

УДК 511.13

Н. С. Просянюк

Одесский национальный университет им И.И. Мечникова

СУММА ТРЕХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ КУБОВ В АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Рекомендовано до друку науковим семінаром
“Деякі проблеми аналітичної теорії чисел” ОНУ 12.06.2000

Побудовано асимптотична формула для суматорної функції числа зображень натурально-го n добутком трьох невід’ємних кубів, коли n перебігає арифметичну прогресію з зростаючою різницею прогресії.

Построена асимптотическая формула для сумматорной функции для числа представлений натурального n суммой трех неотрицательных кубов, когда n пробегает арифметическую прогрессию с растущей разностью прогрессии.

The asymptotic formula for summator function of the number of representation of positive number n as a sum of three cubes of non-negative integers when n belongs to arithmetic progression is obtained.

Введение. В 1997 г. А. И. Виноградов [1] ввел в рассмотрение дзета-функцию Варинга, задаваемую рядом

$$\zeta_m(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_m(n)}{n^s} \quad (\operatorname{Re} s > 1), \quad (1)$$

где $V_m(n)$ означает количество представлений натурального n в виде $n = x_1^m + \dots + x_m^m$, x_i – целые неотрицательные числа. Используя оценки $\zeta_m(s)$, $m \geq 3$, А. И. Виноградов получил асимптотическую оценку сумматорной функции

$$\sum_{n \leq x} V_m(n) = \sum_{k=\left[\frac{m+1}{2}\right]}^m C_m(k) x^{\frac{k}{m}} + O\left(x^{1/2} \log^2 x\right). \quad (2)$$

В настоящей работе найдена асимптотическая формула для сумматорной функции для $V_3(n)$ в арифметической прогрессии.

Обозначим

$$V(n; l_1, l_2, l_3; q) = \sum_{(x_1q+l_1)^3 + (x_2q+l_2)^3 + (x_3q+l_3)^3 = n} 1. \quad (3)$$

Положим

$$\zeta_3(s; l_1, l_2, l_3; q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V(n; l_1, l_2, l_3; q)}{n^s}. \quad (4)$$

Из геометрической интерпретации $V(n; l_1, l_2, l_3; q)$ можно получить, что

$$\sum_{n \leq x} V(n; l_1, l_2, l_3; q) \ll \left(\frac{x}{q} + x^{2/3} + x^{1/3} q\right). \quad (5)$$

Отсюда следует, что ряд, определяющий $\zeta_3(s; l_1, l_2, l_3; q)$, сходится абсолютно в области $\operatorname{Re} s > 1$.

Ниже мы получим аналитическое продолжение функции $\zeta_3(s; l_1, l_2, l_3; q)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} s > -\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, и покажем, что в этой полуплоскости расположены ее полюса в точках $s = 0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1$. А затем, используя соотношение

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv l \pmod{q}}}^{\infty} \frac{V_3(n)}{n^s} = \sum_{\substack{l_1, l_2, l_3 \pmod{q} \\ l_1^3 + l_2^3 + l_3^3 \equiv l \pmod{q}}} \zeta_3(s; l_1, l_2, l_3; q), \quad (6)$$

можно найти асимптотическую формулу суммы $\sum_{\substack{n \equiv l \pmod{q} \\ n \leq x}} V_3(n)$.

Мы будем пользоваться следующими обозначениями: $s = \sigma + it$ – комплексное число; $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера; $e(x) = e^{2\pi i x}$; $\exp(z) = e^z$; $\zeta(s)$ – дзета-функция Римана; $\zeta(s, \alpha)$ – дзета-функция Гурвица; $\tau(n)$ – число делителей n ; $\operatorname{Res}_{s=s_0} f(s)$ – вычет функции $f(s)$ в точке $s = s_0$; символ « $\langle\langle$ » имеет такой же смысл, что и символ Ландау « O ».

1. Вспомогательные результаты. В дальнейшем нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения:

Лемма 1. Для $\operatorname{Re} s < 0$ справедливо соотношение

$$\zeta(s, \alpha) = \Gamma(1-s)(2\pi)^{s-1} \frac{1}{i} \left\{ e^{i\frac{\pi s}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e(n\alpha)}{n^{1-s}} + e^{-i\frac{\pi s}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e(-n\alpha)}{n^{1-s}} \right\}$$

(см. доказательство [2]).

