

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

«Побудова та дослідження різноманітних динамічних моделей економіки»

«Construction and research of various dynamic models of the economy»

Виконав: здобувач денної форми навчання
спеціальності 111 Математика
Освітня програма «Математика»

Навроцький Нікіта Вадимович

Керівник канд. фіз.- мат. наук, доц. Шарай Н.В.
(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали, підпис)

Рецензент канд. фіз.-мат. наук доц. Білозерова М.О.
(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

Рекомендовано до захисту:

Захищено на засіданні ЕК № _____

Протокол засідання кафедри

протокол № ___ від _____ 2025 р.

№ ___ від _____ 2025 р.

Оцінка _____ / _____ / _____
(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)

Завідувач кафедри

Голова ЕК

Одеса - 2025

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ТА ЕВОЛЮЦІЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ	5
1.1 Класифікація динамічних моделей економіки	5
1.2 Еволюція моделей економічного зростання і ділових циклів	7
РОЗДІЛ 2. ДИНАМІЧНІ МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ.....	9
2.1 Модель Кейнса.....	9
2.2 Нелінійна динамічна модель Кейнса.....	15
2.3 Кон'юнктурні цикли економіки.....	17
2.4 Модель Самуельсона-Хікса.....	22
2.5 Модель Калдора.....	32
РОЗДІЛ 3. СТОАХАСТИЧНІ МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ	35
3.1 Формалізація стохастичних динамічних моделей	35
3.2 Розгляд стохастичної моделі динаміки фінансового ресурсу	39
ВИСНОВКИ.....	43
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	45

ВСТУП

У наш час математичні моделі застосовуються в різних галузях економіки. Основне завдання побудування моделей - це оптимізація різних сфер економіки, при цьому сформувавши такий комплекс дій, який дасть максимально ефективний результат за заданим показником.

Розробка та аналіз математичних моделей у теорії довгострокового економічного зростання та теорії ділових циклів є актуальним завданням сучасної макроекономічної динаміки. Теорія економічного зростання - класичний предмет дослідження економіки, який бере початок від робіт О. Галора, К. Арроу, П. Ромера, Т. Свона та інших дослідників.

Математичні моделі широко застосовуються в дослідженнях економічного зростання й циклів, економіки праці, теорії фінансів, економіки природокористування, ресурсної економіки та сільського господарства. Вони є своєрідним «ідеальним об'єктом» для побудови математичної теорії, подібно до «матеріальної точки» чи «абсолютно твердого тіла» в механіці.

Модель може слугувати засобом перевірки наукових гіпотез або передбачуваних напрямів розвитку. За допомогою математичних моделей макроекономічних явищ і процесів можна досліджувати наслідки прийнятих управлінських розв'язків.

Математичне моделювання економічних процесів є важливим напрямом дослідження, оскільки від нього залежить добробут громадян і країни в цілому. Особливо важливими в економіці є динамічні моделі, параметри яких змінюються в часі. Знаючи динаміку економічного показника, можна прогнозувати його подальший розвиток.

Дослідження економічних процесів здійснюється за допомогою математичних методів і моделей, користуючись основами теорії динамічних систем. Динамічні моделі дозволяють описувати та досліджувати соціально-економічні процеси, що розвиваються з часом.

У цій роботі розглядається:

- *у першому розділі* — теоретичні основи динамічних моделей економіки, їх класифікація та історична еволюція підходів до моделювання економічного зростання і ділових циклів;
- *у другому розділі* — детальний аналіз класичних і сучасних динамічних моделей економічних систем, зокрема моделей Кейнса, Самуельсона-Хікса, Калдора та Гудвіна;
- *у третьому розділі* — побудова та дослідження стохастичних моделей, що враховують невизначеність та випадковість економічних процесів, зокрема моделі фінансових ресурсів банку.

Мета дослідження полягає у вивченні різних типів динамічних моделей економіки, порівнянні їхніх властивостей та придатності до аналізу реальних процесів в економіці.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ТА ЕВОЛЮЦІЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

1.1 Класифікація динамічних моделей економіки

Динамічними моделями економіки називають моделі, що описують економіку у розвитку. Модель стає динамічною тоді, коли принаймні одна з її змінних залежить від часу, що відрізняється від періоду, до якого належать інші змінні.

Динамічні економічні моделі застосовуються, зокрема, для планування й прогнозування ходів економічних процесів.

Для математичного опису динамічних моделей економіки використовують *диференціальні рівняння* у разі неперервного часу, різницеві рівняння при дискретних часових кроках, а також стохастичні процеси для моделей із ймовірнісними величинами.

Рівняння, в яких невідомі є функції, а в їхньому виразі фігурують не тільки самі функції, а й їхні похідні, називають *диференціальними*.

Застосування диференціальних рівнянь економіки ґрунтується на механічному сенсі похідної, за яким похідна $\frac{dy(t)}{dt}$ виражає швидкість зміни функції $y(t)$.

При вивченні показників їх значення зазвичай фіксують у певні дискретні моменти часу. Наприклад, про виконання плану судять за показниками на кінець запланованого періоду. Тому замість швидкості $\frac{dy(t)}{dt}$ зміни деякої величини $y(t)$ доводиться брати середню швидкість $\frac{\Delta y(t)}{\Delta t}$ за певний кінцевий інтервал часу Δt .

Якщо обрати масштаб часу так, що довжина періоду, що розглядається $\Delta t = 1$, то швидкість $\frac{\Delta y(t)}{\Delta t}$ зміни величини можна описати як різницю

$$\Delta y(t) = y(t + 1) - y(t),$$

що зазвичай називають *першою різницею*. При цьому розрізняють *праву* та *ліву*, зазвичай,

$$\Delta y(t) = y(t) - y(t - 1)$$

- подано ліву різницю, а попередня - права.

Далі можна ввести другу різницю:

$$\Delta^2 y(t) = \Delta(\Delta y(t)) = \Delta y(t + 1) - \Delta y(t) = y(t + 2) - 2y(t + 1) + y(t)$$

та різниці вищих порядків Δ^n .

З допомогою різниць дається поняття різницевого рівняння. Рівняння, яке встановлює зв'язок між кінцевими різницями в обраній точці, називають різницеvim:

$$f[y(t), \Delta y(t), \Delta^2 y(t), \dots, \Delta^n y(t)] = 0.$$

Різницеve рівняння можна уявити як формулу, яка поєднує значення функції в кількох сусідніх точках.

$$y(t), y(t + 1), \dots, y(t + n).$$

Під порядком різницевого рівняння розуміють різницю між початковим і кінцевим моментами часу.

Зарахований розв'язок диференціальних рівнянь їх часто замінюють різницеvими. Це можливо, якщо розв'язок різницевого рівняння прямує до розв'язку відповідного диференціального рівняння, коли інтервал Δt прагне до нуля.

