

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра оптимального керування та економічної кібернетики

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

**«Побудова апостеріорних оцінювачів
скінченно-елементних апроксимацій на основі
локальної задачі Діріхле»**

**«Building of a posteriori estimators of finite element
approximations based on the local Dirichlet problem»**

Виконав: здобувач денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика
Освітня програма «Прикладна математика»
Лозинський Дмитро Костянтинович

Керівник: кандидат фіз.- мат. наук, доц. Вербіцький В.В. —
Рецензент: доктор фіз.- мат. наук, доц. Кічмаренко О.Д.

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ ____ від _____ 2023 р.
Завідувач кафедри

Захищено на засіданні ЕК № _____
Протокол № ____ від _____ 2023 р.
Оцінка _____ / _____ / _____
Голова ЕК

Одеса — 2023 р.

ЗМІСТ

Вступ		3
1	Постановка задачі	5
2	Метод скінченних елементів для одновимірних крайових задач	6
3	Суперзбіжність методу скінченних елементів	12
4	Апостеріорні оцінювачі	19
4.1	Апостеріорні оцінювачі похибок та їхні характеристики	19
4.2	Типи АОП	23
4.3	Явний оцінювач для hr-адаптивних апроксимацій	25
4.4	Неявні оцінювачі типу Діріхле	32
5	Апостеріорний оцінювач з усередненням градієнта наближеного розв'язку	38
6	Апостеріорний оцінювач на основі локальної задачі Діріхле	41
6.1	Розв'язання локальної задачі методом скінченних елементів	41
6.2	Розв'язання локальної задачі методом скінченних різниць .	43
7	Обчислювальний експеримент	44
Висновки		50
Додаток А. Програма мовою пакету MATLAB з апостеріорним оцінювачем з осередненням градієнта		53
Додаток В. Програма мовою пакету MATLAB з апостеріорним оцінювачем на основі локальної задачі Діріхле		57

ВСТУП

Багато часу тому було відзначено необхідність використання методів для ефективного контролю похибки наближених розв'язків крайових задач еліптичного типу. Ця необхідність стала очевидною, коли стало зрозуміло, що якість наближеного розв'язку великою мірою залежить від вибору дискретизації, і отримання "добрих" аппроксимацій вимагає адаптації сітки до точної структури розв'язку. Таким чином, в сучасній обчислювальній практиці широко використовуються адаптивні алгоритми для розв'язання крайових задач. Ці алгоритми вдосконалюють сітку на основі інформації, отриманої після розв'язання задачі на попередній, зазвичай більш грубій, сітці. Це викликало інтерес до побудови апостеріорних оцінювачів похибки, які відрізняються від вже відомих апріорних оцінок збіжності, що зазвичай вказують тільки на асимптотичний порядок збіжності. Потреба в таких оцінках виникла також при проведенні "доказових обчислень". Один з таких підходів полягає в порівнянні градієнта наближеного розв'язку і його середнього значення, яке може бути обчислене різними способами. Якщо точний розв'язок має підвищену гладкість, ця різниця може служити індикатором похибки. Спочатку цей метод був виявлений експериментальним шляхом, а пізніше були розроблені формальні обґрунтування методу усереднення градієнта, засновані на ефекті суперсходженості. Головною перевагою цього методу є його простота. Проте він обмежений застосуванням до досить регулярних точних розв'язків і зазвичай надає лише оцінку похибки, не гарантуючи її абсолютної величини.

Докладну інформацію про метод скінченних елементів та сучасний стан досліджень з побудови адаптивних схем можна знайти в роботах [4, 5, 10, 11, 15, 17, 18].

Об'єктом дослідження дипломної роботи є крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь.

Предметом дослідження є метод скінченних елементів розв'язання крайових задач.

Мета написання роботи — побудова ефективного апостеріорного оцінювача похибки скінченно-елементного розв'язку одновимірної крайової

задачі.

Для досягнення цієї мети потрібно буде побудувати скінченно-елементну апроксимацію для конкретної задачі з використанням лінійних безперервних сплайнів на нерівномірній сітці, розробити апостеріорний оцінювач похибки скінченно-елементного розв'язку крайової задачі та написати програмний додаток на мові пакету MATLAB, який знаходитиме наближений розв'язок задачі, адаптуючи сітку до структури точного розв'язку.

РОЗДІЛ 1

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Для одновимірної крайової задачі,

$$-u'' + b(x)u' + c(x)u = f(x), \quad x \in (a,b)$$

$$u(a) = 0, \quad u(b) = 0$$

де $b(x), c(x) \in L^\infty(a,b)$, $f(x) \in L^2(a,b)$, $q(x) \geq 0$. треба побудувати скінченно-елементну апроксимацію з використанням лінійних безперервних сплайнів на нерівномірній сітці.

Для практичної реалізації методу скінчених елементів нам необхідно мати точний рецепт для оцінки похибки скінченно-елементного розв'язку. Така задача розв'язується з використанням апостеріорного оцінювача похибки (АОП) скінченно - елементного розв'язку.

Треба побудувати простий в обчисленні неявний апостеріорний оцінювач:

- 1) АОП має бути *локальним*, тобто він повинен обчислюватись на окремому скінченному елементі.
- 2) Якщо ми шукаємо похибку у вигляді функції в певному просторі кусково-поліноміальних функцій, то цей простір для пошуку похибки повинен містити в собі простір апроксимацій основної задачі.
- 3) Зазвичай також вимагають, щоб обчислювальна складність знаходження всіх локальних оцінок похибки не перевищувала складність побудови глобальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) для вихідної задачі методом середньоквадратичних помилок (МСЕ)

Зазначені вимоги є загальними і стосуються всіх типів оцінювачів. Особливу увагу треба звернути на побудову апостеріорного оцінювача з використанням локальної задачі Діріхле.

РОЗДІЛ 2

МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ОДНОВИМІРНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

На інтервал $[a, b]$ ми встановлюємо сітку наступним чином:

$$\omega_h = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\},$$

зазвичай ця сітка є нерівномірною. Далі, визначимо

$$h = \max_{1 \leq i \leq n} h_i.$$

де $h_i = x_i - x_{i-1}$. Для створення лінійного сплайна, який визначається сіткою ω_h , необхідно $2n$ параметрів. Позначимо $S_{\omega_h}^{1,0}[a, b]$ простір лінійних сплайнів, що є неперервними на інтервалі $[a, b]$ та визначаються сіткою ω_h . Оскільки лінійний безперервний сплайн $s(x) \in S_{\omega_h}^{1,0}[a, b]$ повинен бути неперервним у всіх проміжних точках x_i ($i = \overline{1, n-1}$) сітки ω_h , тобто повинен виконувати $n - 1$ умову, то для його визначення необхідно $n + 1$ параметр. Отже, розмірність простору лінійних сплайнів $S_{\omega_h}^{1,0}[a, b]$ становить $n + 1$. Очевидно, що функції

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} (x - x_{i-1})/h_i, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ -(x - x_{i+1})/h_{i+1}, & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & x \in [a, b] \setminus [x_{i-1}, x_{i+1}], \\ & i = \overline{1, n-1} \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} -(x - x_1)/h_1, & x \in [x_0, x_1], \\ 0, & x \in [x_1, b], \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} (x - x_{n-1})h_n, & x \in [x_{n-1}, x_n], \\ 0, & x \in [a, x_{n-1}], \end{cases} \quad (2.3)$$

лінійно незалежні і є лінійними безперервними сплайнами.

Значить $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n$ — базис простору $S_{\omega_h}^{1,0}[a,b]$. Очевидно, що

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{0, n}.$$

Тому, якщо ми маємо відомі значення функції в вузлах сітки $f(x_i)$ ($i = \overline{0, n}$),

то лінійний безперервний сплайн

$$s(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)\varphi_i(x)$$

буде інтерполяційним сплайном, оскільки

$$s(x_i) = f(x_i), \quad i = \overline{0, n},$$

і цей сплайн називається лінійним сплайном Лагранжа.

Відомо, що в гільбертовому просторі V виконується наступна нерівність Коші-Буняковського:

$$(u, v)_V \leq \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V, \quad (2.4)$$

де $(u, v)_V$ — скалярний добуток, $\|u\|_V = \sqrt{(u, u)_V}$ — норма гільбертовому просторі V .

Розглянемо деякі приклади.

Якщо V це скінченновимірний простір з n векторами в R^n , то

$$(u, v)_V = u^T v$$

і нерівність Коші-Буняковського набуває вигляду

$$u^T v \leq \|u\|_2 \|v\|_2 \quad \forall u, v \in R^n, \quad (2.5)$$

де $\|u\|_2$ — Евклідова норма вектора. Простір Лебега $L_2(a, b)$, що складається

з функцій суммовних з квадратом, тобто

$$L_2(a,b) = \left\{ u(x) : \int_a^b u^2(x) dx < \infty \right\},$$

є Гільбертовим простором зі скалярним добутком

$$(u(x), v(x))_{L_2(a,b)} = \int_a^b u(x)v(x) dx.$$

Для цього простору нерівність Коші-Буняковського приймає наступний вигляд:

$$\int_a^b u(x)v(x) dx \leq \left\{ \int_a^b u^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_a^b v^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \forall u(x), v(x) \in L_2(a,b). \quad (2.6)$$

Простори Соболева $H^k(a,b)$, ($k = 1, 2, \dots$) складаються з функцій сумуємих з квадратом разом з похідними до k -го порядку включно, тобто

$$H^k(a,b) = \left\{ u(x) : \int_a^b \sum_{i=0}^k (u^{(i)}(x))^2 dx < \infty \right\},$$

ці простори є гільбертовими просторами зі скалярним добутком, визначеним так:

$$(u(x), v(x))_{H^k(a,b)} = \int_a^b \sum_{i=0}^k u^{(i)}(x)v^{(i)}(x) dx.$$

Для цих просторів нерівність Коші-Буняковського має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \int_a^b \sum_{i=0}^k u^{(i)}(x)v^{(i)}(x) dx &\leq \left\{ \int_a^b \sum_{i=0}^k (u^{(i)}(x))^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left\{ \int_a^b \sum_{i=0}^k (v^{(i)}(x))^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \forall u(x), v(x) \in H^k(a,b). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Доведемо тепер теорему про апроксимацію функції лінійними безперервними сплайнами.

Теорема 2.1. Якщо $u(x) \in H^2(a,b)$, то існує такий сплайн $u_h(x) \in S_{\omega_h}^{1,0}[a,b]$, що

$$\|u(x) - u_h(x)\|_{L_2(a,b)} \leq Ch^2 |u(x)|_{H^2(a,b)}, \quad (2.8)$$

$$\|u(x) - u_h(x)\|_{H^1(a,b)} \leq Ch |u(x)|_{H^2(a,b)}, \quad (2.9)$$

де

$$|u(x)|_{H^2(a,b)} = \left\{ \int_a^b (u''(x))^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

— напівнорма простору $H^2(a,b)$, $C > 0$ — константа не залежна від h .

Доведення. З теореми вкладення Соболева можна зробити висновок, що функція $u(x) \in H^1(a,b)$ є неперервною. Отже, функція $u(x) \in H^2(a,b)$ також належить до простору $H^2(a,b)$ і, отже, є двічі неперервною. З цього випливає, що для функції $u(x)$ з класу $H^2(a,b)$ можна побудувати інтерполяційний сплайн Лагранжа.

$$u_h(x) = \sum_{i=0}^n u(x_i) \varphi_i(x).$$

Оцінимо різницю $u(x) - u_h(x)$ в довільній точці $x \in (x_{i-1}, x_i)$. Зауважимо, що

$$\frac{du_h(x)}{dx} = \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h_i}.$$

Тому

$$\begin{aligned} u(x) - u_h(x) &= \int_{x_{i-1}}^x \frac{d}{dt} (u(t) - u_h(t)) dt = \\ &= \int_{x_{i-1}}^x \left(\frac{du(t)}{dt} - \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h_i} \right) dt = \int_{x_{i-1}}^x \left(\frac{du(t)}{dt} - \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{du(s)}{ds} ds \right) dt = \\ &= \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^x \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{du(t)}{dt} - \frac{du(s)}{ds} \right) ds dt = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^x \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_s^t \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} d\xi ds dt, \end{aligned}$$

Тобто

$$u(x) - u_h(x) = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^x \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_s^t \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} d\xi ds dt. \quad (2.10)$$

При розширенні меж інтегрування та використанні нерівності Коші-Буняковського (2.6), ми отримуємо наступний результат:

$$\begin{aligned} |u(x) - u_h(x)| &\leq \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^x \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_s^t \left| \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right| d\xi ds dt \leq \\ &= \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right| d\xi ds dt = h_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right| d\xi \leq \\ &\leq h_i \left\{ \int_{x_{i-1}}^{x_i} 1^2 d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right|^2 d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} = h_i^{\frac{3}{2}} \left\{ \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right|^2 d\xi \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Отже,

$$|u(x) - u_h(x)|^2 \leq h_i^3 \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right|^2 d\xi$$

і

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |u(x) - u_h(x)|^2 dx \leq h_i^4 \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right|^2 d\xi. \quad (2.11)$$

Підсумовуючи по $i = \overline{1, n}$ нерівність (2.11) і застосовуючи нерівність Коші-Буняковського (2.5), отримуємо (2.8).

