Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра оптимального керування і економічної кібернетики

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

Застосування методів та моделей епідеміологічних процесів для аналізу динаміки брендової інформації

Application of methods and models of epidemiological processes to analyze the dynamics of brand information

Виконала: здобувачка денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика
Освітня програма «Прикладна математика»
Солобай Ольга Анатоліївна

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доц. Стехун А. О. ____________
Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доц. Таірова М. С. ____________

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ ____ від ______________ 2025 р.

Завідувач кафедри

____

____

Захищено на засіданні ЕК № ______________

Протокол № ____ від ______________ 2025 р.

Оцінка __________ / __________ / __________

Голова ЕК

__________ _________________________

Одеса — 2025 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Вагомий спектр сучасного життя побудовано на інформації та її обміні. Особливо це важливо для економічної складової. Так, наприклад, маючи розуміння динаміки інформації про бренд чи продукт бренду, бізнес може приймати відповідні рішення щодо покращення стратегії розвитку.

Для кращого розуміння динаміки брендової інформації для подальшого економічного аналізу використовується кілька інструментів, серед яких математичне моделювання. Математичне моделювання – це інструмент підтримки рішень, що використовується в кількох галузях, таких як економіка, біологія, фізика та медицина.

Розглядається SEILR – модель для моделювання розповсюдження інформації про бренд та аналізу отриманих результатів. Перевага такої моделі над класичними SIR та $SEIR$ моделями в тому, що розглядається більш детальне розділення на компартменти. Класи зацікавлених, лояльних та конвертованих поділяються на підкласи, що дозволяє підвищити точність та детальність аналізу.

Мета дослідження: адаптація епідеміологічних процесів та моделі для аналізу динаміки брендової інформації та провести такий аналіз. Предмет дослідження: модель $SEILR$ для аналізу динаміки брендової інформації.

Робота включає наступні розділи: в 1-му розглядаються базові епідеміологічні моделі та їх різновид, в 2-му - побудова $SEILR$ - моделі для аналізу інформації брендової інформації, пошук станів рівноваги та базового репродукційного числа. У 3-му розділі описується числове моделювання для ілюстрації теоретичних результатів. Завершується робота висновками та деякими дослідницькими перспективами.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД БІЛЬШ ПОШИРЕНИХ ІСНУЮЧИХ БАЗОВИХ ЕПІДЕМІОЛОГІЧНИХ МОДЕЛЕЙ

Поширення інформації про бренди у цифровому середовищі демонструє динаміку, аналогічну розповсюдженню вірусних інфекцій. Це дозволяє використовувати епідеміологічні моделі для опису відповідних процесів. Розглянемо основні види епідеміологічних моделей.

1.1 SIR-модель

SIR-модель – найпоширениніша модель епідемії, в якій популяція розділена на 3 групи (compartments), а саме:

1) Вразливих (susceptible): тих, хто раніше не піддавався збуднику інфекції, відповідно немає набутого імунітету, позначається S.
2) Інфікованих (infected): тих, хто є носіями хвороби та можуть заразити інших, позначається I.
3) Невразливих (recovered): тих, хто одужав та набув імунітет, позначається R.

Поширення інфекційної хвороби відбуваються через контакт вразливих з інфікованими. Перехід від одного класу до іншого можна представити наступною схемою:

$$S \to I \to R.$$

Успадкований імунітет не передбачений цією моделлю. Інкубаційний період вважається досить коротким і тому не враховується. В основі цієї моделі лежить система диференційних рівнянь, що описують динаміку трьох зазначених складових:

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta \dfrac{SI}{N}, \\ \dot{I} = \beta \dfrac{SI}{N} - \gamma I, \\ \dot{R} = \gamma I \end{cases}$$

де:

- N — загальна чисельність популяції ($N = S + I + R$),

- β — швидкість передачі інфекції при контакті,
- γ — швидкість одужання.

1.2 $SEIR$-модель

$SEIR$-модель уточнює SIR шляхом введення проміжного стану — експонованих (exposed), які були інфіковані, але ще не є заразними. Тобто враховується інкубаційний період.

Система рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta \dfrac{SI}{N}, \\ \dfrac{dE}{dt} = \beta \dfrac{SI}{N} - \sigma E, \\ \dfrac{dI}{dt} = \sigma E - \gamma I, \\ \dfrac{dR}{dt} = \gamma I \end{cases}$$

де:

- σ — швидкість переходу з експонованого до інфікованого стану.

1.3 SIS-модель

У SIS-моделі особи не набувають тривалого імунітету після одужання, а повертаються до вразливого стану. Вона підходить для опису хвороб, які не дають імунітету (наприклад, застуда). Модель передбачає два класи:

- S — вразливі,
- I — інфіковані.

Система диференційних рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta \frac{SI}{N} + \gamma I, \\ \dot{I} = \beta \frac{SI}{N} - \gamma I \end{cases}$$

Переходи: $S \to I \to S$. Ця модель дозволяє вивчати довготривалу циркуляцію інфекції в популяції без імунітету.

РОЗДІЛ 2

ОСНОВНА ЧАСТИНА

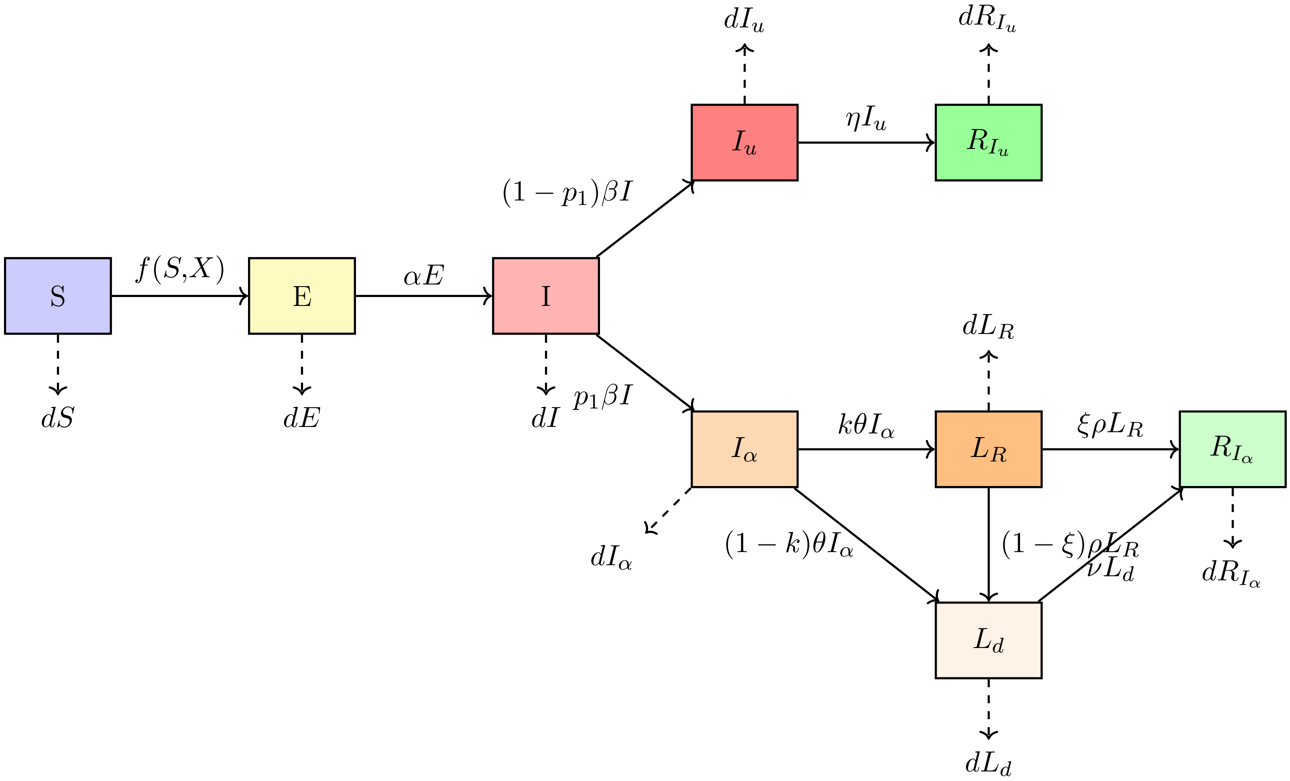
2.1 Опис моделі

Модель SEILR (Susceptible–Exposed–Interesting–Loyal–Recovered) з такою інтерпретацією станів:

- $S(t)$ — **сприйнятливі**: особи, які ще не стикалися з брендовим повідомленням, але потенційно можуть його сприйняти;
- $E(t)$ — **експоновані**: особи, які вже бачили або почули брендову інформацію, але ще не почали взаємодіяти;
- $I(t)$ — **зацікавлені**: особи, які обробили повідомлення й готові поширювати його (усно, онлайн, поведінково);
- $I_\alpha(t)$ — **виявлені зацікавлені**: особи, які проявляють активну поведінку (лайки, коментарі, покупки), ідентифіковані аналітикою;
- $I_u(t)$ — **невиявлені зацікавлені**: взаємодіють із брендом, але без публічної або детектованої активності;
- $L_R(t)$ — **лояльні**: ті, хто перейшов з групи I_α і, ймовірно, здійснить цільову дію;
- $L_d(t)$ — **втрачені**: особи, що втратили зацікавлення (ігнорування, відписка, негатив, конфлікт), але вони ще можуть здійснити цільову дію, хоча навряд залишаться клієнтами бренду;
- $R_{I_\alpha}(t), R_{I_u}(t)$ — **конвертовані**: особи, які виконали цільову дію (покупка, підписка, рекомендація).