1.2 Еволюція моделей економічного зростання і ділових циклів

Перший серйозний крок у моделюванні макроекономічної динаміки було зроблено Дж. М. Кейнсом на основі наступних спрощених припущень:

1) стан економіки описується двома агрегованими змінними, рівнянням національного доходу та попитом на товари та послуги (попит на інвестиції та поточне споживання);

2) на макроекономічному ринку товарів попит народжує пропозицію;

3) сукупний попит зараз час дорівнює національному доходу наступного часу й т.д.

Станом на сьогодні опубліковано безліч досліджень, присвячених розвитку моделі зростання в різних аспектах. Аналіз цих моделей показує, що головною причиною нерівномірного розвитку динаміки національного доходу є коливання попиту.

Різні моделі для аналізу бізнес-циклів були отримані з використанням різних варіантів акселератора інвестицій та мультиплікатора споживання, які стали називатися "Кейнсіанськими моделями".

Найбільш повне формулювання моделі з урахуванням взаємодії мультиплікатора та акселератора вперше дана П. Самуельсон (1936) і пізніше була розвинена Дж. Хіксом. Модель Самуельсона-Хікса є лінійною та застосовна для малих потужностей акселератора. У реальних ділових циклах вирішальну роль відіграє нелінійний акселератор, який утримує вибухові коливання, що виникають в економічній системі з великою потужністю акселератора, в обмежених межах. Таким чином, становлять інтерес розроблені А. Філіпсом та Р. Гудвін нелінійні моделі взаємодії мультиплікатора-акселератора з урахуванням запізнювальних факторів. Динаміка циклічних коливань в економічній системі визначається головним чином нелінійністю та запізнюваннями у часі. Крім того, взаємодія мультиплікатора служить необхідним механізмом поширення циклічних коливань.

Головним недоліком математичних моделей економічного зростання та ділових циклів є ізольований розгляд зростання та циклічних коливань без урахування їх взаємодії. Цикли ділової активності є відхилення реального сукупного випуску від свого довгострокового тренду (Р. Лукас, 1977). Отже, не можна вивчати ізольовано економічне зростання та циклічні коливання.

У 1980 р. Е. Кюдландом та Е. Прескоттом було зроблено спроби поєднати теорію економічного зростання з теорією ділових циклів. Вони показали, що довгострокового зростання є наслідок короткострокових циклічних впливів, тобто технічний прогрес є основним фактором довгострокових змін в економіці та короткострокових коливань рівня випуску через те, що технологічний розвиток нерівномірний у часі. На закінчення зазначимо, що цікавить висновок основного рівняння макроекономічної динаміки, що описує спільний вплив довгострокового зростання і ділових циклів з урахуванням основних чинників довгострокових змін економіки відповідно до сучасним уявленням. Крім того, аналіз розглянутих моделей становить інтерес для розвитку теоретичного інструментарію, необхідного у дослідженнях економічної динаміки.

Незважаючи на свою простоту, запропонована багато років тому модель Самуельсона-Хікса залишається актуальною і, як і раніше, дає відповіді та обґрунтування проблеми циклів ділової активності національної економіки.

Сучасні дослідження показують, наскільки сильна здатність моделі Самуельсона представляти стійкі коливання, що сходяться до рівноважного значення. Це особливо притаманно трьох випадків:

- 1) для класичної мультиплікаторно-акселераторної моделі Самуельсона для національної економіки з постійними державними витратами, де аналітично визначено область стійкості та її аналітичне розв'язок у всіх можливих випадках речових або комплексних власних значень національного доходу;

- 2) для запізнювальної версії моделі Самуельсона, представленої у

Барроса і Ортеги, де область стабільності переважно пов'язані з коливальним поведінкою економіки;

3) просте нелінійне переформулювання вихідної моделі Самуельсона з непостійними державними витратами.

РОЗДІЛ 2. ДИНАМІЧНІ МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ

2.1 Модель Кейнса

Кейнс стверджував, що ситуація, коли економіка автоматично повертається до стану повної зайнятості, не є типовою. Більш поширений випадок — це рівновага за умов, коли існує безробіття, і лише за певних додаткових зусиль з боку держави можна досягти повної зайнятості. Інакше кажучи, ринкові механізми без втручання держави не гарантують автоматичного зникнення безробіття.

Він уявляв собі, що існують окремі ринки для грошей та для облігацій. У своїй теорії Кейнс виділяв три види активів: готівкові гроші, державні (або приватні) облігації та реальний (фізичний) капітал — запаси інвестиційних товарів. Вартість грошей за своєю сутністю вимірюється через облігації: тобто ціна грошей виражається у відсотковій ставці за облігаціями. За умов загальної рівноваги дохідність усіх трьох активів повинна зрівнюватися: інакше з'являються стимули переміщати кошти з одного виду активу в інший. Таким чином, рентабельність фізичного капіталу (інвестиційних товарів) прирівнюється до ставки відсотка за облігаціями.

Таким чином, на відміну від класичних моделей - у монетарній моделі (у Дж. Хікса, наприклад) - ставка процента є найважливішим чинником, що впливає на зайнятість.

Також це дозволяє прослідкувати, як грошово-кредитна політика сприяє розвитку виробничого сектора. Прикладом може бути, підвищення грошової

маси призводить до зростання попиту на облігації. За інших рівних умов це призведе до зростання їхньої ціни та зниження норми процента за облігаціями. Відповідно, відбудеться перелив активів у капітал (інвестиції у фізичні засоби виробництва). Внаслідок цього рентабельність теж мусить зменшитися, адже дохідність облігацій і капіталу приблизно однакова.

Проаналізуємо умову, за якої прибуток від капіталу (фондів) досягає свого максимуму за незмінного рівня зайнятості. Прибуток:

$$\Pi = pF(K, L) - rK - wL,$$

де: p – ціна продукції; F – виробнича функція; K – капітал; L – праця; r – ставка процента; w – ставка заробітної плати.

Тому необхідна умова екстремуму:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial K} = p \frac{\partial F}{\partial K} - r = 0,$$

$\frac{\partial \Pi}{\partial K}$ – граничний прибуток від одиниці додаткового капіталу, $\frac{\partial F}{\partial K}$ – гранична продуктивність капіталу, тобто наскільки зміниться обсяг виробництва при зміні капіталу на одиницю.

Оскільки $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial K^2} < 0$, то дійсно виводимо необхідну умову максимуму:

$$p \frac{\partial F}{\partial K} = r,$$

іншими словами, гранична продуктивність капіталу, виміряна в грошовому вираженні, зрівнюється зі ставкою процента.

Отже, коли норма прибутку знижується, це свідчить про зменшення граничного продукту капіталу (за умови незмінності цін). А зменшення граничного продукту капіталу пояснюється зростанням загального обсягу капіталу, що в рівноважному стані тягне за собою падіння прибутковості. Таким чином, простежується повний ланцюг причин: навіть невелике розширення грошової маси спричиняє підвищення цін на товари, що, у свою чергу, зумовлює збільшення їх пропозиції та зріст кінцевого продукту.

