Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

(повне найменування вищого навчального закладу)

Інститут математики, економіки і механіки

(повне найменування інституту/факультету)

каф. вищої математики

(повна назва кафедри)

Дипломна робота

бакалавра

(освітньо-кваліфікаційний рівень)

на тему: **«Інтегральні рівняння типу згортки»**

«The integral equations of convolution type»

Виконала: студентка денної форми навчання спеціальності 6.040201Математика

Афоніна Яна Віталіївна

(прізвище, ім'я, по-батькові)

Керівник к.ф.- м.н. доцент Керекеша Д.П.

(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали, підпис)

Рецензент д.ф.- м.н. професор Щоголев С.А.

(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ 9 від 16.05.2017 р.

Захищено на засіданні ЕК № 7

протокол № 11 від 12.06.17 р.

Оцінка відмінно А 190

(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)

Завідувач кафедри

Щоголев С.А.

(підпис) (прізвище, ініціали)

Голова ЕК

Щоголев С.А.

(підпис) (прізвище, ініціали)

Одеса – 2017 року

ЗМІСТ

ВСТУП

Означення, визначення та допоміжні твердження

Означення 1.1. Будемо називати ядро $l(x,t)$ інтегрального рівняння майже різницевим, якщо воно представимо у вигляді

$$l(x,t) = b(x)c(t)k(x-t). \quad (1.1)$$

Означення 2.1. Якщо в рівністі (1) $b(x) = 1, c(t) = 1$, то відповідне ядро $k(x-t)$ будемо називати різницевим.

Зауваження. Надалі ми будемо припускати ядро $k(x-t)$ невиродженим. Випадок, коли різніцеве ядро є виродженим – тривіальний, і тому його розглядати не будемо.

Загальний вигляд інтегрального рівняння з майже різницевими ядрами такий:

$$\lambda\varphi(x) - \sum_{j=}^{n} b_j(x) \int_{-\infty}^{+\infty} k_j(x-t)c_j(t)\varphi(t)dt = f(x), x \in \mathbb{R} \quad (1.2)$$

Для подальших викладок нам знадобляться деякі поняття, які

ми зараз викладемо.

Нехай $K_j: L \to L, j = \overline{1,n}$ – лінійні, обмежені і оборотні оператори; L – простір локально інтегрованих функцій, заданих на вимірній по Лебегу множині E.

Введемо оператор

$$K = \sum_{j=1}^{n} M(\chi_{E_j})K_j. \quad (1.3)$$

Тут оператор $M(\chi_{E_j})$ в просторі L діє так: $M(\chi_{E_j})\varphi = \chi_{E_j}\varphi$, де χ_{E_j} – характеристичні функції, задані на вимірних по Лебегу множинах $E_1, E_2, \dots, E_n$, $E = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$, $E_j \cap E_k = \emptyset$ $(j \neq k), mE_k > 0, k = \overline{1,n}$.

Очевидно, що K – лінійний і обмежений оператор, причому він діє з простору L в простір L.

У цьому підпункті також сформулюємо і доведемо допоміжні твердження у вигляді наступних теорем.

Теорема 1.1. Якщо оператор K оборотний в L, то рішення операторного рівняння

$$K\varphi = \psi \quad (1.4)$$

можна отримати в просторі L у вигляді

$$\varphi = \varphi_n(x), \qquad (1.5)$$

де $\varphi_n(x)$ будується за наступною рекурентною формулою

$$\varphi_j(k) = K_j^{-1}(\chi_{\bigcup_{k=j}^{n} E_k}\psi + \chi_{\bigcup_{k=0}^{j-1} E_k} K_j\varphi_{j-1}, j = \overline{1,n};\ \varphi_0 \equiv 0, E_0 = \emptyset. \qquad (1.6)$$