Продифференціював рівність (2.10), знаходимо, що

$$u'(x) - u'_h(x) = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_s^t \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} d\xi ds = \int_s^t \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} d\xi.$$

Тоді

$$|u'(x) - u'_h(x)| \leq \int_s^t \left| \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right| d\xi \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right| d\xi \leq$$

$$\leq \left\{ \int_{x_{i-1}}^{x_i} 1^2 d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right|^2 d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} = h_i^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right|^2 d\xi \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Отже,

$$|u'(x) - u'_h(x)|^2 \leq h_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right|^2 d\xi$$

і

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |u'(x) - u'_h(x)|^2 dx \leq h_i^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right|^2 d\xi. \quad (2.12)$$

Підсумовуючи по $i = \overline{1, n}$ нерівності (2.11), (2.12) і застосовуючи нерівність Коші-Буняковського (2.5), отримуємо (2.9). \square

РОЗДІЛ 3

СУПЕРЗБІЖНІСТЬ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Протягом останніх 3-4 десятиліть метод скінченних елементів (МСЕ) широко використовується для чисельного розв'язання диференціальних рівнянь. Для наближених розв'язків, отриманих за допомогою МСЕ, відомі апріорні та апостеріорні оцінки. Зокрема, існують оцінки інтегрального характеру, які представляють собою деяку інтегральну норму відхилення наближеного розв'язку v від точного u . У випадку, коли білінійна форма задачі є коерцитивною, а точний розв'язок належить класу W_2^2 , апріорні оцінки можуть бути виражені у вигляді

$$\|u - v\|_{L^2} \leq Ch^2 \|f\|_{L^2},$$

$$\|u - v\|_{W_1^2} \leq Ch \|f\|_{L^2},$$

h — максимальний крок сітки, f -права частина рівняння, де константа C не залежить від u , v , f і h . Апостеріорні оцінки використовують наближений розв'язок, крім даних задачі. Дослідники також цікавляться явищем суперзбіжності, коли існують точки x_i , для яких різниця $u(x_i) - v(x_i)$ (або $\Delta u(x_i) - \Delta v(x_i)$) швидше прямує до нуля, ніж відповідна інтегральна норма відхилення. Як зауважується в [6].

Тим часом, виникає значний інтерес до випадків, коли в окремих точках спостерігається співпадіння між наближеним та точними рішеннями. Простий приклад такої ситуації - це одновимірна крайова задача Діріхле для рівняння $u'' = -f$. Якщо наближене рішення шукається у просторі кусково-афінних функцій, то значення вузлів сітки збігаються з значеннями точного рішення. Однак, якщо розглядати, скажімо, кусково-кубічні функції і вимагати безперервності першої похідної, то вказане явище вже не спостерігається. Замість того, щоб змінювати простір кінцевих елементів, можна, навпаки, варіювати саме рівняння. Наприклад, для одновимірного рівняння Гельмгольца зазначені значення можуть відрізнитися значно, що пов'язано

з характерним для цього рівняння, коли вирішується звичайним методом скінченних елементів, явищем так званим "ефектом забруднення" (див. [7]). Суть цього ефекту полягає в розходженні наближеного рішення, отриманого методом Гальоркіна для кінцевих елементів, при інтерполяції точного рішення в тому ж скінченновимірному просторі (див. [4]).

У дослідженні, представленою у роботі [8], було висунуто концепцію, яку потім удосконалено в роботі [9], відому як узагальнений метод скінченних елементів (Generalized FEM або GFEM). Основна ідея цього методу полягає в урахуванні структури конкретного рівняння при побудові скінченновимірному простору. Функції форми (також відомі як інтерполяційні функції) цього простору можуть відрізнятися від звичайних многочленів. Важливо відзначити, що цей підхід в певному відношенні представляє собою "повернення" до методів Гальоркіна з не поліноміальними базисними функціями. Щодо суперзбіжності цього методу, в роботі [6] отримані загальні результати, де проведено теоретичне дослідження неоднорідної задачі Неймана для рівняння Пуассона в двовимірній області, а числові експерименти на одновимірній задачі ілюструють отримані результати. У цьому контексті ми розглянемо інший аспект.

Розглянемо першу крайову задачу для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{aligned} Lu \equiv -u'' + b(x)u' + c(x)u &= f, x \in (0; 1), \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Припустимо, що функція $f \in L^2(0; 1)$, $c \in L^\infty(0; 1)$, а $b(x)$ "кусочно- W_∞^1 ", що означає, що відрізок $(0; 1)$ можна розбити на кінцеве число відрізків $(x_k; x_{k+1})$, на кожному з яких $b(x)$ належить $W_\infty^1(x_k; x_{k+1})$. (Безперервності b на всьому $(0; 1)$ не потрібно.) Немає обмежень щодо знаків b і c , тобто відповідна білінійна форма може бути не коерцитивною. В такому випадку задача (1) може бути або нерозв'язною, або мати безліч рішень. Проте в багатьох практично важливих випадках можливо експериментально досліджувати оборотність оператора L в процесі числового знаходження розв'язку (див. [11], [12]). Таким чином, у цьому випадку це питання не є

вирішально важливим.

Узагальнена постановка задачі виражається наступним чином:

$$a(u, w) \equiv \int_0^1 [u'w' + b(x)u'w + c(x)uw] dx = \int_0^1 f(x)w dx. \quad (3.2)$$

Будемо наближено вирішувати задачу (1) методом Гальоркіна. Саме, виберемо M пробних функцій $\{\varphi_m(x)\}_{m=1}^M$ і стільки ж провірочних функцій $\{\psi_m(x)\}_{m=1}^M$, зажадавши при цьому, щоб кожна функція з обох серій належала простору $\overset{\circ}{W}_2(0; 1)$. (В цьому випадку, як відомо, M функції будуть безперервними.) Наближене рішення будемо шукати у вигляді

$$v(x) = \sum_{m=1}^M v_m \varphi_m(x).$$

У цьому дослідженні ми не будемо розглядати питання про збіжність методу Гальоркіна для розглянутого класу несамоспряжених та некоерцитивних білінійних форм $a(u, w)$. Наш інтерес буде зосереджений на тому, як можна досягти того, щоб отримане наближене рішення збігалось з точним у заданих наперед визначених точках. Зокрема, нехай задано безліч точок

$$0 = x_0 < \dots < x_{N-1} < x_N = 1.$$

Тут і далі будемо вважати, що серед них є всі точки розриву функції $b(x)$. Зажадаємо ще, щоб серед пробних функцій знайшлася система $\{\varphi_m\}_{m=1}^{N-1}$ (для зручності можна їх перенумерувати, щоб вони були першими), для якої існують лінійні комбінації, що задовольняють умовам

$$\sum_{m=1}^{N-1} \alpha_m^{(i)} \varphi_m(x_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N-1,$$

що, очевидно, рівносильно оборотності квадратної матриці $\{\varphi_m(x_n)\}_{m,n=1}^{N-1}$. Таким чином, за умови можливості розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гальоркіна, конкретний вибір іспитних функцій дозволить знаходження значень точного рішення в вказаних точках.

Доведемо спочатку наступну лему.

Лемма. *Заміна обраної лінійно незалежної системи пробних функцій $\{\varphi_m\}$ на інший базис породжуємого нею підпростору не впливає ні на можливість розв'язання СЛАР методу Гальоркіна, ні на вигляд одержуваного наближеного рішення.*

Доведення. Нехай $V \equiv \{v_1, \dots, v_M\}^T$ - координати функції v в вихідному базисі $\{\varphi_m\}$. Тоді СЛАР методу Гальоркіна виглядає так:

$a(\sum_{m=1}^M v_m \varphi_m, \psi_l) = f_l$, де a - це білінійна форма розглянутої задачі (див. (2)), $f_l = \int_0^1 f(x) \psi_l(x) dx$. Введемо в розгляд матрицю $A = \{A_{lm}\} = \{a(\varphi_m, \psi_l)\}$ і вектор $F = \{f_l\}^T$. Тоді СЛАР набуде вигляду $AV = F$. Перейдемо від базису $\{\varphi_m\}$ до базису $\{\tilde{\varphi}_m\}$. Позначимо також вектор-рядок старого базису $\{\varphi_m(x)\}$ через φ , вектор-рядок нового базису $\{\tilde{\varphi}_m(x)\}$ - через $\tilde{\varphi}$, а відповідну матрицю переходу - через Φ , так що $\tilde{\varphi} = \varphi \Phi^{-1}$. Тоді матриця білінійної форми в новому базисі буде мати вигляд

$\tilde{A} = (\tilde{A}_{lm}) = a(\tilde{\varphi}_m, \psi_l) = A\Phi^{-1}$ а новий вектор координат $\tilde{V} = \Phi V$. Як видно, в силу оборотності матриць переходу СЛАР відносно коефіцієнтів розкладу наближеного рішення по старому базису залишається колишньою: $A\Phi^{-1}\Phi V \equiv AV = F$. Лема доведена.

Для побудови повірочних функцій введемо в розгляд оператор L^* , пов'язаний з L в сенсі Лагранжа (див., Наприклад, [13, с. 64]): $L^*w \equiv -w'' - (b(x)w)' + c(x)w$.

Припустимо, що на кожному інтервалі $(x_{n-1}; x_n)$, $i = 1, 2, \dots, N$, однорідна крайова задача Дирихле для оператора L^*

$$L^*\psi(x) = 0, \psi(x_{n-1}) = \psi(x_n) = 0. \quad (3.3)$$

має тільки тривіальне рішення, тобто число 0 не є власним значенням цих операторів на жодному з цих відрізків. (Втім, як відомо, це рівносильно однозначній розв'язності задачі для оператора L .) Тоді однозначно розв'язні і крайові задачі

$$L^*\psi_n^{(1)}(x) = 0, \psi_n^{(1)}(x_{n-1}) = 1, \psi_n^{(1)}(x_n) = 0 \quad (3.4)$$

i

$$L^* \psi_n^{(2)}(x) = 0, \psi_n^{(2)}(x_{n-1}) = 0, \psi_n^{(2)}(x_n) = 1 \quad (3.5)$$

Виберемо тепер перевірочні функції наступним чином, узагальнюючи звичайні для традиційного методу скінченних елементів кусочно-афінні функції. Нехай для $n = 1, 2, \dots, N - 1$

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \psi_n^{(2)}(x), & \text{якщо } x \in [x_{n-1}; x_n]; \\ \psi_{n+1}^{(1)}(x), & \text{якщо } x \in [x_n; x_{n+1}]; \\ 0, & \text{при інших } x. \end{cases} \quad (3.6)$$

Легко бачити, що, в силу умов (4), (5), функції $\{\psi_m(x)\}_{m=1}^{N-1}$ неперервні на відрізку $[0; 1]$ і є базисом Лагранжа в утвореному ними підпросторі простору $\overset{\circ}{W}_2(0; 1)$, тобто $\psi_m(x_n) = \delta_{mn}$, $m, n = 1, 2, \dots, N - 1$.

Розглянемо спочатку випадок $M = N - 1$, тобто припустимо, що вся система перевірочних функцій задається формулами (6) і що пробних функцій $\varphi_m(x)$ рівно стільки ж.

Теорема. *Нехай вірно наступне:*

- 1) диференціальна задача в узагальненій постановці (2) однозначно розв'язна;
- 2) задачі (3) для всіх відрізків $(x_{n-1}; x_n)$, $n = 1, 2, \dots, N$, мають тільки тривіальне рішення;
- 3) пробні функції належать $\overset{\circ}{W}_2(0; 1)$ (відзначимо, що перевірочні належать цьому простору з побудови);
- 4) існують лінійні комбінації $\tilde{\varphi}_m(x) = \sum_{n=1}^{N-1} \alpha_n^{(m)} \varphi_n(x)$ пробних функцій, що задовольняють умовам $\tilde{\psi}_m(x_n) = \delta_{mn}$, $m, n = 1, 2, \dots, N - 1$ (звідси, зокрема, випливає лінійна незалежність як системи зазначених лінійних комбінацій, так і вихідної системи функцій $\{\varphi_m(x)\}$);
- 5) СЛАР методу Гальоркіна з вибраними функціями $\{\varphi_m(x)\}_{m=1}^{N-1}$, і $\{\psi_m(x)\}_{m=1}^{N-1}$, побудованими за формулою (6), однозначно розв'язна.

Тоді вірні рівності

$$v(x_n) = u(x_n), n = 0, 1, \dots, N.$$

Доведення. Насамперед зазначимо, що граничні умови виконані в силу п. 3 умови теореми. Тепер будемо вважати, що в якості пробних функцій обрані $\tilde{\varphi}_m(x)$. В силу доведеною вище лемі (до речі, матриця Φ , що фігурує в лемі, буде дорівнювати $\{\Phi_{mn}\} = \{\varphi_n(x_m)\}$), це не вплине на можливість розв'язання кінцевовимірної задачі і на значення наближеного рішення $v(x)$. Збережемо за цими функціями старе позначення $\varphi_m(x)$. У цьому випадку коефіцієнт v_m в розкладанні наближеного рішення $v(x) = \sum_{m=1}^{N-1} v_m \varphi_m(x)$ буде дорівнювати $v(x_m)$. Запишемо тепер СЛАР методу Гальоркіна:

$$a(v, \psi_l) = \int_0^1 f(x) \psi_l(x) dx, l = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (3.7)$$

Так як точне рішення u теж задовольняє узагальненій постановці задачі, маємо

$$a(u, \psi_l) = \int_0^1 f(x) \psi_l(x) dx, l = 1, 2, \dots, N - 1,$$

та можемо переписати (7) у вигляді

$$a(v, \psi_l) = a(u, \psi_l), l = 1, 2, \dots, N - 1.$$

У розгорнутому вигляді ця система виглядає так:

$$\int_0^1 [v' \psi_l' + b(x) v' \psi_l + c v \psi_l] dx = \int_0^1 [u' \psi_l' + b(x) u' \psi_l + c u \psi_l] dx$$

Згадаймо, що на кожному відрізку $b(x) \in W_\infty^1(x_{n-1}; x_n)$. Тому ψ_l як рішення пов'язаних задач типу (4) належать W_2^2 в кожному з відрізків $(x_{n-1}; x_n)$ (див. [14]; хоча на всіх $[0; 1]$ лише $\overset{\circ}{W}_2^1$), отже, можна провести

інтегрування по частинах, що призводить до рівнянь

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^N \int_{x_{n-1}}^{x_n} [-v\psi_l'' - v(b(x)\psi_l)' + cv\psi_l] dx + \\
& \sum_{n=1}^N \{v(x_n)[\psi_l'(x_n - 0) - b(x_n - 0)\psi_l(x_n)] - v(x_{n-1})[\psi_l'(x_{n-1} + 0)\psi_l(x_{n-1})]\} = \\
& = \sum_{n=1}^N \int_{x_{n-1}}^{x_n} [-u\psi_l'' - u(b(x)\psi_l)' + cu\psi_l] dx + \\
& \sum_{n=1}^N \{u(x_n)[\psi_l'(x_n - 0) - b(x_n - 0)\psi_l(x_n)] - u(x_{n-1})[\psi_l'(x_{n-1} + 0)\psi_l(x_{n-1})]\} \\
& \tag{3.8}
\end{aligned}$$

