

УДК 514.07

А. А. Соловйов, аспірант

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь

вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна

e-mail: andrey-solovyov@stud.onu.edu.ua

ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0003-7923-6912>

АФІНОР-НАПІВСИМЕТРИЧНІ ПРОСТОРИ ПЕРШОГО КЛАСУ

В роботі досліджено локальну геометрію псевдоріманових просторів першого класу, наділених еліптичною афінорною напівсиметричною структурою другого ступеня. Застосування спеціальної операції спряження тензорів з афінором дозволило проаналізувати диференціальні та алгебраїчні властивості тензорів Рімана і Річчі. Досліджено алгебраїчну структуру другої квадратичної форми простору; доведено, що умова рівності нулю тензора Річчі обмежує ранг другої квадратичної форми одиницею, що призводить до того, що тензор Рімана дорівнює нулю. На основі цього встановлено теорему про неіснування Річчі-пласких просторів першого класу. Для просторів із заданою афінорною структурою доведено комутативність тензора Річчі з другою квадратичною формою. Головним результатом роботи є доведення того, що тензор Річчі в афінор-напівсиметричних просторах першого класу дорівнює нулю. Як наслідок, обґрунтовано несумісність умов гіперповерхні плаского простору з напівсиметричною майже комплексною структурою та доведено, що афінор-напівсиметричних просторів першого класу не існує.

MSC: 53B35.

Ключові слова: рімановий простір, псевдорімановий простір, тензор Рімана, тензор Річчі, відображення просторів, тензор деформації, простори афінної зв'язності, коваріантна похідна, афінор, афінорна структура, напівсиметрична афінорна структура, антисиметрична афінорна структура, майже комплексна афінорна структура, операція спряження, геометричний об'єкт.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2026.1\(47\).361649](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2026.1(47).361649)

Стаття надійшла до редакції: 07.04.2026. Затверджена до друку: 15.04.2026.

Опублікована: 15.09.2026.



Ця стаття поширюється на умовах ліцензії Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0).



Вступ

Сучасна диференціальна геометрія приділяє значну увагу дослідженню псевдоріманових просторів, наділених додатковими алгебраїчними та диференціально-геометричними структурами. Однією з фундаментальних проблем у цій галузі є теорія ізометричних занурень та занурень многовидів у простори вищої розмірності, зокрема у плоскі евклідові або псевдо-евклідові простори. Геометричні та топологічні властивості таких підмноговидів безпосередньо пов'язані з поняттям класу простору.

У широкому сенсі під класом псевдоріманового простору V_n розуміють мінімальну корозмірність p , яка необхідна для локального ізометричного вкладення цього простору у плоский простір розмірності $n + p$. Простори довільного класу p характеризуються складною системою диференціальних рівнянь Гауса, Кодацці та Річчі, які пов'язують внутрішню кривизну многовиду з його зовнішньою геометрією за допомогою p систем симетричних тензорів другого рангу (других квадратичних форм) та тензорів зв'язності нормального розшарування. Зі збільшенням класу дослідження таких просторів стає надзвичайно складним через нелінійний характер зазначених рівнянь, що спонукає геометрів шукати додаткові структурні обмеження або розглядати класифіковані випадки нижчих порядків.

Найбільш детально вивченим і водночас геометрично багатим є випадок просторів першого класу, де корозмірність вкладення дорівнює одиниці ($p = 1$). За означенням, простір першого класу є гіперповерхнею у плоскому просторі вищої розмірності. Головною тензорною ознакою таких просторів є те, що їхній тензор Рімана повністю детермінується лише однією другою квадратичною формою b_{ij} відповідно до класичного рівняння Гауса. При цьому ця квадратична форма має задовольняти спеціальній диференціальній тотожності. Теорія гіперповерхонь дозволяє застосовувати інструмент лінійної алгебри до аналізу кривини, оскільки друга квадратична форма може бути інтерпретована як лінійний оператор, чий власні значення (головні кривизни) визначають внутрішню геометрію многовиду.

Актуальним напрямком досліджень є вивчення просторів першого класу, які додатково наділені афінорними структурами. У даній роботі розглядаються афінор-напівсиметричні простори, що містять еліптичну афінорну структуру другого ступеня (майже комплексну структуру $F^2 =$

$-I$), яка додатково напівсиметрична. Для ефективного аналізу взаємодії цих двох обмежень вводиться спеціальна операція спряження тензорів за допомогою структурного афінора. Метою роботи є встановлення диференціально-геометричних характеристик таких просторів, дослідження умов інтегрованості афінора та перевірка сумісності умов першого класу з напівсиметричною майже комплексною структурою. Головні результати роботи присвячені аналізу тензора Річчі та доведенню теорем, які вказують на суттєві обмеження, які накладені структурним афінором.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

1. Простори першого класу. Розглянемо псевдоріманів простір V_n з метричним тензором $g_{ij}(x)$.

Означення 1. Простором V_n першого класу називають гіперповерхню плаского простору.

Тензорні ознаки просторів першого класу:

$$R_{hijk} = e(b_{hk}b_{ij} - b_{hj}b_{ik}) \quad (e = \pm 1), \quad (1)$$

тут b_{ij} - друга квадратично форма простору V_n , для якої додатково виконується

$$b_{ij,k} - b_{ik,j} = 0, \quad (2)$$

де « $,$ » - знак коваріантної похідної [21] у просторі V_n . Відзначимо, що V_n не може бути пласким простором, тобто $R_{hijk} \neq 0$, що характерно для просторів нульового класу.

Для просторів першого класу виконується

$$R_{ij} = e(bb_{ij} - b_{i\alpha}b_j^\alpha), \quad (3)$$

де $b \stackrel{def}{=} b_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$. Цей вираз перепишемо у вигляді

$$b_{i\alpha}b_j^\alpha = bb_{ij} - eR_{ij}. \quad (4)$$

Далі, тотожність (1) домножимо на b_l^h , просумуємо за індексом h та зробимо заміну індексів $l \rightarrow h$.

$$b_{h\alpha}R_{ijk}^\alpha = e(b_{h\alpha}b_k^\alpha b_{ij} - b_{h\alpha}b_j^\alpha b_{ik}), \quad (5)$$

Тут врахуємо (4)

$$b_{h\alpha}R_{ijk}^\alpha = ebb_{hk}b_{ij} - R_{hk}b_{ij} - ebb_{hj}b_{ik} + R_{hj}b_{ik}, \quad (6)$$

або, підставляючи (1)

$$b_{h\alpha}R_{ijk}^\alpha = bR_{hijk} + R_{hj}b_{ik} - R_{hk}b_{ij}. \quad (7)$$

Далі, згортаючи цей вираз отримаємо

$$b_{h\alpha}R_{.k}^\alpha = b_{k\alpha}R_{.h}^\alpha. \quad (8)$$

Про довільні тензори ς_{ij} та ι_{ij} для яких виконуються умови

$$\varsigma_{i\alpha}\iota_j^\alpha = \varsigma_{j\alpha}\iota_i^\alpha \quad (9)$$

кажуть, що вони комутують.

Доведена

Лема 1. У псевдоріманових просторах першого класу тензор Річчі комутує з тензором b_{ij} .

