Вісник Одеськ. держ. ун-ту.– 2001.– Т. 6, вип. 3. Фіз.-мат. науки.– С. 67–71

УДК 517.1

В. Н. Беляев
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

СТРУКТУРА СТЕПЕНЕЙ НЕРАЗРЕШИМОСТИ ДЛЯ m – СВОДИМОСТИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА СВОДЯЩУЮ ФУНКЦИЮ

Рекомендовано до друку науковим семінаром
при кафедрі алгебри та теорії чисел ОНУ 22.05.2001 р.

Розглядається структура ступенів нерозв'язності для m-зведення з обмеженнями на функцію, що зводить. Отримано критерії рефлексивності і транзитивності для таких зведень. Досліджуються ступені рекурсивних множин. Розглянуто зведення, для яких структура рекурсивних ступенів нерозв'язності є щільною. Наведено відповідні приклади.

Рассматривается структура степеней неразрешимости для m-сводимости с ограничениями на сводящую функцию. Получены критерии рефлексивности и транзитивности для таких сводимостей. Исследуются степени рекурсивных множеств. Рассмотрены сводимости, для которых структура рекурсивных степеней неразрешимости является плотной. Приведены соответствующие примеры.

The structure of degrees of unsolvability for m-reducibility with restrictions on reducing function is considered. Criteria of reflexivity and transitivity for such reducibility are received. Degrees of recursive sets are investigated. Are considered reducibility for which the structure of recursive degrees of unsolvability is dense. The appropriate examples are given.

Ограничения вычислительной сложности занимают важное место в теории сложности прикладных комбинаторных задач. Целью этой работы является изучение сложности структуры степеней неразрешимости для ограниченных m-сводимостей, в которых ограничения накладываются на сводящие функции. Аналогичные ограничения (но только сверху) изучались ранее в [1,2] для тьюринговых сводимостей.

Основные понятия и обозначения определены в [5]. Сокращения р.п.м., о.р.ф. обозначают соответственно *рекурсивно перечислимое множество, общерекурсивная функция.*

Обозначим $f \trianglelefteq g$, если $\exists x_0 \forall y [y > x_0 \Rightarrow f(y) < g(y)]$. Функцию g изовем мажорантой п.в. (почти всюду) функции f, а f – минорантой п.в. для g. Далее, пусть $\mathfrak{T}$ – класс всех тотальных функций, $\mathfrak{T}^+$ – подкласс $\mathfrak{T}$, состоящий из всех неубывающих функций и $R^i \subseteq \mathfrak{T}^+$, $i = 0{,}1$. Каждой о.р.ф. f соответствуют две функции: $e_f^1(x) = \max\{f(y) \mid y \le x\}$, $e_f^0(x) = \min\{f(y) \mid x \le y\}$. Ясно, что e_f^1 – неубывающая о.р.ф., а e_f^0 – предельно рекурсивная неубывающая функция. Если $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{T}^+$ и $(\forall f \in \mathfrak{A})(\exists g \in \mathfrak{B})[f \trianglelefteq g]$, то пишем $\mathfrak{A} \trianglelefteq^1 \mathfrak{B}$, а если $(\forall g \in \mathfrak{B})(\exists f \in \mathfrak{A})[f \trianglelefteq g]$, то пишем $\mathfrak{A} \trianglelefteq^0 \mathfrak{B}$.

Введем основное определение:

$$\le_m [{}^{R^1}_{R^0}] \Leftrightarrow \{(A,B) \in 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \mid \exists \text{ о.р.ф. } f \, \exists h^1 \in R^1 \; \exists h^0 \in R^0 [A \le_m^f B \,\&\, h^0 \trianglelefteq e_f^0 \,\&\, e_f^1 \trianglelefteq h^1]\}$$

Очевидно, $\le_m [{}^{R^1}_{R^0}] \subseteq \le_m$. Назовем отношение $\le_m [{}^{R^1}_{R^0}]$ *ограниченной* m*-сводимостью*, если это отношение рефлексивно и транзитивно. Нашей целью сейчас является изученне условий, налагаемых на классы R^0 и R^1 для того, чтобы отношение $\le_m [{}^{R^1}_{R^0}]$ являлось сводимостью.