Тут інтеграли розбиті по відрізках, щоб підкреслити, що функції ψ_l мають другу похідну лише на кожному з інтервалів, але не на всьому проміжку цілком, оскільки вже перші похідні ψ_l' розривні в точках x_n . Функція $b(x)$ теж може мати там розриви. З цієї ж причини ми використовуємо для ψ_l' і b символи граничних значень. Функції ж u , v і ψ_l безперервні усюди в $[0; 1]$, оскільки $u, v \in W_2^1(0; 1)$, а ψ_l - з побудови. З огляду на те, що на кожному відрізку $(x_{n-1}; x_n)$ функції $\psi_l(x)$ з побудови задовольняють однорідному рівнянню $L^*\psi_l = 0$, переписуємо систему рівнянь (8) у вигляді

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^N \{v(x_n)[\psi_l'(x_n - 0) - b(x_n - 0)\psi_l(x_n)] - v(x_{n-1})[\psi_l'(x_{n-1} + 0)\psi_l(x_{n-1})]\} = \\
& \sum_{n=1}^N \{u(x_n)[\psi_l'(x_n - 0) - b(x_n - 0)\psi_l(x_n)] - u(x_{n-1})[\psi_l'(x_{n-1} + 0)\psi_l(x_{n-1})]\} \\
& \tag{3.9}
\end{aligned}$$

Тепер врахуємо, що, з одного боку, $\{v(x_m)\}_{m=1}^{N-1}$ представляють собою коефіцієнти v_m в розкладанні наближеного рішення $v(x)$ по $\varphi_m(x)$ (в силу вибору $\varphi_m(x)$, про що сказано на початку доведення), а з іншого - що до системи (9) ми прийшли шляхом тотожних перетворень вихідної системи (7) методу Гальборкіна, яка, за умовою, однозначно розв'язна. Значить, однозначно розв'язна і система (9), що розглядається як система щодо $v_m \equiv v(x_m)$. (Зауважимо, що $v(x_0) = v(x_N) = 0$ і невідомими не є. Також $u(x_0) = u(x_N) = 0$.) Очевидно, що числа $v(x_m) = u(x_m)$ є рішенням системи. В силу єдиності її рішення, $v_m \equiv v(x_m)$ необхідно збігаються з $u(x_m)$. Теорема доведена.

РОЗДІЛ 4

АПОСТЕРІОРНІ ОЦІНЮВАЧІ

4.1. Апостеріорні оцінювачі похибок та їхні характеристики

Теорема 4.1 (Про апроксимативність просторів кусково- поліноміальних функцій високих порядків). *Нехай простір апроксимацій MSE V_{hp} побудовано на рівномірній сітці з кроком h і однаковим степенем поліномів p на кожному зі скінченних елементів, тоді для кожного $v \in V$ існує $v_{hp} \in V_{hp}$ такий, що:*

$$\|v - v_{hp}\|_{H^1(\Omega)} \leq C \frac{h^\chi}{p^{m-1}} \|v\|_{H^{m+1}(\Omega)}, \quad m \geq 1 \quad (4.1)$$

де $C = C(m) > 0$, $\chi = \min\{p, m-1\}$. *Наведена оцінка є оптимальною. Якщо ж сітка вузлів нерівномірна і степені поліномів на елементах змінні, то, при деяких додаткових припущеннях (щодо розташування примежового шару), для кожного $v \in V$ можна побудувати таку сітку і вибрати степені поліномів у такий спосіб, що знайдеться елемент $v_{hp} \in V_{hp}$, для якого виконується оцінка:*

$$\|v - v_{hp}\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1 \exp \left[-C_2 \sqrt[3]{N_{dof}} \right] \quad (4.2)$$

де $C_1, C_2 = const$, $N_{dof} = \dim v_{hp}$.

Одним із важливих недоліків апріорних оцінок похибок, які підтверджують оцінки (4.1) та (4.2), є те, що вони включають константи, значення яких в більшості випадків не відомі. Незважаючи на цю обставину, апріорні оцінки залишаються дуже корисними в теорії та практиці, оскільки дозволяють провести якісний аналіз збіжності методу, встановити його швидкість та порядок збіжності, а також дослідити можливості точності наближення невідомої функції за допомогою елементів певного простору апроксимацій. Однак для практичної реалізації методу скінчених елементів нам необхідно мати точний рецепт для оцінки похибки.

Ключовим аспектом у пошуку такого рецепту є використання вже знайденого наближення при оцінці похибки. Ця ідея видається обґрунтованою, оскільки при оцінці якості апроксимації можна припускати, що сама апроксимація містить у собі практично всю інформацію, необхідну для оцінки похибки. Перше серйозне дослідження апостеріорних оцінювачів похибок (АОП) було проведено в роботах таких вчених, як [4].

Для загального порівняння та аналізу АОП вводяться важливі характеристики, такі як "ефективність" та "надійність". Розглянемо ці поняття більш докладно.

Нехай знайдено наближення МСЕ u_h . Позначаючи точний розв'язок як u , похибка знайденого наближення становить $e = u - u_h$. Нехай задано деяку норму $\|\cdot\|$, в якій ми хочемо оцінити похибку e . Розглянемо апостеріорний оцінювач похибки $\eta = \eta(u_h) \geq 0$.

Оцінювач η називають надійним, якщо існує (відома) константа $k_R > 0$ така, що:

$$\|e\| \leq k_R \eta \quad (4.3)$$

Оцінювач η називають ефективним, якщо існує константа $k_E > 0$ така, що:

$$\|e\| \geq k_E \eta \quad (4.4)$$

Зміст умови (4.3) очевидний: якщо задано допустимий рівень похибки TOL , то величину $k_R \eta$ можна використовувати для контролю точності апроксимації МСЕ, оскільки виконання умови $k_R \eta < TOL$ гарантуватиме, що точна похибка апроксимації не більша, ніж TOL : $\|e\| < TOL$.

Бачимо, що з (4.3) та (4.4) отримуємо

$$k_E \leq \frac{\|e\|}{\eta} \leq k_R. \quad (4.5)$$

Важливою умовою для (4.4) є близькість константи k_e до k_R , оскільки цей факт впливає на "оперативність" зупинки алгоритму МСЕ при досягнен-

ні відповідної точності, наприклад, при рівномірному згущенні сітки. Якщо сталі k_e та k_R значно відрізняються за величиною, то це може призводити до великого значення різниці $k_R\eta - |e|$. Навіть після досягнення фактичної точності $|e| < TOL$, алгоритм буде продовжувати виконувати додаткові кроки згущення сітки, доки не буде виконана умова $k_R\eta \leq TOL$. Саме цю властивість називають ефективністю оцінювача.

Використання АОП як індикатора повної похибки для побудови схем МСЕ на рівномірних сітках, у багатьох реальних задачах не є практично доцільним. Особливо це стосується ситуацій, коли розв'язок задачі має складну структуру, наприклад, в разі сингулярно збурених задач ДКР. В таких випадках густина вузлів рівномірної сітки, яка б забезпечила гарантовану точність для такої складної структури, стає занадто великою. Це призводить до великих обчислювальних витрат, оскільки розмірність систем лінійних рівнянь, що виникають в процесі роботи алгоритму, стає надто великою, і такі схеми стають практично не застосовними.

Для вирішення проблеми відтворення складної структури розв'язку, природнім рішенням є використання нерівномірних сіток, які гущіші в областях задачі, де локальна похибка апроксимації є вищою. У такому випадку виникає проблема побудови АОП, які дали б оцінку похибки не на всій області Ω , а, наприклад, на окремих скінченних елементах або навіть на певних підобластях області Ω .

Часто розглядають поелементні оцінювачі (індикатори) η_K та відповідний глобальний оцінювач η , які пов'язані співвідношенням:

$$\eta^2 = \sum_K \eta_K^2 \quad (4.6)$$

Для локальних оцінювачів також розглядають аналогічні характеристики, такі як надійність і ефективність.

У випадку одновимірного обчислення, простий алгоритм адаптації сітки полягає в тому, щоб на кожній ітерації алгоритму розділити на дві половини скінченні елементи \tilde{K} , і вибрати елемент, індикатор похибки для якого максимальний серед усіх елементів сітки:

$$\eta_{\hat{K}} = \max_K \eta_k \quad (4.7)$$

Для умови зупинки адаптації використовується глобальний індикатор η так, як було описано раніше. До цього моменту були наведені абстрактні характеристики та поняття, які стосуються оцінювачів похибки. На завершення цього розділу розглянемо задачу оцінки похибки наближення до розв'язку варіаційної задачі:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{знайти функцію } u \in v := H^1(\Omega) \text{ таку, що} \\ c_\Omega(u, v) = \langle l_\Omega, v \rangle \quad \forall v \in V, \end{array} \right. \quad (4.8)$$

де

$$\begin{aligned} c_\Omega(u, v) &:= (\mu u', v')_\Omega + Pe \cdot \left[(\beta u', v)_\Omega + St \cdot (\sigma u, v)_\Omega \right] \\ &\quad + \alpha uv|_{t=0} + \gamma uv|_{t=1} \quad \forall u, v \in V, \\ \langle l_\Omega, v \rangle &:= (f, v)_\Omega + \alpha g_0 v(0) + \gamma g_1 v(1) \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

У рівнянні (4.8), де $(u, v)_\Omega = \int_\Omega uv dx$ представляє собою скалярний добуток в просторі $L^2(\Omega)$, ми покажемо, як ця задача про похибку може служити основою для побудови апостеріорних оцінювачів похибки (АОП).

Припустимо, що маємо деяку апроксимацію $u_h \in v_h$ для розв'язку u задачі (4.8). Розглядаючи похибку $e = u - u_h$, і використовуючи лінійність форми c_Ω щодо обох її аргументів, а також рівняння (4.8), можемо записати:

$$c_\Omega(e, v) = c_\Omega(u - u_h, v) = c_\Omega(u, v) - c_\Omega(u_h, v) = \langle l_\Omega, v \rangle - c_\Omega(u_h, v) \quad (4.9)$$

Враховуючи останнє співвідношення та властивість ортогональності Гальоркіна, ми позначимо $v_h^\perp := \{v \in v | c_\Omega(v, w) = 0 \forall w \in V_h\}$. Тепер сформулюємо варіаційну задачу про похибку:

$$\begin{cases} \text{знайти функцію похибки } e \in V_h^\perp \text{ таку, що} \\ c_\Omega(e, v) = \langle \rho_\Omega(u_h), v \rangle \quad \forall v \in V_h^\perp \end{cases} \quad (4.10)$$

де

$$\langle \rho_\Omega(u_h), v \rangle := \langle l_\Omega, v \rangle - c_\Omega(u_h, v) \quad (4.11)$$

Функціонал $\rho_\Omega(u_h)$ називається функціоналом джерел похибки, і фактично він представляє собою репрезентацію нев'язки вихідного диференціального рівняння.

Очевидно, що якщо дані задачі (4.8) задовольняють умови теореми Лакса-Мільграма-Вишика, то задача (4.10) також буде коректно поставленою, і буде виконуватися наступна оцінка:

$$\|e\|_v \leq \frac{1}{c_0} \|\rho_\Omega(u_h)\| \quad (4.12)$$

З виразу (4.12) можна вивести, що величину $\|\rho_\Omega(u_h)\|$ можна розглядати як апостеріорний оцінювач похибки (АОП) з константою надійності $k_R = \frac{1}{c_0}$.

Важливо відзначити, що для побудови локальних індикаторів похибки, задачу (4.10) також розглядають на окремому скінченному елементі, але з урахуванням певних додаткових крайових умов.

4.2. Типи АОП

Глобальні апостеріорні оцінювачі, подібні до виразу (4.12), називаються "явними". Це пояснюється тим, що права частина нерівності (4.12) надає конкретний вираз для обчислення оцінки похибки у певній нормі. Такі оцінювачі були систематично досліджені Babuska. Основною перевагою їх є відносна простота програмної реалізації. Недоліком може бути відсутність загального підходу до гнучкої настройки точності оцінювача. Щодо оцінювача (4.12), важливо відзначити, що обчислення норми функціонала зазвичай зводиться до розв'язування системи лінійних рівнянь, і ця опера-

ція може бути досить витратною залежно від розмірності системи. З цього приводу, можна спробувати додатково оцінити зверху вираз (4.12) до норми функціонала джерела похибки $\|\rho_{\Omega}(u_h)\|$. Це типовий підхід, і під час такої оцінки також може бути використана декомпозиція глобального оцінювача на поелементні частини.

Ідея побудови "неявних" оцінювачів надає можливість уникнути недоліків, які були описані раніше. Центральним елементом цього підходу є варіаційна задача про похибку (4.10). Варто відзначити, що ця задача має схожу структуру та складність з вихідною задачею, і для її наближеного розв'язку також можна використовувати метод скінченних елементів (МСЕ). Знаючи наближення до точного розв'язку похибки, можна легко обчислити числові значення потрібних норм та інших величин. Враховуючи відносну обчислювальну складність обчислення похибки за цим методом, слід враховувати такі критерії, які допоможуть побудувати простий в обчисленні неявний оцінювач:

- 1) АОП має бути *локальним*, тобто він повинен обчислюватись на окремому скінченному елементі. Для досягнення цього, задачу (4.10) можна подати у вигляді схожих локальних підзадач. Важливо відзначити, що існують також АОП, які спеціально розробляються для обчислення оцінювача на певній області, що складається з декількох суміжних елементів.
 - 2) Якщо ми шукаємо похибку у вигляді функції в певному просторі кусково-поліноміальних функцій, то цей простір для пошуку похибки повинен містити в собі простір апроксимацій основної задачі.
 - 3) Зазвичай також вимагають, щоб обчислювальна складність знаходження всіх локальних оцінок похибки не перевищувала складність побудови глобальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) для вихідної задачі методом середньоквадратичних помилок (МСЕ)
- Зазначені вимоги є загальними і стосуються всіх типів оцінювачів.