Умови інтегрування тензора b_{ij} з урахуванням тотожності Річчі отримаємо, симетруючи вираз (7) за індексами i, h

$$b_{hi,[jk]} = R_{hj}b_{ik} - R_{hk}b_{ij} + R_{ij}b_{hk} - R_{ik}b_{hj}. \quad (10)$$

Умови інтегрування тензора кривини з урахуванням тотожності Річчі матимуть вигляд

$$R_{hijk,[lp]} = R_{\alpha ijk}R_{.hlp}^\alpha + R_{h\alpha jk}R_{.ilp}^\alpha + R_{hi\alpha k}R_{.jlp}^\alpha + R_{hij\alpha}R_{.klp}^\alpha, \quad (11)$$

або, підставляючи (1)

$$\begin{aligned} R_{hijk,[lp]} = & (b_{\alpha k}b_{ij} - b_{\alpha j}b_{ik})(b_p^\alpha b_{hl} - b_l^\alpha b_{hp}) + \\ & + (b_{hk}b_{\alpha j} - b_{hj}b_{\alpha k})(b_p^\alpha b_{il} - b_l^\alpha b_{ip}) + \\ & + (b_{hk}b_{i\alpha} - b_{h\alpha}b_{ik})(b_p^\alpha b_{jl} - b_l^\alpha b_{jp}) + \\ & + (b_{h\alpha}b_{ij} - b_{hj}b_{i\alpha})(b_p^\alpha b_{kl} - b_l^\alpha b_{kp}). \end{aligned} \quad (12)$$

Розкриємо дужки, врахуємо (4)

$$\begin{aligned}
R_{hijk,[lp]} = & e(R_{pk}(b_{il}b_{hj} - b_{ij}b_{hl}) + R_{lk}(b_{ij}b_{hp} - b_{ip}b_{hj}) \\
& + R_{pj}(b_{ik}b_{hl} - b_{il}b_{hk}) + R_{lj}(b_{ip}b_{hk} - b_{ik}b_{hp}) \\
& + R_{ip}(b_{kl}b_{hj} - b_{jl}b_{hk}) + R_{il}(b_{jp}b_{hk} - b_{kp}b_{hj}) \\
& + R_{hp}(b_{jl}b_{ik} - b_{kl}b_{ij}) + R_{hl}(b_{kp}b_{ij} - b_{ik}b_{jp})) \quad (13)
\end{aligned}$$

та візьмемо до уваги (1)

$$\begin{aligned}
R_{hijk,[lp]} = & R_{pk}R_{ihjl} + R_{lk}R_{ihpj} + R_{pj}R_{ihlk} + R_{lj}R_{ihkp} \\
& + R_{ip}R_{kjhl} + R_{il}R_{jkhp} + R_{hp}R_{jkil} + R_{hl}R_{kjip}. \quad (14)
\end{aligned}$$

Розглянемо випадок, коли тензор Річчі простору першого класу дорівнює нулю. Тоді вираз (4) приймає вид

$$b_{i\alpha}b_j^\alpha = bb_{ij}. \quad (15)$$

Тут, оскільки b_{ij} - друга квадратична форма, $b \neq 0$. Поділимо обидві частини рівності на b^2 та підніmemo один індекс за допомогою метричного тензора:

$$\left(\frac{1}{b}b_i^\alpha\right)\left(\frac{1}{b}b_\alpha^j\right) = \frac{1}{b}b_i^j. \quad (16)$$

Введемо в розгляд тензор $P_i^j = \frac{1}{b}b_i^j$. Тоді отримана тотожність набуває матричного вигляду:

$$P_i^\alpha P_\alpha^j = P_i^j \quad \text{або} \quad P^2 = P, \quad (17)$$

тобто тензор P - ідемпотентний. Фундаментальна теорема про ідемпотентні матриці стверджує, що алгебраїчний ранг такої матриці дорівнює її сліду.

Обчислимо слід P_i^j :

$$P_\alpha^\alpha = \frac{1}{b}b_\alpha^\alpha = \frac{1}{b}b = 1. \quad (18)$$

Оскільки слід дорівнює одиниці, то ранг ідемпотентної матриці P_i^j дорівнює 1. Очевидно, що множення матриці на b не змінює її рангу, тому ранг вихідного тензора b_{ij} також дорівнює 1.

У тензорній алгебрі будь-який симетричний тензор другого рангу, що має алгебраїчний ранг 1, завжди можна подати у вигляді прямого добутку деякого ковектора v_i на самого себе:

$$b_{ij} = v_i v_j. \quad (19)$$

Підставимо отриманий розклад (19) в тензорну ознаку просторів першого класу (1):

$$R_{hijk} = e(v_h v_k v_i v_j - v_h v_j v_i v_k) = 0. \quad (20)$$

Таким чином отримуємо, що Річчі-пласкі простори першого класу плоскі. Але на початку роботи було зазначено, що V_n - це не плоский простір, тому доведена

Теорема 1. *Не існує Річчі-пласких просторів першого класу.*

Таким чином, досліджено алгебраїчні умови другої квадратичної форми просторів першого класу, а також доведено, що вони не можуть бути Річчі-пласкими.

2. Афінор-напівсиметричні простори.

Розглянемо псевдоріманів простір V_n з метричним тензором $g_{ij}(x)$, у якому визначено тензор $F_i^h(x)$ [17].

Задля зручності введемо в V_n операцію спряження [18] :

$$A_{\bar{i} \dots} \stackrel{def}{=} A_{\alpha \dots} F_i^\alpha \quad B_{\bar{i} \dots} \stackrel{def}{=} B^{\alpha \dots} F_{\alpha}^i, \quad (21)$$

де A і B - довільні тензори будь-якої валентності [19] .

Означення 2. Довільний тензор $A_{i_1 \dots i_l}^{j_1 \dots j_k}$ називається напівсиметричним [20] , якщо альтренування його першого та другого індексів коваріантної похідної дорівнює нулю:

$$A_{i_1 \dots i_l, [i_{l+1} i_{l+2}]}^{j_1 \dots j_k} = 0. \quad (22)$$

Означення 3. Простір V_n назвемо афінор-напівсиметричним [?], якщо в ньому визначена напівсиметрична афінорна структура $F_i^h(x)$, тобто афінор $F_i^h(x)$ (або його ще називають структурний афінор) задовольняє умовам

$$F_{ij, [kl]} = 0. \quad (23)$$

Тут індекс опускається за допомогою метричного тензора

$$F_{ij} = g_{i\alpha} F_j^\alpha. \quad (24)$$

Розглянемо псевдорімановий простір V_n , у якому визначена еліптична афінорна напівсиметрична структура другого ступеня [24], тобто

$$F_{\alpha}^h F_{\cdot i}^{\alpha} = -\delta_i^h, \quad (25)$$

яка додатково задовольняє

$$F_{(ij)} = 0, \quad (26)$$

де круглі дужки в індексах позначають операцію симетрування, а δ_i^h - символи Кронекера. [31], які визначаються наступними умовами

$$\delta_i^h = \begin{cases} 1, & i = h \\ 0, & i \neq h \end{cases}. \quad (27)$$

Афінорні структури, які задовольняють (25) називають майже комплексними [25]. З урахуванням (21) формула (25) в термінах операції спряження приймає вид

$$F_{\cdot i}^h = -\delta_i^h. \quad (28)$$

Запишемо умови інтегрування афінора [32] з урахуванням тотжності Річчі в термінах операції спряження

$$F_{ij,kl} - F_{ij,lk} = F_{\alpha j} R_{\cdot ikl}^{\alpha} + F_{i\alpha} R_{\cdot jkl}^{\alpha}. \quad (29)$$

Враховуючи антисиметричність афінору, будемо мати

$$F_{\alpha j} R_{\cdot ikl}^{\alpha} + F_{i\alpha} R_{\cdot jkl}^{\alpha} = F_{\alpha j} R_{\cdot ikl}^{\alpha} - F_{\alpha i} R_{\cdot jkl}^{\alpha}, \quad (30)$$

