

УДК 514.7

Н. Н. Кинзерская

Одесский государственный университет им. И. И. Мечникова

О ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЯХ И ДЕФОРМАЦИЯХ
ПРОСТРАНСТВА КАЗНЕРА

Доведено, що в загальному випадку ($R_{ijkl} \neq 0$) чотирьохвимірний простір Казнера не допускає геодезичних відображень і геодезичних деформацій. У винятковому випадку ($R_{ijkl} = 0, p_1 = p_2 = 0, p_3 = 1$) такі відображення і деформації існують, для них розв'язана лінійна система основних рівнянь теорії геодезичних відображень і знайдені головні тензори характеристики відображень і деформацій.

Доказано, что в общем случае ($R_{ijkl} \neq 0$) четырехмерное пространство Казнера не допускает геодезических отображений и геодезических деформаций. В исключительном случае ($R_{ijkl} = 0, p_1 = p_2 = 0, p_3 = 1$) такие отображения и деформации существуют, для них решена линейная система основных уравнений теории геодезических отображений и найдены главные тензорные характеристики отображений и деформаций.

It has been proved that in general case ($R_{ijkl} \neq 0$) 4-dimensional Kasner space does not admit geodesic mappings and geodesic deformations. In exceptional case ($R_{ijkl} = 0, p_1 = p_2 = 0, p_3 = 1$) the mappings and deformations exist. For them the linear system of basic equations in geodesic mappings theory is solved and main tensor characteristics of deformations and mappings are found.

Введение. Риманово многообразие V_4 называется пространством Казнера, если его метрика имеет вид

$$ds^2 = dt^2 - t^{2p_1} dx^2 - t^{2p_2} dy^2 - t^{2p_3} dz^2, \quad (1)$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1, \quad p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1. \quad (2)$$

Говоря точнее, Е. Казнер нашел более общую метрику, удовлетворяющую уравнениям поля тяготения Эйнштейна для пустого пространства (решения), но именно ее частный случай (1) оказался наиболее интересным (см. [1], стр. 112). Метрика (1) соответствует однородному анизотропному пространству. В частности, для $t = 0$, о чем подробно можно прочесть в книге Ландау и М. Е. Лифшица "Теория поля" ([3], стр. 489–502).

Много внимания уделено пространству Казнера и в монографии А. З. Петрова "Пространства Эйнштейна" ([4], стр. 106–107). А. З. Петров показал, что пространство Казнера по его же классификации относится к первому типу, допускает преобразования группы G_4 , имеющую абелеву подгруппу G_3 , группа не транзитивная.

Как видим, пространство Казнера является пространством с достаточно большой подвижностью, а такие пространства, по мнению А. З. Петрова, особенно интересны, так как "они отвечают наиболее простым и физически важным моделям распределения и движения материи" ([4], стр. 241). Мы рассмотрим вопрос о геодезических отображениях пространства Казнера – задача, имеющая простую и важную интерпретацию в общей теории относительности [5].

1. Геометрические характеристики пространства Казнера. В метрике Казнера компоненты метрического тензора

$$g_{11} = 1; g_{22} = -t^{2p_1}; g_{33} = -t^{2p_2}; g_{44} = -t^{2p_3}; g_{ij} = 0, i \neq j; i, j = 1, 2, 3, 4. \quad (3)$$

порождают символы Кристоффеля

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{p_1}{t}; \Gamma_{13}^3 = \frac{p_2}{t}; \Gamma_{14}^4 = \frac{p_3}{t}; \Gamma_{22}^1 = p_1 t^{2p_1-1}; \Gamma_{33}^1 = p_2 t^{2p_2-1}; \Gamma_{44}^1 = p_3 t^{2p_3-1}$$

$$(\text{остальные } \Gamma_{ij}^k = 0; i, j, k = 1, 2, 3, 4). \quad (4)$$

Указанные символы Кристоффеля дают такие отличные от нуля компоненты тензора Римана

$$R_{412} = p_1(p_1 - 1)t^{2p_1-2}, R_{413} = p_2(p_2 - 1)t^{2p_2-2}, R_{414} = p_3(p_3 - 1)t^{2p_3-2}, \\ R_{2323} = -p_1 p_2 t^{-2p_1}, R_{2424} = -p_1 p_3 t^{-2p_1}, R_{3434} = -p_2 p_3 t^{-2p_1}. \quad (5)$$