Лемма. *Пусть* $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{T}^+$.

(а) *Если для о.р.ф.* f *верно* $|\operatorname{Val} f| = \infty$, $\{f\} \not\trianglelefteq^1 \mathfrak{R}$, *то существуют такие* $A, B \subseteq \mathbb{N}$, *что* $A \le_m^f B$ & $A \not\le_m [^{\mathfrak{R}}_{\mathfrak{T}^{+,\infty}}] B$.

(б) *Если для о.р.ф.* f *верно, что* $e_f^0 \in \mathfrak{T}^{+,\infty}$, $\mathfrak{R} \not\trianglelefteq^0 \{e_f^0\}$, *то существуют такие* $A, B \subseteq \mathbb{N}$, *что* $A \le_m^f B$ & $A \not\le_m [^{\mathfrak{T}^+}_{\mathfrak{R}}] B$.

Доказательство.

(а) Пусть $f_0, f_1, \ldots$ список тех о.р.ф., у которых $e_{f_0}^1, e_{f_1}^1, \ldots$ имеют мажоранты п.в. в $\mathfrak{R}$. Пусть для $g_n \in \mathfrak{R}$ верно $g_n \trianglerighteq e_{f_n}^1$, $n \in \mathbb{N}$. Так как $\{f\} \not\trianglelefteq^1 \mathfrak{R}$, то $\forall n \in \mathbb{N}[f \not\trianglelefteq g_n]$. Для каждого n введем в рассмотрение последовательность чисел $x_0^n < x_1^n < x_2^n < \ldots$, выполняющую условия: $e_{f_n}^1(x_k^n) \le g_n(x_k^n) < f(x_k^n) < f(x_{k+1}^n)$, $k \in \mathbb{N}$; (последнее неравенство достижимо из-за $|Val\ f| = \infty$) и $\forall y[e_{f_n}^1(y + x_0^n) \le g_n(y + x_0^n)]$.

Построим $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ так, что $\forall n [f(x_{\sigma(n)}^n) > g_n(x_{\sigma(n)}^n)$ & $x_{\sigma(n)}^n < x_{\sigma(n+1)}^{n+1}]$.

Положим $B = f(A)$, $A \subset \{x_{\sigma(n)}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Пусть далее C_A определена уже на $[0, x_{\sigma(n-1)}^{n-1}]$. Определим $C_A(x_{\sigma(n)}^n) = 1 \Leftrightarrow f_n(x_{\sigma(n)}^n) \notin B$. Это возможно, так как $f(x_{\sigma(n)}^n) > e_{f_n}^1(x_{\sigma(n)}^n)$ и определение положения $x_{\sigma(n)}^n$ относительно A не отражается на принадлежности $f_n(x_{\sigma(n)}^n)$ множеству B. Ясно, что $A \le_m^f B$, но $A \not\le_m^{f_n} B$, так как иначе на $x_{\sigma(n)}^n$ было бы противоречие.

(б) Пусть $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ список о.р.ф., удовлетворяющих условию $\mathfrak{R} \trianglerighteq^0 \{e_{r_i}^0 \mid i \in \mathbb{N}\}$. Если этот список пуст, то доказывать нечего. Из условия следует $\forall i [e_{r_i}^0 \not\trianglelefteq e_f^0]$. А значит $\forall i [r_i \not\trianglelefteq f]$. Поэтому для всякого натурального i существует бесконечно много чисел z_k^i, $r = 0, 1, \ldots$, таких, что $\forall k [r_i(z_k^i) > f(z_k^i)]$.

Из последовательности $(z_k^i)_{k \in \mathbb{N}}$ можно выбрать подпоследовательность $(y_s^i)_{s \in \mathbb{N}}$ так, чтобы $\forall s [r_i(y_s^i) > f(y_s^i)]$ & $\forall s [r_i(y_s^i) < f(y_{s+1}^i)]$. Т. е. выполнена следующая система неравенств: $\ldots < f(y_s^i) < r_i(y_s^i) < f(y_{s+1}^i) < r_i(y_{s+1}^i) < \ldots$.