таким чином, умови інтегрування афінора [26] в термінах операції спряження записується у вигляді

$$F_{ij,kl} - F_{ij,lk} = R_{\bar{j}ikl} - R_{\bar{i}jkl}, \quad (31)$$

або, з урахуванням антисиметричності тензора кривини

$$F_{ij,kl} - F_{ij,lk} = -(R_{\bar{i}jkl} + R_{\bar{j}ikl}). \quad (32)$$

Тут врахуємо (23)

$$R_{\bar{i}jkl} = -R_{\bar{i}\bar{j}kl}. \quad (33)$$

З властивості симетрії тензора кривини випливає

$$R_{kl\bar{i}j} = -R_{kl\bar{i}\bar{j}}. \quad (34)$$

Згорнувши з афінором за індексом j , беручи до уваги майже комплексність (25) простору та зробивши заміну індексів у термінах операції спряжіння будемо мати

$$R_{ij\bar{k}l} = R_{ijkl}. \quad (35)$$

Умови інтегрування довільного тензора $A_{i_1 i_2 \dots i_q}$ з урахуванням тотожності Річчі матимуть вигляд

$$A_{i_1 i_2 \dots i_q, [kl]} = A_{\alpha i_2 \dots i_q} R_{i_1 k l}^{\alpha} + A_{i_1 \alpha \dots i_q} R_{i_2 k l}^{\alpha} + A_{i_1 i_2 \dots \alpha} R_{i_q k l}^{\alpha}. \quad (36)$$

Цей вираз спряжемо за індексами k, l

$$A_{i_1 i_2 \dots i_q, [\bar{k}l]} = A_{\alpha i_2 \dots i_q} R_{i_1 \bar{k} l}^{\alpha} + A_{i_1 \alpha \dots i_q} R_{i_2 \bar{k} l}^{\alpha} + A_{i_1 i_2 \dots \alpha} R_{i_q \bar{k} l}^{\alpha} \quad (37)$$

та врахуємо (35)

$$A_{i_1 i_2 \dots i_q, [\bar{k}l]} = A_{\alpha i_2 \dots i_q} R_{i_1 k l}^{\alpha} + A_{i_1 \alpha \dots i_q} R_{i_2 k l}^{\alpha} + A_{i_1 i_2 \dots \alpha} R_{i_q k l}^{\alpha}, \quad (38)$$

або, порівнюючи з (36),

$$A_{i_1 i_2 \dots i_q, [\bar{k}l]} = A_{i_1 i_2 \dots i_q, [kl]}. \quad (39)$$

Таким чином, доведена

Лема 2. У афінор-напівсиметричних просторах для довільного тензора $A_{i_1 i_2 \dots i_q}$ виконується (39).

В силу (25) мають місце наступні властивості:

$$A_{i \dots}^{\dots} = -A_{i \dots}^{\dots}, \quad B_{i \dots}^{\bar{\dots}} = -B_{i \dots}^{\dots}, \quad (40)$$

а в силу (26) наступне:

$$\begin{aligned} A_{\bar{\alpha} \dots}^{\dots} B_{i \dots}^{\alpha \dots} &= A_{\bar{\beta} \dots}^{\dots} F_{\alpha}^{\beta} B_{i \dots}^{\alpha \dots} = -A_{\bar{\beta} \dots}^{\dots} F_{\alpha}^{\beta} B_{i \dots}^{\alpha \dots} = \\ &= -A_{\bar{\beta} \dots}^{\dots} B_{i \dots}^{\bar{\beta} \dots} = -A_{\alpha \dots}^{\dots} B_{i \dots}^{\alpha \dots}, \end{aligned} \quad (41)$$

тому, враховуючи дві останні властивості, маємо

$$A_{\bar{\alpha} \dots}^{\dots} B_{i \dots}^{\bar{\alpha} \dots} = A_{\alpha \dots}^{\dots} B_{i \dots}^{\alpha \dots}. \quad (42)$$

Метричний тензор задовольняє співвідношенню [27]

$$g_{i\bar{j}} = g_{\alpha\beta} F_i^{\alpha} F_{\bar{j}}^{\beta} = F_{\beta i} F_{\bar{j}}^{\beta} \stackrel{(26)}{=} -F_{i\beta} F_{\bar{j}}^{\beta} \stackrel{(25)}{=} g_{ij} \quad (43)$$

$$g_{\bar{i}j} = g_{\alpha j} F_{\cdot i}^{\alpha} = F_{ji} \stackrel{(26)}{=} -F_{ij} = -g_{i\alpha} F_{\cdot j}^{\alpha} = -g_{i\bar{j}}. \quad (44)$$

Символи Кронекера задовольняють співвідношенню

$$\delta_{\bar{i}}^h = \delta_{\alpha}^h F_{\cdot i}^{\alpha} = F_{\cdot i}^h = -F_{i\cdot}^h = -\delta_i^{\alpha} F_{\alpha}^h = -\delta_i^{\bar{h}}, \quad (45)$$

тому

$$\delta_{\bar{i}}^{\bar{h}} = -\delta_{\bar{i}}^h \stackrel{(26)}{=} \delta_i^h. \quad (46)$$

Тензор Рімана додатково до відомих тотожностей [28] задовольняє наступним властивостям:

$$R_{\bar{h}\bar{i}jk} \stackrel{(33)}{=} -R_{\bar{h}ijk} \stackrel{(25)}{=} R_{hijk}, \quad (47)$$

$$R_{\bar{i}jkl} = R_{kl\bar{i}j} = -R_{i\bar{j}kl} = -R_{kl\bar{i}\bar{j}}. \quad (48)$$

Згорнемо (33) за індексами i, l

$$R_{\alpha i j \beta} F_{\cdot \gamma}^{\alpha} g^{\beta \gamma} = -R_{\bar{i}j} \quad (49)$$

$$R_{\alpha i j \beta} F^{\beta \alpha} = R_{\bar{i}j} \quad (50)$$

$$R_{\cdot j k \beta}^{\bar{\beta}} = -R_{\bar{j}k} \quad (51)$$

Згорнемо рівність $R_{h\bar{i}\bar{j}k} = R_{\bar{h}i\bar{j}k}$ за індексами h, k

$$R_{\bar{i}j} = R_{\alpha i j \beta} F_{\cdot \gamma}^{\alpha} F_{\cdot \delta}^{\beta} g^{\gamma \delta} = -R_{\alpha i j \beta} F_{\cdot \gamma}^{\alpha} F^{\gamma \beta} = R_{ij}, \quad (52)$$

тому

$$R_{\bar{i}j} = -R_{i\bar{j}}. \quad (53)$$

Вираз (32) проциклюємо за індексами j, k, l

$$R_{i\bar{j}kl} + R_{i\bar{k}lj} + R_{i\bar{l}jk} = 0 \quad (54)$$

та згорнемо за індексами i, j

$$R_{\cdot \alpha k l}^{\bar{\alpha}} = R_{\bar{k}l} - R_{\bar{l}k}. \quad (55)$$

З урахуванням (53) ця тотожність набуває вигляду

$$R_{\cdot \alpha k l}^{\bar{\alpha}} = 2R_{\bar{k}l}. \quad (56)$$

Рівність (25) коваріантно продиференціюємо [29] за напрямком x^k

$$F_{\alpha,k}^h F_{\cdot i}^\alpha + F_{\alpha}^h F_{\cdot i,k}^\alpha = 0, \quad (57)$$

$$F_{\alpha,k}^h F_{\cdot i}^\alpha - F_{\alpha}^h F_{\cdot i,k}^\alpha = 0, \quad (58)$$

$$F_{\cdot i,k}^h = F_{\cdot i,k}^{\bar{h}}. \quad (59)$$

Аналогічно,

$$F_{\bar{h}i,k} = F_{\bar{h}i,k}. \quad (60)$$

Таким чином, отримано алгебраїчні та диференціальні властивості об'єктів внутрішньої геометрії просторів, в яких визначена розглянута афінорна структура.