Параметры p_1, p_2, p_3 , определяющие метрику Казнера (1), входят в эту метрику симметрично. Если же эти параметры расположить в порядке $p_1 \leq p_2 \leq p_3$, то из условий (2) видно, что $-1/3 \leq p_1 \leq 0; 0 \leq p_2 \leq 2/3; 2/3 \leq p_3 \leq 1$, причем равенство $p_1 = p_2 = p_3$ невозможно, а равенство двух из них достигается только для значений $(0; 0; 1)$, $(-1/3; 2/3; 2/3)$ [3].

Если $p_1 = p_2 = 0, p_3 = 1$, то, как видно из (5), пространство Казнера становится плоским ($R_{ijkl} \equiv 0$), а потому этот случай будем называть исключительным. Во всех других случаях $R_{ijkl} \neq 0$, и этот случай естественно назвать общим. Так как для пространства Казнера тензор Риччи $R_{ij} = 0$, то оно является пространством Эйнштейна.

В работе Й. Микеша [6] доказана теорема: если пространство Эйнштейна V_n допускает нетривиальное геодезическое отображение на $\bar{V}_n, n > 2$, то $\bar{V}_n$ является пространством Эйнштейна.

Обратим внимание, что в этой теореме не утверждается существование геодезического отображения.

Мы покажем, что пространство Казнера в общем случае, несмотря на его высокую подвижность, тем не менее не допускает никаких нетривиальных геодезических отображений, а это значит, что теорему Микеша усилить нельзя.

Что же касается исключительного случая, то для него геодезическое отображение всегда существует, о чём будет сказано ниже.

2. Линейная система уравнений для геодезических отображений. Для изучения геодезического отображения пространства Казнера мы воспользуемся линейной формой основных уравнений теории геодезических отображений, предложенной Н.С. Синюковым [7]. Им доказана теорема, что риманово пространство V_n допускает нетривиальные геодезические отображения тогда и только тогда, когда система уравнений

$$a_{ij,k} = \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik} \quad (6)$$

$$n\lambda_{i,j} = \mu g_{ij} + a_{ai} R_{.j}^a - a_{aj} R_{.i}^a \quad (7)$$

$$(n-1)\mu_{,k} = 2(n+1)\lambda_{\alpha} R_{.k}^{\alpha} + a_{\alpha\beta} (R_{.k}^{\alpha\beta} - R_{..k}^{\alpha\beta}) \quad (8)$$

имеет нетривиальное решение относительно невырожденного симметрического тензора a_{ij} , градиентного ненулевого вектора λ_i и инварианта μ .

Запятая означает ковариантное дифференцирование на базе метрического тензора g_{ij} . С помощью этого же тензора осуществляется поднятие и опускание индексов.

Условия интегрируемости уравнений (6), (7), (8) соответственно имеют вид [7]

$$a_{\alpha\beta} T_{ijk}^{\alpha\beta} = 0, \quad (9)$$

где

$$T_{ijkl}^{\alpha\beta} = \delta_i^\beta (n R_{\cdot jkl}^\alpha - g_{jk} R_{\cdot l}^\alpha + g_{jl} R_{\cdot k}^\alpha) + \delta_j^\beta (n R_{\cdot ikl}^\alpha - g_{ik} R_{\cdot l}^\alpha + g_{il} R_{\cdot k}^\alpha) + \\ + g_{jk} R_{\cdot il}^{\alpha\beta} + g_{ik} R_{\cdot jl}^{\alpha\beta} - g_{jl} R_{\cdot ik}^{\alpha\beta} - g_{il} R_{\cdot jk}^{\alpha\beta} \quad (10)$$