Оглянемо докладніше новизну теорії Кейнса. Почнемо з аналізу у кейнсіанській моделі зв'язку рівня зайнятості при повній зайнятості та узгодженому рівні реальної зарплати:

$$\left(\frac{w}{p}\right)^0$$

витає з умови:

$$L^D \left[\left(\frac{w}{p}\right)^0 \right] = L^0,$$

в цьому випадку рівноважний кінцевий продукт

$$Y^0 F(K, L^0),$$

де L^0 - кількість працівників при повній зайнятості.

Нехай з певних причин попит E на продукцію виявився нижчим за пропозицію Y за умови повної зайнятості.

В цьому випадку, за словами Кейнса, фактичний кінцевий продукт Y буде рівним попиту $Y = E$, тобто $Y < Y^0$. Це відразу позначиться на ринку праці, оскільки за незмінних умов менший обсяг випуску можна забезпечити за допомогою меншої кількості працівників, тобто $L < L^0$. Отже, у класичній моделі кількість зайнятих $L^0 = L \left(\frac{w}{p}\right)^0$ визначається рівнем реальної заробітної плати $\left(\frac{w}{p}\right)^0$, тоді як у кейнсіанському підході рівень зайнятості L залежить від попиту на товари E . При цьому безробіття встановлюється внаслідок взаємодії ринків грошей і товарів.

Основна проблема полягає в тому, що виробники не здатні реалізувати більше продукції, ніж замовлено на ринку: вони виготовляють саме той обсяг, який споживачі готові придбати. Отже, крива попиту на робочу силу, що формується на основі припущення про максимізацію прибутку залишається застосовною, бо попит на працю автоматично адаптується до обсягу продажів

Підсумуємо основні нововведення кейнсіанської моделі порівняно з класичною:

1) баланс на товарному ринку досягається в момент, коли запланований попит дорівнює фактичній пропозиції;

2) фактичне працевлаштування визначається не стільки рівнем реальної заробітної плати, скільки величиною попиту на виготовлену продукцію, отже, стан рівноваги на ринку праці досягається лише за умови, що ринок товарів уже перебуває у рівновазі.

Загалом модель Кейнса записується у такому вигляді:
ринок робочої сили

$$L^S = L^S\left(\frac{w}{p}\right), L^D = L^D(Y^0),$$

де L^D – попит на працю, Y^0 – фіксований обсяг сукупного випуску продукції;
ринок грошей

$$M^S = M^S; M^D = k_p Y + Lq(r), \frac{dLq}{dr} < 0, M^S = M^D,$$

де M^D – попит на гроші, Y – реальний обсяг виробництва, $Lq(r)$ – попит на облігації залежно від процентної ставки;

ринок товарів

$$Y = Y(L), E = C(Y) + I(r), \frac{dC}{dY} > 0, \frac{dI}{dr} < 0, Y = E,$$

де Y – ВВП, E – сукупні видатки економіки, $C(Y)$ – споживчі видатки, $I(r)$ – інвестиційні видатки.

Нехай $C(Y)$, $I(r)$ лінійні, тобто попит на споживчі товари зростає прямо пропорційно доходу

$$C(Y) = a + bY, a > 0, 0 < b < 1,$$

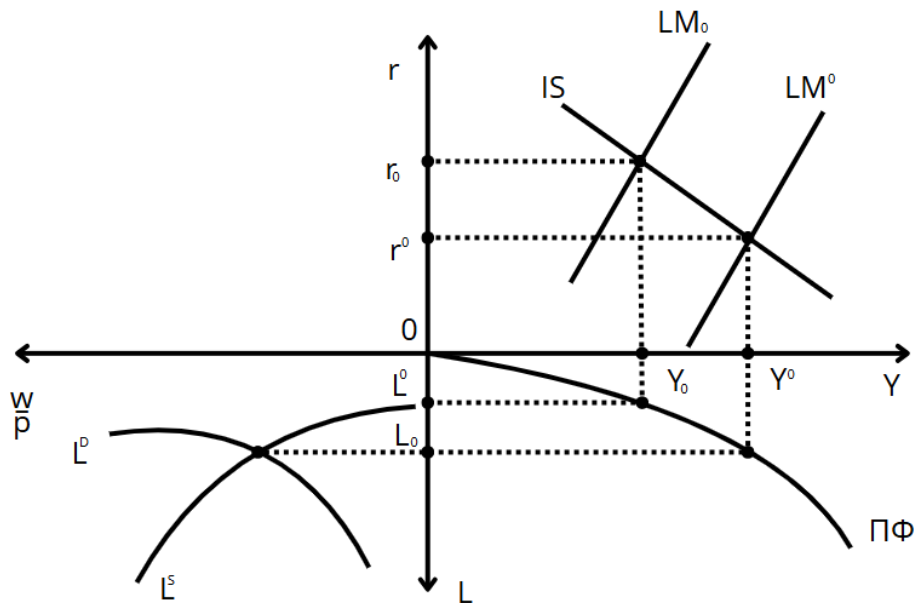
а обсяг інвестицій зменшується прямо пропорційно рівню процентної ставки

$$I(r) = d - fr, d > 0, f > 0.$$

Тоді умова рівноваги запишеться у такій формі:

$$Y^G = \left(\frac{a+d}{1-b} \right) - \left(\frac{f}{1-b} \right) r,$$

тобто крива рівноваги на ринку товарів (крива IS на мал. 1) є лінійною спадною функцією по r та при фіксованому значенні r існує лише одне рівноважне значення $Y^G(r)$.



Мал. 1. Рівновага у моделі Кейнса

Припустимо, що попит облігації $Lq(r)$ лінійний, тобто $Lq(r) = h - jr$.

Тоді умова рівноваги на ринку грошей записується так:

$$Y^n = \frac{M^s - h}{kp} - \frac{jr}{kp},$$

це означає, що крива грошової рівноваги (крива LM) є зростаючою лінійною функцією r , тому при фіксованому значенні r існує рівноважне значення $Y^M(r)$.

Сукупна рівновага на монетарному та товарному ринках встановлюється за умови $Y^G(r_0) = Y^M(r_0) = Y_0$, причому точка перетину цих кривих (Y_0, r_0) єдина. Ця загальна рівновага визначає фактичний попит на працю $Y_0 = F(K, L_0)$.

Повна картина встановлення рівноваги показано на мал. 1. У 1 квадранті відображено криві IS, LM, у 4 квадранті виробнича функція економіки ПФ як

функція L , у 3 квадранті - перетин кривих попиту й пропозиції праці. Від товарного та грошового ринків через виробничу функцію процес передається на ринок праці, який самостійно не визначає рівновагу.