Ієрархічні оцінювачі отримують оцінку похибки, використовуючи апроксимації, знайдені на вкладених просторах. З метою зменшення обчислювальних витрат, простір, в якому знаходять наступну апроксимацію, подають у вигляді суми двох підпросторів: початкового, на якому була

знайдена вихідна апроксимація, та відповідного ортогонального доповнення. З урахуванням такої декомпозиції, потрібно знаходити лише компоненту необхідної покращеної апроксимації з цього ортогонального доповнення. Також у цьому випадку використовують декомпозицію оцінювача на локальні складові, як і в неявних оцінювачах, зазначених вище.

Оцінювачі на основі усереднення градієнту дозволяють отримати оцінку похибки, використовуючи градієнт знайденої апроксимації. Наприклад, формула для обчислення глобального оцінювача може бути подана наступним чином:

$$\eta^2 = \int_{\Omega} |G[u_h] - \nabla u_h|^2 dx \quad (4.13)$$

де $G[u_h]$ - це неперервна інтерполяційна функція, побудована на вузлах сітки скінченних елементів. Значення цієї функції визначаються як середні значення градієнту на сусідніх елементах. Зауважте, що ∇u_h є розривною функцією в цьому контексті.

На завершення цього пункту важливо зауважити, що дуже часто є потреба знаходити не сам розв'язок задачі, а лише певні величини, які обчислюються на основі цього розв'язку. Наприклад, у випадку задачі про міграцію домішок може бути важливим визначити потік домішок через границю певної заданої області. Тому не завжди потрібно шукати похибку для всієї апроксимації методом середньоквадратичних помилок (МСЕ); часто доцільно будувати оцінки лише для похибки величини, яку ми визначаємо або обчислюємо.

4.3. Явний оцінювач для h_r -адаптивних апроксимацій

У цьому пункті для початку розглянуто побудову типового явного АОП для задачі:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\text{Задано коефіцієнт дифузії } \bar{\mu} = \bar{\mu}(x), \\
\text{вектор конвективного перенесення } \bar{\beta} = \bar{\beta}(x), \\
\text{коефіцієнт біохімічного розпаду } \bar{\sigma} = \bar{\sigma}(x), \\
\text{інтенсивність джерел домішки } \bar{f} = \bar{f}(x) \text{ та} \\
\text{сталі } \bar{\alpha}, \bar{\gamma}, \bar{g}_0, \bar{g}_L \in \mathbb{R}. \\
\text{Знайти функцію } u = u(x) \text{ таку що} \\
-\frac{d}{dx} \left(\bar{\mu} \frac{du}{dx} \right) + \bar{\sigma} u = \bar{f} \text{ на } G = (0, L), \\
\bar{\mu} \frac{du}{dx} \Big|_{x=0} = \bar{\alpha} [u(0) - \bar{g}_0], \\
-\bar{\mu} \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = \bar{\gamma} [u(L) - \bar{g}_L].
\end{array} \right. \quad (4.14)$$

Далі буде побудовано новий апостеріорний оцінювач похибки, який безпосередньо враховує інформацію про порядок використаного скінченного елемента. Цей оцінювач буде використано в наступному розділі для створення адаптивної схеми методу середньоквадратичних помилок (МСЕ).

Для зручності розглянемо задачу (4.14), проте з перепозначеними коефіцієнтами:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\text{Знайти функцію } u = u(x) \text{ таку, що} \\
-(\mu u')' + \sigma u = f \text{ в } \Omega = (0, L) \\
(\mu u') \Big|_{x=0} = \alpha [u(0) - \bar{u}_0] \\
-(\mu u') \Big|_{x=L} = \gamma [u(L) - \bar{u}_L]
\end{array} \right. \quad (4.15)$$

Стандартним способом отримуємо варіаційне формулювання задачі (4.15):

$$\left\{ \begin{array}{l}
\text{знайти функцію } u \in V := H^1(\Omega) \text{ таку, що} \\
a(u, v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in V
\end{array} \right. \quad (4.16)$$

де

$$a(u, v) := \int_0^L [\mu u' v' + \sigma uv] dx + \alpha u(0)v(0) + \gamma u(L)v(L) \quad u, v \in V \quad (4.17)$$

$$\langle l, v \rangle := \int_0^L f v dx + \alpha \bar{u}_0 v(0) + \gamma \bar{u}_L v(L) \quad \forall v \in V \quad (4.18)$$

Відповідна дискретизована задача МСЕ має вигляд:

$$\begin{cases} \text{знайти елемент } u_h \in V_h \subset V, \dim V_h < +\infty \text{ такий, що} \\ a(u_h, v_h) = \langle l, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h \end{cases} \quad (4.19)$$

де V_h є простором кусково-поліноміальних функцій, що побудований на сітці скінченних елементів $\Upsilon_h = \{K_i\}_{i=1}^N$, $\bar{K}_i := [x_{i-1}, x_i]$, $h_i = h_k := \text{diam} K_i$, $h := \max_{1 \leq i \leq N} h_i$, з вузлами $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = L$.

При побудові явних оцінювачів часто також, як і в неявних, використовується задача про похибку (4.10). Нехай $V_h^\perp := \{v \in V | a(v, w) = 0 \quad \forall w \in V_h\}$. У термінах задачі (4.16) ми отримуємо таку задачу про похибку:

$$\begin{cases} \text{знайти функцію похибки } e \in V_h^\perp \text{ таку що} \\ a(e, v) = \langle \rho(u_h), v \rangle \quad \forall v \in V_h^\perp \end{cases} \quad (4.20)$$

де $e = u - u_h$, а функціонал джерела похибки визначається наступним чином:

$$\langle \rho(u_h), v \rangle := \langle l, v \rangle - a(u_h, v) \quad (4.21)$$

Запишемо рівняння для похибки із (4.20) в розгорнутому вигляді:

$$a(e, v) = \langle l, v \rangle - a(u_h, v) = \int_0^L \left[f v - \mu u_h' v' - \sigma u_h v \right] dx + \quad (4.22)$$

$$+ v(0) \alpha [\bar{u}_0 - u_h(0)] + v(L) \gamma [\bar{u}_L - u_h(L)]$$

Виконуючи декомпозицію інтегралу у (4.22) на поелементні складові та застосовуючи інтегрування частинами, прийдемо до наступної рівності:

$$a(e, v) = \sum_{K \in \Upsilon} \int_K \left[f + (\mu u_h')' - \sigma u_h \right] v dx - \sum_{k=1}^N v \mu u_h' \Big|_{x=x_{k-1}+0}^{x=x_k-0} \quad (4.23)$$

$$+ v \alpha [\bar{u}_0 - u_h] \Big|_{x=x_0} + v \gamma [\bar{u}_L - u_h] \Big|_{x=x_N}$$

Перегрупувавши доданки у другій сумі в останній рівності, отримаємо:

$$a(e, v) = \sum_{K \in \Upsilon} \int_K R[u_h] v dx + \sum_{k=1}^{N-1} \left[u_h'(x+0) - u_h'(x-0) \right] v \mu \Big|_{x=x_k} \quad (4.24)$$

$$+ v \alpha [\bar{u}_0 - u_h] \Big|_{x=x_0} + v \gamma [\bar{u}_L - u_h] \Big|_{x=x_N}$$

де

$$R[u_h] := f + (\mu u_h')' - \sigma u_h \quad (4.25)$$

Використовуючи властивість ортогональності

$$c_\Omega(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h \quad (4.26)$$

маємо

$$a(e, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h \quad (4.27)$$

Нехай $v_h := I_h v \in V_h$ є деяким інтерполянтом для v , побудованим на визначеній раніше системі вузлів $\{x_i\}_{i=0}^N$.

Враховуючи (4.27), отримуємо таке рівняння:

$$a(e, v) = a(e, v - I_h v) \quad \forall v \in V \quad (4.28)$$

Тепер, беручи до уваги, що $(v - I_h v)(x_i) = 0$, обираючи v у рівності (4.24) як $v - I_h v$, приходимо до наступного фундаментального співвідношення:

$$a(e, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K R[u_h](v - I_h v) dx \quad \forall v \in V \quad (4.29)$$

Зокрема, у випадку $v := e$ з останнього співвідношення отримаємо

$$a(e, e) = \int_0^L R[u_h](e - I_h e) dx = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K R[u_h](e - I_h e) dx \quad (4.30)$$

Зараз, шляхом використання різноманітних оцінок для правого виразу в нерівностях (4.29) та (4.30), можемо отримувати певні АОП. Припустимо, що білінійна форма $a \in V$ - еліптична з константою $a > 0$:

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V \quad (4.31)$$

Відомо, що оператор інтерпольовання I_h можна налаштувати таким чином, щоб на кожному скінченному елементі була виконана така оцінка:

$$\|v - I_h v\|_{L^2(K)} \leq Ch_k \|v\|_{H^1(K)} \quad \forall v \in H^1(K) \quad (4.32)$$

де $C > 0$ - деяка константа, $h_k = \text{diam}(K)$.

Використовуючи нерівність (4.31) та нерівність Коші-Буняковського-Шварца (КБШ) для простору $L^2(K)$ до (4.30), можемо записати:

$$\begin{aligned}
\|e\|_V^2 &\leq \frac{1}{\alpha} a(e, e) \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \sum_{K \in \Upsilon} \left| \int_K R[u_h](e - I_h e) dx \right| \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \sum_{K \in \Upsilon} \|R[u_h]\|_{L^2(K)} \|e - I_h e\|_{L^2(K)} \\
&\leq \frac{C}{\alpha} \sum_{K \in \Upsilon} h_K \|R[u_h]\|_{L^2(K)} \|e\|_{H^1(K)} \\
&\leq \left\{ \begin{array}{l} \text{нерівність КБШ} \\ \text{для } \mathbb{R}^{\dim(V_h)} \end{array} \right\} \leq \frac{C}{\alpha} \left(\sum_{K \in \Upsilon} h_K^2 \|R[u_h]\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|e\|_V
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Звідси отримуємо остаточної нерівність

$$\|e\|_V \leq \frac{C}{\alpha} \left(\sum_{K \in \Upsilon} h_K^2 \|R[u_h]\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.34}$$

Отже, використовуючи стандартну техніку, ми отримали глобальний явний АОП

$$\eta := \frac{C}{\alpha} \left(\sum_{K \in \Upsilon} h_K^2 \|R[u_h]\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{K \in \Upsilon} \frac{C^2}{\alpha^2} h_K^2 \|R[u_h]\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.35}$$

У цьому останньому виразі легко виділити локальні компоненти η_K , які обчислюються тільки на окремому скінченному елементі (див. в 4.6):

$$\eta_K := \frac{C}{\alpha} h_K \|R[u_h]\|_{L^2(K)} \tag{4.36}$$

Отриману величину η_K , яка визначається формулою (4.36), можна розглядати як локальний оцінювач апостеріорної похибки. Константу α у формулі (4.36) також можна оцінити. Щодо оцінки для константи C , то це можливо, але в даній роботі ми не будемо розглядати її, оскільки для потреб

адаптації ми будемо використовувати інший метод оцінки. Важливо відзначити, що отриманий локальний оцінювач може не завжди давати коректну оцінку локальної похибки $\|e\|_{H^1(K)}$. Це особливо стосується ситуацій, коли задача має сингулярності і примежевий шар недостатньо точно врахований через локальне згущення сітки. Незважаючи на це, типово використовувати η_K в алгоритмах адаптації як індикатор локальної похибки наближення.

Оцінювач (4.36) є загальноприйнятим і широко використовується в аналізі чисельних методів. Ця загальна схема, на основі якої він був отриманий, також часто застосовується для різних типів рівнянь та для задач більших розмірностей. Більше того, ця схема буде використана пізніше для побудови іншого оцінювача апостеріорної похибки.

Слід відзначити, що у формулу (4.36) дійсно входить розмір скінченного елемента (крок сітки). Априорні оцінки, подібні до (4.1), наводять на думку про те, що при використанні апроксимацій високого порядку для отримання кращих оцінок варто будувати апостеріорні оцінювачі, які враховують порядок апроксимації. Далі буде розглянуто побудову такого оцінювача. Позначимо $\omega_K(x) := (x_k - x)(x - x_{k-1})$.

Теорема 4.2 (про локальний інтерполянт). *Існує оператор інтерполювання $I_h : V \rightarrow V_h$ (побудований на сітці вузлів $\{x_i\}_{i=0}^N$) такий, що на кожному скінченному елементі $K = [x_{k-1}, x_k]$ виконуються такі нерівності $\forall v \in H^1(K)$:*

$$\left\| \frac{v - I_h v}{\sqrt{\omega_K}} \right\|_{L^2(K)} \leq \frac{1}{\sqrt{p(p+1)}} \| (v - I_h v)' \|_{L^2(K)} \quad (4.37)$$

$$\| (I_h v)' \|_{L^2(K)} \leq \| v' \|_{L^2(K)} \quad (4.38)$$

де $p = \deg(I_h v)$.

Теорема 4.3. [2] *На кожному скінченному елементі $K = [x_{k-1}, x_k]$ $\forall v \in H^1(K)$ виконується така нерівність:*

$$\left| \int_K R[u_h](v - I_h v) dx \right| \leq \frac{2}{\sqrt{p(p+1)}} \|\sqrt{\omega_K} R[u_h]\|_{L^2(K)} \|v'\|_{L^2(K)} \quad (4.39)$$

де I_h – оператор інтерполявання з попередньої теореми, $p = \deg(I_h v)$

Доведення. [2]

Варто відзначити, що явні оцінювачі надають фіксовану оцінку похибки. У наступному пункті розглянуто інший тип оцінювачів - неявні апостеріорні оцінювачі.

Ці неявні оцінювачі дозволяють отримувати наближення до похибки з будь-якою заданою точністю шляхом збільшення обчислювальних витрат. Більше того, вони дозволяють знайти похибку у вигляді функції, а не лише числової оцінки.