3. Приклади афінор-напівсиметричних просторів.

У цьому розділі побудовано три нетривіальних приклади чотиривимірних афінор-напівсиметричних просторів, тобто таких просторів, які наділено кососиметричною майже комплексною напівсиметричною структурою, але при цьому не є плоскими або келеровими, тобто одночасно виконуються

$$F_{\cdot i,j}^h \neq 0 \quad (61)$$

та

$$R_{\cdot ijk}^h \neq 0. \quad (62)$$

Приклад 1.

Розглянемо викривлений добуток двох двовимірних евклідових просторів

$$M^4 = \mathbb{E}^2 \times_{x^1} \mathbb{E}^2. \quad (63)$$

Введемо локальну систему координат (x^1, x^2, x^3, x^4) .

Матриця метричного тензора g_{ij} цього простору подається у вигляді:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (x^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (x^1)^2 \end{pmatrix}. \quad (64)$$

Безпосереднім обчисленням знаходимо символи Крістоффеля другого роду, які представимо у вигляді матриць за верхнім індексом Γ_{ij}^k :

$$\Gamma_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x^1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (65)$$

$$\Gamma_{ij}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{x^1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{x^1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{ij}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{x^1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{x^1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (66)$$

Використовуючи отримані матриці, обчислимо компоненти тензора Рімана $R_{.jkl}^i$. Ненульовими компонентами є лише:

$$R_{.434}^3 = -R_{.334}^4 = -1. \quad (67)$$

Оскільки тензор Рімана не дорівнює тотожно нулю, простір не є плоским.

Задамо структурний афімор $F_{.j}^i$ матрицею:

$$F_{.j}^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (68)$$

Безпосередньо видно, що $F^2 = -I$, що підтверджує наявність майже комплексної структури. Опустивши верхній індекс за допомогою метричного тензора ($F_{ij} = g_{i\alpha} F_{.j}^\alpha$), матриця двічі коваріантного афінора записується у вигляді:

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (x^1)^2 \\ 0 & 0 & -(x^1)^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (69)$$

Оскільки $F_{ij} = -F_{ji}$, структура є кососиметричною.

Для дослідження диференціальних властивостей обчислимо коваріантну похідну $\nabla_k F_{.j}^i$. В силу сталості матриці (98) маємо:

$$\nabla_k F_{.j}^i = \Gamma_{\alpha k}^i F_{.j}^\alpha - \Gamma_{jk}^\alpha F_{.\alpha}^i. \quad (70)$$

Зокрема, для компоненти $\nabla_3 F_{.2}^3$ отримуємо:

$$\nabla_3 F_{.2}^3 = \Gamma_{13}^3 F_{.2}^1 - \Gamma_{23}^m F_{.m}^3 = \frac{1}{x^1} \cdot 1 - 0 = \frac{1}{x^1} \neq 0. \quad (71)$$

Отже, структура не є келеровою.

Перевіримо, чи буде структура напівсиметричною, тобто чи будуть виконуватись такі тотожності:

$$F_{ij,[kl]} = F_{\alpha j} R_{.ikl}^\alpha + F_{i\alpha} R_{.jkl}^\alpha = 0. \quad (72)$$

Оскільки ненульові компоненти тензора кривини визначаються лише індексами 3 та 4 відповідно до (97), рівність (102) достатньо перевірити для $k = 3, l = 4$. Розглянемо можливі ненульові комбінації для індексів i та j :

1) При $i = 3, j = 3$:

$$F_{43} R_{.334}^4 + F_{34} R_{.334}^4 = -(x^1)^2 \cdot 1 + (x^1)^2 \cdot 1 = 0. \quad (73)$$

2) При $i = 4, j = 4$:

$$F_{34} R_{.434}^3 + F_{43} R_{.434}^3 = (x^1)^2 \cdot (-1) + (-(x^1)^2) \cdot (-1) = 0. \quad (74)$$

3) При $i = 3, j = 4$:

$$F_{44} R_{.334}^4 + F_{33} R_{.434}^3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) = 0. \quad (75)$$

Для всіх інших наборів індексів компоненти тензора кривини або афінора перетворюють відповідні доданки на нуль. Таким чином, тотожність $F_{ij,[kl]} = 0$ виконується для всього простору, що доводить його напівсиметричність.

Приклад 2.

Розглянемо інший приклад чотиривимірного псевдоріманового простору M^4 .

Введемо в розгляд локальну систему координат (u, v, ρ, ϕ) . Матриця метричного тензора g_{ij} цього простору матиме вигляд

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u^2 \cosh^2 \rho & u^2 \sinh^2 \rho \\ 0 & 0 & u^2 \sinh^2 \rho & u^2 \sinh^2 \rho \end{pmatrix}. \quad (76)$$

Відповідно, лінійний елемент даного простору визначається виразом:

$$ds^2 = du^2 + 2dudv + 2dv^2 + u^2 (\cosh^2 \rho d\rho^2 + 2 \sinh^2 \rho d\rho d\phi + \sinh^2 \rho d\phi^2). \quad (77)$$

Еліптичну афінорну структуру (структурний афінор) F_i^h задамо за допомогою матриці, компоненти якої явно залежать від просторової координати ρ :

$$F_i^h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sinh \rho & \sinh \rho \\ 0 & 0 & -\frac{\cosh^2 \rho}{\sinh \rho} & -\sinh \rho \end{pmatrix}. \quad (78)$$

Проведемо аналіз алгебраїчних та диференціальних властивостей побудованої геометричної структури многовиду.

Лема 3. *Тензорне поле (78) визначає майже комплексну структуру на многовиді M^4 .*

Доведення. Безпосереднім обчисленням квадрата матриці афінора F_i^h одержуємо:

$$F_\alpha^h F_i^\alpha = \begin{pmatrix} 1-2 & 2-2 & 0 & 0 \\ -1+1 & -2+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sinh^2 \rho - \cosh^2 \rho & \sinh^2 \rho - \sinh^2 \rho \\ 0 & 0 & -\cosh^2 \rho + \cosh^2 \rho & -\cosh^2 \rho + \sinh^2 \rho \end{pmatrix}. \quad (79)$$

Враховуючи фундаментальну гіперболічну тотожність $\sinh^2 \rho - \cosh^2 \rho = -1$, маємо:

$$F_\alpha^h F_i^\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\delta_i^h. \quad (80)$$

Отже, умова майже комплексної структури $F^2 = -I$ виконується тотожно у кожній точці простору.

Лема 4. *Майже комплексна структура (78) є кососиметричною відносно метрики (76).*

Доведення. Опустимо перший індекс афінора за допомогою метричного тензора простору $F_{ij} = g_{i\alpha} F_j^\alpha$:

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u^2 \sinh^2 \rho \cosh^2 \rho \\ 0 & 0 & -u^2 \sinh^2 \rho \cosh^2 \rho & 0 \end{pmatrix}. \quad (81)$$

З одержаної структури матриці очевидно впливає антисиметричність тензора: $F_{ij} = -F_{ji}$, тобто $F_{(ij)} = 0$.