Після загального опису, наведеного вище, ми отримуємо діаграму переходів з одного компартмента до іншого. Функція f(S, X) задається так:

$$f(S,X) = \frac{S}{N}(\beta_E E + \beta_I I + \beta_{I_u} I_u + \beta_{I_\alpha} I_\alpha + \beta_{L_d} L_d + \beta_{L_R} L_R),$$
$$X = (E, I, I_u, I_\alpha, L_R, L_d).$$



Система рівнянь

Математична динаміка описується наступною системою диференціальних рівнянь:

$$
\begin{cases}
\dot{S} = A - \dfrac{S}{N}(\beta_E E + \beta_I I + \beta_{I_u} I_u + \beta_{I_\alpha} I_\alpha + \beta_{L_d} L_d + \beta_{L_R} L_R) - dS, \\
\dot{E} = \dfrac{S}{N}(\beta_E E + \beta_I I + \beta_{I_u} I_u + \beta_{I_\alpha} I_\alpha + \beta_{L_d} L_d + \beta_{L_R} L_R) - (\alpha + d)E, \\
\dot{I} = \alpha E - (\beta + d)I, \\
\dot{I_\alpha} = p_1 \beta I - (\theta + d) I_\alpha, \\
\dot{I_u} = (1 - p_1)\beta I - (\eta + d) I_u, \\
\dot{L_R} = k\theta I_\alpha - (\rho + d) L_R, \\
\dot{L_d} = (1-k)\theta I_\alpha + (1-\xi)\rho L_R - (\nu + d) L_d, \\
\dot{R_{I_\alpha}} = \xi \rho L_R + \nu L_d - dR_{I_\alpha}, \\
\dot{R_{I_u}} = \eta I_u - dR_{I_u}.
\end{cases}
\tag{2.1}
$$

2.2 Опис параметрів моделі

Назва параметра	**Опис та інтерпретація**
β_E	Коефіцієнт передачі інформації від E.
β_I	Коефіцієнт передачі інформації від I
β_{I_u}	Коефіцієнт передачі інформації від I_u.
β_{I_α}	Коефіцієнт передачі інформації від I_α.
β_{L_R}	Коефіцієнт переходу від лояльних користувачів L_R, які активно просувають бренд.
β_{L_d}	Коефіцієнт переходу від класу L_d.
α	Коефіцієнт переходу з E до I, тобто активна зацікавленість після експозиції.
β	Коефіцієнт переходу з I до наступних станів: виявлені I_α та невиявлені I_u.
p_1	Частка зацікавлених I, які стають виявленими I_α.
$1-p_1$	Частка зацікавлених I, які залишаються невиявленими I_u.
θ	Коефіцієнт переходу з I_α до лояльних або втрачених.
k	Частка активних виявлених I_α, що стають лояльними L_R.
$1-k$	Частка виявлених I_α, що стають втраченими L_d.
ρ	Коефіцієнт переходу з L_R до конверсії R_{I_α} або втрати L_d.
ξ	Частка L_R, які здійснюють цільову дію (покупка тощо).
$1-\xi$	Частка L_R, які втрачають інтерес без цільової дії.

Назва параметра	**Опис та інтерпретація**
ν	Коефіцієнт відновлення довіри. Швидкість, з якою частина L_d все ж виконує цільову дію.
η	Коефіцієнт переходу I_u до конверсії R_{I_u}.
A	Коефіцієнт притоку нових споживачів у стан S.
d	Природне вибування. Втрата інтересу через зовнішні чинники у всіх станах.

2.3 Стан рівноваги

У цьому підрозділі ми визначаємо точки рівноваги та базове репродукційне число, пов'язане з системою (1).

Оскільки інші рівняння системи (1) не залежать від значень $R_{I_\alpha}(t)$ та $R_{I_u}(t)$, тому система (1) еквівалентна наступній системі:

$$\begin{cases} \dot{S} = A - \dfrac{S}{N}(\beta_E E + \beta_I I + \beta_{I_u} I_u + \beta_{I_\alpha} I_\alpha + \beta_{L_d} L_d + \beta_{L_R} L_R) - dS, \\ \dot{E} = \dfrac{S}{N}(\beta_E E + \beta_I I + \beta_{I_u} I_u + \beta_{I_\alpha} I_\alpha + \beta_{L_d} L_d + \beta_{L_R} L_R) - (\alpha + d)E, \\ \dot{I} = \alpha E - (\beta + d)I, \\ \dot{I_\alpha} = p_1 \beta I - (\theta + d) I_\alpha, \\ \dot{I_u} = (1 - p_1)\beta I - (\eta + d) I_u, \\ \dot{L_R} = k\theta I_\alpha - (\rho + d) L_R, \\ \dot{L_d} = (1 - k)\theta I_\alpha + (1 - \xi)\rho L_R - (\nu + d) L_d, \end{cases} \tag{2.2}$$

Позначимо $\Psi(t) = (S, E, I, I_\alpha, I_u, L_R, L_d)$ як точку рівноваги системи (2). Тоді систему (2) можна переписати наступним чином:

$$\begin{cases} A - \dfrac{S}{N}(\beta_E E + \beta_I I + \beta_{I_u} I_u + \beta_{I_\alpha} I_\alpha + \beta_{L_d} L_d + \beta_{L_R} L_R) - dS = 0, \\ \dfrac{S}{N}(\beta_E E + \beta_I I + \beta_{I_u} I_u + \beta_{I_\alpha} I_\alpha + \beta_{L_d} L_d + \beta_{L_R} L_R) - (\alpha + d)E = 0, \\ \alpha E - (\beta + d)I = 0, \\ p_1 \beta I - (\theta + d) I_\alpha = 0, \\ (1 - p_1)\beta I - (\eta + d) I_u = 0, \\ k\theta I_\alpha - (\rho + d) L_R = 0, \\ (1-k)\theta I_\alpha + (1-\xi)\rho L_R - (\nu + d) L_d = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Третє рівняння системи (3) можна переписати наступним чином, виразивши E через I:

$$E = \frac{(\beta + d)}{\alpha} I, \qquad \alpha \neq 0$$

Додавши перше та друге рівняння системи (3), отримаємо вираз для S:

$$A - dS - (\alpha + d)E = 0$$

$$dS = A + (\alpha + d)E,$$

підставляючи вираз для E, матимемо:

$$dS = A + (\alpha + d)\frac{(\beta + d)I}{\alpha}$$

$$S = \frac{A}{d} + \frac{(\alpha + d)(\beta + d)}{\alpha d} I, \qquad d \neq 0$$

Використаємо четверте рівняння системи (3) та виразимо I_α:

$$I_\alpha = \frac{p_1 \beta}{\theta + d} I, \qquad \theta \neq -d$$

З п'ятого рівняння системи (3):

$$I_u = \frac{(1 - p_1)\beta}{\eta + d} I, \qquad \eta \neq -d,$$

З шостого рівняння системи (3) отримаємо:

$$L_R = \frac{k\theta}{\rho + d} I_\alpha, \qquad p \neq -d,$$

підкладая вираз для I_α одержимо:

$$L_R = \frac{k\theta p_1\beta}{(\rho+d)(\theta+d)}I$$

З сьомого рівняння системи (3), враховуючи знайдені $I_\alpha,\ L_R$, знаходимо L_d:

$$(\nu+d)L_d = (1-k)\theta I_\alpha + (1-\xi)\rho L_R$$

$$(\nu+d)L_d = (1-k)\theta\frac{p_1\beta}{\theta+d}I + (1-\xi)\rho\frac{k\theta p_1\beta}{(\rho+d)(\theta+d)}I$$

$$(\nu+d)L_d = \frac{(1-k)(\rho+d)p_1\beta\theta + (1-\xi)\rho k\theta p_1\beta}{(\rho+d)(\theta+d)}I$$

$$L_d = \frac{(1-k)(\rho+d)p_1\beta\theta + (1-\xi)\rho k\theta p_1\beta}{(\nu+d)(\rho+d)(\theta+d)}I,$$

$$L_d = \frac{p_1\beta\theta\left[\rho(1-\xi k) + d(1-k)\right]}{(\nu+d)(\rho+d)(\theta+d)}I, \qquad \theta \neq -d,\ \ \nu \neq -d.$$

Отримали такі вирази з такими обмеженнями на параметри:

$\alpha \neq 0, d \neq 0, \theta \neq -d, \eta \neq -d, \nu \neq -d$

$$S = \frac{A}{d} + \frac{(\alpha+d)(\beta+d)}{\alpha d}I$$

$$E = \frac{(\beta+d)}{\alpha}I$$

$$I_\alpha = \frac{p_1\beta}{\theta+d}I$$

$$I_u = \frac{(1-p_1)\beta}{\eta+d}I$$

$$L_R = \frac{k\theta p_1\beta}{(\rho+d)(\theta+d)}I$$

$$L_d = \frac{p_1\beta\theta\left[\rho(1-\xi k) + d(1-k)\right]}{(\nu+d)(\rho+d)(\theta+d)}I.$$

Позначимо як Ψ_1 та Ψ_2 — відповідно точка рівноваги без поінформованих користувачів та точка рівноваги з усталеною присутністю брендового впливу в системі (2). Стан рівноваги без поінформованості відповідає ситуації, коли жоден індивід не володіє інформацією про бренд, коли немає зацікавлених осіб, які обробили повідомлення й готові поширювати його. У цьому випадку маємо $I = 0$, і відповідна точка рівноваги задається як:

$\Psi_1 = (\frac{A}{d}, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$

$\Psi_2 = (S^*, E^*, I^*, I_\alpha^*, I_u^*, L_R^*, L_d^*)$, де

$$S^* = \frac{A}{d} + \frac{(\alpha + d)(\beta + d)}{\alpha d} I^*$$

$$E^* = \frac{(\beta + d)}{\alpha} I^*$$

$$I_\alpha^* = \frac{p_1 \beta}{\theta + d} I^*$$

$$I_u^* = \frac{(1 - p_1)\beta}{\eta + d} I^*$$

$$L_R^* = \frac{k \theta p_1 \beta}{(\rho + d)(\theta + d)} I^*$$

$$L_d^* = \frac{p_1 \beta \theta \left[\rho(1 - \xi k) + d(1 - k)\right]}{(\nu + d)(\rho + d)(\theta + d)} I^*$$

Будемо вважати, що на етапі сталого поширення бренду (маркетингової рівноваги) кількість лояльних клієнтів (L_R), виявлених зацікавлених (I_α), невиявлених зацікавлених (I_u) також втрачених потенційних клієнтів (L_d) є більшою або дорівнює тій, що була на будь-якому іншому етапі поширення.

Для всіх $I_\alpha, I_u, L_R, L_d \in \mathbb{R}^+$ виконується нерівність:

$$\begin{pmatrix} I_\alpha \\ I_u \\ L_R \\ L_d \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} I_\alpha^* \\ I_u^* \\ L_R^* \\ L_d^* \end{pmatrix}$$

Тобто система досягає своєї максимальної «конверсійної активності» у точці рівноваги – брендовий вплив не зникне раптово, а поступово досягне стабільного стану з певною кількістю лояльних, втрачених, зацікавлених і конвертованих осіб.

2.4 Базове репродукційне число

Знайдемо R_0 – базове репродукційне число - це очікувана кількість нових експонованих або зацікавлених споживачів, яких "створює"один уже зацікавлений споживач (у стадії $E, I, I_u, I_\alpha, L_R, L_d$) , за умови, що всі інші — сприйнятливі.

Для розрахунку базового репродукційного числа R_0 використаємо метод Van den Driessche and Watmough, який описано у [1]. Згідно з цім методом, визначимо інфекційні класи, що можуть прямо або опосередковано передавати інфекцію. У нашій моделі наступні класи E, I, I_α, I_u, L_R та L_d володіють інформацією про бренд або продукт бренду, але ще не виконали цільову дію.