4.4. Неявні оцінювачі типу Діріхле

Розглянемо задачу про похибку (4.20). Цю задачу, подібно до основної (4.16), можна розв'язати за допомогою методу скінченних елементів. Відповідна дискретизована за Гальоркіним задача має такий вигляд:

$$\begin{cases} \text{знайти наближення до похибки } e_h \in E_h \subset V_h^\perp, \dim E_h < +\infty \text{ таке, що} \\ a(e_h, w_h) = \langle \rho(u_h), w_h \rangle \quad \forall w_h \in E_h \end{cases} \quad (4.40)$$

Ми можемо використовувати величину $\eta = \|e_h\|_V$ (або, наприклад, $\eta = \|e_h\|_{E,\Omega}$, де $\|v\|_{E,\Omega} = \sqrt{a(v,v)}$ - енергетична норма задачі) як глобальний оцінювач похибки. Це означає, що ми оцінюємо похибку на всій області.

Очевидно, що локальні індикатори похибки можна отримати, розглядаючи поелементно визначені норми, які виражені як $\eta_K = \|e_h\|_H^1(K)$. Це означає, що ми оцінюємо похибку на кожному окремому скінченному елементі. Такий підхід дозволяє отримати більш докладну інформацію про похибку та допомагає визначити, на яких елементах похибка найбільша.

На практиці, розв'язування задачі (4.40) для знаходження локальних індикаторів похибки може бути дуже витратним, оскільки складність цієї задачі не менша, ніж складність розв'язання основної варіаційної задачі. Завданням є знайти аналог задачі про похибку, який би дозволив отримати оцінку похибки на окремому скінченному елементі.

Розглянемо елемент $K = [x_{k-1}, x_k]$ та простір $H^1(K)$. Припустимо, що добутки $\mu e'$ та $\mu u'_h$ є неперервними в деякому околі границі скінченного елемента, тобто, очевидно, що:

$$\mu e' \Big|_{[x_{k-1}, x_{k-1} + \delta]} \in H^1([x_{k-1}, x_{k-1} + \delta]), \quad \mu e' \Big|_{[x_k - \delta, x_k]} \in H^1([x_k - \delta, x_k]) \quad (4.41)$$

та

$$\mu u'_h \Big|_{[x_{k-1}, x_{k-1} + \delta]} \in H^1([x_{k-1}, x_{k-1} + \delta]), \quad \mu u'_h \Big|_{[x_k - \delta, x_k]} \in H^1([x_k - \delta, x_k]) \quad (4.42)$$

Для деякого $\delta > 0$. Зафіксуємо довільну функцію $w \in H^1(\Omega)$ (з властивостей інтеграла Лебега очевидно отримуємо, що $w \Big|_K \in H^1(K)$) та визначимо послідовність функцій $\phi_n \in H^1(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$, причому $\phi_n|_K \in H_0^1(K) = \{v \in H^1(K) | v|_{\delta K} = 0\}$, у такий спосіб:

$$\phi_n(x) = \begin{cases} nw(x_{k-1} + \frac{1}{n})(x - x_{k-1}), & x \in [x_{k-1}, x_{k-1} + \frac{1}{n}], \\ w(x), & x \in (x_{k-1}, x_{k-1} + \frac{1}{n}), \\ nw(x_k - \frac{1}{n})(x_k - x), & x \in [x_k - \frac{1}{n}, x_k], \\ 0, & x \in \Omega \setminus K \end{cases} \quad (4.43)$$

Запишемо тепер варіаційне рівняння для похибки (4.20) у розгорнутій формі:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \left[\mu e' v' + \sigma e v \right] dx + \alpha u(0) v(0) + \gamma u(L) v(L) \\
&= \int_0^L \left[f v - \mu u_h' v' - \sigma u_h v \right] dx \\
&+ v(0) \alpha [\bar{u}_0 - u_h(0)] + v(L) \gamma [\bar{u}_L - u_h(L)], \quad \forall v \in V
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Прийmemo $v = \phi_n$ (4.44). Отримаємо:

$$\int_K \left[\mu e' \phi_n' + \sigma e \phi_n \right] dx = \int_K \left[f \phi_n - \mu u_h' \phi_n' - \sigma u_h \phi_n \right] dx \tag{4.45}$$

Врахувавши тепер (4.43), останнє рівняння можна переписати так:

$$\begin{aligned}
& \int_{x_{k-1}+1/n}^{x_k-1/n} \left[\mu e' w' + \sigma e w \right] dx + \int_{\substack{[x_{k-1}, x_{k-1}+1/n] \\ \cup [x_k-1/n, x_k]}} [\sigma e] \phi_n dx + \\
&+ n w(x_{k-1} + 1/n) \int_{x_{k-1}}^{x_{k-1}+1/n} \mu e' dx - n w(x_k - 1/n) \int_{x_k-1/n}^{x_k} \mu e' dx \\
&= \int_{x_{k-1}+1/n}^{x_k-1/n} \left[f w - \mu u_h' w' - \sigma u_h w \right] dx + \int_{\substack{[x_{k-1}, x_{k-1}+1/n] \\ \cup [x_k-1/n, x_k]}} [f - \sigma u_h] \phi_n dx + \\
&+ n w(x_k - 1/n) \int_{x_k-1/n}^{x_k} \mu u_h' dx - n w(x_{k-1} + 1/n) \int_{x_{k-1}}^{x_{k-1}+1/n} \mu u_h' dx
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Враховуючи абсолютну неперервність інтеграла Лебега (у перших двох інтегралах з кожного боку рівності) та припущення (4.41 - 4.42), ми можемо скористатися теоремою про середнє значення (mean value theorem) для усіх інших інтегралів.

Після цього, ми можемо перейти до границі при $n \rightarrow \infty$ у виразі (4.46). Ця операція дозволяє нам отримати асимптотичну поведінку виразу при $n \rightarrow \infty$.

Отримаємо:

$$\begin{aligned} & \int_K [\mu e' w' + \sigma e w] dx - \mu e' w \Big|_{x=x_{k-1}}^{x=x_k} \\ &= \int_K [f w - \mu u'_h w' - \sigma u_h w] dx + \mu u'_h w \Big|_{x=x_{k-1}}^{x=x_k} \end{aligned} \quad (4.47)$$

При врахуванні того, що $e = u - u_h$, ми можемо скоротити однакові доданки у виразі та після перегрупування отримати остаточне локальне рівняння для похибки на скінченному елементі K :

$$\int_K [\mu e' w' + \sigma e w] dx = \int_K [f w - \mu u'_h w' - \sigma u_h w] dx + \mu u'_h w \Big|_{x=x_{k-1}}^{x=x_k} \quad (4.48)$$

Зауважимо, що в правій частині отриманого рівняння фігурує невідома величина u' . Припускаючи, що функція u має поточково визначену похідну, природно за апроксимацію останньої величини у вузлах сітки взяти усереднене значення похідної від знайденого наближення МСЕ. Таким чином, ми приймаємо:

$$u'(x) \approx \langle u'_h \rangle (x) := \frac{1}{2} [u'_h(x-0) + u'_h(x+0)] \quad (4.49)$$

Враховуючи довільність вибору функції $w \in H^1(K)$, ми отримали таку нескінченновимірну наближену локальну варіаційну задачу про похибку методу скінчених елементів на скінченному елементі $K = [x_{k-1}, x_k]$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{знайти наближення до похибки } e \in H^1(K) \text{ таке, що} \\ \int_K [\mu e' w' + \sigma e w] dx \\ = \int_K [f w - \mu u'_h w' - \sigma u_h w] dx + \mu \langle u'_h \rangle w \Big|_{x=x_{k-1}}^{x=x_k} \quad \forall w \in H^1(K) \end{array} \right. \quad (4.50)$$

Дискретизована за Гальоркіним локальна задача про похибку має вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{знайти наближення до похибки } e_h \in E_h^K \subset H^1(K), \dim E_h^K < +\infty \text{ таке, що} \\ \int_K [\mu e_h' w_h' + \sigma e_h w_h] dx \\ = \int_K [f w_h - \mu u_h' w_h' - \sigma u_h w_h] dx + \mu \langle u_h' \rangle w_h \Big|_{x=x_{k-1}}^{x=x_k} \quad \forall w_h \in E_h^K \end{array} \right. \quad (4.51)$$

Очевидно, що задача про похибку (4.50) відповідає певній крайовій задачі Неймана. Узагальнено вона може не мати розв'язку. На практиці, часто розглядають задачу (4.50) (по суті відповідно і (4.51)), у якій, замість $H^1(K)$, вибирають деякий більш обмежений підпростір.

Далі всі неявні оцінювачі будуть побудовані на основі локальної задачі Діріхле, припускаючи, що апроксимація є точною у вузлах сітки. В такому разі, дискретизована задача про похибку на окремому скінченному елементі матиме вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{знайти наближення до похибки} \\ e_h \in E_h^K \subset H_0^1(K), \dim E_h^K < +\infty \text{ таке що} \\ a_K(e_h, w_h) = \langle l_k, w_h \rangle - a_K(u_h, w_h) \quad \forall w_h \in E_h^K \end{array} \right. \quad (4.52)$$

де використано такі позначення:

$$a_K(u, v) := \int_K [\mu u' v' + \sigma uv] dx \quad \forall u, v \in H_0^1(K) \quad (4.53)$$

$$\langle l_k, v \rangle := \int_K f v dx \quad \forall v \in H_0^1(K) \quad (4.54)$$

Припускаючи достатню гладкість відповідних функцій, ми виконаємо інтегрування частинами в правій частині рівності 4.52 в доданку з $\mu u_h' w_h'$. Це дасть нам рівняння в іншій формі:

$$a_K(e_h, w_h) = \int_K R[u_h] w_h dx \quad \forall w_h \in E_h^K \quad (4.55)$$

де $R[u_h]$ визначено відповідно до (4.25). Зауважимо, що задачу Діріхле (4.52) можна було б отримати безпосередньо з (4.40) за допомогою специфічного вибору скінченновимірному підпростору E_h :

$$E_h = \bigoplus_{K \in \Upsilon} \tilde{E}_h^K \quad (4.56)$$

де

$$\tilde{E}_h^K = \{v \in H^1(\Omega) \mid v|_K \in E_h^K \subset H_0^1(K), v|_{\Omega \setminus K} = 0, \dim E_h^K < +\infty\} \quad (4.57)$$

Бачимо, що $\dim E_h = \sum_{K \in \Upsilon} \dim E_h^K$. При такому виборі задача (4.40) очевидно розпадається на сукупність задач (4.52) для кожного скінченного елемента. Також важливо зазначити, що у випадку, коли $\dim E_h^K = 1$, можна безпосередньо отримати явні формули для обчислення АОП.

РОЗДІЛ 5

АПОСТЕРІОРНИЙ ОЦІНЮВАЧ З УСЕРЕДНЕННЯМ ГРАДІЄНТА НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ

Для вказівки помилок часто використовується підхід, заснований на порівнянні градієнта наближеного рішення ∇u_h і його осереднення $G(\nabla u_h)$.

Основні ідеї, що стоять за цим підходом, можна зручно продемонструвати на прикладі класичної крайової задачі

$$\Delta u + f \in \Omega \quad (5.1)$$

$$u = 0 \in \partial\Omega,$$

де Ω - обмежена з'єднана область в R^n з ліпшицевою границею $\partial\Omega$. Припустимо, що наближене рішення шукається в просторі V_{0h} . У цьому випадку $\nabla u_h \in Y$ є кусково-константною векторною функцією і належить простору $Y = L_2(\Omega, R^n)$. Однак точне рішення u насправді може мати підвищену гладкість (в теорії регулярності еліптичних крайових задач відомі умови, яким повинні відповідати вихідні дані, щоб розв'язок мав саме таку гладкість). У цьому випадку відповідний градієнт також має підвищену регулярність і належить множині $Y \in \tilde{Y}$, яка складається з функцій, що мають перші узагальнені похідні. При цьому можна очікувати, що відображення G , яке перетворює функцію $\nabla u_h \in Y$ в $\tilde{\nabla} u_h \in \tilde{Y}$, надасть більш якісну апроксимацію ∇u . Зрозуміло, що для цього оператор осередження G повинен відповідати ряду додаткових вимог.

Графіки, представлені на рисунку 5.1

- (1) Метод скінченних елементів наближення u
- (2) Градієнт u
- (3) Новий градієнт u , який позначається $G(u)$

Отриманий градієнт є кусково-лінійним, зі значеннями в вузлах, отриманих першою інтерполяцією градієнта наближення скінченних елементів в центроїди елементів, які розділяють вузол.