На відміну від класичної моделі, де передбачено автоматичне досягнення повної зайнятості, у кейнсіанському підході така закономірність відсутня. Дійсно, хай рівновага встановилася під час зайнятості $L_0 < L^0$. Тоді, аби вийти на повну зайнятість, L_0 треба збільшити випуск продукції до $Y^0 = F(K, L^0)$, що вимагало б змістити криву LM в положення LM^0 . Дане заміщення можливе за рахунок екзогенно заданих пропозиції грошей M^S та при фіксованих коефіцієнтах k, h лише шляхом зниження цін p . Але модель Кейнса не передбачає коригування цін при незмінній ставці заробітної плати. Тоді, запуск процесу зайнятості вимагає цілеспрямованого державного втручання

Якщо крива LM нелінійна і має горизонтальний ділянку, то виникає ліквідна пастка. За такої форми кривої на фінансовому ринку встановлюється рівновага незалежно від зниження цін через надлишок товарів і трудових ресурсів.

Ще одна характерна риса моделі полягає в тому, що іноді очікуваний рівень сукупних витрат E може перевищувати потенційні можливості виробництва Y . Така ситуація виникає, коли точка перетину кривих IS і LM відповідає від'ємному значенню процентної ставки.

Подальший розвиток і перегляд кейнсіанського підходу знайшов відображення у монетаристському напрямі, який сформулював М. Фрідмен на початку 1970-х років. Головний контраст у поглядах Кейнса та Фрідмена полягає у фокусі їхніх теорій: Кейнс вважав, що ключовим фактором змін у макроекономіці є попит на товари, тоді як Фрідмен наголошував на ролі контролю за грошовою масою. За монетаристами, спекулятивний попит на гроші не реагує на зміну процентної ставки, тому розширення грошової маси призводить не до зростання випуску, а до підвищення рівня цін. При цьому

вони вважають, що в довгостроковій перспективі монетарна політика мало впливає на реальні показники (виробництво, безробіття), хоча в короткому терміні її ефекти можливі.

2.2 Нелінійна динамічна модель Кейнса

Розглянемо нелінійну модель Кейнса, як нелінійне диференціальне рівняння першого порядку:

$$\frac{dy}{dt} = f(y, I),$$

де швидкість зростання ВВП є функцією ВВП та інвестицій. У лінійному випадку

$$f(y, I) = \underline{c} - (1 - c)y + I.$$

Оскільки $y (y > 0)$ - ВВП, а $I (I > 0)$ - інвестиції, то з економічних міркувань впливає, що

$$\frac{\partial f}{\partial y} < 0, \quad \frac{\partial f}{\partial I} > 0;$$

тобто зі збільшенням ВВП його швидкість зростання уповільнюється, і зі збільшенням інвестицій буде зростати.

Нехай при $t = 0$ інвестиції дорівнюють I_0 та система знаходиться в деякому рівноважному стані (y_E^0, I_0) , першу компоненту якої визначаємо з рівняння вигляду

$$f(y_E^0, I_0) = 0,$$

де інвестиції I_0 вважаються відомими.

При збільшенні інвестицій з I_0 до $I = I_0 + \Delta I$, $\Delta I > 0$ система задовольняє рівнянню

$$\frac{dy}{dt} = f(y, I), \quad y(0) = y_E^0.$$

Представимо ВВП у вигляді суми сталої та змінної частин:

$$y(t) = y_E^0 + \eta(t), \quad \eta(t) > 0, \quad \eta(0) = 0,$$

де змінна частина $\eta(t)$ задовольняє рівнянню

$$\frac{dy}{dt} = f(y_E^0 + \eta, I_0 + \Delta I), \quad \eta(0) = 0.$$

Якщо збільшення інвестицій ΔI порівняно мало, то при еволюторному характері функції $f(y, I)$ змінна частина $\eta(t)$ також порівняно мала, тому праву частину можна розкласти на околі точки (y_E^0, I_0) у ряд Тейлора, відкинувши члени другого і вищих порядків:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial y}(y_E^0, I_0)\eta + \frac{\partial f}{\partial I}(y_E^0, I_0) \cdot \Delta I, \quad \eta(0) = 0.$$

Після перенесення членів, що містить η , у ліву частину та якщо поділити обидві частини на $-\frac{\partial f}{\partial y}(y_E^0, I_0)$ отримуємо рівняння інерційної ланки:

$$T \frac{d\eta}{dt} + \eta = a \Delta I, \quad \eta(0) = 0 \quad (1)$$

де $\frac{1}{T} = -\frac{\partial f}{\partial y}(y_E^0, I_0)$ – узагальнена схильність до накопичення у початковому стані:

$$a = -\frac{\frac{\partial f}{\partial I}(y_E^0, I_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(y_E^0, I_0)} > 0.$$

З (1) випливає, що змінна частина ВВП має наступний вигляд:

$$\eta(t) = a \Delta I \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right),$$

а ВВП загалом буде змінюватися так:

$$y(t) = y_E^0 + a \Delta I \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right),$$

при цьому новий рівноважний стан ВВП має вигляд

$$y_E = \lim_{I \rightarrow \infty} (t) = y_E^0 + a \Delta I = y_E^0 - \frac{\frac{\partial f}{\partial I}(y_E^0, I_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(y_E^0, I_0)} \Delta I.$$

2.3 Кон'юнктурні цикли економіки

Нижче кон'юнктурні цикли досліджуються за допомогою неперервного аналогу нелінійної моделі Гудвіна. Ця модель спирається на припущення про сталість капіталомісткості k , темпів приросту населення n та продуктивності праці γ :

$$k = \frac{K_t}{Y_t} = const,$$

де K_t – капітал (основні та оборотні кошти);

$$n = \frac{N_{t+1} - N_t}{N_t} = const,$$

де N_t – чисельність населення на рік t ;

$$\gamma = \frac{y_{t+1} - y_t}{y_t} = const,$$

$y_t = \frac{Y_t}{L_t}$ – продуктивність праці, Y_t – ВВП, L_t – кількість зайнятих.

У моделі дві ендогенні змінні λ_t, δ_t :

$\lambda_t = \frac{L_t}{N_t}$ – частка зайнятих у загальній чисельності населення;

$\delta_t = \frac{w_t L_t}{Y_t} = \frac{w_t}{y_t}$ – доля фонду споживання в ВВП, w_t – річна ставка заробітної

плати.