Теперь остается только с помощью подходящей функции $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ построить диагональную последовательность чисел $y_{\sigma(i)}^i$ так, чтобы для любого i выполнялись неравенства $f(y_{\sigma(i)}^i) < r_i(y_{\sigma(i)}^i) < f(y_{\sigma(i+1)}^{i+1}) < r_{i+1}(y_{\sigma(i+1)}^{i+1})$.

Построим множество B путем выбора для каждого $i \in \mathbb{N}$ одного и только одного элемента из пары чисел $\{f(y_{\sigma(i)}^i), r_i(y_{\sigma(i)}^i)\}$. А затем определим множество A условием $A = f^{-1}(B)$. Это обеспечивает $A \le_m^f B$. Нетрудно убедиться, однако, что $\forall i [A \not\le_m^{r_i} B]$. Поэтому $A \le_m^f B$ & $A \not\le_m [^{\mathfrak{T}^+}_{\mathfrak{R}}] B$.

Лемма доказана.

Теорема 1. *(Критерий рефлексивности) Для любых* $\mathfrak{R}^1, \mathfrak{R}^0 \in \mathfrak{T}^+$ *отношение* $\le_m [^{\mathfrak{R}^1}_{\mathfrak{R}^0}]$ *рефлексивно тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{R}^0 \trianglelefteq^0 \{I\} \trianglelefteq^1 \mathfrak{R}^1$.

Доказательство. Достаточность очевидна, ибо $A \le_m [^{\mathfrak{R}^1}_{\mathfrak{R}^0}] A$ со сводящей функцией I.

Необходимость. Если для I нет миноранты п.в. в $\mathfrak{R}^0$, то по лемме найдутся такие $A,B \in \mathbb{N}$, что $A \leq_m^I B$, т.е. $A = B$, но $A \not\leq_m \left[\begin{smallmatrix}\mathfrak{T}^+\\ \mathfrak{R}^0\end{smallmatrix}\right] A$. То же можно сказать и в случае, когда для I нет мажоранты п.в. в $\mathfrak{R}^1$.

На основе леммы можно доказать (см. [4]) следующий результат:

Теорема 2. *(Критерий транзитивности)*

$$(\leq_m \left[\begin{smallmatrix}\mathfrak{R}^1\\ \mathfrak{R}^0\end{smallmatrix}\right] \textit{транзитивно}) \Leftrightarrow (\forall\, \textit{орф}\ f,g)[\{e_f^1,e_g^1\}\trianglelefteq^1\mathfrak{R}^1 \,\&\, \mathfrak{R}^0\trianglelefteq^0\{e_f^0,e_g^0\} \Rightarrow$$

$$\{e_f^1,e_g^1 \in \mathfrak{T}^{+,\infty} \Rightarrow (\exists H^1 \in \mathfrak{R}^1)[e_{f\circ g}^1 \trianglelefteq H^1]\} \,\&\, \{e_f^0,e_g^0 \in \mathfrak{T}^{+,\infty} \Rightarrow (\exists H^0 \in \mathfrak{R}^0)[H^0 \trianglelefteq e_{f\circ g}^0]\}] \,\&$$

$$\{(\exists d \in \mathbb{N})[\mathfrak{R}^0\trianglelefteq^0\{d\}\trianglelefteq^1 \mathfrak{R}^1 \Rightarrow (\forall d \in \mathbb{N})[\mathfrak{R}^0\trianglelefteq^0\{d\}\trianglelefteq^1\mathfrak{R}^1]]\}.$$

Таким образом, для задания сводимостей рассматриваемого типа в качестве классов верхних границ можно выбирать не более чем счетные системы неубывающих о.р.ф., мажорирующих п.в. тождественную функцию I, а в качестве классов нижних границ – не более чем счетные системы предельно рекурсивных функций из $\mathfrak{T}^+$ вида $e_f^{\cup}$, где f – о.р.ф., минорирующих п.в. I. Такие нижние и верхние классы будем называть *приведенными*.

Приведенные классы, задающие сводимости, назовем *транзитивными*.