Теорема 2. Псевдоріманів простір M^4 із метричним тензором (76) та афінором (78) є непласким афінор-напівсиметричним некелеровим простором.

Доведення.

Безпосереднім обчисленням знаходимо символи Крістоффеля другого роду:

$$\Gamma_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2u \cosh^2 \rho & -2u \sinh^2 \rho \\ 0 & 0 & -2u \sinh^2 \rho & -2u \sinh^2 \rho \end{pmatrix}, \quad (82)$$

$$\Gamma_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u \cosh^2 \rho & u \sinh^2 \rho \\ 0 & 0 & u \sinh^2 \rho & u \sinh^2 \rho \end{pmatrix}, \quad (83)$$

$$\Gamma_{ij}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{u} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{u} & 0 & -\sinh \rho \cosh \rho & -\sinh \rho \cosh \rho \\ 0 & 0 & -\sinh \rho \cosh \rho & -\sinh \rho \cosh \rho \end{pmatrix}, \quad (84)$$

$$\Gamma_{ij}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{u} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \coth \rho (\cosh^2 \rho + 1) & \coth \rho \cosh^2 \rho \\ \frac{1}{u} & 0 & \coth \rho \cosh^2 \rho & \sinh \rho \cosh \rho \end{pmatrix}. \quad (85)$$

Використовуючи отримані матриці, обчислимо компоненти тензора Рімана R^i_{jkl} . Ненульовими компонентами (з точністю до косої симетрії за двома останніми індексами) є:

$$R^3_{334} = R^3_{434} = -R^4_{434} = -3 \sinh^2 \rho, \quad (86)$$

$$R^4_{334} = 3 \cosh^2 \rho. \quad (87)$$

Оскільки тензор Рімана не дорівнює тотожно нулю, простір не є плоским.

Для перевірки напівсиметричності структури скористаємося тотожністю Річчі:

$$F_{ij,[kl]} = F_{\alpha j} R^{\alpha}_{ikl} + F_{i\alpha} R^{\alpha}_{jkl}. \quad (88)$$

Оскільки ненульові компоненти тензора кривини визначаються лише індексами 3 та 4, рівність (102) достатньо перевірити для фіксованих індексів $k = 3, l = 4$. Для скорочення громіздких виразів введемо позначення $\Phi = u^2 \sinh^2 \rho \cosh^2 \rho$, тоді, відповідно, $F_{34} = -F_{43} = \Phi$.

Розглянемо всі можливі комбінації вільних індексів i та j , що можуть дати ненульові доданки:

1) При $i = 3, j = 3$:

$$F_{43} R^4_{334} + F_{34} R^4_{334} = (-\Phi) \cdot (3 \cosh^2 \rho) + \Phi \cdot (3 \cosh^2 \rho) = 0. \quad (89)$$

2) При $i = 4, j = 4$:

$$F_{34} R^3_{434} + F_{43} R^3_{434} = \Phi \cdot (-3 \sinh^2 \rho) + (-\Phi) \cdot (-3 \sinh^2 \rho) = 0. \quad (90)$$

3) При $i = 3, j = 4$:

$$F_{44} R^4_{334} + F_{33} R^3_{434} = 0 \cdot (3 \cosh^2 \rho) + 0 \cdot (-3 \sinh^2 \rho) = 0. \quad (91)$$

4) При $i = 1$ або $i = 2$:

$$F_{\alpha j} R^{\alpha}_{134} + F_{1\alpha} R^{\alpha}_{j34} = 0. \quad (92)$$

Для всіх інших наборів індексів компоненти тензора кривини або відповідні компоненти афінора перетворюються доданки на нуль. Таким чином, тотожність $F_{ij,[kl]} = 0$ виконується для всього простору, що доводить його напівсиметричність.

Приклад 3.

Розглянемо псевдоріманів простір Уокера з нейтральною сигнатурою. Введемо локальну систему координат (x^1, x^2, x^3, x^4) .

Матриця метричного тензора g_{ij} цього простору подається у вигляді:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} (x^3)^2 e^{x^1} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (93)$$

Безпосереднім обчисленням знаходимо символи Крістоффеля другого роду, які представимо у вигляді матриць за верхнім індексом Γ_{ij}^k :

$$\Gamma_{ij}^1 = \Gamma_{ij}^3 = 0 \quad (94)$$

$$\Gamma_{ij}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x^3)^2 e^{x^1} & 0 & x^3 e^{x^1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ x^3 e^{x^1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (95)$$

$$\Gamma_{ij}^4 = \begin{pmatrix} -x^3 e^{x^1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (96)$$

Використовуючи отримані матриці, обчислимо компоненти тензора Рімана R_{jkl}^i . Ненульовими компонентами є лише:

$$R_{113}^4 = -R_{131}^4 = e^{x^1}. \quad (97)$$

Оскільки тензор Рімана не дорівнює тотожно нулю, простір не є плоским.

Матриця афінора $F_{\cdot j}^i$ матиме вигляд:

$$F_{\cdot j}^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}(x^3)^2 e^{x^1} & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(x^3)^2 e^{x^1} & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (98)$$

Безпосередньо видно, що $F^2 = -I$, що підтверджує наявність майже комплексної структури. Опустивши верхній індекс за допомогою метричного

тензора ($F_{ij} = g_{i\alpha} F_{.j}^\alpha$), матриця двічі коваріантного афінора записується у вигляді:

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}(x^3)^2 e^{x^1} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}(x^3)^2 e^{x^1} & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (99)$$

Оскільки $F_{ij} = -F_{ji}$, структура є косиметричною.

Для дослідження диференціальних властивостей обчислимо коваріантну похідну $\nabla_k F_{.j}^i$:

$$\nabla_k F_{.j}^i = \partial_k F_{.j}^i + \Gamma_{\alpha k}^i F_{.j}^\alpha - \Gamma_{jk}^\alpha F_{.\alpha}^i. \quad (100)$$

Зокрема, для компоненти $\nabla_1 F_{.1}^2$ отримуємо (враховуючи, що $\partial_1 F_{.1}^2 = 0$):

$$\nabla_1 F_{.1}^2 = \Gamma_{31}^2 F_{.1}^3 - \Gamma_{11}^4 F_{.4}^2 = (x^3 e^{x^1}) \cdot (-1) - (-x^3 e^{x^1}) \cdot (-1) = -2x^3 e^{x^1} \neq 0. \quad (101)$$

Отже, структура не є келеровою.

Перевіримо, чи буде структура напівсиметричною, тобто чи будуть виконуватись такі тотожності:

$$F_{ij,[kl]} = F_{\alpha j} R_{.ikl}^\alpha + F_{i\alpha} R_{.jkl}^\alpha = 0. \quad (102)$$

Оскільки ненульові компоненти тензора кривини визначаються лише індексами 1 та 3 відповідно до (97), рівність (102) достатньо перевірити для $k = 1, l = 3$. Враховуючи, що єдиною ненульовою компонентою $R_{.i13}^\alpha \in R_{.113}^4$ (тобто коли $\alpha = 4, i = 1$), сума зводиться до аналізу доданків із F_{4j} та F_{i4} . Розглянемо можливі комбінації для індексів i та j :

1) При $i = 1, j = 1$:

$$F_{41} R_{.113}^4 + F_{14} R_{.113}^4 = 1 \cdot e^{x^1} + (-1) \cdot e^{x^1} = 0. \quad (103)$$

2) При $i = 1, j \neq 1$: Згідно з матрицею коваріантного афінора, $F_{4j} = 0$ для всіх $j \in \{2, 3, 4\}$. Тому:

$$F_{4j} R_{.113}^4 + F_{1\alpha} R_{.j13}^\alpha = 0 \cdot e^{x^1} + 0 = 0. \quad (104)$$

3) При $i \neq 1, j = 1$: Аналогічно, $F_{i4} = 0$ для всіх $i \in \{2, 3, 4\}$. Тоді:

$$F_{\alpha 1} R_{.i13}^\alpha + F_{i4} R_{.113}^4 = 0 + 0 \cdot e^{x^1} = 0. \quad (105)$$

Для всіх інших наборів індексів ($i \neq 1$ та $j \neq 1$) тензор кривини дорівнює нулю. Таким чином, тотожність $F_{ij,[kl]} = 0$ виконується для всього простору, що доводить його напівсиметричність.