Доведення. Нехай φ – рішення операційного рівняння (1.4) При цьому припущенні розглянемо ланцюжок операторних рівнянь

$$K_j\varphi = \chi_{\bigcup_{k=j}^{n} E_k}\psi + \chi_{\bigcup_{k=0}^{j-1} E_k} K_j\varphi_{j-1}, j = \overline{1,n}. \qquad (1.7)$$

Оскільки оператори K_j передбачаються оборотними в L, то будуть справедливі рівності (1.6). Далі, з рівності (1.6) вбачаємо, що

$$\varphi_{j-1}(x) = \varphi_j(x), x \in \bigcup_{k=0}^{j-1} E_k\,, j = \overline{1,n}. \qquad (1.8)$$

Тепер покажемо, що $\varphi_j = \varphi$ при $x \in \bigcup_{k=0}^{j-1} E_k\,, j = \overline{1,n}$. Доведемо це твердження методом математичної індукції. При $j = 1$ це твердження вірно. Припустимо, що воно вірне при $j = k$:

$$\varphi_k = \varphi, \text{при } x \in \bigcup_{l=1}^{k} E_l \qquad (1.9)$$

Доведемо, що твердження (1.9) вірно при $j = k + 1$. Дійсно, якщо $x \in \bigcup_{j=1}^{k} E_j$, то згідно (1.8) і припущенню (1.9) $\varphi_{k+1}(x) = \varphi_k(x) = \varphi(x)$.

Якщо ж $x \in E_{k+1}$, то з (1.3) випливає, що $K_j \equiv K$, а це означає, що $\varphi_{k+1} = K_j^{-1}\psi = K^{-1}\psi = \varphi$, що й треба було довести.

Зауваження. З властивостей операторів K_j, взагалі кажучи, не випливає, що оператор K, побудований за формулою (1.6), оборотний. У зв'язку з цим пропонується наступна теорема.

Теорема 1.2. Нехай K – лінійний оборотний оператор, де $K \equiv K_1 + K_2, K_1: L \to L$ – лінійний оборотний оператор; $K_2: L \to L$ – лінійний оборотний оператор, причому K_2 володіє також наступною властивістю: якщо $\varphi \in L_{1loc}\{(T, +\infty)\}$, $T \geq 0$, то $K_2\varphi \in L_{1loc}\{(T + d, +\infty)\}, d > 0$. Тоді операторне рівняння

$$K\varphi = \psi \quad (1.10)$$

має рішення φ, що володіє властивостями: $\chi_{(0,nd)}\varphi(x) = \varphi_n(x)$, де $\varphi_n(x)$ при $x \in (0, nd)$ будується за наступною рекурентною формулою

$$\varphi_i = \chi_{(0,jd)}K_1^{-1}(\psi - K_2\varphi_{j-1}), j = \overline{1,n}, \varphi_0 \equiv 0. \quad (1.11)$$

Доведення. Нехай φ – рішення операторного рівняння (1.10). Покажемо, що рішення φ має структуру (1.11). Виявимо цей факт за допомогою математичної індукції. Безпосередньо можна показати, що при $j = 1$ це твердженні вірно. Припустимо, що воно вірне при $j = k$. Покажемо тепер, що твердження (1.11) вірно і при $j = k + 1$. Дійсно, застосовуючи припущення індукції, а також умову теореми, при $x \in (0, (k + 1)d)$ отримаємо

$$\begin{aligned} K\varphi = K\varphi_{k+1} &= (K_1 + K_2)\varphi_{k+1} = K_1\varphi_{k+1} + K_2\varphi_{k+1} \\ &= K_1\varphi_{k+1} + K_2\varphi_k + K_2\chi_{(dk,d(k+1))}\varphi_{k+1} = K_1\varphi_{k+1} + K_2\varphi_k \\ &= \psi \quad (1.12) \end{aligned}$$

Нарешті, з (1.11), (1.12) випливає, що твердження вірне. Доведення завершено.