Лемма 2. Пусть F_p – поле из p элементов и пусть многочлен $f(x, y, z) \in F_p[x, y, z]$ порождает алгебраическое многообразие V . Если для заданных $\alpha, \beta, \gamma \in F_p$ и для всех $\tau \in F_p$, за исключением $O(1)$ значений из них, многочлен $\varphi_{\tau}(x, y) = f(x, y, \tau\gamma^{-1} - \alpha\gamma^{-1}x - \beta\gamma^{-1}y)$ абсолютно неприводим $(\bmod p)$, то

$$\sum_{(x, y, z) \in V \cap F_p} e\left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{p}\right) \langle\langle p. \text{ (Частный случай этой теоремы был доказан С. Hooley [3]).}$$

Замечание. Чтобы доказать абсолютную неприводимость над F_p произвольного многочлена $f(x, y) \in F_p[x, y]$, достаточно показать, что для однородного многочлена

$$F(x, y, w) = w^n f\left(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}\right), \quad n = \deg f(x, y), \quad \text{система алгебраических уравнений } \frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial w} = 0 \quad \text{не имеет решений } (x_0, y_0, w_0) \text{ с } w_0 \neq 0.$$

Следствие 1. Пусть $\alpha, \beta, \gamma \in F_p$, причем $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$. Тогда для каждого

$$a \in F_p \quad \sum_{\substack{x, y, z \in F_p \\ x^3 + y^3 + z^3 = a}} e(\alpha x + \beta y + \gamma z) \langle\langle p.$$

Следствие 2. Для любого натурального q

$$\sum_{\substack{l_1, l_2, l_3 \pmod{q} \\ l_1^3 + l_2^3 + l_3^3 \equiv l \pmod{q}}} e^{2\pi i \frac{al_1 + bl_2 + cl_3}{q}} \langle\langle q \cdot \text{НОД}(a, l, c, q) \cdot \tau(q)$$

(постоянная в символе « O » зависит от ε).

Лемма 3. В полуплоскости $\operatorname{Re} s > -\frac{5}{6}$ функция $\zeta_3(s; l_1, l_2, l_3; q)$ регулярна, кроме точек $s = \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1$, где она имеет простые полюса.

Доказательство. Положим для целых l, q , $0 \leq l < q$

$$\Theta(x; l, q) = \sum_{m=0}^{\infty} \exp(-\pi x(l + nq)^3).$$

Тогда из (3) имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} V(n; l_1, l_2, l_3; q) \exp(-nx) = \prod_{i=1}^3 (\Theta(x; l_i, q) + 1) - 1. \quad (7)$$

Значит, в силу (4):

$$\begin{aligned} \zeta_3(s; l_1, l_2, l_3; q) &= \frac{\pi^s}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} x^{s-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} V(n; l_1, l_2, l_3; q) \exp(-nx) \right) dx = \\ &= \frac{\pi^s}{\Gamma(s)} \left(\int_0^1 + \int_1^{\infty} \right) = \zeta_{3,1}(s; l_1, l_2, l_3; q) + \zeta_{3,2}(s; l_1, l_2, l_3; q). \end{aligned} \quad (8)$$

Далее, в силу равенства $\exp(-y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} w=1} y^{-w} \Gamma(w) dw$, получаем

$$\begin{aligned} \Theta(x; l, q) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} w=1} (\pi x)^{-w} \Gamma(w) \zeta\left(3w, \frac{l}{q}\right) q^{-3w} dw = \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{q^{\frac{1}{3}} \sqrt{\pi x}} + \zeta\left(0, \frac{l}{q}\right) + I_{-\delta}(x; l, q), \quad \left(0 < \delta \leq \frac{1}{6}\right), \end{aligned} \quad (9)$$

где $I_{-\delta}(x; l, q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} w=-\delta} (\pi x)^{-w} \Gamma(w) \zeta\left(3w, \frac{l}{q}\right) q^{-3w} dw$, причем $I_{-\delta}(x; l, q) \ll (xq^3)^{\delta}$ при $x \rightarrow +0$. (с постоянной в символе « \ll », зависящей только от δ). Поэтому из (7), (8) и (9) находим:

$$\begin{aligned} \zeta_{3,1}(s; l_1, l_2, l_3; q) &= \\ &= \frac{\pi^s}{\Gamma(s)} \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^3 \Theta(x; l_i, q) + \sum_{\substack{l_1, l_2 \\ l_1 \neq l_2}} \Theta(x; l_1, q) \Theta(x; l_2, q) + \prod_{i=1}^3 \Theta(x; l_i, q) \right] x^{s-1} dx = \\ &= \frac{\pi^s}{\Gamma(s)} \left\{ \sum_{k \neq 0} \frac{b_k(q)}{s, \frac{k}{3}} + O\left(\sigma + \delta^{-1}\right) \right\}, \quad (\sigma = \operatorname{Re} s). \end{aligned} \quad (10)$$

Полученное равенство показывает, что $\zeta_{3,1}(s; l_1, l_2, l_3; q)$ можно мероморфно продолжить в области $\operatorname{Re} s > -\delta$. Далее, в силу экспоненциальной сходимости тэта-ряда $\Theta(x; l, q)$ при $x > 1$, сразу получаем аналитическое продолжение $\zeta_{3,2}(s; l_1, l_2, l_3; q)$ на полуплоскость $\operatorname{Re} s > -\delta$. Лемма доказана.