$$a_{\alpha\beta} \left[R_{\cdot ikl}^{\alpha\beta} + \frac{1}{n-1} g_{il} (2 R_{\cdot k}^{\alpha\beta} - R_{\cdot \cdot k}^{\alpha\beta}) - \frac{1}{n-1} g_{ik} (2 R_{\cdot l}^{\alpha\beta} - R_{\cdot \cdot l}^{\alpha\beta}) + \delta_i^\beta R_{\cdot jk}^\alpha \right] + \\ + (n+3) \lambda_\alpha \left[R_{\cdot ikl}^\alpha + \frac{1}{n-1} (g_{il} R_{\cdot k}^\alpha - g_{ik} R_{\cdot l}^\alpha) \right] = 0 \quad (11)$$

$$a_{\alpha\beta} \left[\frac{n+1}{n} (R_{\cdot kv}^\beta R_{\cdot l}^\alpha - R_{\cdot lv}^\beta R_{\cdot k}^\alpha) - \frac{1}{2} R_{\cdot [kl]}^{\alpha\beta} + R_{\cdot k\cdot l}^{\alpha\beta} - R_{\cdot l\cdot k}^{\alpha\beta} \right] + \\ + (n+1) \lambda_\alpha R_{\cdot [kl]}^\alpha = 0. \quad (12)$$

Легко видеть, что для пространства Казнера условия интегрируемости (12) уравнений (8) выполняются тождественно, а сами уравнения (8) имеют решение $\mu = \text{const}$. Условия интегрируемости (11) уравнений (7), учитывая (5), сводятся к соотношениям

$$a_{li} = \frac{1}{2} (n+3) \lambda_i l, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (13)$$

Для пространства Казнера (10) упрощается и тензор $T_{ijkl}^{\alpha\beta}$ имеет вид

$$T_{ijkl}^{\alpha\beta} = n \delta_i^\beta R_{\cdot jkl}^\alpha + n \delta_j^\beta R_{\cdot ikl}^\alpha + g_{jk} R_{\cdot il}^{\alpha\beta} + g_{ik} R_{\cdot jl}^{\alpha\beta} - g_{jl} R_{\cdot ik}^{\alpha\beta} - g_{il} R_{\cdot jk}^{\alpha\beta}. \quad (14)$$

Рассмотрим условия интегрируемости (9). Полагая нижние индексы тензора $T_{ijkl}^{\alpha\beta}$ равными 1111, $i = 2, 3, 4$, получим $2R_{11i}(1-n)a_{1i}/g'' = 0, i = 2, 3, 4$. Если исключить случай $p_1 = p_2 = 0, p_3 = 1$, то из этого соотношения следует, что $a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0$. Рассматривая наборы индексов 222k, $k = 3, 4$, аналогично получим, что $a_{23} = a_{24} = 0$, а набор индексов 3334 дает $a_{34} = 0$. Таким образом, матрица симметрического тензора a_{ij} по необходимости является диагональной. Наборы 1212, 1313, 1414 дают соотношения

$$\frac{a_{11}}{g_{11}} = \frac{a_{22}}{g_{22}} = \frac{a_{33}}{g_{33}} = \frac{a_{44}}{g_{44}}, \quad \text{откуда заключаем, что}$$

$$a_{ij} = \theta g_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad (15)$$

где θ — некоторый инвариант, зависящий, вообще говоря, от всех четырех переменных. Легко проверить, что для всех прочих наборов индексов условия интегрируемости (9) либо тождественно выполняются, либо дают соотношения, зависящие исключительно от θ . Пользуясь (15), мы (7) запишем в виде

$$n \lambda_{i,l} = \mu g_{il}. \quad (16)$$

Учитывая, что $a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0$, из соотношений (13) следует, что $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, а потому для нетривиальности решения λ_1 обязательно должно быть отличным от нуля. Решая уравнения (16) для $i = 1$, получаем

$$\lambda_1 = \frac{\mu}{n} t + c, \quad c = \text{const}. \quad (17)$$

Те же уравнения (16) для $i = 2, 3, 4$ дают, учитывая (17), $\frac{\mu}{n} t(p_i - 1) + c p_i = 0, k = 1, 2, 3$.

Так как последние соотношения не должны зависеть от t , то заключаем, что $\mu = c = 0, \lambda_1 = 0$. Таким образом, уравнения (7) имеют тривиальное решение. Следова-

тельно, по теореме Синюкова пространство Казнера в общем случае не допускает нетривиальных геодезических отображений.