Следствие. *Всякий приведенный верхний класс транзитивен $\Leftrightarrow$ для каждой суперпозиции своих элементов он включает мажоранту п.в. А чтобы приведенный нижний класс был транзитивным достаточно, чтобы для всякой суперпозиции своих элементов он включал миноранту п.в.*

Рассмотрим теперь структуру степеней неразрешимости для введенных нами ограниченных сводимостей. Рассмотрим область рекурсивных множеств.

Обозначим $d_{\mathfrak{R}^0}^{\mathfrak{R}^1}(A)$ степень множества A относительно сводимости $\leq_m \left[\begin{smallmatrix}\mathfrak{R}^1\\ \mathfrak{R}^0\end{smallmatrix}\right]$. Частично упорядоченное множество $(\{d_{\mathfrak{R}^0}^{\mathfrak{R}^1}(A) \mid A \subseteq \mathbb{N}\},\leq)$ обозначим $L_{\mathfrak{R}^0}^{\mathfrak{R}^1}$.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{P}$ – класс одноместных полиномов с натуральными коэффициентами. Тогда $L_{\{I\}}^{\mathfrak{P}}$ включает бесконечные убывающие цепи и совокупности из n попарно несравнимых элементов для любого $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Заметим, что указанные классы очевидно образуют сводимость. Для доказательства построим конкретные множества.

Пусть $B = \{y(i) \mid y(0) = 0,\ y(1) = 2,\ y(i+1) = 2^{y(i)},\ i \in \mathbb{N},\ i \geq 2\}$. Положим теперь $A_i = \{x \mid x = p_i^j,\ j \in \mathbb{N}\}$, где p_i – i-тое простое число. Полагаем $C_0 = B = \{y(i) \mid i \in \mathbb{N}\}$, $C_{n+1} = C_n \setminus \{y(k) \mid k \in A_{n+1}\}$, $D_0 = \{y(k) \mid k \in A_1\}$, $D_{n+1} = D_n \bigcup \{y(k) \mid k \in A_{n+2}\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Ясно, что $C_{n+1} \leq_m^{g_n} \left[\begin{smallmatrix}\mathfrak{P}\\ \{I\}\end{smallmatrix}\right] C_n$, где

$$g_n(x) = \begin{cases} x+1, & \text{если } x \in C_n \setminus C_{n+1} \\ x & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажем, что $C_n \not\leq_m \left[\begin{smallmatrix}\mathfrak{P}\\ \{I\}\end{smallmatrix}\right] C_{n+1}$. Действительно, в противном случае, если f – сводящая функция, то существует $k \in \mathbb{N}$, что $I(x) \trianglelefteq f(x) \trianglelefteq x^k$. Тогда $\exists x_0 \in \mathbb{N}\ \forall x : x > x_0\quad [y(x),(y(x))^k] \subset [y(x), y(x+1)]$. Из этого следует, что образ каждого элемента из $\{y(k) \mid k \in A_{n+1}, k > x_0\}$ не принадлежит C_{n+1}. Это противоречит предположению.

Аналогично $D_n \leq_m \left[\begin{smallmatrix}\mathfrak{P}\\ \{I\}\end{smallmatrix}\right] D_{n+1}$ и $D_{n+1} \not\leq_m \left[\begin{smallmatrix}\mathfrak{P}\\ \{I\}\end{smallmatrix}\right] D_n$.

Докажем вторую часть утверждения теоремы.

Пусть $E_n = \{y(i) \mid i = 2^n q,\ q -$ нечетное $\}$. Если $k \neq j$, то, как и выше, $E_k \not\leq_m [^{\mathfrak{P}}_{\{I\}}] E_j$ и $E_k \not\leq_m [^{\mathfrak{P}}_{\{I\}}] E_j$. Теорема доказана.

В работе [4] исследованы сводимости с *сингулярными* классами, т.е. классами, содержащими единственную функцию. Далее будет рассмотрена сводимость с сингулярными верхним и нижним классами.