Випишемо матрицю $\mathcal{F}$– матриця швидкостей появи нових зацікавлених у кожному класі:

$$\mathcal{F}(\chi) = \begin{pmatrix} \frac{S}{N}\left(\beta_E E + \beta_I I + \beta_{I_u} I_u + \beta_{I_\alpha} I_\alpha + \beta_{L_d} L_d + \beta_{L_R} L_R\right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

та матрицю переходів зацікавлених між станами $\mathcal{V}$, включаючи входи та виходи з класу:

$$\mathcal{V}(\chi) = \begin{pmatrix} (\alpha + d)E \\ -\alpha E + (\beta + d)I \\ -p_1 \beta I + (\theta + d) I_\alpha \\ -(1 - p_1)\beta I + (\eta + d) I_u \\ -k\theta I_\alpha + (\rho + d) L_R \\ -(1 - k)\theta I_\alpha + (1 - \xi)\rho L_R + (\nu + d) L_d \end{pmatrix}.$$

Таким чином, систему (2) можна переписати у вигляді:

$$\dot{\chi} = \mathcal{F}(\chi) - \mathcal{V}(\chi),$$

де $\chi = (E, I, I_\alpha, I_u, L_R, L_d)$.

Обчислюємо матриці Якобі для $\mathcal{F}$ та $\mathcal{V}$ у точці рівноваги **DFE (Disease-Free Equilibrium)**.

Матриця F має вигляд:

$$F = \frac{\partial \mathcal{F}_\rangle}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{S}{N}\beta_E & \frac{S}{N}\beta_I & \frac{S}{N}\beta_{I_\alpha} & \frac{S}{N}\beta_{I_u} & \frac{S}{N}\beta_{L_R} & \frac{S}{N}\beta_{L_d} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Відповідно, матриця V має вигляд:

$$V = \frac{\partial \mathcal{V}_\rangle}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \alpha + d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & \beta + d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p_1\beta & \theta + d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1-p_1)\beta & 0 & \eta + d & 0 & 0 \\ 0 & -k\theta & 0 & 0 & \rho + d & 0 \\ 0 & -(1-k)\theta & 0 & 0 & -(1-\xi)\rho & \nu + d \end{pmatrix}$$

Знайдемо значення F та V в точці рівноваги без зацікавлених, маємо $\Psi_1 = \left(\frac{A}{d}, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right)$, то матриця $F(\Psi_1)$ дорівнює:

$$F(\Psi_1) = \begin{pmatrix} \frac{A}{dN}\beta_E & \frac{A}{dN}\beta_I & \frac{A}{dN}\beta_{I_\alpha} & \frac{A}{dN}\beta_{I_u} & \frac{A}{dN}\beta_{L_R} & \frac{A}{dN}\beta_{L_d} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Порахуємо обернену матрицю до матриці V, за допомогою онлайн-ресурсів:

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha+d} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha}{(\alpha+d)(\beta+d)} & \frac{1}{\beta+d} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha\beta p_1}{(\alpha+d)(\beta+d)(\theta+d)} & \frac{p_1\beta}{(\beta+d)(\theta+d)} & \frac{1}{\theta+d} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(1-p_1)\alpha\beta}{(\alpha+d)(\beta+d)(\eta+d)} & \frac{p_1\beta}{(\beta+d)(\rho+d)} & 0 & \frac{1}{\eta+d} & 0 & 0 \\ \frac{k\alpha\theta}{(\alpha+d)(\beta+d)(\rho+d)} & \frac{k\theta}{(\beta+d)(\theta+d)} & 0 & 0 & \frac{1}{\rho+d} & 0 \\ \frac{\alpha k\theta(1-\xi)\rho+\alpha\rho(1-k)(\rho+d)}{(\alpha+d)(\beta+d)(\rho+d)(\nu+d)} & \frac{k\theta(1-\xi)\rho+(1-k)(\rho+d)\theta}{(\beta+d)(\rho+d)(\nu+d)} & 0 & 0 & \frac{(1-\xi)\rho}{(\rho+d)(\nu+d)} & \frac{1}{\nu+d} \end{pmatrix}$$

Помножимо кожен елемент $i-$тої строки матриці F на відповідний $j-$тий стовпець матриці V^{-1} Тоді, матриця наступного покоління, буде мати наступний вигляд:

$$FV^{-1} = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & R_5 & R_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

де

$$\begin{aligned} R_1 \quad = \quad & \frac{A}{dN} \cdot \left(\beta_E \cdot \frac{1}{\alpha+d} + \beta_I \cdot \frac{\alpha}{(\alpha+d)(\beta+d)} + \beta_{I_\alpha} \cdot \frac{\alpha\beta p_1}{(\alpha+d)(\beta+d)(\theta+d)} + \right. \\ & + \beta_{I_u} \cdot \frac{(1-p_1)\alpha\beta}{(\alpha+d)(\beta+d)(\eta+d)} + \beta_{L_R} \cdot \frac{k\alpha\theta}{(\alpha+d)(\beta+d)(\rho+d)} + \\ & \left. + \beta_{L_d} \cdot \frac{\alpha\theta k(1-\xi)\rho + \alpha\rho(1-k)(\rho+d)}{(\alpha+d)(\beta+d)(\rho+d)(\nu+d)} \right) = \\ = & \frac{A}{dN(\alpha+d)(\beta+d)} \cdot \left[\beta_E(\beta+d) + \beta_I\alpha + \beta_{I_\alpha} \cdot \frac{\alpha\beta p_1}{\theta+d} + \beta_{I_u} \cdot \frac{(1-p_1)\alpha\beta}{\eta+d} + \right. \\ & \left. + \beta_{L_R} \cdot \frac{k\alpha\theta}{\rho+d} + \beta_{L_d} \cdot \frac{\alpha\rho\left(\theta k(1-\xi) + (1-k)(\rho+d)\right)}{(\rho+d)(\nu+d)} \right] \end{aligned}$$

$$R_2 = \frac{A}{dN}\cdot\left[\beta_I\cdot\frac{1}{\beta+d}+\beta_{I_\alpha}\cdot\frac{p_1\beta}{(\beta+d)(\theta+d)}+\beta_{I_u}\cdot\frac{(1-p_1)\beta}{(\beta+d)(\eta+d)}+\right.$$
$$\left.+\beta_{L_R}\cdot\frac{k\theta}{(\beta+d)(\rho+d)}+\beta_{L_d}\cdot\frac{k\theta(1-\xi)\rho+(1-k)(\rho+d)\theta}{(\beta+d)(\rho+d)(\nu+d)}\right]=$$
$$=\frac{A}{dN(\beta+d)}\cdot\left[\beta_I+\beta_{I_\alpha}\cdot\frac{p_1\beta}{\theta+d}+\beta_{I_u}\cdot\frac{(1-p_1)\beta}{\eta+d}+\right.$$
$$\left.+\beta_{L_R}\cdot\frac{k\theta}{\rho+d}+\beta_{L_d}\cdot\frac{\theta\left(\rho(1-k\xi)+(1-k)d\right)}{(\rho+d)(\nu+d)}\right]$$

$$R_3 = \frac{A}{dN}\cdot\beta_{I_\alpha}\cdot\frac{1}{\theta+d}$$

$$R_4 = \frac{A}{dN}\cdot\beta_{I_u}\cdot\frac{1}{\eta+d}$$

$$R_5 = \frac{A}{dN}\cdot\left(\beta_{L_R}\cdot\frac{1}{\rho+d}+\beta_{L_d}\cdot\frac{(1-\xi)\rho}{(\rho+d)(\nu+d)}\right)$$

$$R_6 = \frac{A}{dN}\cdot\beta_{L_d}\cdot\frac{1}{\nu+d}$$

Базове репродукціне число знаходиться як $R_0 = \rho(FV^{-1})$, де ρ – це спектральний радіус матриці FV^{-1}.

Спектральний радіус квадратної матриці — це максимум абсолютних значень її власних значень.

Знайдемо власні значення матриці FV^{-1}:

$$|FV^{-1} - \lambda E| = \begin{vmatrix} R_1 - \lambda & R_2 & R_3 & R_4 & R_5 & R_6 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (R_1 - \lambda)(-\lambda)^5$$

Звідси, власні значення дорівнюють:

$$\lambda_1 = R_1, \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0.$$

Тоді $R_0 = R_1$ отримаємо базове репродукційне число:

$$R_0 = \frac{A}{dN(\alpha + d)(\beta + d)} \cdot \Bigg[\beta_E(\beta + d) + \beta_I \alpha + \beta_{I_\alpha} \cdot \frac{\alpha \beta p_1}{\theta + d} + \beta_{I_u} \cdot \frac{(1 - p_1)\alpha\beta}{\eta + d} + \\ + \beta_{L_R} \cdot \frac{k\alpha\theta}{\rho + d} + \beta_{L_d} \cdot \frac{\alpha\rho\,(\theta k(1 - \xi) + (1 - k)(\rho + d))}{(\rho + d)(\nu + d)} \Bigg]$$

РОЗДІЛ 3

АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ МОДЕЛІ

У цьому розділі в підрозділі 3.1 доводиться додатність та обмеженість розв'язків системи (1), а в підрозділі 3.2 — глобальна стійкість стану рівноваги без інформаційного впливу Ψ_1, коли $R_0 < 1$, та глобальна стійкість інформаційно активного (ендемічного) стану рівноваги Ψ_2, коли $R_0 > 1$

Враховуючи маркетингову інтерпретацію змінних моделі (1), розглядаються лише ті розв'язки, які описують реальні ситуації, тобто починаються з початкових значень, що відповідають позитивній кількості споживачів у кожному з маркетингових станів:

$$\begin{gathered} S(0) > 0, \quad E(0) \geq 0, \quad I(0) \geq 0, \quad I_\alpha(0) \geq 0, \quad I_u(0) \geq 0, \\ L_R(0) \geq 0, \quad L_d(0) \geq 0, \quad R_{I_\alpha}(0) \geq 0, \quad R_{I_u}(0) \geq 0 \end{gathered} \tag{3.1}$$

Тобто, на початковий момент часу існує принаймні одна особа, яка ще не стикалася з брендом (сприйнятлива), а також можуть бути особи, що вже ознайомлені, взаємодіють чи пройшли інші стадії поведінки щодо бренду.

3.1 Додатність та обмеженість розв'язків

У цьому підрозділі показано, що розв'язки системи (1), які відповідають реалістичним початковим умовам, залишаються додатними та обмеженими впродовж усього часу моделювання. Змінні системи описують кількість осіб у певному стані (сприйнятливі, експоновані, зацікавлені тощо), тобто жодна категорія користувачів не може мати від'ємне значення та обмеженими, тобто чисельність у кожному стані не зростає безмежно для всіх $t \geq 0$. Це означає, що модель поводиться адекватно з точки зору маркетингової логіки: кількість потенційних та активних користувачів залишається в реалістичних межах, відповідно до обсягу ринку.