Имеет место результат, принадлежащий М. Л. Гаврильченко [8]: Если риманово пространство V_n допускает нетривиальные геодезические деформации, то оно допускает и нетривиальные геодезические отображения.

Учитывая предыдущее, заключаем, что пространство Казнера в общем случае не допускает нетривиальных геодезических деформаций.

3. Исключительный случай пространства Казнера. Перейдем к исключительному случаю пространства Казнера, то есть к случаю, когда в (1) $p_1 = p_2 = 0, p_3 = 1$. Легко видеть, что условия интегрируемости (9), (11), (12) выполняются тождественно, тогда система уравнений (6), (7), (8) вполне интегрируема, а потому имеет решение при любых начальных условиях [4]. Найдем решение уравнений (7). Для исключительного случая с учетом (3) и (5) уравнения (7) приобретают более простой вид

$$n\lambda_{i,j} = \mu g_{ij}, \quad n = 4, \mu = \text{const}. \quad (18)$$

Решая их, получим

$$\lambda_1 = \frac{\mu}{n}t + c_1 e^z + c_2 e^{-z}, \quad \lambda_2 = -\frac{\mu}{n}x + c_3, \quad \lambda_3 = -\frac{\mu}{n}y + c_4, \quad \lambda_4 = t(c_1 e^z - c_2 e^{-z}), \quad c_i = \text{const}, i = 1, 2, 3, 4. \quad (19)$$

Учитывая, что $\lambda_i = \frac{\partial \lambda}{\partial x^i}$, легко находим

$$\lambda = \frac{\mu}{2n}(t^2 - x^2 - y^2) + c_3 x + c_4 y + t(c_1 e^z + c_2 e^{-z}) + c^*, \quad (20)$$

Используя найденные решения λ_i (19), найдем общее решение системы уравнений (6)

$$a_{11} = \frac{\mu}{n}t^2 + 2(c_1 e^z + c_2 e^{-z})t + c_{13}e^{2z} + c_{14}e^{-2z} + c_5, \quad a_{12} = -\frac{\mu}{n}xt + c_3t - (c_1 e^z + c_2 e^{-z})x + c_8 e^z + c_9 e^{-z},$$

$$a_{13} = -\frac{\mu}{n}yt + c_4t - (c_1 e^z + c_2 e^{-z})y + c_{11}e^z + c_{12}e^{-z}, \quad a_{14} = (c_1 e^z - c_2 e^{-z})t^2 + (c_{13}e^{2z} - c_{14}e^{-2z})t, \quad a_{22} = \frac{\mu}{n}x^2 - 2c_3x + c_6,$$

$$a_{23} = \frac{\mu}{n}xy - c_4x - c_3y + c_7, \quad a_{24} = [-(c_1 e^z - c_2 e^{-z})x + c_8 e^z - c_9 e^{-z}],$$

$$a_{33} = \frac{\mu}{n}y^2 - 2c_4y + c_{10}, \quad a_{34} = [-(c_1 e^z - c_2 e^{-z})y + c_{11}e^z - c_{12}e^{-z}],$$

$$a_{44} = t^2(c_{13}e^{2z} + c_{14}e^{-2z} - c_5), \quad c_j = \text{const}, j = 5, 14.$$

Таким образом, приходим к теореме.

Теорема. Пространства Казнера в общем случае не допускают нетривиальных геодезических отображений. В исключительном случае ($p_1 = p_2 = 0, p_3 = 1$) такое отображение существует и зависит от 15 существенных параметров.

тельно, по теореме Синюкова пространство Казнера в общем случае не допускает нетривиальных геодезических отображений.

Имеет место результат, принадлежащий М. Л. Гаврильченко [8]: Если риманово пространство V_n допускает нетривиальные геодезические деформации, то оно допускает и нетривиальные геодезические отображения.

Учитывая предыдущее, заключаем, что пространство Казнера в общем случае не допускает нетривиальных геодезических деформаций.