4. Афінор-напівсиметричні простори першого класу.

Розглянемо властивості просторів першого класу, у якому визначена еліптична афінорна напівсиметрична структура другого ступеня. Вираз (7) спряжемо за індексами j, k

$$b_{h\alpha} R_{i\bar{j}\bar{k}}^\alpha = b R_{hi\bar{j}\bar{k}} + R_{h\bar{j}} b_{i\bar{k}} - R_{h\bar{k}} b_{i\bar{j}}, \quad (106)$$

або, з урахуванням властивостей тензора кривини у афінор-напівсиметричних просторах

$$b_{h\alpha} R_{ijk}^\alpha = b R_{hijk} + R_{h\bar{j}} b_{i\bar{k}} - R_{h\bar{k}} b_{i\bar{j}}. \quad (107)$$

Отриману тотожність віднімемо від (7)

$$R_{hj} b_{ik} - R_{hk} b_{ij} - R_{h\bar{j}} b_{i\bar{k}} + R_{h\bar{k}} b_{i\bar{j}} = 0. \quad (108)$$

Згортаючи за індексами h, k з урахуванням (8)

$$R_{i\alpha} b_j^\alpha = \frac{R}{2} b_{ij}. \quad (109)$$

Доведена

Лема 5. У афінор-напівсиметричних просторах першого класу тензор b_{ij} задовольняє (109).

Рівність (1) згорнемо з тензором Річчі

$$R_{h\alpha} R_{ijk}^\alpha = e(R_{h\alpha} b_k^\alpha b_{ij} - R_{h\alpha} b_j^\alpha b_{ik}) \quad (110)$$

та врахуємо (109)

$$R_{h\alpha} R_{ijk}^\alpha = \frac{R}{2} R_{hijk}. \quad (111)$$

Означення 4. Простори, у яких визначено довільний симетричний тензор A_{ij} такий, що задовольняє

$$A_{\alpha h} R_{ijk}^\alpha = \gamma R_{hijk}, \quad (112)$$

де $\gamma \neq 0$ - деякий інваріант, назовемо A -сильно напівсиметричними з інваріантом γ .

Лема 6. *Афінор-напівсиметричні простори першого класу є Річчі-сильно напівсиметричними з інваріантом $\gamma = \frac{R}{2}$.*

Вираз (112) згорнемо за індексами i, j

$$A_{\alpha h} R_{.k}^{\alpha} = \gamma R_{hk}. \quad (113)$$

Тут, беручи до уваги симетричність тензору Річчі, доводимо

Лема 7. *У A -сильно напівсиметричних просторах тензор A_{ij} комутує з тензором Річчі.*

Вираз (113) згорнемо та отримаємо

$$A_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} = \gamma R. \quad (114)$$

Наслідок 1. *У афінор-напівсиметричних просторах першого класу виконуються*

$$R_{h\alpha} R_j^{\alpha} = \frac{R}{2} R_{hj}, \quad (115)$$

$$R^2 = 2R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}. \quad (116)$$

Рівність (108) згорнемо за індексами i, k

$$R_{hj} b - R_{h\alpha} b_j^{\alpha} + R_{h\bar{\alpha}} b_{\bar{j}}^{\alpha} = 0. \quad (117)$$

Або, беручи до уваги (53) та (109)

$$R_{hj} b - \frac{R}{2} b_{hj} - \frac{R}{2} b_{\bar{h}\bar{j}} = 0, \quad (118)$$

тобто

$$R_{hj} = \frac{R}{2b} (b_{hj} + b_{\bar{h}\bar{j}}). \quad (119)$$

Вираз спряжемо (14) за індексами l, p

$$\begin{aligned} R_{hijk, [\bar{l}\bar{p}]} &= R_{\bar{p}k} R_{ihj\bar{l}} + R_{\bar{l}k} R_{ih\bar{p}j} + R_{\bar{p}j} R_{ih\bar{l}k} + R_{\bar{l}j} R_{ihk\bar{p}} \\ &+ R_{i\bar{p}} R_{kjh\bar{l}} + R_{i\bar{l}} R_{jkh\bar{p}} + R_{h\bar{p}} R_{jki\bar{l}} + R_{h\bar{l}} R_{kji\bar{p}}. \end{aligned} \quad (120)$$

З (39) випливає

$$R_{hijk, [\bar{l}\bar{p}]} = R_{hijk, [lp]}, \quad (121)$$

тому, підставляючи сюди (14), (120) будемо мати

$$\begin{aligned}
& R_{\bar{p}k}R_{ihj\bar{l}} + R_{\bar{l}k}R_{ih\bar{p}j} + R_{\bar{p}j}R_{ih\bar{l}k} + R_{\bar{l}j}R_{ihk\bar{p}} \\
& + R_{i\bar{p}}R_{kjh\bar{l}} + R_{i\bar{l}}R_{jkh\bar{p}} + R_{h\bar{p}}R_{jki\bar{l}} + R_{h\bar{l}}R_{kji\bar{p}} = \\
& = R_{pk}R_{ihjl} + R_{lk}R_{ihpj} + R_{pj}R_{ihlk} + R_{lj}R_{ihkp} \\
& + R_{ip}R_{kjhl} + R_{il}R_{jkh p} + R_{hp}R_{jkil} + R_{hl}R_{kji p}. \quad (122)
\end{aligned}$$

Отриманий вираз згорнемо за індексами h, l

$$\begin{aligned}
& -R_{\bar{p}k}R_{ij\bar{\alpha}}^{\alpha} - R_{k\bar{\alpha}}R_{i\bar{p}j}^{\alpha} + R_{\bar{p}j}R_{ik\bar{\alpha}}^{\alpha} - R_{j\bar{\alpha}}R_{ik\bar{p}}^{\alpha} \\
& + R_{i\bar{p}}R_{kj\bar{\alpha}}^{\alpha} + R_{i\bar{\alpha}}R_{\bar{p}jk}^{\alpha} - R_{\bar{p}\alpha}R_{ijk}^{\bar{\alpha}} = \\
& = -R_{pk}R_{ij} - R_{k\alpha}R_{ipj}^{\alpha} + R_{pj}R_{ik} - R_{j\alpha}R_{ikp}^{\alpha} \\
& + R_{i\alpha}R_{pj k}^{\alpha} - R_{p\alpha}R_{ijk}^{\alpha} + RR_{kji p} \quad (123)
\end{aligned}$$

та перепишемо, враховуючи (51), (53), (56) та (111)

$$\begin{aligned}
& R_{\bar{p}k}R_{ij} - \frac{R}{2}R_{i\bar{k}\bar{p}j} - R_{\bar{p}j}R_{ik} - \frac{R}{2}R_{i\bar{j}k\bar{p}} - 2R_{i\bar{p}}R_{kj} = \\
& = -R_{pk}R_{ij} + \frac{R}{2}R_{ipjk} + R_{pj}R_{ik}. \quad (124)
\end{aligned}$$