Лема 1. *Нехай $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$ — відкрита множина, $f_i \in C(\Omega, \mathbb{R})$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Якщо для кожного $i = 1, 2, \ldots, n$ виконується умова*

$$f_i\big|_{x_i(t)=0,\ X_t \in \mathbb{C}^n} \geq 0,$$

де $X_t = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, тоді множина

$$\mathbb{C}^n_{+0} = \left\{ \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \;\middle|\; \varphi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n_{+0}) \right\}$$

є інваріантною множиною для системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(t, X_t), \quad t \geq \sigma, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

де

$$\mathbb{R}^n_{+0} = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \geq 0, \ i = 1, 2, \ldots, n\},$$

Розглянемо систему (1), що описує динаміку змінних. Нехай

$$(S, E, I, I_\alpha, I_u, L_R, L_d, R_{I_\alpha}, R_{I_u}) \in \mathbb{R}^9,$$

– розв'язок системи (1) з початковими умовами

$$\begin{aligned} S(0) > 0, \quad E(0) \geq 0, \quad I(0) \geq 0, \quad I_\alpha(0) \geq 0, \quad I_u(0) \geq 0, \\ L_R(0) \geq 0, \quad L_d(0) \geq 0, \quad R_{I_\alpha}(0) \geq 0, \quad R_{I_u}(0) \geq 0. \end{aligned}$$

Тоді для всіх $t \geq 0$

$$\begin{aligned} S(t) > 0, \quad E(t) > 0, \quad I(t) > 0, \quad I_\alpha(t) > 0, \quad I_u(t) > 0, \\ L_R(t) > 0, \quad L_d(t) > 0, \quad R_{I_\alpha}(t) > 0, \quad R_{I_u}(t) > 0. \end{aligned}$$

Перевіряючи умови леми для кожної змінної при її нульовому значенні, спостерігаємо, що відповідні похідні не від'ємні:

$$\left.\frac{dS}{dt}\right|_{S=0} = A \geq 0, \quad \left.\frac{dE}{dt}\right|_{E=0} = \frac{S}{N}\big(\beta_I I + \beta_{I_u} I_u + \beta_{I_\alpha} I_\alpha + \beta_{L_R} L_R + \beta_{L_d} L_d\big) \geq 0,$$

$$\left.\frac{dI}{dt}\right|_{I=0} = \alpha E \geq 0, \quad \left.\frac{dI_\alpha}{dt}\right|_{I_\alpha=0} = p_1 \beta I \geq 0, \quad \left.\frac{dI_u}{dt}\right|_{I_u=0} = (1-p_1)\beta I \geq 0,$$

$$\left.\frac{dL_R}{dt}\right|_{L_R=0} = k\theta I_\alpha \geq 0, \quad \left.\frac{dL_d}{dt}\right|_{L_d=0} = (1-k)\theta I_\alpha + (1-\xi)\rho L_R \geq 0,$$

$$\left.\frac{dR_{I_\alpha}}{dt}\right|_{R_{I_\alpha}=0} = \xi\rho L_R + \nu L_d \geq 0, \quad \left.\frac{dR_{I_u}}{dt}\right|_{R_{I_u}=0} = \eta I_u \geq 0.$$

Таким чином, умови леми виконуються, що забезпечує інваріантність множини невід'ємних векторів $\mathbb{R}^9_+$.

Будемо вважати, що множина $D \subset \mathbb{R}^n$ називається *інваріантною* щодо системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dX}{dt} = f(t, X),$$

якщо для будь-якого початкового стану $X(t_0) \in D$ розв'язок $X(t)$ залишається в множині D для всіх $t \geq t_0$. Іншими словами,

$$X(t_0) \in D \implies X(t) \in D, \quad \forall t \geq t_0.$$

Отже, якщо початкові умови системи невід'ємні, то розв'язок залишатиметься невід'ємним для всіх $t \geq 0$.

Покажемо глобальну обмеженість моделі, тобто що розв'язки залишаються обмеженими, тобто що загальна кількість людей у всіх станах моделі не буде безмежно зростати з часом, а залишатиметься обмеженою зверху певним значенням. Загальна кількість осіб, які беруть участь у процесі (від сприйнятливих до конвертованих):

$$N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + I_\alpha(t) + I_u(t) + L_R(t) + L_d(t) + R_{I_\alpha}(t) + R_{I_u}(t),$$

де $N(t)$ - це загальна кількість осіб в усіх станах. Додамо всі рівняння системи (1) та отримаємо:

$$\dot{S}+\dot{E}+\dot{I}+\dot{I}_\alpha+\dot{I}_u+\dot{L}_R+\dot{L}_d+\dot{R}_{I_\alpha}+\dot{R}_{I_u} = A-d(S+E+I+I_\alpha+I_u+L_R+L_d+R_{I_\alpha}+R_{I_u})$$

або

$$\dot{N} = A - dN,$$

$$\dot{N} + dN = A.$$

Це лінійне диференціальне рівняння першого порядку, загальний розв'язок якого

$$N(t) = \frac{A}{d} + Ce^{-dt}.$$

Враховуючи початкові умови

$$N(0) = N_0 = S(0) + E(0) + I(0) + I_\alpha(0) + I_u(0) + L_R(0) + L_d(0) + R_{I_\alpha}(0) + R_{I_u}(0),$$

знаходимо

$$N(t) = \frac{A}{d} + \left(N_0 - \frac{A}{d}\right) e^{-dt}.$$

При $t \to +\infty$, $e^{-dt} \to +0$, тоді маємо:

$$\lim_{t\to+\infty} N(t) = \frac{A}{d}$$

тобто $N(t)$ є обмеженим при $t \to +\infty$: $N(t) \leq \frac{A}{d}$. Тоді всі розв'язки системи (1) входять у множину

$$\tilde{\Gamma} = \left\{ (S, E, I, I_d, I_u, H_R, H_d, R_{I_d}, R_{I_u}) \in \mathbb{R}^9 : W \leq \frac{A}{d} \right\}.$$

3.2 Глобальна стійкість станів рівноваги

У цьому розділі досліджується довготривала поведінка динамічної системи залежно від значення базового репродуктивного числа R_0. Основна увага приділяється встановленню умов, за яких відповідні рівноважні стани системи є глобально стійкими. Зокрема, розглядаються два основні випадки: $R_0 < 1$, коли можлива ерадикація зацікавлених, та $R_0 > 1$, за якого існує ендемічна рівновага.

3.2.1 При $R_0 < 1$

Дослідимо глобальну стійкість стану рівноваги Ψ_1 без зацікавлених для системи (2), коли $R_0 < 1$. Наявність асимптотично стійкого стану рівноваги свідчить про те, що навіть за умов просування інтерес до бренду не зростає необмежено, а з часом повертається до початкового, стабільного рівня. Покажемо, що рівновага без зацікавлених Ψ_1 системи (2) є глобально асимптотично стійкою за умови $R_0 < 1$.

Розглянемо класи, пов'язані із зацікавленістю: E, I, I_α, I_u, L_R, L_d. Лінеаризована система в околі Ψ_1 має вигляд:

$$\begin{cases} \dot{E} = \left(\dfrac{\beta_E A}{dN} - (\alpha + d) \right) E + \dfrac{\beta_I A}{dN} I + \dfrac{\beta_{I_\alpha} A}{dN} I_\alpha + \dfrac{\beta_{I_u} A}{dN} I_u + \dfrac{\beta_{L_R} A}{dN} L_R + \dfrac{\beta_{L_d} A}{dN} L_d, \\ \dot{I} = \alpha E - (\beta + d) I, \\ \dot{I}_\alpha = p_1 \beta I - (\theta + d) I_\alpha, \\ \dot{I}_u = (1 - p_1) \beta I - (\eta + d) I_u, \\ \dot{L}_R = k\theta I_\alpha - (\rho + d) L_R, \\ \dot{L}_d = (1 - k)\theta I_\alpha + (1 - \xi)\rho L_R - (\nu + d) L_d. \end{cases} \tag{3.2}$$

Матриця M_1, що відповідає лінеаризованій системі, має вигляд:

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{\beta_E A}{dN} - (\alpha + d) & \frac{\beta_I A}{dN} & \frac{\beta_{I_\alpha} A}{dN} & \frac{\beta_{I_u} A}{dN} & \frac{\beta_{L_R} A}{dN} & \frac{\beta_{L_d} A}{dN} \\ \alpha & -(\beta + d) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1\beta & -(\theta + d) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - p_1)\beta & 0 & -(\eta + d) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k\theta & 0 & -(\rho + d) & 0 \\ 0 & 0 & (1 - k)\theta & 0 & (1 - \xi)\rho & -(\nu + d) \end{pmatrix}$$

а саму лінеаризовану систему можна переписати у вигляді:

$$\dot{Y} \leq M_1 Y,$$

де $Y = (E, I, I_\alpha, I_u, L_R, L_d)^T$, а матриця M_1 має вигляд:

$$M_1 = F_1 + V_1,$$

з

$$F_1 = \begin{pmatrix} \frac{\beta_E A}{dN} & \frac{\beta_I A}{dN} & \frac{\beta_{I_\alpha} A}{dN} & \frac{\beta_{I_u} A}{dN} & \frac{\beta_{L_R} A}{dN} & \frac{\beta_{L_d} A}{dN} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} -(\alpha+d) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & -(\beta+d) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1\beta & -(\theta+d) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-p_1)\beta & 0 & -(\eta+d) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k\theta & 0 & -(\rho+d) & 0 \\ 0 & 0 & (1-k)\theta & 0 & (1-\xi)\rho & -(\nu+d) \end{pmatrix}$$

Матриця V_1 є невиродженою, і її обернена матриця V_1^{-1} існує. Оскільки $F_1 \geq 0$ та $V_1^{-1} \geq 0$, то спектральний радіус матриці $-F_1V_1^{-1}$ визначає базове число відтворення R_0, тобто $R_0 = \rho(-F_1V_1^{-1})$. Отже, $R_0 = \rho(-F_1V_1^{-1}) < 1$, і згідно з теоремою Варги (див. [6]), матриця M_1 є асимптотично стійкою. Оскільки всі власні значення матриці M_1 мають від'ємну дійсну частину, то, за стандартною теоремою порівняння, при $t \to +\infty$ маємо

$$E \to 0, \quad I \to 0, \quad I_d \to 0, \quad I_u \to 0, \quad H_R \to 0, \quad H_d \to 0$$

для лінеарізованої системи. Підставляючи $E = 0, I = 0, I_\alpha = 0, I_u = 0, L_R = 0, L_d = 0$ у систему (2), отримуємо $S \to \frac{A}{d}$ при $t \to +\infty$.