Теорема 4. *Пусть R – некоторое бесконечное не иммунное множество, такое, что $\exists x_0 : \forall x > x_0\ R(x+1) - R(x) \geq 2$. Тогда структура рекурсивных $\leq_m [^{\{I+C_R(x)\}}_{\{I\}}]$ - степеней является плотной.*

Доказательство. Следует заметить, что указанное отношение является нетривиальной сводимостью, т.к. класс $\{I + C_R(x)\}$ является транзитивным (см. [4]) и мажорирует некоторые о.р.ф., отличные от тождественной и которые минорируются тождественной (R – не иммунно и содержит бесконечное р.п.м.). Нам нужно доказать следующее: пусть A и B рекурсивны и $A \leq^f_m [^{\{I+C_R(x)\}}_{\{I\}}] B\ \&\ B \not\leq_m [^{\{I+C_R(x)\}}_{\{I\}}] A$ (далее будем писать $A \lneq_m [^{\{I+C_R(x)\}}_{\{I\}}] B$), тогда существует рекурсивное множество C такое, что $A \lneq_m [^{\{I+C_R(x)\}}_{\{I\}}] C\ \&\ C \lneq_m [^{\{I+C_R(x)\}}_{\{I\}}] B$. Все дальнейшие рассмотрения будем проводить в области $[y_0, \infty)$, где y_0 – первый элемент натурального ряда, начиная с которого функция f лежит строго в рамках границ сведения. Из $B \not\leq_m [^{\{I+C_R(x)\}}_{\{I\}}] A$ следует, что бесконечное число элементов из B или $\overline{B}$ не могут быть отображены в A или $\overline{A}$ соответственно. Пусть это множество F. На участке, где f совпадает с тождественной функцией, имеем $C_A(x) = C_B(x)$ п.в. на $\overline{R}$. Поэтому $F \subseteq R$. При этом получаем

$\forall x : x \in B\ \&\ x \in F \Rightarrow x \notin A\ \&\ x+1 \notin A$ и $\forall x : x \in \overline{B}\ \&\ x \in F \Rightarrow x \notin \overline{A}\ \&\ x+1 \notin \overline{A}$.
Рекурсивность множества F следует из рекурсивности множеств A и B.

Разделим F на два бесконечных рекурсивных множества F_1 и F_2 и определим характеристическую функцию множества C:

$$C_C(x) = \begin{cases} C_B(x), \text{если } x \in F_1 \\ C_A(x), \text{ иначе.} \end{cases}$$

Тогда:

1) $A \leq^h_m [^{\{I+C_R(x)\}}_{\{I\}}] C$, где $h(x) = \begin{cases} f(x), \text{ если } x \in F^1 \\ x, \text{ иначе.} \end{cases}$

2) $C \not\leq_m [^{\{I+C_R(x)\}}_{\{I\}}] A$, т.к. множество F^1 не позволяет сделать этого: $F^1 \cap C$ не может быть отображено в A, $\overline{F^1 \cap C}$ не может быть отображено в $\overline{A}$.

3) $C \leq^g_m [^{\{I+C_R(x)\}}_{\{I\}}] B$, где $g(x) = \begin{cases} x, \text{ если } x \in F^1 \\ f(x), \text{ иначе.} \end{cases}$

4) $B \not\leq_m [^{\{I+C_R(x)\}}_{\{I\}}] C$, т.к. множество F^2 не позволяет сделать этого: $F^2 \cap B$ не может быть отображено в C, $\overline{F^2 \cap B}$ не может быть отображено в $\overline{C}$.

Теорема доказана.

В случае m-сводимости с нижними непостоянными границами прообраз каждого элемента заведомо конечен. А если нижняя граница еще и рекурсивна, то мощность прообраза числа x можно оценить сверху эффективно по x. В этом случае есть близость к 1-сведению.

Обозначим через $\le_{m^*}$ сводимость $\le_m [^{\mathfrak{T}}_{\mathfrak{T}^{+,\infty}}]$.

Теорема 5. *Если* A *цилиндр, то* $A \equiv B \Leftrightarrow A \equiv_{m^*} B$.

Доказательство.