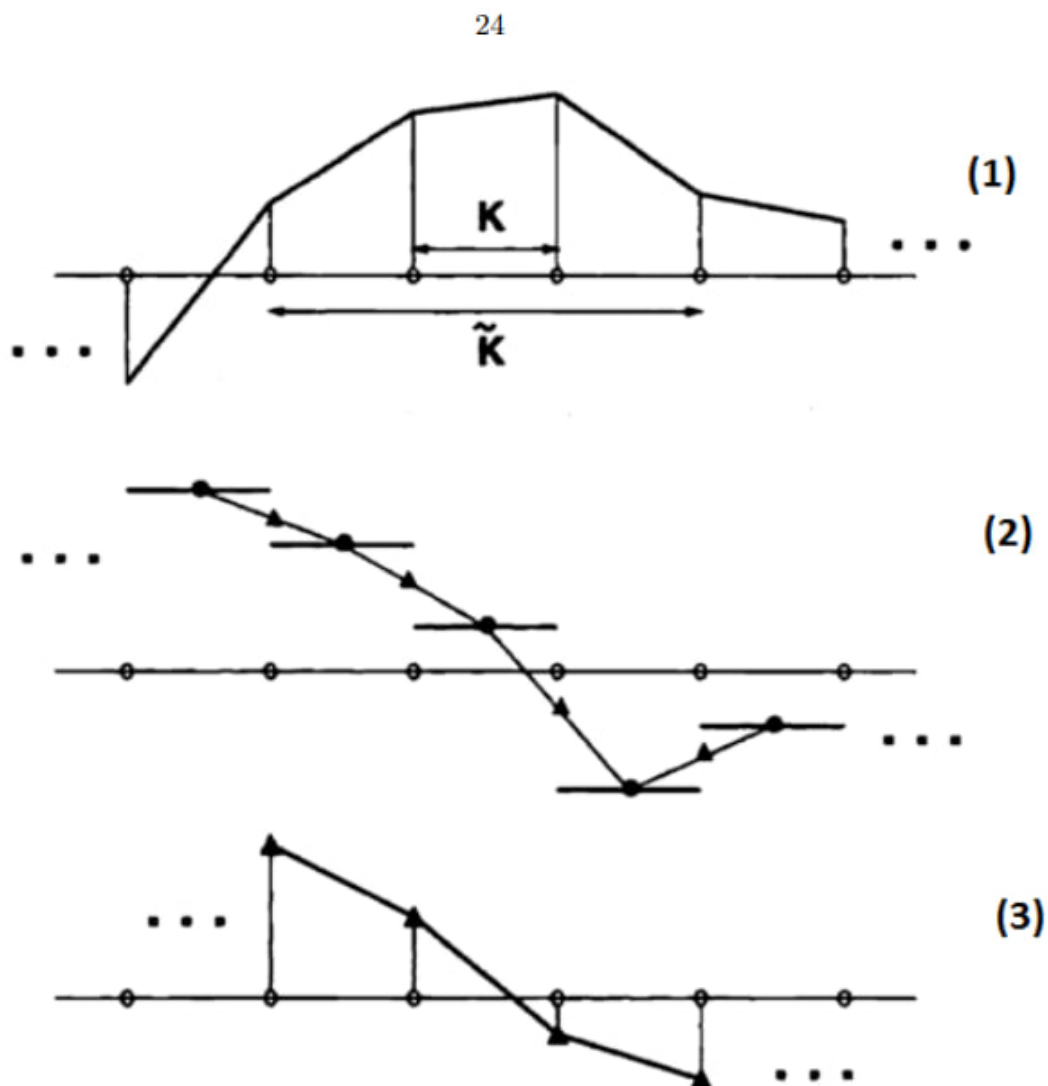


Рис. 5.1. Побудова оператора $G(u)$

Оцінник визначається як

$$\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} (G(u_h) - u'_h)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Причиною спрощення градієнта на центроїді елементів є те, що градієнт в центроїді збігається.

Багато робіт присвячено вивченню властивостей осереджених рішень. Було встановлено, що при наявності підвищеної гладкості рішення і виконанні ряду вимог, які пред'являються до G , спостерігається так званий ефект суперзбіжності. У цьому випадку процедура осередження підвищує

асимптотичну швидкість збіжності, так що

$$\|\nabla u - G(\nabla u_h)\| \leq C_1 h^{1+\alpha}, \alpha > 0 \quad (5.2)$$

Замість класичної оцінки

$$\|\nabla u - \nabla u_h\| \leq C_2 h \quad (5.3)$$

Виникаючі в цих оцінках константи C_1 і C_2 не залежать від h , але залежать від u . Також варто відзначити, що часто суперзбіжність спостерігається не в усьому обсязі, а лише в деяких його підобластях.

Оскільки

$$\|\nabla u_h - G(\nabla u_h)\| \leq \|\nabla(u - u_h)\| + \|\nabla u - G(\nabla u_h)\| \quad (5.4)$$

і

$$\|\nabla u_h - G(\nabla u_h)\| \geq \|\nabla(u - u_h)\| - \|\nabla u - G(\nabla u_h)\| \quad (5.5)$$

то в умовах суперзбіжності при достатньо малих h величина

$\|\nabla u_h - G(\nabla u_h)\|$ мало відрізняється від норми помилки. Дальші дослідження показали, що різниця між градієнтом наближеного рішення та його осередженням часто служить добрим індикатором помилки. Основною перевагою методу осередження градієнта є його виняткова простота та відсутність суттєвих додаткових витрат. Проте він має кілька недоліків. По-перше, явище суперзбіжності базується на підвищеній гладкості рішення і не завжди спостерігається. Навіть для простих еліптичних крайових задач рішення може не мати узагальнених похідних вищого порядку (наприклад, для областей з негладкими границями). Рішення нелінійних крайових задач (зокрема, варіаційних нерівностей) часто мають предельну регулярність, яка не залежить від гладкості зовнішніх даних. Крім того, дана технологія може бути застосована лише до галеркінських наближень або апроксимацій, що близькі до них.

РОЗДІЛ 6

АПОСТЕРІОРНІЙ ОЦІНЮВАЧ НА ОСНОВІ ЛОКАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ

6.1. Розв'язання локальної задачі методом скінченних елементів

Дослідимо процес побудови оцінювача, використовуючи локальну задачу Діріхле. Ми спробуємо знайти наближений розв'язок для модельної задачі методом скінченних елементів. Для цього спершу розглянемо локальну задачу Діріхле

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{на} \quad [x_{i-1}, x_i] \quad (6.1)$$

$$u(x_{i-1}) = u_h(x_{i-1}), \quad u(x_i) = u_h(x_i) \quad (6.2)$$

У цьому контексті u_{i-1} та u_i представляють значення скінченно-елементного розв'язку $u_h(x)$ в вузлах x_{i-1} та x_i відповідно. Для наближених розв'язків $u_h^{(i)}$ локальної задачі (6.1) - (6.2) ми використовуємо метод Бубнова-Гальоркіна зі скінченно-вимірним базисом (див 6.1):

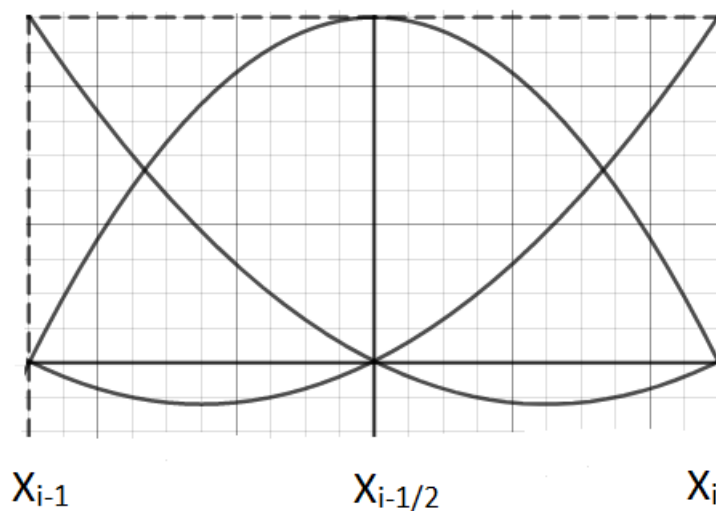


Рис. 6.1. Базисні функції для розв'язування локальної задачі Діріхле

$$\varphi_{i-1}(x) = -\frac{2}{h^2}(x - x_{i-\frac{1}{2}})(x - x_i),$$

$$\varphi_{i-\frac{1}{2}}(x) = -\frac{4}{h^2}(x - x_{i-1})(x - x_i),$$

$$\varphi_i(x) = \frac{2}{h^2}(x - x_{i-\frac{1}{2}})(x - x_{i-1}),$$

тобто

$$u_h^{(i)} = u_{i-1}\varphi_{i-1}(x) + u_{i-\frac{1}{2}}\varphi_{i-\frac{1}{2}}(x) + u_i\varphi_i(x).$$

Значення $u_{i-\frac{1}{2}}$ знайдемо з рівняння:

$$\begin{aligned} u_{i-\frac{1}{2}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi'_{i-\frac{1}{2}}(x) \varphi'_{i-\frac{1}{2}}(x) dx = \\ \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \varphi_{i-\frac{1}{2}}(x) dx - \\ u_{i-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi'_{i-\frac{1}{2}}(x) \varphi'_{i-1}(x) dx - \\ u_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi'_i(x) \varphi'_{i-\frac{1}{2}}(x) dx \end{aligned}$$

Тепер апостеріорний оцінювач похибки СЕ рішення $u_h(x)$ на СЕ $[x_{i-1}, x_i]$ визначимо наступним чином

$$\eta_i = \|u_h(x)|_{[x_{i-1}, x_i]} - u_h^{(i)}(x)\|_{L^2(x_{i-1}, x_i)}.$$

Зауважимо, що

$$u_h(x)|_{[x_{i-1}, x_i]} = u_{i-1} \frac{x - x_i}{-h} + u_i \frac{x - x_{i-1}}{h}$$

Побудова оцінювача для таких задач має сенс, оскільки в випадку скінченно-елементних задач розв'язок в вузлах сітки демонструє властивість суперзбіжності. Це означає, що наближений розв'язок, отриманий за допомогою скінченно-елементного методу, швидко зближається до точного розв'язку задачі при збільшенні розмірності сітки або ступеня складності елементів.

6.2. Розв'язання локальної задачі методом скінченних різниць

Для побудови апостеріорного оцінювача на скінченному елементі $[x_{i-1}, x_i]$ задача Діріхле

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \text{ на } (x_{i-1}, x_i), \\ u(x_{i-1}) = u_h(i-1), \quad u(x_i) = u_h(i) \end{cases} \quad (6.3)$$

Розв'язується методом скінченних різниць. Для знаходження шуканої функції у середній точці x_{i-1} проміжку $[x_{i-1}, x_i]$ маємо скінченно різницеву задачу:

$$\begin{cases} -\frac{u_{i-1} - 2u_{i-\frac{1}{2}} + u_i}{(\frac{h}{2})^2} = f(x_{i-\frac{1}{2}}), \\ u_{i-1} = u_h(i-1), \quad u_i = u_h(i) \end{cases} \quad (6.4)$$

де u_h - скінченно елементний розв'язок крайової задачі, $h = x_i - x_{i-1}$.

Апостеріорний оцінювач розв'язку u_h на скінченному елементі $[x_{i-1}, x_i]$ визначено так:

$$\eta_i = \left| \frac{u_h(i) + u_h(i-1)}{2} - u_{i-\frac{1}{2}} \right|. \quad (6.5)$$

РОЗДІЛ 7

ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

Як приклад для тестування була розглянута наступна задача Діріхле:

$$-u(x)'' = f(x), \quad (7.1)$$

$$u(-2) = 0, u(0) = 1 - \frac{1}{101}, \quad (7.2)$$

де

$$f(x) = -\frac{5000x^2}{(1+25x^2)^3} - \frac{50}{(25x^2+1)^2}.$$

Точний розв'язок цієї задачі

$$u(x) = \frac{1}{(1+25x^2)} - \frac{1}{101}. \quad (7.3)$$

Для задачі (7.1)-(7.2) було створено скінченно-елементну апроксимацію з використанням лінійних безперервних сплайнів на нерівномірній сітці. Знайдено скінченно-елементний розв'язок.

Апостеріорний оцінювач похибки скінченно-елементного розв'язку будувався на основі локальної задачі Діріхле на кожному скінченному елементі (відрізьку).

Локальну задачу Діріхле можна розв'язувати:

- 1) методом скінченних елементів з використанням квадратичних сплайнів;
- 2) методом скінченних різниць.

Розроблена програма мовою пакета MATLAB. Проведено обчислювальний експеримент.

Локальна задача розв'язувалась методом скінченних різниць.

Результати експерименту представлені на рисунках (7.1), (7.2) і (7.3). На цих рисунках показані графіки точного розв'язку u_t , скінченно-елементного розв'язку u_h та апостеріорного оцінювача для різних сіток. На рис. (7.1) наведені результати, отримані для рівномірної сітки на проміжку $[-2, 0]$ із

кроком $h = 0.2$. рис. (7.2) представляє перше згущення сітки, а рис. (7.3) — друге згущення сітки. За рис. (7.3) видно, що навіть після другого згущення сітки скінченно-елементний розв'язок практично збігається з точним. Отже, апостеріорний оцінювач, дозволяє ефективно адаптувати сітку для врахування поведінки розв'язку крайової задачі.

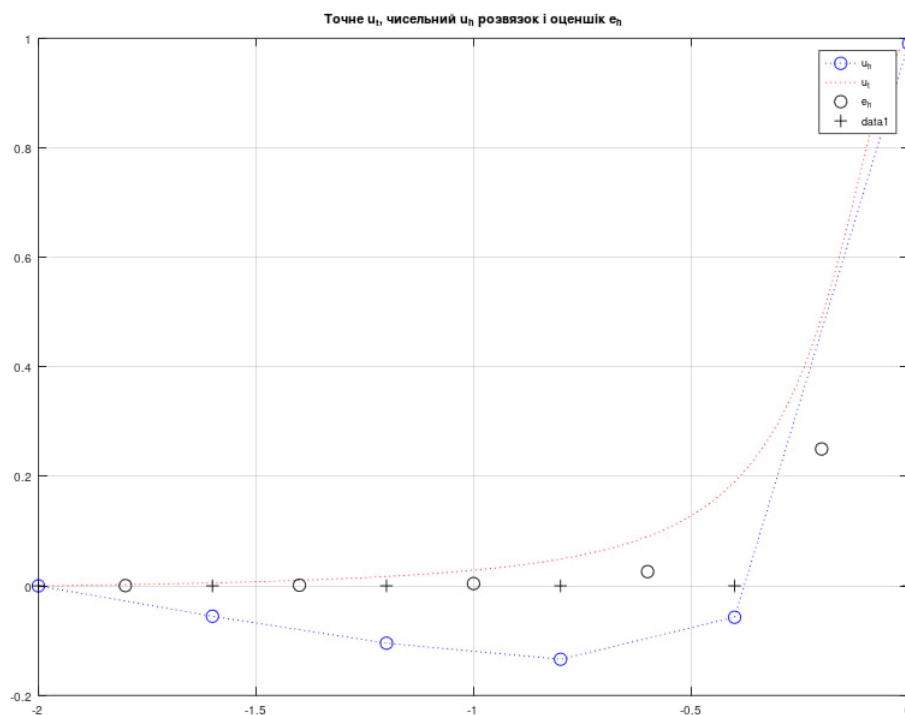


Рис. 7.1. Рівномірна сітка з кроком $h = 0.2$.