Цю тотожність спряжемо за індексами p, i та використаємо алгебраїчну тотожність Б'янки

$$R_{pk}R_{ij} - RR_{ipjk} - R_{pj}R_{ik} - 2R_{i\bar{p}}R_{kj} = -R_{\bar{p}k}R_{ij} + R_{\bar{p}j}R_{ik}. \quad (125)$$

Отриману рівність згорнемо за індексами p, k

$$RR_{ij} - R_{i\alpha}R_j^{\alpha} = 0 \quad (126)$$

та підставимо (115)

$$RR_{ij} = 0. \quad (127)$$

Звідси отримуємо, що тензор Річчі $R_{ij} = 0$ або скалярна кривина

$R = 0$, але нульова скалярна кривина є наслідком того, що тензор Річчі дорівнює нулю. Більш того, виконується й зворотнє. Дійсно, якщо $R = 0$, підставляючи це у вираз (119) отримуємо, що $R_{ij} = 0$. Враховуючи Теорему 1, доведено

Наслідок 2. Афінор-напівсиметричних просторів першого класу не існує.

Таким чином, у роботі досліджено псевдоріманові простори першого класу, наділені еліптичною афінорною напівсиметричною структурою другого ступеня. Алгебраїчний аналіз другої квадратичної форми цих просторів показав, що наявність такої геометричної структури неможлива у таких просторах.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Eisenhart, L. P. (1926). *Riemannian Geometry*. Princeton University Press.
2. Schouten, J. A., & Struik, D. J. (1935). *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie* (Bd. 1). P. Noordhoff n.v.
3. Kiosak, V., Savchenko, O., & Shevchenko, T. (2018). Holomorphically Projective Mappings of Special Kahler Manifolds. *AIP Conference Proceedings, 2025*, 08004. <https://doi.org/10.1063/1.5064924>.
4. Kahler, E. (1933). Über eine bemerkenswerte Hermitesche Metric. *Sem. Hamburg. Univ*, 9, 173–186.
5. Yano, K. (1965). *Differential geometry of complex and almost complex spaces*. Pergamon Press.
6. Suguri, T. (1956). Determination of various affine connexions in almost Hermitian space. *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.*, A, 10(2), 151–166.
7. Reboucas, M. J., Santos, J., & Teixeira, A. F. F. (2004). Classification of energy momentum tensors in $n \leq 5$ dimensional space-time. *Brazilian J. of Physics*, 34(2A), 535–543.
8. Fedorova, A., Kiosak, V., Matveev, V., & Rosemann, S. (2012). The only Kahler manifold with degree of mobility at least 3 is $(CP^n, g_{\text{Fubini-Study}})$. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 105(1), 153–188. <https://doi.org/10.1112/plms/pdr053>
9. Doikov, D., & Kiosak, V. (2020). On the Schwarzschild model for gravitating objects of the Universe. *AIP Conf. Proc*, 2302, 040001.
10. Kiosak, V. A., & Kovalova, G. V. (2020). Geodesic mappings of quasi-Einstein spaces with a constant scalar curvature. *Mathematical Studies*, 53(2), 212–217.
11. Kiosak, V., & Matveev, V. S. (2014). There exist no 4-dimensional geodesically equivalent metrics with the same stress-energy tensor. *J. Geom. Phys*, 78, 1–11.
12. Lesechko, O., & Soloviov, A. (2023). Conformally flat Kahler spaces. *Researches in Mathematics and Mechanics*, 28(1–2), 47–63.
13. Kiosak, V., Kusik, L., & Isaiev, V. (2022). Geodesic Ricci-symmetric pseudo-Riemannian spaces. *Proc. Int. Geom. Center*, 15(2), 110–120.
14. Kiosak, V., Latysh, O., & Kuzmich, V. (2024). Split curvature. *Proc. Int. Geom. Center*, 17(3), 232–243.

15. Kiosak, V., Savchenko, A., & Gudyreva, O. (2019). On the conformal mappings of special quasi-Einstein spaces. *AIP Conf. Proc.*, 2164, 040001.
16. Kiosak, V., Savchenko, A., & Kamienieva, A. (2020). Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces with constant scalar curvature. *AIP Conf. Proc.*, 2302, 040002.
17. Kiosak, V., Savchenko, A., & Khniunin, S. (2020). On the typology of quasi-Einstein spaces. *AIP Conf. Proc.*, 2302, 040003.
18. Kiosak, V., Savchenko, A., & Kovalova, G. (2020). Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces, I. *Proc. Int. Geom. Center*, 13(1), 35–48.
19. Kiosak, V., Lesechko, O., & Latysh, O. (2022). On geodesic mappings of symmetric pairs. *Proc. Int. Geom. Center*, 15, 230–238.
20. Kiosak, V., Savchenko, A., & Kusik, L. (2022). On the properties of Ricci solitons. *AIP Conf. Proc.*, 2522, 120006.
21. Kiosak, V., Savchenko, A., & Latysh, O. (2021). Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces, II. *Proc. Int. Geom. Center*, 14(1), 80–91.
22. Kiosak, V., Savchenko, A., & Makarenko, L. (2022). Invariant transformations that preserve mappings. *AIP Conf. Proc.*, 2522, 120003.
23. Lesechko, O., Latysh, O., & Kamienieva, A. (2019). Models of mechanical systems preserving the Weyl tensor. *AIP Conf. Proc.*, 2164, 040002.
24. Kiosak, V., Lesechko, O., & Savchenko, O. (2018). Mappings of spaces with affine connection. In *Proc. 17th Conf. on Applied Mathematics, APLIMAT*, Bratislava (pp. 563–569). Curran Associates, Inc.
25. Kiosak, V., Prishlyak, O., & Gudyreva, O. (2024). On geodesic mappings of threesymmetric spaces. *Proc. Int. Geom. Center*, 17(1), 56–64.
26. Kiosak, V., Prishlyak, O., & Lesechko, O. (2021). On the geodesic mappings of pseudo-Riemannian spaces with special supplementary tensor. *Proc. Int. Geom. Center*, 14(4), 13–26.
27. Savchenko, A., Shevchenko, T., & Hedulian, S. (2024). Conformal recurrent Kahler spaces. *Proc. Int. Geom. Center*, 17(1), 88–98.
28. Savchenko, A., Vashpanova, N., & Vasylieva, N. (2021). Generalized $\phi(\text{Ric})$ -vector fields in special pseudo-Riemannian spaces. *Proc. Int. Geom. Center*, 14(4), 1–12.
29. Savchenko, A., & Zarichnyi, M. (2010). Metrization of free groups on ultrametric spaces. *Topology Appl.*, 157(4), 724–729.
30. Zarichnyi, M., Savchenko, A., & Kiosak, V. (2019). Strong topology on the set of persistence diagrams. *AIP Conf. Proc.*, 2164, 040006.
31. Fedchenko, Yu., & Lesechko, O. (2021). Special semi-reducible pseudo-Riemannian spaces. *Proc. Int. Geom. Center*, 14(1), 48–59.
32. Lesechko, O., Latysh, O., & Sychak, T. (2020). Conformally flat Kahler spaces. *AIP Conf. Proc.*, 2302, 040004.
33. Fedchenko, Yu., Lesechko, O., & Marianko, Ya. (2025). Semi-reducible pseudo-Riemannian spaces with additional conditions. *Proc. Int. Geom. Center*, 18(2), 233–247.