Лемма 4. В полуплоскости $\operatorname{Re} s \geq -\varepsilon$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{6}$, справедлива оценка

$$\sum_{\substack{l_1, l_2, l_3 \pmod{q} \\ l_1^3 + l_2^3 + l_3^3 = l(q)}} \zeta(s; l_1, l_2, l_3; q) \ll \left\langle \frac{|l|^{1+\varepsilon}}{q} + |l|^{\frac{2}{3}+\varepsilon} + \min\left(|l|^{\frac{1}{3}+\varepsilon} q, |l|^{1+\varepsilon}\right) + q^{1+3\varepsilon} \tau(q) \right\rangle.$$

Доказательство. Из соотношений (7)–(9) имеем на прямой $\operatorname{Re} s = -\varepsilon$:

$$\begin{aligned} \sum_{l_1^3 + l_2^3 + l_3^3 = l(q)} \zeta(s; l_1, l_2, l_3; q) &= \frac{\pi^s}{\Gamma(s)} \sum_{l_1^3 + l_2^3 + l_3^3 = l(q)} \int_0^\infty x^{s-1} \left[\prod_{i=1}^3 (\Theta(x; l_i, q) + 1) - 1 \right] dx = \\ &= \frac{\pi^s}{\Gamma(s)} \sum_{l_1^3 + l_2^3 + l_3^3 = l(q)} \left\{ \int_0^1 + \int_1^\infty \right\} = \zeta_{3,1}(s; l, q) + \zeta_{3,2}(s; l, q). \end{aligned}$$

Для функции $\zeta_{3,2}(s; l, q)$ имеем аналогично [1], формула (3.3):

$$\zeta_{3,2}(s; l, q) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv l(q)}}^\infty \frac{V(n)}{n^s} I_n(s),$$

$$\text{где } I_n(s) = \frac{\pi^s}{\Gamma(s)} \int_n^\infty (xe^{i\varphi})^{s-1} e^{-xe^{i\varphi}} e^{i\varphi} dx = \frac{\pi^s}{\Gamma(s)} e^{i\varphi s} \int_n^\infty x^{s-1} e^{-xe^{i\varphi}} dx, \quad \varphi = \arg(s+1).$$

Последний интеграл оцениваем по методу стационарной фазы $I_n(s) \ll \exp\left(-\frac{n}{|l|}\right)$.

Поэтому с помощью частичного суммирования и соотношения (5) получаем:

$$\zeta_{3,2}(s; l, q) \ll \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv l(q)}}^\infty \frac{V(n)}{n^\sigma} \exp\left(-\frac{n}{|l|}\right) \ll \left\langle \frac{|l|^{1+\varepsilon}}{q} + |l|^{\frac{2}{3}+\varepsilon} + \min\left(|l|^{\frac{1}{3}+\varepsilon} q, |l|^{1+\varepsilon}\right) \right\rangle.$$

Для оценки $\zeta_{3,1}(s; l, q)$ мы снова пользуемся соотношениями (7)–(9), а потому имеем

$$\zeta_{3,1}(s; l, q) = \frac{\pi^s}{\Gamma(s)} \sum_{l_1^3 + l_2^3 + l_3^3 = l(q)} \int_0^1 x^{s-1} e^{i\varphi s} \prod_{i=1}^3 \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{q(\pi x e^{i\varphi})^{1/3}} + \zeta\left(0, \frac{l_i}{q}\right) + I_{-\delta}(x e^{i\varphi}; l_i, q) - 1 \right) dx$$

Наибольший вклад в оценку $\zeta_{3,1}(s; l, q)$ дает слагаемое подынтегральной функции, содержащее произведение $I_{-\delta}(x e^{i\varphi}; l_1, q) I_{-\delta}(x e^{i\varphi}; l_2, q) I_{-\delta}(x e^{i\varphi}; l_3, q)$. Поэтому, применяя соотношение Гурвица (лемма 1) в выражении для $I_{-\delta}(x e^{i\varphi}; l_i, q)$, мы получаем для $\operatorname{Re} s = -\varepsilon$, $|\operatorname{Im} s| > 2$:

$$\zeta_{3,1}(s; l, q) \ll \frac{\pi^s e^{i\varphi s}}{\Gamma(s)} \iiint_{\operatorname{Re} z_j = \frac{1}{3} + \varepsilon} (8\pi^2)^{-z_1 - z_2 - z_3} \prod_{j=1}^3 \Gamma\left(\frac{1}{3} - z_j\right) \Gamma(3z_j) F(z) \sum(e) \frac{dz_1 dz_2 dz_3}{s + z_1 + z_2 + z_3 - 1},$$