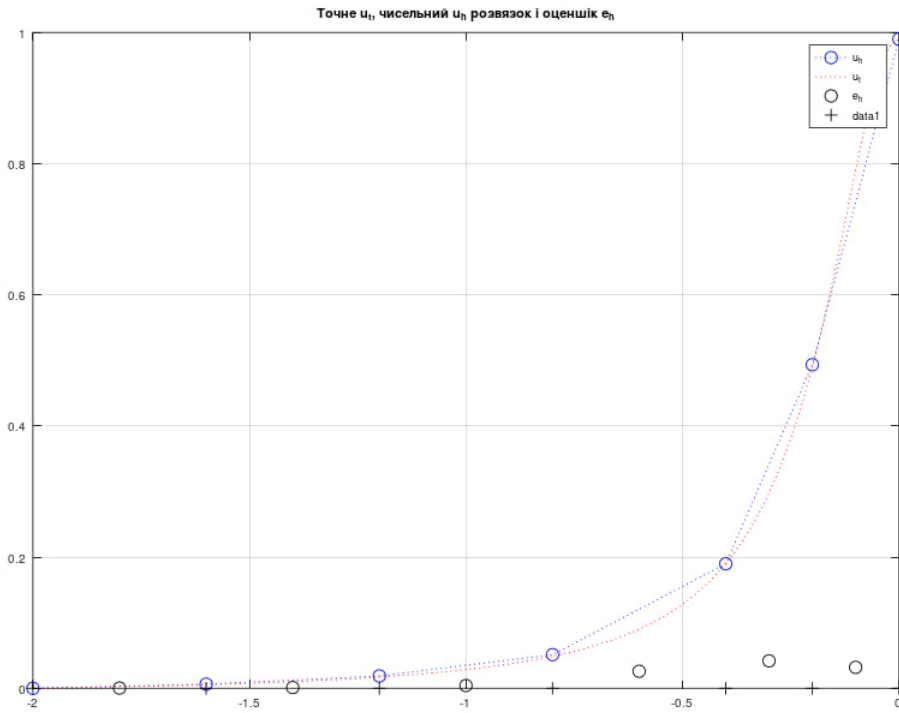


Рис. 7.2. Перше згущення сітки

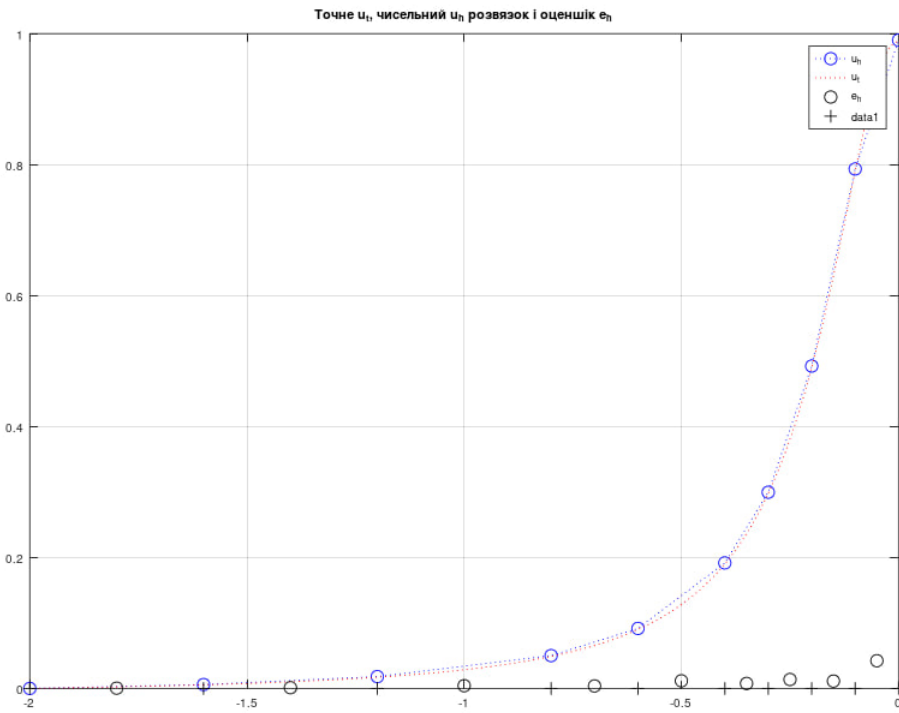


Рис. 7.3. Друге згущення сітки

Точний u_t , числовий u_h розв'язки і оцінювач e_h

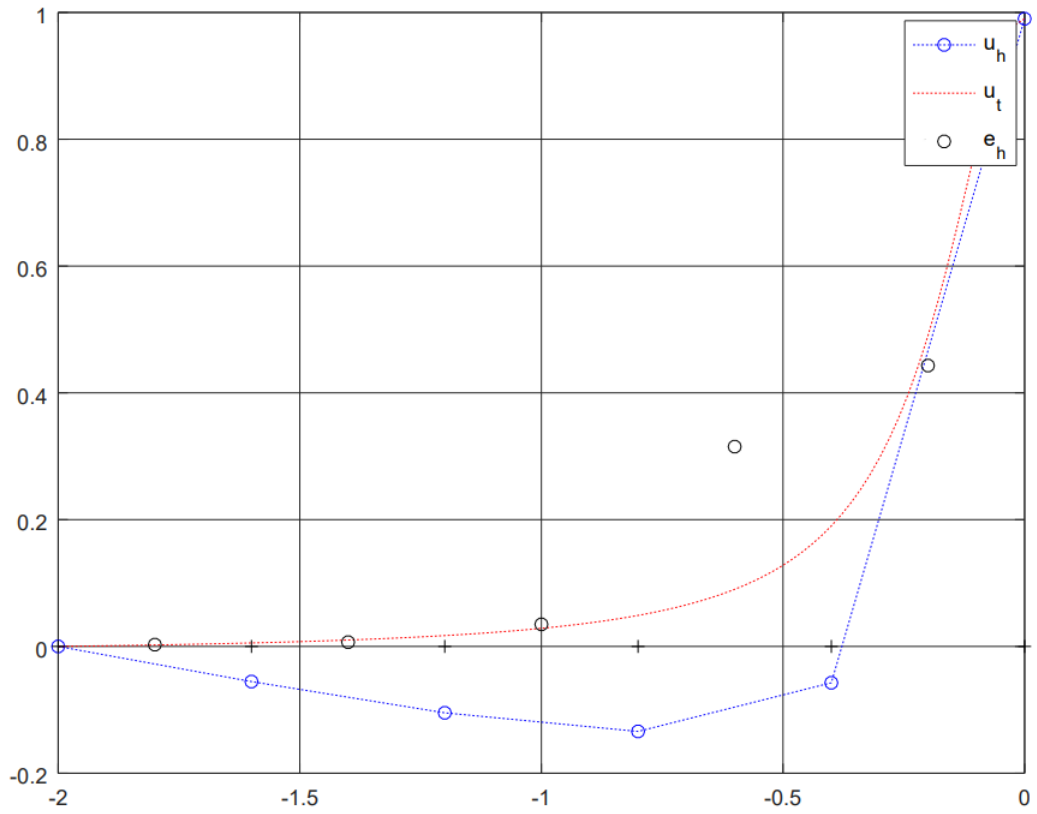


Рис. 7.4. Рівномірна сітка з кроком $h = 0.2$.

Точний u_t , числовий u_h розв'язки і оцінювач e_h

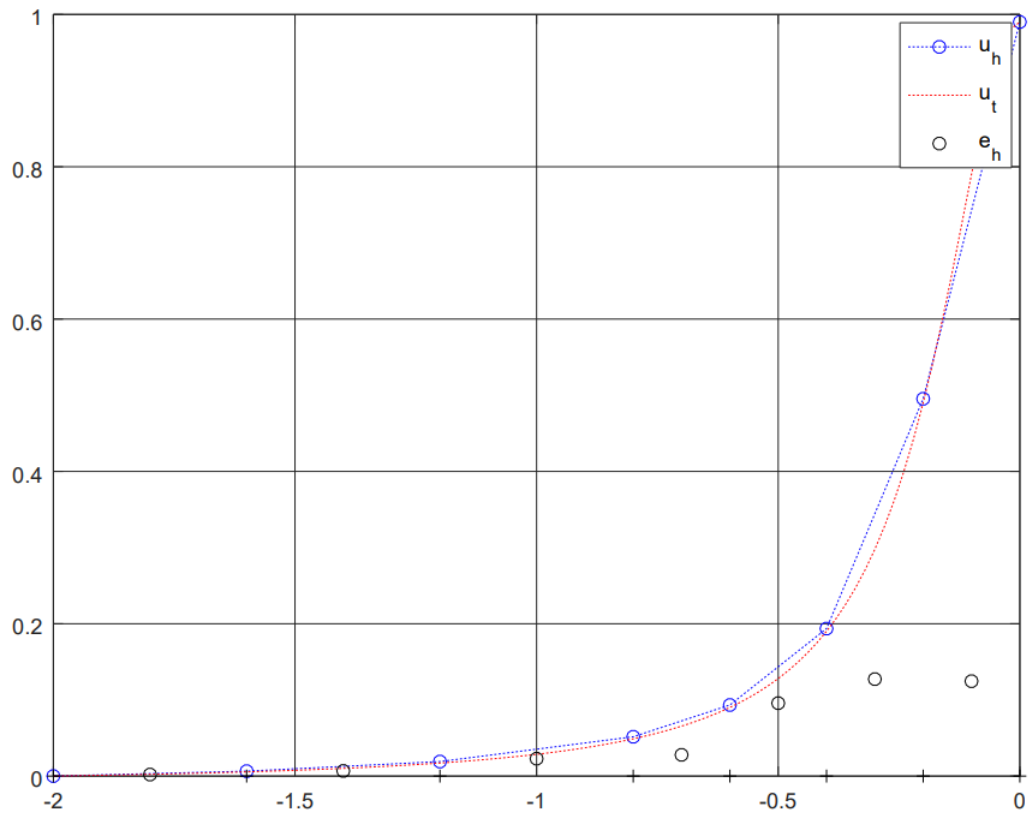


Рис. 7.5. Перше згущення сітки

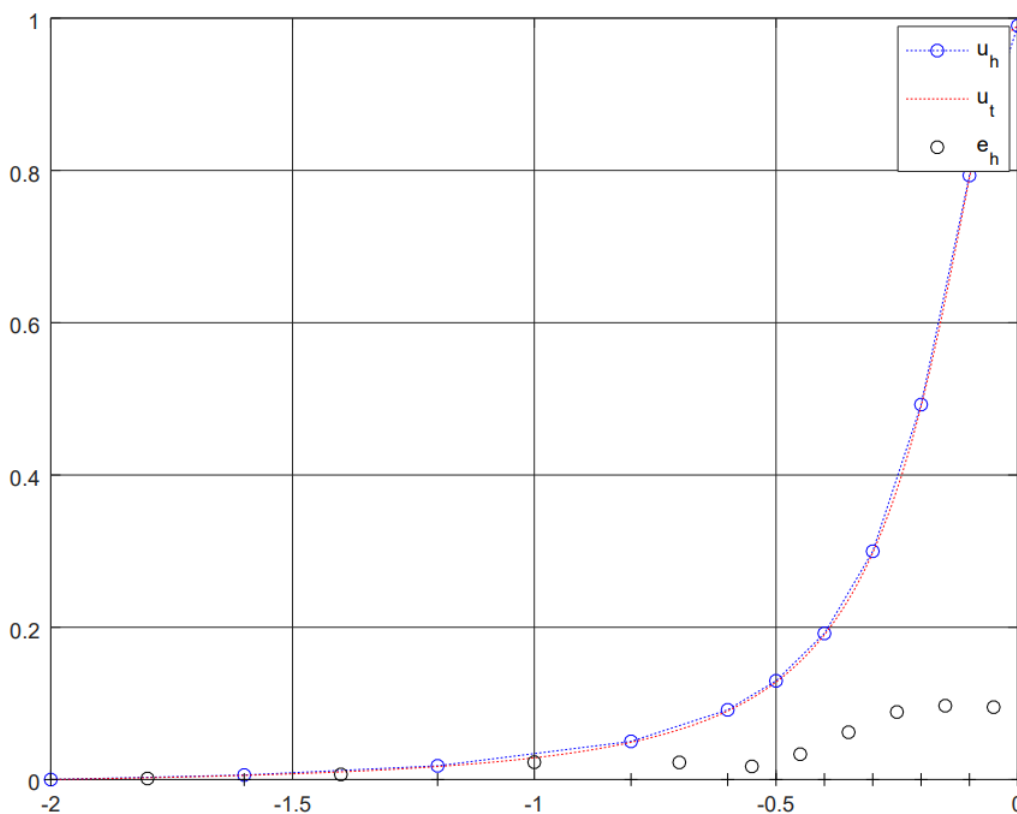
Точний u_t , числовий u_h розв'язки і оцінювач e_h 

Рис. 7.6. Друге згущення сітки

Для порівняння отриманих результатів, знайдено скінченно-елементний розв'язок задачі (7.1)-(7.2) з використанням апостеріорного оцінювача, що побудований з усередненням градієнту (див. рис. (7.4), (7.5) і (7.6)).

Згідно з отриманими результатами можна зробити висновок що оцінювачі дають порівняно однакові результати, але оцінювач на основі локальної задачі Діріхле будується простіше и крім того він дозволяє знаходити розв'язок шуканої задачі в середніх точках скінченного елемента

ВИСНОВКИ

У роботі описано побудову скінченно-елементної апроксимації для крайової задачі з діріхле-умовами другого порядку. Для цієї задачі була створена скінченно-елементна апроксимація, з використанням лінійних неперервних сплайнів на нерівномірній сітці. Знайдено скінченно елементний розв'язок. Розроблено апостеріорний оцінювач похибки скінченно-елементного розв'язку крайової задачі на основі локальної задачі Діріхле. Для порівняння був розглянуто оцінювач з використанням методу осереднення градієнта.