ВИСНОВКИ

В теорії інтегральних рівнянь досить важливу роль відіграють інтегральні рівняння з різницевими ядрами або інтегральні рівняння типу згортки. Для їх розв'язку застосовується потужний апарат інтегрального перетворення Фур'є. Як відомо, для дії цього апарату необхідно, по-перше, щоб інтегральне рівняння було задано на всій дійсній осі. По-друге, інтегральне рівняння повинно містити тільки різницеві ядра. По-третє, межі інтегрування беруться від $-\infty$ до ∞. Тоді за допомогою інтегрального перетворення Фур'є відповідне рівняння зводиться до простого алгебраїчного рівняння відносно образу Фур'є шуканої функції. Подальше дослідження пов'язане з умовами розв'язності отриманого рівняння в різних просторах.

Якщо ж у заданому рівнянні не виконується хоча б одна з умов, описаних вище, то для їх розв'язку виникають проблеми принципового характеру. До таких рівнянь, насамперед, відносяться наступні

$$\varphi(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}k(x-t)\varphi(t)dt=f(x),\quad x>0. \qquad (6.1)$$

$$\varphi(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}k_1(x-t)\varphi(t)dt=f(x), x>0,$$

$$\varphi(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}k_2(x-t)\varphi(t)dt=f(x), x<0 \qquad (6.2)$$

$$\varphi(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}k_1(x-t)\varphi(t)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}k_2(x-t)\varphi(t)dt=f(x)$$

Однорідне рівняння (6.1) в окремому випадку було вивчено у 1931 році Вінером і Хопфом. Згідно з вищеописаними вимогами, застосувати безпосередньо інтегральне перетворення Фур'є до рівняння (6.1) не можна. Тому при побудові розв'язку рівняння виду (6.1) авторами була запропонована принципово нова схема : введення нових невідомих функцій, рівних нулю при $x<0$ (вони позначаються + внизу), наприклад $\varphi_+(x)$ і функцій $\varphi_-(x)$, рівних нулю при $x>0$. Оскільки було відомо, що образи Фур'є $\Phi^{\pm}(x)$ є аналітичними функціями у верхній та нижній півплощини відповідно, то застосування інтегрального перетворення Фур'є до рівняння (6.1) ще не вирішувало рівняння, а лише зводило його до вирішення одного рівняння з двома невідомими функціями, що володіють чудовими властивостями аналітичності. Подальший розв'язок пов'язаний з методом факторизації, який на ранніх етапах свого розвитку полягав у зображенні довільної аналітичної смуги $a<|\operatorname{Im} z|<b$ функції $A(z)$ у вигляді $A(z)=A^+(z)A^-(z)$, де функції $A^{\pm}(z)$ відповідно аналітично продовжувані в півплощини $|\operatorname{Im} z|>a$ і $|\operatorname{Im} z|<b$. Необхідна умова аналітичності функції $A(z)$ у смузі $a<|\operatorname{Im} z|<b$ було забезпечена розглядом ядер спеціального класу – спадаючих як показникова функція (таке припущення пов'язане з конкретною практичною задачею променевої рівноваги). Ці припущення дозволили Вінеру и Хопфу отримати точний розв'язок окремого випадку рівняння (6.1). При цьому слід зазначити, що незважаючи на недосконалість цитованої роботи, вона зіграла велику роль у розвитку запропонованого дослідниками прийому, причому в різних напрямках. Зазначимо основні: 1) застосування методу для розв'язання мішаних задач математичної фізики шляхом зведення до інтегральних рівнянь типу згортки (6.1), (6.2); 2) дослідження відповідних інтегральних рівнянь в різноманітних просторах .

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Черський Ю.І., Керекеша П.В., Керекеша Д.П. Метод спряження аналітичних функцій з додатками. – Одеса: Астропринт, 2010. – 552 с.
2. Гахов Ф.Д., Черський Ю.І. Рівняння типу згортки – М.:Наука, 1978. – 296 с.