Далі позначемо $\widehat{\delta}_t$ – темп приросту відповідного показника

$$\widehat{\delta}_t = \frac{\delta_{t+1} - \delta_t}{\delta_t} = \frac{\delta_{t+1}}{\delta_t} - 1.$$

При зроблених пропозиціях темп приросту ендогенних змінних набудуть наступного вигляду:

$$\widehat{\delta}_t = \frac{\delta_{t+1}}{\delta_t} - 1 = \frac{\frac{w_{t+1}}{y_{t+1}}}{\frac{w_t}{y_t}} - 1 = \frac{w_{t+1}}{w_t(1+\gamma)} - 1 = \frac{\widehat{w}_t - \gamma}{1+\gamma}, \quad (2)$$

$$\widehat{\lambda}_t = \frac{\widehat{L}_t - n}{1+n}, \quad (3)$$

$$\widehat{K}_t = \frac{\Delta K_t}{K_t} = \frac{I_t}{K_t} = \frac{(1-\delta_t)Y_t}{K_t} = \frac{1-\delta_t}{\kappa}, \quad (4)$$

$$\widehat{K}_t = \frac{\kappa(Y_{t+1}-Y_t)}{\kappa Y_t} = \widehat{Y}_t. \quad (5)$$

Припустимо також, частка зайнятих лінійно залежить від темпу приросту зарплати:

$$\lambda_t = \lambda_0 + \beta \widehat{w}_t, \quad \lambda_0 > 0, \beta > 0, \quad (6)$$

тому $\widehat{w}_t = a\lambda_t - a_0$, $(a = \frac{1}{\beta > 0}, a_0 = \frac{\lambda_0}{\beta > 0})$.

Підставимо останнє співвідношення у (2), отримуємо перше рівняння моделі Гудвіна $(a = \frac{a}{1+\gamma} > 0, a_0 = \frac{a_0}{1+\gamma} > 0)$:

$$\widehat{\delta}_t = a\lambda_t - a_0.$$

Оскільки $y_t = \frac{Y_t}{L_t}$, то $L_t = \frac{Y_t}{y_t}$, і так само, як у (2), знаходимо, використовуючи (5), (6):

$$\widehat{L}_t = \frac{\widehat{Y}_t - \gamma}{1+\gamma} = \frac{\widehat{K}_t - \gamma}{1+\gamma} = \frac{(1-\delta_t) - \gamma\kappa}{\kappa(1+\gamma)}. \quad (7)$$

Підставимо (7) у (3), отримуємо друге рівняння моделі Гудвіна:

$$\widehat{\lambda}_t = -b\delta_t + b_0,$$

де $b = \frac{1}{\kappa(1+\gamma)(1+n)} > 0$, $b_0 = \frac{1-\kappa[\gamma-n(1+\gamma)]}{\kappa(1+\gamma)(1+n)}$.

Таким чином, маємо неперервний аналог моделі Гудвіна:

$$\begin{cases} \frac{d\delta}{dt} = (a\lambda - a_0)\delta, \\ \frac{d\lambda}{dt} = (-b\delta - b_0)\lambda. \end{cases}$$

Причому, модель є нелінійною.

Якщо поділити перше рівняння на друге, отримаємо рівняння з відокремленими змінними вигляду:

$$\left(-b + \frac{b_0}{\delta}\right) d\delta = \left(a - \frac{a_0}{\lambda}\right) d\lambda.$$

Якщо проінтегрувати ліву та праву частину рівняння, маємо розв'язок вигляду:

$$-b\delta + b_0 \ln\delta = a\lambda - a_0 \ln\lambda + \ln A,$$

або

$$\delta^{b_0} e^{-b\delta} = A\lambda^{-a_0} e^{a\lambda}. \quad (8)$$

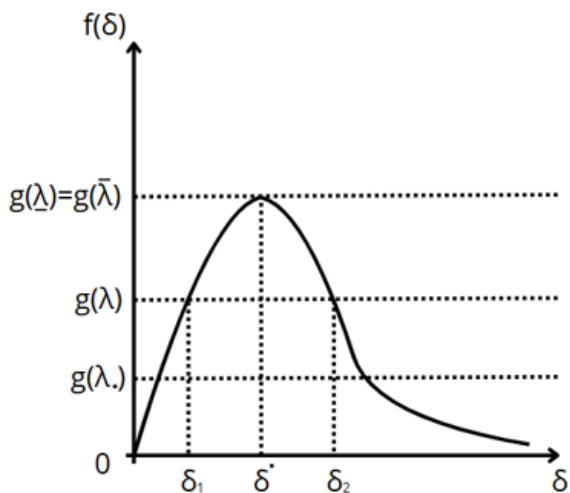
Функція $f(\delta) = \delta^{b_0} e^{-b\delta}$ має максимум у точці

$$\delta^* = \frac{b_0}{b} = 1 - \kappa[\gamma + n(1 + \gamma)],$$

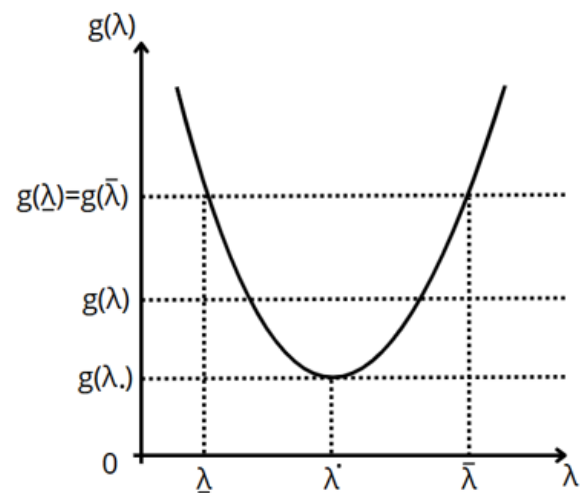
а функція $g(\lambda) = A\lambda^{-a_0} e^{a\lambda}$ – мінімум у точці

$$\lambda^* = \frac{a_0}{a}.$$

Графіки функцій $f(\delta)$ та $g(\lambda)$ показані на малюнках 2 та 3.



Мал. 2. Графік функції $f(\delta)$



Мал. 3. Графік функції $f(\lambda)$

Графік розв'язку трансцендентного рівняння (8) показано на малюнку 4. Точки $\underline{\lambda}$, $\bar{\lambda}$, визначаються як два розв'язки рівняння (8), причому задовільняють умовам

$$\delta'(\underline{\lambda}) = \frac{g'(\underline{\lambda})}{f'(\delta^*)} = +\infty;$$

$$\delta'(\bar{\lambda}) = \frac{g'(\bar{\lambda})}{f'(\delta^*)} = +\infty,$$

де $f'(\delta^*) = 0$, $g'(\underline{\lambda}) \neq 0$, $g'(\bar{\lambda}) \neq 0$.

