(n, n) = B(n, n)/2;
[y, lambda_h] = eigs(A, B, 1, "SM");
endfunction
```