3. Исключительный случай пространства Казнера. Перейдем к исключительному случаю пространства Казнера, то есть к случаю, когда в (1) $p_1 = p_2 = 0, p_3 = 1$. Легко видеть, что условия интегрируемости (9), (11), (12) выполняются тождественно, тогда система уравнений (6), (7), (8) вполне интегрируема, а потому имеет решение при любых начальных условиях [4]. Найдем решение уравнений (7). Для исключительного случая с учетом (3) и (5) уравнения (7) приобретают более простой вид

$$n\lambda_{i,j} = \mu g_{ij}, \quad n = 4, \mu = \text{const}. \quad (18)$$

Решая их, получим

$$\lambda_1 = \frac{\mu}{n}t + c_1e^z + c_2e^{-z}, \quad \lambda_2 = -\frac{\mu}{n}x + c_3, \quad \lambda_3 = -\frac{\mu}{n}y + c_4, \quad (19)$$

$$\lambda_4 = t(c_1e^z - c_2e^{-z}), \quad c_i = \text{const}, i = 1, 2, 3, 4.$$

Учитывая, что $\lambda_i = \frac{\partial \lambda}{\partial x^i}$, легко находим

$$\lambda = \frac{\mu}{2n}(t^2 - x^2 - y^2) + c_3x + c_4y + t(c_1e^z + c_2e^{-z}) + c^*, \quad (20)$$

Используя найденные решения λ_i (19), найдем общее решение системы уравнений (6)

$$a_{11} = \frac{\mu}{n}t^2 + 2(c_1e^z + c_2e^{-z})t + c_{13}e^{2z} + c_{14}e^{-2z} + c_5,$$

$$a_{12} = -\frac{\mu}{n}xt + c_3t - (c_1e^z + c_2e^{-z})x + c_8e^z + c_9e^{-z},$$

$$a_{13} = -\frac{\mu}{n}yt + c_4t - (c_1e^z + c_2e^{-z})y + c_{11}e^z + c_{12}e^{-z},$$

$$a_{14} = (c_1e^z - c_2e^{-z})t^2 + (c_{13}e^{2z} - c_{14}e^{-2z})t, \quad a_{22} = \frac{\mu}{n}x^2 - 2c_3x + c_6,$$

$$a_{23} = \frac{\mu}{n}xy - c_4x - c_3y + c_7, \quad a_{24} = [-(c_1e^z - c_2e^{-z})x + c_8e^z - c_9e^{-z}],$$

$$a_{33} = \frac{\mu}{n}y^2 - 2c_4y + c_{10}, \quad a_{34} = [-(c_1e^z - c_2e^{-z})y + c_{11}e^z - c_{12}e^{-z}],$$

$$a_{44} = t^2(c_{13}e^{2z} + c_{14}e^{-2z} - c_5), \quad c_j = \text{const}, j = 5, 14.$$

Таким образом, приходим к теореме.

Теорема. Пространства Казнера в общем случае не допускают нетривиальных геодезических отображений. В исключительном случае ($p_1 = p_2 = 0, p_3 = 1$) такое отображение существует и зависит от 15 существенных параметров.

1. Kasner E. Geometrical theorems on Einstein's cosmological equations //Amer. J. Math.- 1921.- Т.43. - №217. See § 11.3.
2. Точные решения уравнений Эйнштейна //Д. Крамер,Х. Штефани, Э. Херльт, М. Мак-Каллум //Под ред. Э.Шмутцера.- М.: Энергониздат,1982.- 416с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля.- 6-е изд.- М.: Наука,1973.- 489с.
4. Петров А.З. Пространства Эйнштейна.- М.: Физматгиз,1961.- 464с.
5. Петров А.З. О геодезическом отображении пространств Эйнштейна //Известия вузов. Математика. -1961.- №2. - С.130-136.
6. Микеш Й. О геодезических отображениях пространств Эйнштейна //Математические заметки.- 1980. - Т.28,№6.- С.935-939.
7. Силуков Н.С. Геодезические отображения римановых пространств.- М.:Наука,1979.- 256с.
8. Gavrilchenko M.L. Geodesic deformations of Riemannian spaces //Proc.International Conf.on Diff. Geom. and its Appl.- Brno (Czech Republic).- 1989.- P.47-53.