Таким чином, $(E, I, I_\alpha, I_u, L_R, L_d) \to \left(\frac{A}{d}, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right)$ при $t \to +\infty$ для системи (2), коли $R_0 < 1$. Отже, рівновага без зацікавлених Ψ_1 є глобально асимптотично стійкою в додатній області $\tilde{\Gamma}$, коли $R_0 < 1$.

3.2.2 При $R_0 > 1$

У цьому підрозділі розглядається глобальна стійкість ендемічної рівноваги ψ_2 для системи (2), коли $R_0 > 1$.

Нехай

$$\psi_2 = (S^*, E^*, I^*, I_\alpha^*, I_u^*, L_R^*, L_d^*)$$

— ендемічна рівновага системи (2). Із системи (2) отримаємо:

$$\begin{cases} A = \dfrac{S^*}{N}\left(\beta_E E^* + \beta_I I^* + \beta_{I_u} I_u^* + \beta_{I_\alpha} I_\alpha^* + \beta_{L_d} L_d^* + \beta_{L_R} L_R^*\right) + dS^*, \\ \dfrac{S^*}{N}\left(\beta_E E^* + \beta_I I^* + \beta_{I_u} I_u^* + \beta_{I_\alpha} I_\alpha^* + \beta_{L_d} L_d^* + \beta_{L_R} L_R^*\right) = (\alpha + d)E^*, \\ \alpha E^* = (\beta + d)I^*, \\ p_1 \beta I^* = (\theta + d)I_\alpha^*, \\ (1 - p_1)\beta I^* = (\eta + d)I_u^*, \\ k\theta I_\alpha^* = (\rho + d)L_R^*, \\ (1-k)\theta I_\alpha^* + (1-\xi)\rho L_R^* = (\nu + d)L_d^*. \end{cases} \tag{3.3}$$

Визначимо допоміжну функцію

$$\omega(x) = x - 1 - \ln x, \quad x \in \mathbb{R}_+^*, \tag{3.4}$$

яка є невід'ємною на $\mathbb{R}_+^*$.

Запишемо функцію Ляпунова:

$$V = V_S + V_E + V_I + V_{I_\alpha} + V_{I_u} + V_{L_R} + V_{L_d},$$

де

$$\begin{aligned} &V_S = S^*\omega\left(\frac{S}{S^*}\right), \quad V_E = E^*\omega\left(\frac{E}{E^*}\right), \quad V_I = I^*\omega\left(\frac{I}{I^*}\right), \\ &V_{I_\alpha} = I_\alpha^*\omega\left(\frac{I_\alpha}{I_\alpha^*}\right), \quad V_{I_u} = I_u^*\omega\left(\frac{I_u}{I_u^*}\right), \quad V_{L_R} = L_R^*\omega\left(\frac{L_R}{L_R^*}\right), \\ &V_{L_d} = L_d^*\omega\left(\frac{L_d}{L_d^*}\right). \end{aligned}$$

Знайдемо похідну V_S за часом:

$$\dot{V}_S = \left(1 - \frac{S^*}{S}\right)\dot{S}.$$

Підставимо з системи (2):

$$\dot{S} = A - \frac{S}{N}\left(\beta_E E + \beta_I I + \beta_{I_u} I_u + \beta_{I_\alpha} I_\alpha + \beta_{L_d} L_d + \beta_{L_R} L_R\right) - dS.$$

Отже,

$$\dot{V}_S = \left(1 - \frac{S^*}{S}\right)\left(A - \frac{S}{N}(\beta_E E + \beta_I I + \beta_{I_u} I_u + \beta_{I_\alpha} I_\alpha + \beta_{L_d} L_d + \beta_{L_R} L_R) - dS\right).$$

Тоді похідну функції Ляпунова V_S можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_S =& -d\cdot\frac{(S-S^*)^2}{S} + \frac{\beta_E S^* E^*}{N}\left[\left(1-\frac{S^*}{S}\right)\left(1-\frac{SE}{S^*E^*}\right)\right] + \frac{\beta_I S^* I^*}{N}\left[\left(1-\frac{S^*}{S}\right)\left(1-\frac{SI}{S^*I^*}\right)\right] \\
&+ \frac{\beta_{I_u} S^* I_u^*}{N}\left[\left(1-\frac{S^*}{S}\right)\left(1-\frac{SI_u}{S^*I_u^*}\right)\right] + \frac{\beta_{I_\alpha} S^* I_\alpha^*}{N}\left[\left(1-\frac{S^*}{S}\right)\left(1-\frac{SI_\alpha}{S^*I_\alpha^*}\right)\right] \\
&+ \frac{\beta_{L_R} S^* L_R^*}{N}\left[\left(1-\frac{S^*}{S}\right)\left(1-\frac{SL_R}{S^*L_R^*}\right)\right] + \frac{\beta_{L_d} S^* L_d^*}{N}\left[\left(1-\frac{S^*}{S}\right)\left(1-\frac{SL_d}{S^*L_d^*}\right)\right] \\
=& -d\cdot\frac{(S-S^*)^2}{S} + \frac{\beta_E S^* E^*}{N}\left(1-\frac{SE}{S^*E^*}-\frac{S^*}{S}+\frac{E}{E^*}\right) + \frac{\beta_I S^* I^*}{N}\left(1-\frac{SI}{S^*I^*}-\frac{S^*}{S}+\frac{I}{I^*}\right) \\
&+ \frac{\beta_{I_u} S^* I_u^*}{N}\left(1-\frac{SI_u}{S^*I_u^*}-\frac{S^*}{S}+\frac{I_u}{I_u^*}\right) + \frac{\beta_{I_\alpha} S^* I_\alpha^*}{N}\left(1-\frac{SI_\alpha}{S^*I_\alpha^*}-\frac{S^*}{S}+\frac{I_\alpha}{I_\alpha^*}\right) \\
&+ \frac{\beta_{L_R} S^* L_R^*}{N}\left(1-\frac{SL_R}{S^*L_R^*}-\frac{S^*}{S}+\frac{L_R}{L_R^*}\right) + \frac{\beta_{L_d} S^* L_d^*}{N}\left(1-\frac{SL_d}{S^*L_d^*}-\frac{S^*}{S}+\frac{L_d}{L_d^*}\right).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}_S =& -d\cdot\frac{(S-S^*)^2}{S} + \frac{\beta_E S^* E^*}{N}\left(-\frac{SE}{S^*E^*}+1+\ln\frac{SE}{S^*E^*}-\frac{S^*}{S}+1+\ln\frac{S^*}{S}+\frac{E}{E^*}-1-\ln\frac{E}{E^*}\right) \\
&+ \frac{\beta_I S^* I^*}{N}\left(-\frac{SI}{S^*I^*}+1+\ln\frac{SI}{S^*I^*}-\frac{S^*}{S}+1+\ln\frac{S^*}{S}+\frac{I}{I^*}-1-\ln\frac{I}{I^*}\right) \\
&+ \frac{\beta_{Iu} S^* I_u^*}{N}\left(-\frac{SI_u}{S^*I_u^*}+1+\ln\frac{SI_u}{S^*I_u^*}-\frac{S^*}{S}+1+\ln\frac{S^*}{S}+\frac{I_u}{I_u^*}-1-\ln\frac{I_u}{I_u^*}\right) \\
&+ \frac{\beta_{I_\alpha} S^* I_\alpha^*}{N}\left(-\frac{SI_\alpha}{S^*I_\alpha^*}+1+\ln\frac{SI_\alpha}{S^*I_\alpha^*}-\frac{S^*}{S}+1+\ln\frac{S^*}{S}+\frac{I_\alpha}{I_\alpha^*}-1-\ln\frac{I_\alpha}{I_\alpha^*}\right) \\
&+ \frac{\beta_{L_R} S^* L_R^*}{N}\left(-\frac{SL_R}{S^*L_R^*}+1+\ln\frac{SL_R}{S^*L_R^*}-\frac{S^*}{S}+1+\ln\frac{S^*}{S}+\frac{L_R}{L_R^*}-1-\ln\frac{L_R}{L_R^*}\right) \\
&+ \frac{\beta_{L_d} S^* L_d^*}{N}\left(-\frac{SL_d}{S^*L_d^*}+1+\ln\frac{SL_d}{S^*L_d^*}-\frac{S^*}{S}+1+\ln\frac{S^*}{S}+\frac{L_d}{L_d^*}-1-\ln\frac{L_d}{L_d^*}\right)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_S = & -d\cdot\frac{(S-S^*)^2}{S}\\ &+\frac{\beta_E S^* E^*}{N}\left[-\omega\left(\frac{SE}{S^*E^*}\right)-\omega\left(\frac{S^*}{S}\right)+\omega\left(\frac{E}{E^*}\right)\right]\\ &+\frac{\beta_I S^* I^*}{N}\left[-\omega\left(\frac{SI}{S^*I^*}\right)-\omega\left(\frac{S^*}{S}\right)+\omega\left(\frac{I}{I^*}\right)\right]\\ &+\frac{\beta_{Iu} S^* I_u^*}{N}\left[-\omega\left(\frac{SI_u}{S^*I_u^*}\right)-\omega\left(\frac{S^*}{S}\right)+\omega\left(\frac{I_u}{I_u^*}\right)\right]\\ &+\frac{\beta_{I_\alpha} S^* I_\alpha^*}{N}\left[-\omega\left(\frac{SI_\alpha}{S^*I_\alpha^*}\right)-\omega\left(\frac{S^*}{S}\right)+\omega\left(\frac{I_\alpha}{I_\alpha^*}\right)\right]\\ &+\frac{\beta_{L_R} S^* L_R^*}{N}\left[-\omega\left(\frac{SL_R}{S^*L_R^*}\right)-\omega\left(\frac{S^*}{S}\right)+\omega\left(\frac{L_R}{L_R^*}\right)\right]\\ &+\frac{\beta_{L_d} S^* L_d^*}{N}\left[-\omega\left(\frac{SL_d}{S^*L_d^*}\right)-\omega\left(\frac{S^*}{S}\right)+\omega\left(\frac{L_d}{L_d^*}\right)\right].\end{aligned} \tag{3.7}$$