Для практичної реалізації цих методів був розроблений програмний додаток на мові пакету MATLAB. Цей додаток дозволяє знаходити наближений розв'язок задачі, адаптуючи сітку методу скінченних елементів до структури точного розв'язку. Такий підхід дозволяє досягнути точності і ефективності при чисельному моделюванні крайових задач другого порядку.

Згідно з отриманими результатами можна зробити висновок що оцінювачі дають порівняно однакові результати, але оцінювач на основі локальної задачі Діріхле будується простіше і, крім того, він дозволяє знаходити розв'язок шуканої задачі в середніх точках скінченного елемента

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вербіцький В.В. Введення в чисельні методи аналізу і диференціальних рівнянь: навчальний посібник / Вербіцький В.В., Реут В.В — Одеський національний університет імені І.І. Мечникова — — Одеса 2017.
2. Дреботій Р. Побудова та аналіз hp - адаптивних схем методу скінчених елементів для задач дифузії-конвекції-реакції / Дреботій Р. — Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук — Львів 2019
3. Шахно С. Чисельні методи лінійної алгебри / С. Шахно — Видавничий центр ЛНУ ім. І.Франка, Львів 2007
4. Ainsworth M. A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis / Ainsworth M., Tinsley OdenJ — Wiley, New York, 2000.
5. Asadzadeh M. An Introduction to the Finite Element Method for Differential Equations / Asadzadeh M. — John Wiley & Sons, Inc., 2021.
6. Babuska, Bauerjee U., O shorn J.E. Superconvergence in the generalized finite element method: Techn. Rep. 0545. Austin, Texas: TICAM, Univ. Texas, 2004. <http://www.ices.utexas.edu/research/reports/2005/0545.pdf>.
7. Babuska I.M., Sauter S. A. Is the pollution effect of the FEM avoidable for the Helmholtz equation considering high wave numbers? // SIAM J. Numer. Analys. 1997. V. 34. № 6. P. 2392-2423.
8. Babuska I., Caloz G., O shornJ. Special finite element methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients // SIAM J. Numer. Analys. 1994. V. 31. № 4. P. 945-981.
9. Babuska I., Melenk J.M. The partition of unity finite element method // Int. J. Numer. Meth. Engng. 1997. V. 40. № 4. P. 727-758.
10. Brenner S. The Mathematical Theory of Finite Element Methods / S. Brenner, L. Scott — Springer, 2008, 3ed *Carstensen C., Bartels S.* Each averaging technique yields reliable a posteriori error control in FEM on unstructured grids. I. Low order conforming, nonconforming, and mixed FEM // Math. Comp.— 2002. — Vol. 71. No. 239. P. 945–969
11. Demkowicz L. Computing with hp-ADAPTIVE FINITE ELEMENTS I. One- and Two-Dimensional Elliptic and Maxwell Problems / Demkowicz L.

- Institute for Computational Engineering and Sciences The University of Texas at Austin, 2005
12. Tinsley J. Oden — Applied Functional Analysis / Tinsley J. Oden, Leszek F. Demkovich — Textbooks in mathematics — CRC Press 2017
 13. Drebotiy R. Elementwise decomposition of a posteriori error estimator based on reference solution for hp-adaptive finite element method / Drebotiy R., Shynkarenko H. — Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. — Lviv, 2018
 14. Nečas J. Direct Methods in the Theory of Elliptic Problems / Nečas J. — Springer-Verlag — Berlin, 2012.
 15. Sung W. Lee Chung Finite Element Method for Solids and Structures: A Concise Approach / Sung W. Lee; Peter W. Chung — Cambridge University Press, 2021.
 16. Szabó B., Babuška I. Finite element analysis. Method, verification and validation. Second ed. — John Wiley & Sons, Inc., 2021. — 387 p.
 17. Thomée V. Galerkin finite element methods for parabolic problems, volume 25 of Springer Series in Computational Mathematics / Thomée V. — Springer-Verlag — Berlin, second edition, 2006.
 18. Verfürth R. Adaptive Finite Element Methods / Verfürth R. Lecture Notes Winter Term — Ruhr-Universität Bochum 2007/08.

Додаток А. Програма мовою пакету MATLAB з апостеріорним оцінювачем з осередненням градієнта

```

function apostn_av
param_frag=0.5;
a=-2; b=0;
n=5;
h=(b-a)/n;
h0=h/20;
wh=a:h:b;
wh0=a:h0:b;

u_t=yy(wh0);
ifig=0;
for i=1:3
    ifig=1+ifig;
    [u_h]=mke(wh);
    % u_t=yy(wh);

    [dwh,ee]=error_estimate(wh,u_h);
    figure(ifig)
    plot(wh,u_h,'bo:',wh0,u_t,'r:',dwh,ee,'ko');
    legend('u_h','u_t','e_h');
    grid on
    hold on
    y(1:length(wh))=0;
    plot(wh,y,'k+');
    [wh]=mesh_Fragmentation(ee,wh,param_frag);
end

end

function [wh]=mesh_Fragmentation(ee, wh,param_frag)

```

```

eemax=max(ee);
id=find(ee>eemax*param_frag);
m=length(id);
for i=m:-1:1
    ii=id(i);
    x=(wh(ii)+wh(ii+1))*0.5;
    n=length(wh);
    wh=[wh(1:ii),x,wh(ii+1:n)];
end
end

function [dwh,du_h]=Gradient_of_u_h(wh,u_h)
for i=2:length(wh)
    du_h(i-1)=(u_h(i)-u_h(i-1))/(wh(i)-wh(i-1));
    dwh(i-1)=(wh(i)+wh(i-1))/2;
end
end

function [adu_h]=AvGradient(wh,du_h,dwh)
adu_h(1)=0;
n=length(wh);
for i=2:n-1
    x0=dwh(i-1);x1=dwh(i);
    y0=du_h(i-1);y1=du_h(i);
    x=wh(i);
    adu_h(i)=y0+(y1-y0)/(x1-x0)*(x-x0);
end
adu_h(n)=0;
end

function [dw_h,ee]=error_estimate(wh,u_h)

[dw_h,du_h]=Gradient_of_u_h(wh,u_h);
[adu_h]=AvGradient(wh,du_h,dw_h)

```

```

n=length(wh);
for i=2:n-2;
    h=wh(i+1)-wh(i);
    ee(i)=sqrt(h/6*((adu_h(i)-du_h(i))^2+(adu_h(i+1)-du_h(i))^2));
end
ee(1)=sqrt(h/6*(2*(adu_h(2)-du_h(1))^2));
ee(n-1)=sqrt(h/6*(2*(adu_h(n-1)-du_h(n-1))^2));
end

```

```

function [u_h]=mke(wh)
n=length(wh)-2;
for i=2:n-1
    i0=i+1;
    hi0=wh(i0)-wh(i0-1);
    hi=wh(i0+1)-wh(i0);
    A(i,i)=1/hi0+1/hi;
    A(i,i-1)=-1/hi0;
    A(i,i+1)=-1/hi;
    % b(i)=(hi0+hi)/2*f(wh(i0));
    b(i)=(hi0)/6*(f(wh(i0))+2*f((wh(i0)+wh(i0-1))/2));
    b(i)=b(i)+(hi)/6*(f(wh(i0))+2*f((wh(i0)+wh(i0+1))/2));
end
i0=2;
hi0=wh(i0)-wh(i0-1);
hi=wh(i0+1)-wh(i0);
A(1,1)=1/hi0+1/hi;
A(1,2)=-1/hi;
%b(1)=(hi0+hi)/2*f(wh(i0));
b(1)=(hi0)/6*(f(wh(i0))+2*f((wh(i0)+wh(i0-1))/2));
    b(1)=b(1)+(hi)/6*(f(wh(i0))+2*f((wh(i0)+wh(i0+1))/2));
i0=n+1;
hi0=wh(i0)-wh(i0-1);
hi=wh(i0+1)-wh(i0);

```

```

A(n,n)=1/hi0+1/hi;
A(n,n-1)=-1/hi0;

% b(n)=(hi0+hi)/2*f(wh(i0));
b(n)=(hi0)/6*(f(wh(i0))+2*f((wh(i0)+wh(i0-1))/2));
    b(n)=b(n)+(hi)/6*(f(wh(i0))+2*f((wh(i0)+wh(i0+1))/2));
    b(n)= b(n)+yy(0)/hi0;
u_h=A\b';
u_h=[0;u_h;yy(0)];
end

```

```

function y=f(x)
y=-((5000*x^2)/(25*x^2 + 1)^3 - 50/(25*x^2 + 1)^2);
%y=2;
end

```

```

function y=yy(x)
%
%
y=1./(1+25.*x.*x)-1./101;
end

```

Додаток В. Програма мовою пакету MATLAB з апостеріорним оцінювачем на основі локальної задачі Діріхле

```

function dip_d1
param_frag=0.5;
a=-2; b=0;
n=5;
h=(b-a)/n;
h0=h/20;
wh=a:h:b;
wh0=a:h0:b;

u_t=yy(wh0);
ifig=0;
for i=1:3
    ifig=1+ifig;
    [u_h]=mke(wh);
    % u_t=yy(wh);

    [dwh,ee]=error_estimate1(wh,u_h)
    figure(ifig)
    plot(wh,u_h,'bo:',wh0,u_t,'r:',dwh,ee,'ko');
    legend('u_h','u_t','e_h');
    grid on
    title('Точне u_t, чисельний u_h розв'язок і оцeншiк e_h');
    hold on
    y(1:length(wh))=0;
    plot(wh,y,'k+');
    [wh]=mesh_Fragmentation(ee,wh,param_frag);
end

end

```

```

function [wh]=mesh_Fragmentation(ee, wh,param_frag)
eemax=max(ee);
id=find(ee>eemax*param_frag);
m=length(id);
for i=m:-1:1
    ii=id(i);
    x=(wh(ii)+wh(ii+1))*0.5;
    n=length(wh);
    wh=[wh(1:ii),x,wh(ii+1:n)];
end
end

```

```

function [dwh,du_h]=Gradient_of_u_h(wh,u_h)
for i=2:length(wh)
    du_h(i-1)=(u_h(i)-u_h(i-1))/(wh(i)-wh(i-1));
    dwh(i-1)=(wh(i)+wh(i-1))/2;
end
end

```

```

function [adu_h]=AvGradient(wh,du_h,dwh)
adu_h(1)=0;
n=length(wh);
for i=2:n-1
    x0=dwh(i-1);x1=dwh(i);
    y0=du_h(i-1);y1=du_h(i);
    x=wh(i);
    adu_h(i)=y0+(y1-y0)/(x1-x0)*(x-x0);
end
adu_h(n)=0;
end

```

```

function [dw_h,ee]=error_estimate(wh,u_h)

```

```

[dw_h,du_h]=Gradient_of_u_h(wh,u_h);
[adu_h]=AvGradient(wh,du_h,dw_h)
n=length(wh);
for i=2:n-2;
    h=wh(i+1)-wh(i);
    ee(i)=sqrt(h/6*((adu_h(i)-du_h(i))^2+(adu_h(i+1)-du_h(i))^2));
end
ee(1)=sqrt(h/6*(2*(adu_h(2)-du_h(1))^2));
ee(n-1)=sqrt(h/6*(2*(adu_h(n-1)-du_h(n-1))^2));
end

```

```

function [dw_h,ee]=error_estimate1(wh,u_h)

```

```

% Локальна задача Діріхле
% розв'язується методом
% скінченних різниць

```

```

n=length(wh);
for i=2:n
    h=wh(i)-wh(i-1);
    x_i12=wh(i-1)+h/2;
    dw_h(i-1)=x_i12;
    u_i=u_h(i-1);
    u_i1=u_h(i);
    u_i12=(h*h*f(x_i12)/4+u_i+u_i1)/2;
    ee(i-1)=abs((u_i+u_i1)/2-u_i12);
end
end

```

```

function [u_h]=mke(wh)

```

```

n=length(wh)-2;
for i=2:n-1

```

```

    i0=i+1;
    hi0=wh(i0)-wh(i0-1);
    hi=wh(i0+1)-wh(i0);
    A(i,i)=1/hi0+1/hi;
    A(i,i-1)=-1/hi0;
    A(i,i+1)=-1/hi;
    % b(i)=(hi0+hi)/2*f(wh(i0));
    b(i)=(hi0)/6*(f(wh(i0))+2*f((wh(i0)+wh(i0-1))/2));
    b(i)=b(i)+(hi)/6*(f(wh(i0))+2*f((wh(i0)+wh(i0+1))/2));
end
i0=2;
hi0=wh(i0)-wh(i0-1);
hi=wh(i0+1)-wh(i0);
A(1,1)=1/hi0+1/hi;
A(1,2)=-1/hi;
%b(1)=(hi0+hi)/2*f(wh(i0));
b(1)=(hi0)/6*(f(wh(i0))+2*f((wh(i0)+wh(i0-1))/2));
    b(1)=b(1)+(hi)/6*(f(wh(i0))+2*f((wh(i0)+wh(i0+1))/2));
i0=n+1;
hi0=wh(i0)-wh(i0-1);
hi=wh(i0+1)-wh(i0);
A(n,n)=1/hi0+1/hi;
A(n,n-1)=-1/hi0;

% b(n)=(hi0+hi)/2*f(wh(i0));
b(n)=(hi0)/6*(f(wh(i0))+2*f((wh(i0)+wh(i0-1))/2));
    b(n)=b(n)+(hi)/6*(f(wh(i0))+2*f((wh(i0)+wh(i0+1))/2));
    b(n)= b(n)+yy(0)/hi0;
u_h=A\b';
u_h=[0;u_h;yy(0)];
end

function y=f(x)

```

```
y=-((5000*x^2)/(25*x^2 + 1)^3 - 50/(25*x^2 + 1)^2);
```

```
%y=2;
```

```
end
```

```
function y=yy(x)
```

```
%
```

```
%
```

```
y=1./(1+25.*x.*x)-1./101;
```

```
end
```