Оскільки при кожному значенні $g(\lambda)$ рівняння

$$f(\delta) = g(\lambda)$$

має два розв'язки, то загальний розв'язок рівняння (8) складається із двох кривих:

$$\delta_1 = \delta_1(\lambda), \delta_2 = \delta_2(\lambda),$$

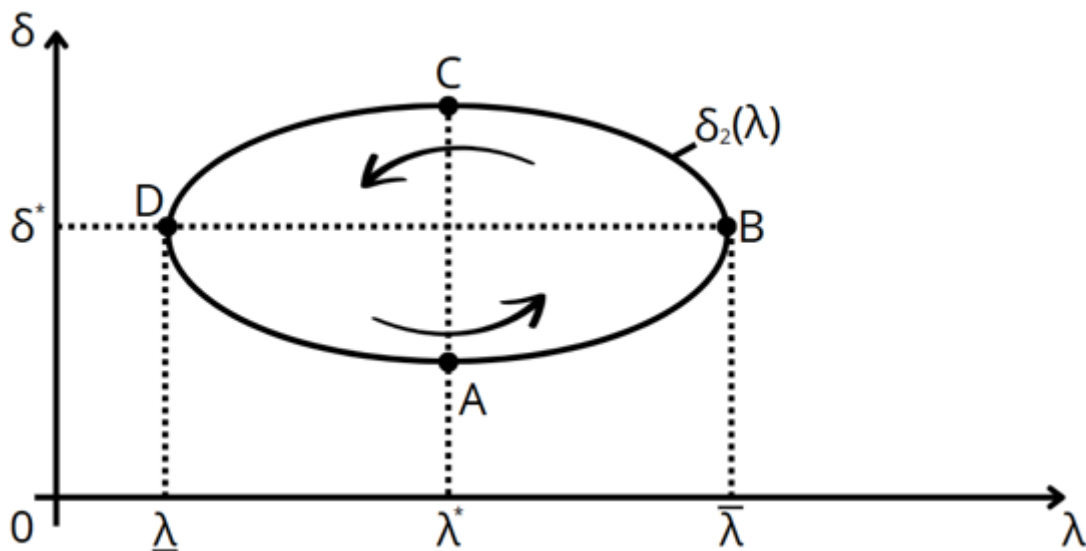
які разом утворюють овал (кон'юнктурний замкнутий цикл), причому

$$\delta'_t(\lambda^*) = \frac{g'(\lambda^*)}{f'[\delta_t(\lambda^*)]} = 0,$$

де $g'(\lambda^*) = 0$, $f'[\delta_t(\lambda^*)] \neq 0$.

Цей овал асиметричний, оскільки криві $f(\delta)$ та $g(\lambda)$ асиметричні щодо своїх точок екстремумів δ^* та λ^* .

При русі з точки А нижньої гілки граничного циклу відбувається збільшення зайнятості від рівноважного значення λ^* до максимального можливого значення $\bar{\lambda}$ (надмірна зайнятість), при цьому частка споживання у ВВП зростає аж до досягнення свого рівноважного значення δ^* . Першопричиною такого руху є високий попит на інвестиційні товари, викликаний великою часткою накопичення у ВВП $p(\lambda^*) = 1 - \delta_1(\lambda^*)$, що збільшує попит на робочу силу, тому підприємці збільшують заробітну плату, як впливає з рівняння (4.6) призводить до вже зазначеного вище зростання зайнятості.



Мал. 4. Кон'юктурний замкнутий цикл

Оскільки в точці В зайнятість досягла свого максимального значення $\bar{\lambda}$, то подальший рух верхньої гілки граничного циклу супроводжується скороченням зайнятості при продовженні зростання фонду споживання у ВВП. Це обумовлено скороченням інвестицій та випуску, викликаним падінням прибутку через високу частку споживання.

Оскільки в точці С частка споживання ВВП досягла свого максимального значення $\delta_2(\lambda^*)$, то рух по верхній гілці граничного

циклу, що триває, супроводжується скороченням зайнятості і падінням частки споживання у ВВП. Останнє зумовлено зростанням безробіття та зниженням ставки заробітної плати.

У точці D зайнятість досягає свого мінімального значення $\underline{\lambda}$, а частка споживання – рівноважного значення λ^* . Оскільки прибуток зріс, то почала зростати інвестиційна активність, що знову веде до підвищення потреби в робочій силі, відповідно, до зростання заробітної плати і, отже, до зростання зайнятості. Тому рух із точки D закінчується поверненням до точки A.

2.4 Модель Самуельсона-Хікса

Модель Самуельсона-Хікса - це динамічний аналог одного з варіантів статичної моделі Кейнса. У розглядуваній моделі передбачається, що ВВП наступного року дорівнює попиту на споживчі та інвестиційні товари, які виникають в поточному році, а попит на споживчі товари - лінійна функція поточного значення ВВП, а на інвестиційні товари - лінійна функція приросту ВВП.

Таким чином, модель Самуельсона-Хікса має наступний вигляд:

$$y(t + 1) = \underline{C} + cy(t) + r[y(t) - y(t - 1)] + I, \quad (9)$$

де $y(t)$ – ВВП в момент у рік t ; \underline{C} – мінімальний рівень непродуктивного споживання; c – схильність до споживання; r – коефіцієнт акселерації або частка приросту ВВП, що використовується на інвестиції; I – щорічні постійні інвестиції.

Покажемо, що модель (9) має стаціонарний розв'язок (при $0 < r < 1, 0 < c < 1$) вигляду:

$$y^E = \frac{\underline{C} + I}{1 - c}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y^E.$$

Цей розв'язок інсує незалежно від r , отже додавання прискорювального доданку $r(y(t) - y(t - 1))$ лише пришвидшує перехідний процес: чим більше

r , тим більше $y(t+1)$ за додатного приросту ВВП, не призводить до збільшення стаціонарного значення ВВП.

Неперервним аналогом моделі (9) можливо розглянути наступне лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку вигляду:

$$\frac{1}{1-c} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1-r}{1-c} \frac{dy}{dt} + y = \frac{C+I}{1-c}, \quad y^E = \frac{C+I}{1-c}. \quad (10)$$

Згідно з теорією лінійних диференціальних рівнянь, загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння є сума загального розв'язку однорідного та часткового розв'язку неоднорідного.

Загальний розв'язок однорідного рівняння отримуємо у наступному вигляді:

$$y = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (11)$$

де λ_1 та λ_2 – корені характеристичного рівняння:

$$\frac{1}{1-c} \lambda^2 + \frac{(1-r)}{1-c} \lambda + 1 = 0.$$

Оскільки частковим розв'язком неоднорідного рівняння є стала з правої частини рівняння (10), то загальний розв'язок має вигляд:

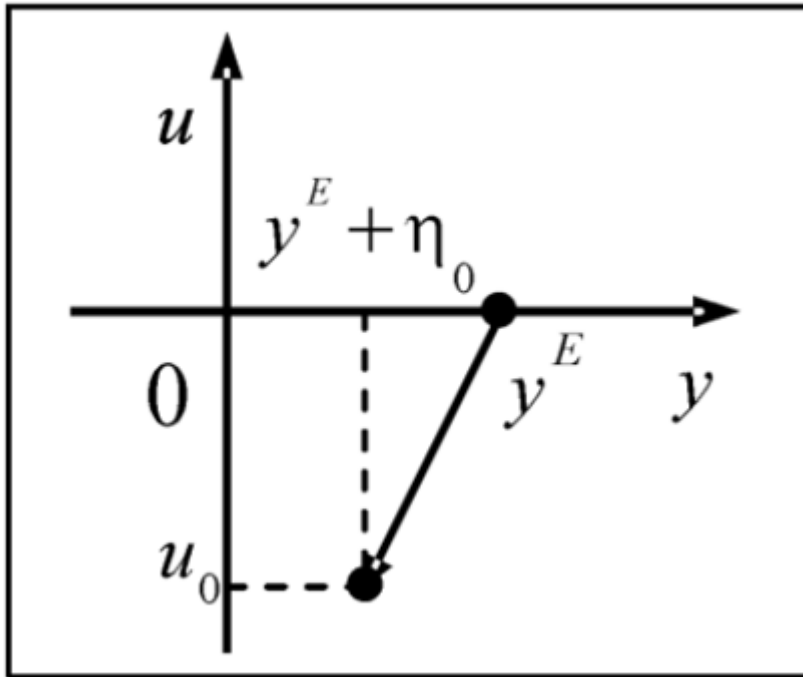
$$y(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{C+I}{1-c},$$

де A_1 та A_2 приймають конкретні значення при заданих початкових умовах.

Обраний частковий розв'язок неоднорідного рівняння є одночасно й його стаціонарним розв'язком:

$$y^E = \frac{C+I}{1-c},$$

а точка $(y^E, 0)$ на площині (y, u) змінної y та її похідної $u = y'$ є точкою рівноваги даного рівняння (мал. 5).



Мал. 5. Переведення системи з стану $(y^E, 0)$ в нестійкий стан $(y^E + \eta_0, u_0)$

Дослідимо поведінку розв'язку рівняння (10) у околі точки рівноваги $(y^E, 0)$. Здавалося б, що при невеликому відхиленні від цієї точки, викликаному деяким зовнішнім імпульсним впливом $\delta(t) \begin{pmatrix} \eta_0 \\ u_0 \end{pmatrix}$, система, потрапивши в точку $(y^E + \eta_0, u_0)$ повинна після завершення перехідного процесу знову повернутись у точку рівноваги $(y^E, 0)$. Однак, як буде показано далі, це далеко не завжди так.

Далі для визначеності розглядатимемо випадок, коли $\eta_0 < 0, u_0 < 0$, тобто, як показано на мал. 5, значення ВВП зменшилося, а швидкість його зростання з нульового у стійкому стані змінився на від'ємний.

Представимо розв'язок рівняння (10) при початкових умовах $y(0) = y^E + \eta, y'(0) = u_0$ у вигляді:

$$y = y^E + \eta.$$

Тоді приріст ВВП відносно стаціонарного розв'язку y^E буде задовольняти однорідному рівнянню:

$$\frac{1}{1-c} \frac{d^2 \eta}{dt^2} + \frac{(1-r)}{1-c} \frac{d\eta}{dt} + \eta = 0, \quad \eta'(0) = u_0. \quad (12)$$

Далі, окрім поведінки ВВП, також дослідимо еволюцію інвестицій і споживання. Відповідно до моделі (9) річні інвестиції складаються із сталої частини I та змінної частини $i = r(y(t) - y(t - 1))$. За час Δt змінна частина складає $\Delta i = r(y(t) - y(t - \Delta t))$. Переходячи до границі при $\Delta t \rightarrow 0$, отримаємо:

$$\frac{di}{dt} = r \frac{dy}{dt} = r \frac{d\eta}{dt}.$$

Оскільки $i(0) = 0, \eta(0) = 0$, то $i = r\eta$, таким чином поточне значення інвестицій $I(t) = I + i = I + r\eta(t)$, а поточне значення споживання як різниця між ВВП та інвестиціями, відповідно $C(t) = y^E - I + (1 - r)\eta(t)$.

Розв'язок однорідного рівняння (12) при заданих початкових умовах має вигляд (3), де коефіцієнти A_1 та A_2 , визначаються із початкових умов. Характер рівняння залежить від типу коренів λ_1 та λ_2 характеристичного рівняння. Для подальшого аналізу розв'язку важливо розглянути залежність параметрів від r та c . Спочатку розглянемо всі можливі значення r за умови, що $1 - 2\sqrt{1 - c} > 0$, тобто $c > \frac{3}{4}$.

Перший випадок: $0 < r < 1 - 2\sqrt{1 - c}$.

У цьому випадку дискримінант характеристичного рівняння додатний, а його корені

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1 - r}{2} \pm \sqrt{\frac{(1 - r)^2}{4} - (1 - c)}, \quad \lambda_1 > \lambda_2,$$

дійсні та від'ємні, оскільки більший корінь λ_1 при $1 - r > 2\sqrt{1 - c}$ від'ємний.

Використовуючи початкові умови з виразу (12), знаходимо

$$A_1 = \frac{u_0 - \lambda_2 \eta_0}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad A_2 = \frac{u_0 - \lambda_1 \eta_0}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

тому

$$\eta(t) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} [u_0 - \lambda_2 \eta_0] e^{\lambda_1 t} - (u_0 - \lambda_1 \eta_0) e^{\lambda_2 t}.$$

Оскільки $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = 0$, звідки $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y^E$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y'(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \eta'(t) =$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} [u_0 - \lambda_2 \eta_0] \lambda_1 e^{\lambda_1 t} - (u_0 - \lambda_1 \eta_0) \lambda_2 e^{\lambda_2 t} = 0.$$

Таким чином, система після завершення аперіодичного перехідного процесу повертається у стан стійкого спокою $(y^E, 0)$ тобто є стійкою.

Тоді можливо зробити **висновок**: на початку перехідного процесу при $\eta_0 < 0$, $u_0 < 0$ ВВП, а отже, споживання та інвестиції, проходять спочатку деякий час спадання, потім починається їх монотонне зростання, яке закінчується досягненням їх стаціонарних значень y^E , $y^E - I$ та I , відповідно.

Другий випадок: $r = 1 - 2\sqrt{1 - c}$.

У цьому випадку дискримінант дорівнює нулю, характеристичне рівняння має один корінь $\lambda_1 = \frac{-(1-r)}{2}$, тому фундаментальними розв'язками рівняння (4) є функції $e^{\lambda_1 t}$ та $te^{\lambda_1 t}$, отже, загальний розв'язок рівняння має вигляд $\eta(t) = e^{\lambda_1 t}(A_1 + A_2 t)$.

Користуючись початковими умовами, знайдемо

$$A_1 = \eta_0, \quad A_2 = u_0 - \lambda_1 \eta_0,$$

тому

$$\eta(t) = e^{\lambda_1 t} [\eta_0 + (u_0 - \lambda_1 \eta_0)t].$$

Оскільки $\lambda_1 < 0$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \eta'(t) = 0,$$

звідки

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y^E, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y'(t) = 0,$$

тобто система повертається в колишній стан спокою, отже, вона є стійкою.