Обчислимо $\dot{V}_E$:

$$\dot{V}_E=\left(1-\frac{E^*}{E}\right)\dot{E}=\left(1-\frac{E^*}{E}\right)\left[\frac{S}{N}\left(\beta_E E+\beta_I I+\beta_{I_u}I_u+\beta_{I_\alpha}I_\alpha+\beta_{L_d}L_d+\beta_{L_R}L_R\right)-(\alpha+d)E\right].$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_E = & \frac{\beta_E S^* E^*}{N}\left[\omega\left(\frac{SE}{S^*E^*}\right)-\omega\left(\frac{S}{S^*}\right)-\omega\left(\frac{E}{E^*}\right)\right]+\frac{\beta_I S^* I^*}{N}\left[\omega\left(\frac{SI}{S^*I^*}\right)-\omega\left(\frac{S}{S^*}\right)-\omega\left(\frac{E}{E^*}\right)\right]\\ &+\frac{\beta_{I_u} S^* I_u^*}{N}\left[\omega\left(\frac{SI_u}{S^*I_u^*}\right)-\omega\left(\frac{S}{S^*}\right)-\omega\left(\frac{E}{E^*}\right)\right]+\frac{\beta_{I_\alpha} S^* I_\alpha^*}{N}\left[\omega\left(\frac{SI_\alpha}{S^*I_\alpha^*}\right)-\omega\left(\frac{S}{S^*}\right)-\omega\left(\frac{E}{E^*}\right)\right]\\ &+\frac{\beta_{L_R} S^* L_R^*}{N}\left[\omega\left(\frac{SL_R}{S^*L_R^*}\right)-\omega\left(\frac{S}{S^*}\right)-\omega\left(\frac{E}{E^*}\right)\right]\\ &+\frac{\beta_{L_d} S^* L_d^*}{N}\left[\omega\left(\frac{SL_d}{S^*L_d^*}\right)-\omega\left(\frac{S}{S^*}\right)-\omega\left(\frac{E}{E^*}\right)\right].\end{aligned} \tag{3.8}$$

Обчислимо похідну V_S+V_E

Додаючи рівняння (10) та (11), отримуємо:

$$\begin{aligned}\dot{V}_S+\dot{V}_E=&-d\frac{(S-S^*)^2}{S}+\left(\frac{\beta_E S^*E^*}{N}-\omega\left(\frac{S^*}{S}\right)-\omega\left(\frac{S}{S^*}\right)\right)\\&+\left(\frac{\beta_I S^*I^*}{N}-\omega\left(\frac{SIE^*}{S^*I^*E}\right)-\omega\left(\frac{S^*}{S}\right)+\omega\left(\frac{I}{I^*}\right)-\omega\left(\frac{E}{E^*}\right)\right)\\&+\left(\frac{\beta_{I_u} S^*I_u^*}{N}-\omega\left(\frac{SI_uE^*}{S^*I_u^*E}\right)-\omega\left(\frac{S^*}{S}\right)+\omega\left(\frac{I_u}{I_u^*}\right)-\omega\left(\frac{E}{E^*}\right)\right)\\&+\left(\frac{\beta_{I_\alpha} S^*I_\alpha^*}{N}-\omega\left(\frac{SI_\alpha E^*}{S^*I_\alpha^*E}\right)-\omega\left(\frac{S^*}{S}\right)+\omega\left(\frac{I_\alpha}{I_\alpha^*}\right)-\omega\left(\frac{E}{E^*}\right)\right)\\&+\left(\frac{\beta_{L_R} S^*L_R^*}{N}-\omega\left(\frac{SL_RE^*}{S^*L_R^*E}\right)-\omega\left(\frac{S^*}{S}\right)+\omega\left(\frac{L_R}{L_R^*}\right)-\omega\left(\frac{E}{E^*}\right)\right)\\&+\left(\frac{\beta_{L_d} S^*L_d^*}{N}-\omega\left(\frac{SL_dE^*}{S^*L_d^*E}\right)-\omega\left(\frac{S^*}{S}\right)+\omega\left(\frac{L_d}{L_d^*}\right)-\omega\left(\frac{E}{E^*}\right)\right).\end{aligned}\tag{3.9}$$

Обчислимо $\dot{V_I}$, $\dot{V_{I_\alpha}}$, $\dot{V_{I_u}}$, $\dot{V_{L_R}}$ та $\dot{V_{L_d}}$:

$$\dot{V}_I=\left(1-\frac{I^*}{I}\right)\dot{I}\ \ =\alpha E^*\left[\omega\left(\frac{E}{E^*}\right)-\omega\left(\frac{I}{I^*}\right)-\omega\left(\frac{EI^*}{E^*I}\right)\right].\tag{3.10}$$

$$\dot{V}_{I_\alpha}=\left(1-\frac{I_\alpha^*}{I_\alpha}\right)\dot{I}_\alpha\ \ =p_1\beta I^*\left(1-\frac{I_\alpha^*}{I_\alpha}\right)\left(\frac{I}{I^*}-\frac{I_\alpha}{I_\alpha^*}\right)=p_1\beta I^*\left[\omega\left(\frac{I}{I^*}\right)-\omega\left(\frac{I_\alpha}{I_\alpha^*}\right)-\omega\left(\frac{II_\alpha^*}{I^*I_\alpha}\right)\right].\tag{3.11}$$

$$\dot{V}_{I_u}=\left(1-\frac{I_u^*}{I_u}\right)\dot{I}_u\ \ =(1-p_1)\beta I^*\left[\omega\left(\frac{I}{I^*}\right)-\omega\left(\frac{I_u}{I_u^*}\right)-\omega\left(\frac{II_u^*}{I^*I_u}\right)\right].\tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_{L_R}&=\left(1-\frac{L_R^*}{L_R}\right)\dot{L}_R=\left(1-\frac{L_R^*}{L_R}\right)(k\theta I_\alpha-(\rho+d)L_R)=k\theta I_\alpha^*\left(1-\frac{L_R^*}{L_R}\right)\left(\frac{I_\alpha}{I_\alpha^*}-\frac{L_R}{L_R^*}\right)\\&=k\theta I_\alpha^*\left[\omega\left(\frac{I_\alpha}{I_\alpha^*}\right)-\omega\left(\frac{L_R}{L_R^*}\right)-\omega\left(\frac{I_\alpha L_R^*}{I_\alpha^*L_R}\right)\right].\end{aligned}\tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_{L_d}&=(1-k)\theta I_\alpha^*\left(1-\frac{L_d^*}{L_d}\right)\left(\frac{I_\alpha}{I_\alpha^*}-\frac{L_d}{L_d^*}\right)+(1-\xi)\rho L_R^*\left(1-\frac{L_d^*}{L_d}\right)\left(\frac{L_R}{L_R^*}-\frac{L_d}{L_d^*}\right)\\&=(1-k)\theta I_\alpha^*\left[\omega\left(\frac{I_\alpha}{I_\alpha^*}\right)-\omega\left(\frac{L_d}{L_d^*}\right)-\omega\left(\frac{I_\alpha L_d^*}{I_\alpha^*L_d}\right)\right]\\&\quad+(1-\xi)\rho L_R^*\left[\omega\left(\frac{L_R}{L_R^*}\right)-\omega\left(\frac{L_d}{L_d^*}\right)-\omega\left(\frac{L_RL_d^*}{L_R^*L_d}\right)\right].\end{aligned}\tag{3.14}$$

Нехай

$$\kappa_1 = \max\left\{\frac{\beta_E S^* E^*}{N}, \frac{\beta_E S^* I^*}{N}, \frac{\beta_E S^* I_u^*}{N}, \frac{\beta_E S^* I_\alpha^*}{N}, \frac{\beta_E S^* L_R^*}{N}, \frac{\beta_E S^* L_d^*}{N}\right\}, \tag{3.15}$$

$$\kappa_2 = \max\left\{\alpha E^*, p_1\beta I^*, (1-p_1)\beta I^*, k\theta I_\alpha^*, (1-k)\theta I_\alpha^*, (1-\xi)\rho L_R^*\right\}, \tag{3.16}$$

$$\kappa = \max\{\kappa_1, \kappa_2\}. \tag{3.17}$$

Тоді, з рівностей (12)-(17), одержимо:

$$\begin{aligned}
\dot{V} \leq -d\frac{(S-S^*)}{S} + \kappa\Bigg[&-\omega\left(\frac{S}{S^*}\right) - 6\omega\left(\frac{S^*}{S}\right) - 4\omega\left(\frac{E}{E^*}\right) - \omega\left(\frac{SIE^*}{S^*I^*E}\right) - \omega\left(\frac{SI_uE^*}{S^*I_u^*E}\right) \\
&- \omega\left(\frac{SI_\alpha E^*}{S^*I_\alpha^*E}\right) - \omega\left(\frac{SL_RE^*}{S^*L_R^*E}\right) - \omega\left(\frac{SL_dE^*}{S^*L_d^*E}\right) - \omega\left(\frac{EI^*}{E^*I}\right) + 2\omega\left(\frac{I}{I^*}\right) \\
&- \omega\left(\frac{II_\alpha^*}{I^*I_\alpha}\right) - \omega\left(\frac{II_u^*}{I^*I_u}\right) + 2\omega\left(\frac{I_\alpha}{I_\alpha^*}\right) - \omega\left(\frac{L_RI_\alpha^*}{L_R^*I_\alpha}\right) - \omega\left(\frac{L_d}{L_d^*}\right) \\
&- \omega\left(\frac{I_\alpha L_d^*}{I_\alpha^*L_d}\right) + \omega\left(\frac{L_R}{L_R^*}\right) - \omega\left(\frac{L_RL_d^*}{L_R^*L_d}\right)\Bigg].
\end{aligned} \tag{3.18}$$

З припущення (**H**) випливає, що

$$\dot{V} \leq 0. \tag{3.19}$$

Крім того, $V > 0$ для всіх $S, E, I, I_\alpha, I_u, L_R, L_d \in \mathbb{R}_+$, а також $\dot{V} = 0$ тоді й лише тоді, коли

$$S = S^*, \quad E = E^*, \quad I = I^*, \quad I_\alpha = I_\alpha^*, \quad I_u = I_u^*, \quad L_R = L_R^*, \quad L_d = L_d^*. \tag{3.20}$$

Отже, згідно з теоремою про асимптотичну стійкість, ендемічна рівновага ψ_2 системи (2) є глобально асимптотично стійкою.

РОЗДІЛ 4

ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА

У цьому розділі наша мета — обговорити чисельно динаміку різних компартментів системи (1).

Також розглянемо наступні випадки: динаміку різних класів, коли базове репродукційне число R_0 менше 1, а також представимо динаміку різних класів, коли базове репродукційне число R_0 більше 1.