где

$$F(z) = \frac{e\left(\frac{3}{4}(z_1 + z_2 + z_3)\right)}{q^{3(z_1 + z_2 + z_3 - 1)}} \sum_{n_1 n_2 n_3 = 1}^\infty \frac{e^{-i\varphi(z_1 + z_2 + z_3)}}{\left(n_1^{z_1} n_2^{z_2} n_3^{z_3}\right)^3}; \quad \sum(e) = \sum_{l_1^3 + l_2^3 + l_3^3 = l(q)} e \left(\frac{n_1 l_1 + n_2 l_2 + n_3 l_3}{q} \right).$$

Интегралы по z_j вычисляем методом стационарной фазы, учитываем выбор φ , а сумму $\sum(e)$ оцениваем с помощью следствия 2 леммы 2. Таким образом, мы полу-

чаем для $\operatorname{Re} s = -\varepsilon$, $|\operatorname{Im} s| > 2$: $\zeta_{3,1}(s; l, q) \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V(n)}{n^{1+\varepsilon}} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{n}{|l|}\right)}{\varepsilon + \left||l| - n\right|} \cdot q^{1+3\varepsilon} \tau(q) \ll q^{1+3\varepsilon} \tau(q)$.

Теперь, учитывая, что ряд для $\zeta(s; l, q)$ сходится на прямой $\operatorname{Re} s = 1 + \varepsilon$, мы, в силу принципа Фрагмена-Линделёфа, получаем утверждение леммы.

2. Основной результат. Зная расположение полюсов и степенной порядок роста $\zeta_3(s; l, q)$ в области $\operatorname{Re} s \geq -\varepsilon, \varepsilon > 0$, мы можем доказать теорему.

Теорема. Пусть $0 \leq l < q$. Тогда при $x \rightarrow \infty$ и любом $\varepsilon > 0$ справедлива асимптотическая формула

$$\sum_{\substack{n \equiv l \pmod{q} \\ n \leq x}} V(n) = c_0 \frac{x}{q} + c_1 \left(\frac{x}{q}\right)^{2/3} + c_2 \left(\frac{x}{q}\right)^{1/3} + O\left(\frac{x^{3/4+\varepsilon}}{q^{1/2}}\right),$$

где c_i – вычислимые постоянные, $c_0 = \left(\frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right)^3$ (постоянная в символе « O » зависит от ε).

Доказательство. В силу соотношения

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{x^s}{s(s+1)\dots(s+n)} ds = \begin{cases} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^k, & \text{если } x > 1, \\ 0, & \text{если } 0 < x < 1. \end{cases}$$

и равномерной сходимости ряда для $\zeta(s; l, q)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} s \geq 1 + \varepsilon$, имеем для

$$\text{нечелого } x: \frac{1}{2} \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv l \pmod{q}}} V(n) \left(1 - \frac{n}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \zeta(s; l, q) \frac{x^s}{s(s+1)(s+2)} ds.$$

Перенесем контур интегрирования на прямую $\operatorname{Re} s = -\varepsilon$, $(0 < \varepsilon < \frac{1}{6})$. Тогда учитывая полюса $\zeta_3(s; l, q)$ и лемму 3, мы получим:

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv l \pmod{q}}} V(n) \left(1 - \frac{n}{x}\right)^2 = a_0 \frac{x}{q} + a_1 \left(\frac{x}{q}\right)^{2/3} + a_2 \left(\frac{x}{q}\right)^{1/3} + O(q^{1+4\varepsilon})$$

Теперь, применяя асимптотическое дифференцирование при $q \ll x^{1/2-2\varepsilon}$, мы сразу получаем утверждение теоремы.

Заключение. В настоящее время не найдены нетривиальные оценки $V(n)$.

Оценка $V(n) \ll n^{3+\varepsilon}$ является открытой проблемой. Но в доказанной теореме получено распределение значений $V(n)$ в среднем на арифметических прогрессиях с растущей разностью прогрессии q .

1. **Виноградов А.И.** Дзета-функция Варинга // Сб. статей, посвященный 60-летию со дня рождения проф. В. Г. Спринжука. – Минск. – 1997 – С. 33–40.
2. **Титчмарш Е.** Теория дзета-функции Римана. – М.: ИЛ. – 1953. – 408 с.
3. **Hooley С.** On exponential sums and certain of their applications // Journess. Arith. (1980). G. V. Armitage (id). 92122. Cambridge. – 1982. – P. 7–29.