Soloviov A. A.

AFFINOR-SEMI-SYMMETRIC SPACES OF CLASS ONE

Summary

The paper investigates the local geometry of pseudo-Riemannian spaces of class one endowed with an elliptic affinor semi-symmetric structure of the second degree. The application of the operation of conjugation with an affinor allowed analyzing the differential and algebraic properties of the Riemann and Ricci tensors. The algebraic structure of the second fundamental form is investigated; it is proved that the vanishing of the Ricci tensor restricts the rank of the second fundamental form to one, which leads to the identical vanishing of the Riemann tensor. Based on this, a theorem on the non-existence of Ricci-flat spaces of class one is established. For spaces with the given affinor structure, the commutativity of the Ricci tensor with the second fundamental form is proved. The main result is the proof of the identical vanishing of the Ricci tensor in affinor-semi-symmetric spaces of class one. As a consequence, the incompatibility of the conditions of a flat space hypersurface with a semi-symmetric almost complex structure is substantiated, and the non-existence of affinor-semi-symmetric spaces of class one is proved.

Keywords: Riemannian space, pseudo-Riemannian space, Riemann tensor, Ricci tensor, mapping of spaces, deformation tensor, affine connection spaces, covariant derivative, affinor, affinor structure, semi-symmetric affinor structure, antisymmetric affinor structure, almost complex space, conjugation operation, geometric object.

REFERENCES

1. Eisenhart, L. P. (1926). *Riemannian Geometry*. Princeton University Press.
2. Schouten, J. A., & Struik, D. J. (1935). *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie* (Bd. 1). P. Noordhoff n.v.
3. Kiosak, V., Savchenko, O., & Shevchenko, T. (2018). Holomorphically Projective Mappings of Special Kahler Manifolds. *AIP Conference Proceedings, 2025*, 08004. <https://doi.org/10.1063/1.5064924>.
4. Kahler, E. (1933). Über eine bemerkenswerte Hermitesche Metric. *Sem. Hamburg. Univ*, 9, 173–186.
5. Yano, K. (1965). *Differential geometry of complex and almost complex spaces*. Pergamon Press.

6. Suguri, T. (1956). Determination of various affine connexions in almost Hermitian space. *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., A*, 10(2), 151–166.
7. Reboucas, M. J., Santos, J., & Teixeira, A. F. F. (2004). Classification of energy momentum tensors in $n \leq 5$ dimensional space-time. *Brazilian J. of Physics*, 34(2A), 535–543.
8. Fedorova, A., Kiosak, V., Matveev, V., & Rosemann, S. (2012). The only Kahler manifold with degree of mobility at least 3 is $(CP^n, g_{\text{Fubini-Study}})$. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 105(1), 153–188. <https://doi.org/10.1112/plms/pdr053>
9. Doikov, D., & Kiosak, V. (2020). On the Schwarzschild model for gravitating objects of the Universe. *AIP Conf. Proc.*, 2302, 040001.
10. Kiosak, V. A., & Kovalova, G. V. (2020). Geodesic mappings of quasi-Einstein spaces with a constant scalar curvature. *Mathematical Studies*, 53(2), 212–217.
11. Kiosak, V., & Matveev, V. S. (2014). There exist no 4-dimensional geodesically equivalent metrics with the same stress-energy tensor. *J. Geom. Phys.*, 78, 1–11.
12. Lesechko, O., & Soloviov, A. (2023). Conformally flat Kahler spaces. *Researches in Mathematics and Mechanics*, 28(1–2), 47–63.
13. Kiosak, V., Kusik, L., & Isaiev, V. (2022). Geodesic Ricci-symmetric pseudo-Riemannian spaces. *Proc. Int. Geom. Center*, 15(2), 110–120.
14. Kiosak, V., Latysh, O., & Kuzmich, V. (2024). Split curvature. *Proc. Int. Geom. Center*, 17(3), 232–243.
15. Kiosak, V., Savchenko, A., & Gudyreva, O. (2019). On the conformal mappings of special quasi-Einstein spaces. *AIP Conf. Proc.*, 2164, 040001.
16. Kiosak, V., Savchenko, A., & Kamienieva, A. (2020). Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces with constant scalar curvature. *AIP Conf. Proc.*, 2302, 040002.
17. Kiosak, V., Savchenko, A., & Khniunin, S. (2020). On the typology of quasi-Einstein spaces. *AIP Conf. Proc.*, 2302, 040003.
18. Kiosak, V., Savchenko, A., & Kovalova, G. (2020). Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces, I. *Proc. Int. Geom. Center*, 13(1), 35–48.
19. Kiosak, V., Lesechko, O., & Latysh, O. (2022). On geodesic mappings of symmetric pairs. *Proc. Int. Geom. Center*, 15, 230–238.
20. Kiosak, V., Savchenko, A., & Kusik, L. (2022). On the properties of Ricci solitons. *AIP Conf. Proc.*, 2522, 120006.
21. Kiosak, V., Savchenko, A., & Latysh, O. (2021). Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces, II. *Proc. Int. Geom. Center*, 14(1), 80–91.
22. Kiosak, V., Savchenko, A., & Makarenko, L. (2022). Invariant transformations that preserve mappings. *AIP Conf. Proc.*, 2522, 120003.
23. Lesechko, O., Latysh, O., & Kamienieva, A. (2019). Models of mechanical systems preserving the Weyl tensor. *AIP Conf. Proc.*, 2164, 040002.

24. Kiosak, V., Lesechko, O., & Savchenko, O. (2018). Mappings of spaces with affine connection. In *Proc. 17th Conf. on Applied Mathematics, APLIMAT*, Bratislava (pp. 563–569). Curran Associates, Inc.
25. Kiosak, V., Prishlyak, O., & Gudyreva, O. (2024). On geodesic mappings of threesymmetric spaces. *Proc. Int. Geom. Center*, 17(1), 56–64.
26. Kiosak, V., Prishlyak, O., & Lesechko, O. (2021). On the geodesic mappings of pseudo-Riemannian spaces with special supplementary tensor. *Proc. Int. Geom. Center*, 14(4), 13–26.
27. Savchenko, A., Shevchenko, T., & Hedulian, S. (2024). Conformal recurrent Kahler spaces. *Proc. Int. Geom. Center*, 17(1), 88–98.
28. Savchenko, A., Vashpanova, N., & Vasylieva, N. (2021). Generalized $\phi(\text{Ric})$ -vector fields in special pseudo-Riemannian spaces. *Proc. Int. Geom. Center*, 14(4), 1–12.
29. Savchenko, A., & Zarichnyi, M. (2010). Metrization of free groups on ultrametric spaces. *Topology Appl*, 157(4), 724–729.
30. Zarichnyi, M., Savchenko, A., & Kiosak, V. (2019). Strong topology on the set of persistence diagrams. *AIP Conf. Proc*, 2164, 040006.
31. Fedchenko, Yu., & Lesechko, O. (2021). Special semi-reducible pseudo-Riemannian spaces. *Proc. Int. Geom. Center*, 14(1), 48–59.
32. Lesechko, O., Latysh, O., & Spychak, T. (2020). Conformally flat Kahler spaces. *AIP Conf. Proc*, 2302, 040004.
33. Fedchenko, Yu., Lesechko, O., & Marianko, Ya. (2025). Semi-reducible pseudo-Riemannian spaces with additional conditions. *Proc. Int. Geom. Center*, 18(2), 233–247.