4.1 Результати

Нехай є така таблиця значень параметрів:

β_E	β_I	β_{I_u}	β_{I_α}	β_{L_R}	β_{L_d}	α	β
0.092	0.142	0.0135	0.036	0.072	0.00022	0.056	0.065

p_1	θ	k	ρ	ξ	ν	η	A	d
0.172	0.075	0.092	0.046	0.208	0.027	0.014	50000	0.035

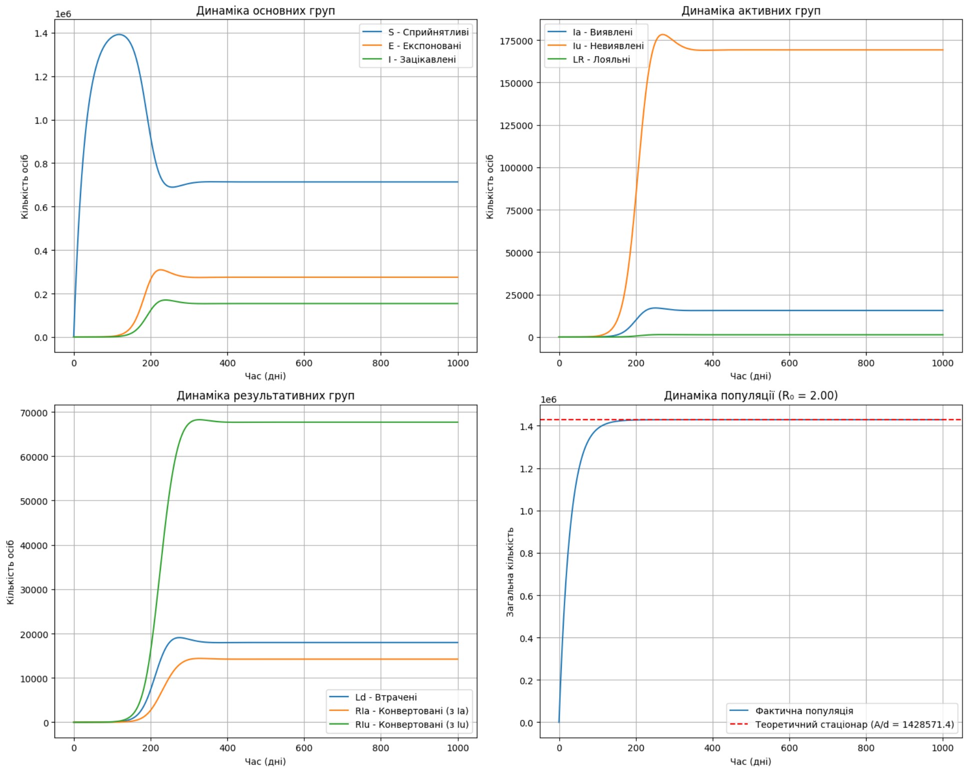
Використаємо для чисельного розрахунку моделі метод Рунге–Кутта четвертого порядку (див. Додаток А).

Отримаємо такі результати:

На першому графіку представлено динаміку трьох основних класів: сприйнятливих (S), експонованих (E) та зацікавлених (I). Кількість сприйнятливих зменшується до приблизно 713 000 осіб, що свідчить про охоплення майже третини популяції. Кількість експонованих (E) зростає на початку і стабілізується на рівні близько 275 000. Чисельність зацікавлених (I) досягає максимуму й зменшується до 154 000, демонструючи короткотривалу активність аудиторії.

Другий графік деталізує структуру класу I: кількість виявлених осіб (I_a) не перевищує 15 000, тоді як невиявлені (I_u) становлять понад 160 000. Це вказує на домінування непрямих каналів впливу (соціальні мережі, рекомендації). Лояльна аудиторія (L_R) залишається незначною — близько 1 300 осіб, що свідчить про слабку конверсію зацікавлення у стійку прихильність до бренду.

Третій графік відображає сукупні результати. Кількість втрат (L_d) становить 18 000, вплив через I_u (R_{I_u}) — 67 000, а через I_a (R_{I_a}) — лише 14 000. Це підтверджує ключову роль невиявлених носіїв у поширенні інформації, що характерно для цифрового середовища.



Модель демонструє ефективне охоплення аудиторії при низькому рівні лояльності. Основний вплив формують непрямі контакти, тому доцільно розвивати механізми повторного залучення та підвищення конверсії.

Ключовим індикатором інтенсивності поширення є базове репродукційне число R_0. Його значення перевищує одиницю ($R_0 > 1$), що відповідає умовам формування масштабного інформаційного спалаху. Це пояснює стрімке зростання експонованих і тимчасово зацікавлених осіб на ранніх етапах еволюції системи.

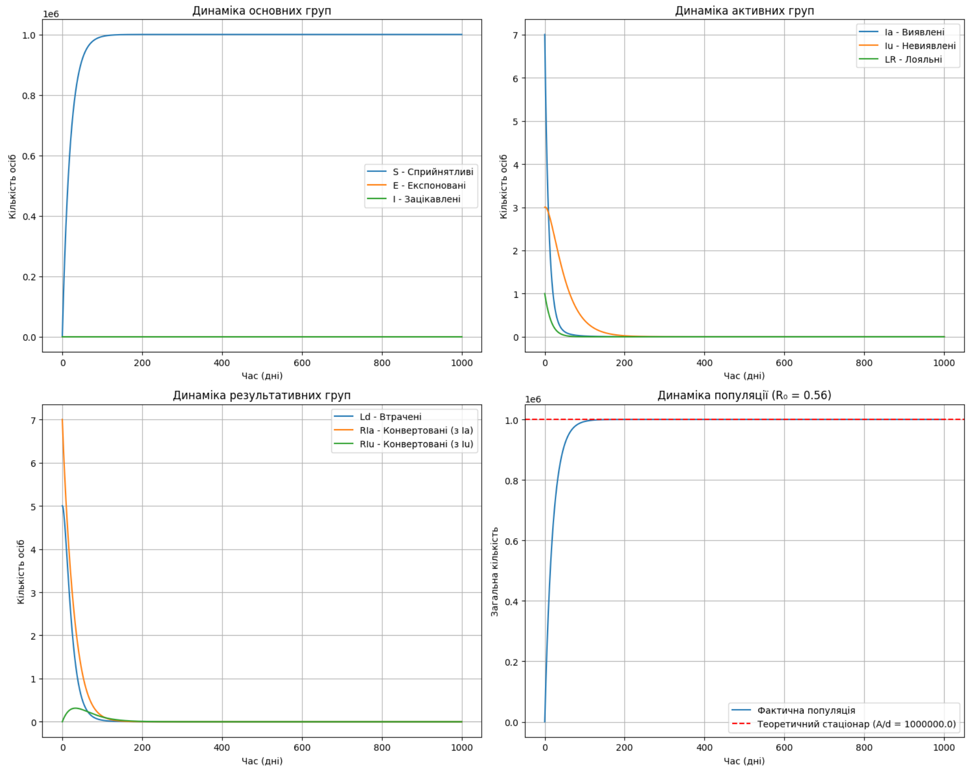
Змінемо параметри на наступні:

β_E	β_I	β_{I_u}	β_{I_α}	β_{L_R}	β_{L_d}	α	β
0.03	0.04	0.005	0.01	0.02	0.0001	0.03	0.04

p_1	θ	k	ρ	ξ	ν	η	A	d
0.1	0.05	0.06	0.03	0.1	0.02	0.008	50000	0.05

На цій ілюстрації показано, що при $R_0 = 0{,}56 < 1$ система швидко сходиться до тривіального стаціонарного стану: всі групи, крім сприйнятливих (S), зникають. Зацікавлення не набуває масового характеру — навіть у пікові моменти кількість зацікавлених, виявлених чи лояльних осіб не перевищує кількох одиниць. Відповідно, втрати, конверсія і лояльність майже не реалізуються.

Динаміка підтверджує класичний результат: при $R_0 < 1$ інформаційна кампанія згасає, не набравши критичної маси поширення. Це є індикатором неефективності



впливу за таких параметрів — необхідно або посилити інтенсивність контактів, або зменшити часову затримку між ними.

Оберемо наступні параметри:

β_E	β_I	β_{I_u}	β_{I_α}	β_{L_R}	β_{L_d}	α	β
0.0423	0.0625	0.03	0.018	0.032	0.0001	0.056	0.065

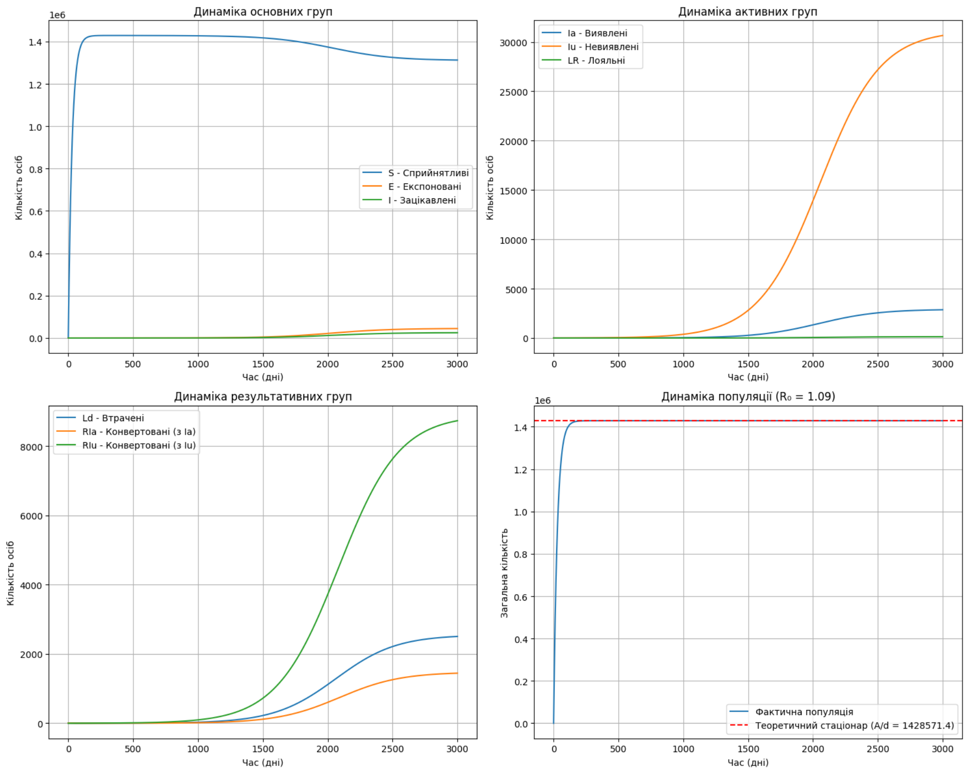
p_1	θ	k	ρ	ξ	ν	η	A	d
0.15	0.05	0.06	0.03	0.15	0.02	0.01	50000	0.035

На графіку основних груп видно поступове зростання кількості експонованих (E) і зацікавлених (I). Найінтенсивніше зростає чисельність невиявлених зацікавлених (I_u), що свідчить про переважання латентного поширення інформації. Виявлені особи (I_a) зростають повільніше.