Необходимость. Покажем, что $\forall A, B \in 2^{\mathbf{N}} : A \equiv B \Rightarrow A \equiv_{m^*} B$. Действительно, по теореме Майхилла [5, стр. 116] $A \equiv B \Rightarrow A \le_1^f B \;\&\; B \le_1^g A$ для некоторых f, g - о.р.ф. Для любой одно-однозначной рекурсивной функции можно построить неубывающую, с бесконечным множеством значений рекурсивную миноранту. Действительно, пусть f – 1-1 рекурсивная функция. Миноранту h строим по шагам:

шаг 0: $h(0) = f(0)$;

шаг n: $h(n) = \min\{f(t) \mid t \le n\}$, *и если* $\exists t_0 < n$: $h(t_0) > h(n)$, *то* $h(x)$ *полагаем равным* $h(n)$ *для всех* x, *меньших* n.

По построению $\forall x \in \mathbb{N}$ $h(x) \le f(x)$ и $h(x)$ – неубывающая. Однозначность функции f гарантирует бесконечную область значений для h.

Таким образом $A \le_{m^*}^f B$ и $B \le_{m^*}^g A$. Следовательно, $A \equiv_{m^*} B$.

Достаточность. Имеем $A \equiv_{m^*} B$ и A – цилиндр. Докажем, что B – цилиндр. Для доказательства будем использовать критерий: B – цилиндр $\Leftrightarrow$ существует о.р.ф. l, такая, что для всех x:

$$[D_x \ne \varnothing \;\&\; D_x \subset B] \Rightarrow l(x) \in B \setminus D_x$$
$$[D_x \ne \varnothing \;\&\; D_x \subset \overline{B}] \Rightarrow l(x) \in \overline{B} \setminus D_x$$

Рассмотрим $D_x \ne \varnothing, D_x \subset B$. Тогда $g(D_x) = D_{g'(x)}$, $D_{g'(x)} \ne \varnothing$, $D_{g'(x)} \subset A$, $g'(x)$ – о.р.ф. Так как A – цилиндр, то существует $h(x)$ – о.р.ф., такая, что $h(g'(x)) \in A \setminus D_{g'(x)}$. Теперь проверим, верно ли, что $f(h(g'(x))) \notin D_x$. Если это так, то $l(x)$ полагаем равным $f(h(g'(x)))$. Если нет, то рассматриваем $D_{g_2'(x)} = D_{g'(x)} \cup h(g'(x))$, $g_2'(x)$ – о.р.ф. По свойству A $h(g_2'(x)) \in A \setminus D_{g_2'(x)}$. Если $f(h(g_2'(x))) \notin D_x$, то $l(x)$ полагаем равным $f(h(g_2'(x)))$. Иначе рассматриваем $D_{g_3'(x)} = D_{g_2'(x)} \cup h(g_2'(x))$, и.т.д.

Поскольку $f^{-1}(D_x)$ конечно, то через конечное число шагов будет $f(h(g_i'(x))) \in B \setminus D_x$. Тогда положим $l(x)$ равным $f(h(g_i'(x)))$. Аналогично и для $\overline{B}$. Следовательно B – цилиндр. Отсюда, по свойствам цилиндров имеем $A \le_m B \Rightarrow A \le_1 B \;\&\; B \le_m A \Rightarrow B \le_1 A$. И по теореме Майхилла получаем $A \equiv B$.

Теорема доказана.

1. **Булитко В. К.** Субтьюринговы сводимости ограниченной сложности // Известия ВУЗов. Матем.– 1992.– № 1.– С. 7–17.
2. **Bulytko V. K** About segment complexity of Turing reductions // Math. Log. Quart.– 1999.– V. 45, № 4.– P. 561–571.
3. **Булитко В. К.** О рекурсивно сжимаемых множествах // Рос. АН. Матем. заметки.– 1998.–Т. 64, вып. 1.– С. 9–16.
4. **Беляев В. Н., Булитко В. К.** М-сводимость с верхними и нижними границами для сводящих функций // Рос. АН. Матем. заметки.– 2001.– Т. 70, вып. 1.– С. 12–21.
5. **Роджерс X.** Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость.– М.: Мир, 1972. –624 с.