У результатах видно зростання конверсій (R_{I_a}, R_{I_u}), але, як і в попередньому випадку з меншим R_0, лояльність (L_R) залишається низькою. Більшість охоплених осіб залишаються у групі I_u або втрачаються (L_d), не переходячи до лояльної поведінки.

Кампанія є успішною в сенсі охоплення, однак її довгостроковий ефект обмежений. Без посилення виявлення чи зростання привабливості бренду процес майже зупиниться.

Це приклад прикордонного поширення: не згасаючого, але й не експоненційного.


Динаміка основних груп
1e6
S - Сприйнятливі
E - Експоновані
I - Зацікавлені
Кількість осіб
Час (дні)
Динаміка активних груп
Ia - Виявлені
Iu - Невиявлені
LR - Лояльні
Кількість осіб
Час (дні)
Динаміка результативних груп
Ld - Втрачені
RIa - Конвертовані (з Ia)
RIu - Конвертовані (з Iu)
Кількість осіб
Час (дні)
Динаміка популяції (R₀ = 1.09)
1e6
Фактична популяція
Теоретичний стаціонар (A/d = 1428571.4)
Загальна кількість
Час (дні)

ВИСНОВКИ

Базуючись на проведених аналітичних дослідженнях та чисельному моделюванні, можна зробити такі висновки щодо поведінки моделі SEILR та її застосування в аналізі динаміки поширення брендової інформації:

1) **Адекватність моделі.** Запропонована модель є коректною з математичної точки зору: доведено додатність та обмеженість розв'язків у межах області допустимих значень, що гарантує реалістичність інтерпретації змінних.
2) **Стаціонарні стани.** Визначено два рівноважні стани системи: тривіальний (без поширення інформації) та ендемічний (за наявності сталої частки залучених до бренду осіб). Отримані умови існування кожного з них у залежності від значення базового репродуктивного числа R_0.
3) **Глобальна стійкість.** Доведено, що для $R_0 \leq 1$ система асимптотично сходиться до нульового рівноважного стану, тобто інформація про бренд не поширюється. Натомість при $R_0 > 1$ система прямує до ендемічного стану — бренд набуває сталого інформаційного резонансу в аудиторії.
4) **Інтерпретація параметрів.** Отримана оцінка R_0 дає змогу кількісно характеризувати ефективність інформаційної кампанії. Чим вищим є R_0, тим активніше поширюється бренд серед потенційної аудиторії.
5) **Практичне значення.** Модель SEILR може бути ефективно використана для прогнозування результатів рекламних кампаній, оцінки лояльності до бренду, а також для стратегічного планування маркетингової активності.
6) **Перспективи досліджень.** Подальші дослідження можуть бути спрямовані на:
   - розширення моделі з урахуванням впливу зовнішніх медіа-факторів, конкурентів або соціальних мереж;
   - включення часових затримок у поширенні інформації або повторного залучення;
   - побудову оптимізаційних сценаріїв для управління брендовою динамікою;
   - дослідження просторово-структурованих варіантів моделі (наприклад, з урахуванням регіонального впливу або кластерної взаємодії).

Таким чином, математичне моделювання за допомогою SEILR-моделі надає потужний інструмент для аналізу динаміки брендової інформації, дозволяючи формалізовано оцінити вплив окремих параметрів кампанії на її довгостроковий результат.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. P. Van den Driessche, J. Watmough, *Reproduction numbers and subthreshold endemic equilibria for the compartmental models of disease transmission*, *Mathematical Biosciences*, 180 (2002), pp. 29–48.
2. Harouna Ouedraogo, Dramane Ouedraogo, Idrissa Ibrango, Aboudramane Guiro, *A study of stability of SEIHR model of infectious disease transmission*, 2021; 307–327.
3. John P. Maassen, *The SIR and SEIR Epidemiological Models Revisited*, 2020.
4. F. Brauer, C. Castillo-Chavez, Z. Feng, *Mathematical Models in Epidemiology*, Springer, 2019.
5. T. Nguyen, K. Rock, S. Guenther, et al., *SEIHR models with asymptomatic transmission: Analysis and applications to COVID-19*, Journal of Theoretical Biology, 541 (2022), 111006.
6. R. Varga, *matrix iterative analysis*, Prentice-Hall, (1962).

Додаток А

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp
import pandas as pd

def seilr_model(t, y, params):
    S, E, I, Ia, Iu, LR, Ld, RIa, RIu = y
    A, d, beta_E, beta_I, beta_Ia, beta_Iu, beta_LR, beta_Ld, alpha,
    beta, p1, theta, k, rho, xi, nu, eta = params
    N = S + E + I + Ia + Iu + LR + Ld + RIa + RIu
    f = (beta_E * E + beta_I * I + beta_Ia * Ia + beta_Iu *
    Iu + beta_LR * LR + beta_Ld * Ld) * S / N
    dSdt = A - f - d * S
    dEdt = f - (alpha + d) * E
    dIdt = alpha * E - (beta + d) * I
    dIadt = p1 * beta * I - (theta + d) * Ia
    dIudt = (1 - p1) * beta * I - (eta + d) * Iu
    dLRdt = k * theta * Ia - (rho + d) * LR
    dLddt = (1 - k) * theta * Ia + (1 - xi) * rho * LR - (nu + d) * Ld
    dRIadt = xi * rho * LR + nu * Ld - d * RIa
    dRIudt = eta * Iu - d * RIu
    return [dSdt, dEdt, dIdt, dIadt, dIudt, dLRdt, dLddt, dRIadt, dRIudt]

def calculate_R0(params):
    A, d, beta_E, beta_I, beta_Ia, beta_Iu, beta_LR, beta_Ld, alpha,
    beta, p1, theta, k, rho, xi, nu, eta = params
    component_E = beta_E / (alpha + d)
    component_I = beta_I * alpha / ((alpha + d) * (beta + d))
    component_Ia = beta_Ia * alpha * beta * p1 /
    ((alpha + d) * (beta + d) * (theta + d))
    component_Iu = beta_Iu * alpha * beta * (1 - p1) /
    ((alpha + d) * (beta + d) * (eta + d))
    component_LR = beta_LR * alpha * beta * p1 * k * theta /
    ((alpha + d) * (beta + d) * (theta + d) * (rho + d))
    component_Ld_numerator = alpha * beta * p1 * theta *
    (k * (1 - xi) * rho + (1 - k) * (rho + d))
```

```
    component_Ld_denominator = (alpha + d) * (beta + d) *
    (theta + d) * (rho + d) * (nu + d)
    component_Ld = beta_Ld * component_Ld_numerator / component_Ld_denominator
    return component_E + component_I + component_Ia +
    component_Iu + component_LR + component_Ld

def find_equilibrium(params): """Аналітичний розрахунок стаціонарного стану"""
    A, d = params[0], params[1]
    S_eq = A / d  # Стаціонар для S (інші = 0 у випадку R  1)
    return [S_eq, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]

# Параметри моделі
# A, d, beta_E, beta_I6  beta_Ia,  beta_Iu,
beta_LR,  beta_Ld,  alpha,  beta,  p1,  theta,  k,  rho,  xi,  nu,  eta
params = [
    50000,
    0.035, 0.092,0.142, 0.036,0.0135,0.072,0.00022,
    0.056, 0.065,0.172, 0.075,0.092,0.046,0.208, 0.027,0.014]

# Початкові умови
y0 = [100, 10, 5, 7, 3, 1, 5, 7, 0]

# Розв'язання системи
solution = solve_ivp(
    lambda t, y: seilr_model(t, y, params), (0, 1000), y0,
    t_eval=np.linspace(0, 1000, 1000), method='RK45', rtol=1e-6, atol=1e-8)

# Аналіз результатів
R0 = calculate_R0(params)
equilibrium = find_equilibrium(params)
sensitivity_df = sensitivity_analysis(params)
total_population = np.sum(solution.y, axis=0)
# Візуалізація
plt.figure(figsize=(15, 12))

# 1. Основні групи
plt.subplot(2, 2, 1)
plt.plot(solution.t, solution.y[0], label='S - Сприйнятливі')
plt.plot(solution.t, solution.y[1], label='E - Експоновані')
```

```
plt.plot(solution.t, solution.y[2], label='I - Зацікавлені')
plt.title('Динаміка основних груп')
plt.xlabel('Час (дні)')
plt.ylabel('Кількість осіб')
plt.legend()
plt.grid()
# 2. Активні групи
plt.subplot(2, 2, 2)
plt.plot(solution.t, solution.y[3], label='Ia - Виявлені')
plt.plot(solution.t, solution.y[4], label='Iu - Невиявлені')
plt.plot(solution.t, solution.y[5], label='LR - Лояльні')
plt.title('Динаміка активних груп')
plt.xlabel('Час (дні)')
plt.ylabel('Кількість осіб')
plt.legend()
plt.grid()
# 3. Результативні групи
plt.subplot(2, 2, 3)
plt.plot(solution.t, solution.y[6], label='Ld - Втрачені')
plt.plot(solution.t, solution.y[7], label='RIa - Конвертовані (з Ia)')
plt.plot(solution.t, solution.y[8], label='RIu - Конвертовані (з Iu)')
plt.title('Динаміка результативних груп')
plt.xlabel('Час (дні)')
plt.ylabel('Кількість осіб')
plt.legend()
plt.grid()
# 4. Загальна популяція
plt.subplot(2, 2, 4)
plt.plot(solution.t, total_population, label='Фактична популяція')
plt.axhline(y=equilibrium[0], color='r', linestyle='--',
            label=f'Теоретичний стаціонар (A/d = {equilibrium[0]:.1f})')
plt.title(f'Динаміка популяції (R = {R0:.2f})')
plt.xlabel('Час (дні)')
plt.ylabel('Загальна кількість')
plt.legend()
plt.grid()
plt.tight_layout()
plt.show()
# Вивід результатів
```

```
print(f"Базове репродуктивне число R = {R0:.4f}")
if R0 > 1:
    print("Статус: система нестабільна - інформація поширюватиметься (R > 1)")
else:
    print("Статус: система стабільна - інформація згасне (R  1)")
print("\nСтаціонарні значення:")
eq_labels = ['S', 'E', 'I', 'Ia', 'Iu', 'LR', 'Ld', 'RIa', 'RIu']
for label, value in zip(eq_labels, equilibrium):
    print(f"{label}: {value:.1f}")
print("\nФінальні значення (t=1000):")
final_values = {label: solution.y[i,-1] for i, label in enumerate(eq_labels)}
for k, v in final_values.items():
    print(f"{k}: {v:.1f}")
```