Висновок: валовий внутрішній продукт, рівень споживання та інвестиції, аналогічно до попереднього випадку, проходять аперіодичний перехідний процес, аналогічний за поведінкою випадку 1.

Третій випадок: $1 - 2\sqrt{1 - c} < r < 1$.

У цьому випадку дискримінант характеристичного рівняння від'ємний, тому його корені – комплексно-спряжені числа: $\lambda_1 = a + i\omega$, $\lambda_2 = a - i\omega$, де

$$a = -\frac{1-r}{2} < 0, \quad \omega = \sqrt{1 - c \frac{(1-r)^2}{4}} > 0.$$

Користуючись початковими умовами з виразу (4), знайдемо сталі:

$$A_1 = \frac{u_0 - (a - i\omega)\eta_0}{2i\omega}, \quad A_2 = \frac{u_0 - (a + i\omega)\eta_0}{2i\omega},$$

тому розв'язок рівняння має вигляд:

$$\eta(t) = e^{at} \left(\eta_0 \cos \omega t + \frac{u_0 - a\eta_0}{\omega} \sin \omega t \right).$$

Оскільки $a < 0$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \eta'(t) = 0,$$

звідки

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y^E, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y'(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \eta'(t) = 0.$$

Таким чином, система після загасаючих гармонійних коливань повертається до початкового стану спокою, тобто є *стійкою*.

Висновок: валовий внутрішній продукт, споживання, інвестиції при $\eta_0 < 0$, $u_0 < 0$, спочатку продовжують зменшуватися, потім ростуть і досягають максимальних значень, після чого цей автоколивний процес триває з експоненційно згасаючою амплітудою аж до остаточного досягнення цими показниками за нескінченний проміжок часу своїх стаціонарних значень.

Четвертий випадок: $r = 1$.

Зі змістовної точки зору цей випадок означає, що весь приріст ВВП за рік повністю йде на інвестиції.

При $r = 1$ корені характеристичного рівняння є чисто уявними:

$$\lambda_1 = i\omega, \quad \lambda_2 = -i\omega, \quad \omega = \sqrt{1 - c}.$$

З урахуванням початкових умов, знаходимо

$$A_1 = \frac{u_0 + i\omega\eta_0}{2i\omega}, \quad A_2 = -\frac{u_0 - i\omega\eta_0}{2i\omega},$$

тому розв'язок рівняння має вигляд:

$$\eta(t) = \eta_0 \cos \omega t + \frac{u_0}{\omega} \sin \omega t = p \sin(\omega t + \varphi), \quad (13)$$

$$u(t) = \eta'(t) = -\omega\eta_0 \sin \omega t + \frac{u_0}{\omega} \cos \omega t = \omega p \cos(\omega t + \varphi), \quad (14)$$

де

$$\sin \varphi = \frac{\eta_0}{\sqrt{\eta_0^2 + \left(\frac{u_0}{\omega}\right)^2}}, \quad p = \sqrt{\eta_0^2 + \left(\frac{u_0}{\omega}\right)^2}.$$

Таким чином, при $r = 1$ система буде здійснювати незатухаючі гармонійні коливання, тобто система є стійкою, але не повертається до початкового стану.

На площині (η, u) фазових змінних траєкторія системи, задана рівняннями (13) і (14), виглядатиме як еліпс у канонічній формі (див. мал. 6):

$$\frac{\eta^2}{a^2} + \frac{u^2}{b^2} = 1, \quad \text{де } a = p, \quad b = \omega p.$$

Висновок: валовий внутрішній продукт буде змінюватися в межах в межах $y^E \pm p$ споживання залишатиметься постійним і рівним стаціонарному значенню $y^E - I$ а інвестиції будуть перебувати в незагасаючих автоколиваннях відповідно до рівняння $I(t) = I + \eta(t)$.

П'ятий випадок: $1 < r < 1 + 2\sqrt{1 - c}$.

Це граничний випадок, оскільки на додаткові інвестиції (понад постійного значення I) піде більше, ніж приріст ВВП, і це перевищення може здійснитися лише за рахунок відповідного скорочення споживання.

У цьому випадку дискримінант характеристичного рівняння від'ємний, тому його корені комплексно-спряжені:

$$\lambda_1 = a + i\omega, \quad \lambda_2 = a - i\omega,$$

де

$$a = \frac{1-r}{2} > 0, \quad \omega = 1 - c - \sqrt{\frac{(1-r^2)}{4}} > 0,$$

тому розв'язок рівняння має вигляд:

$$\eta(t) = pe^{at} \sin(\omega t + \varphi), \quad p = \sqrt{\eta_0^2 + \left(\frac{u_0 - a\eta_0}{\omega}\right)^2},$$

$$\sin\varphi = \frac{\eta_0}{p},$$

і система буде здійснювати гармонійні автоколивання з експоненційно зростаючою амплітудою, тобто система є нестійкою.

Споживання та інвестиції також здійснюватимуть гармонійні автоколивання з експоненційно зростаючою амплітудою щодо своїх стаціонарних значень:

$$C(t) = y^E - I - (r-1)e^{at}psin(\omega t + \varphi),$$

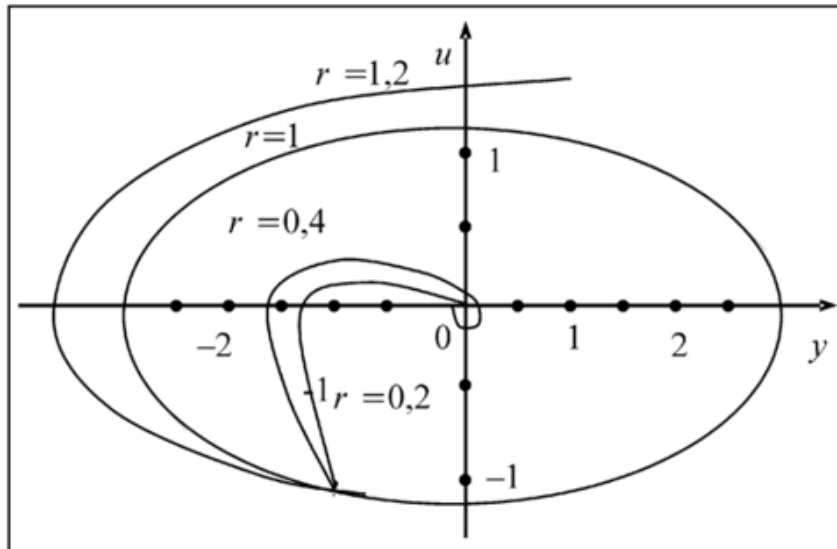
$$I(t) = I + re^{at}psin(\omega t + \varphi).$$

На мал. 6 показані показані траєкторії системи на площині фазових змінних (η, u) , $u = \eta'$.

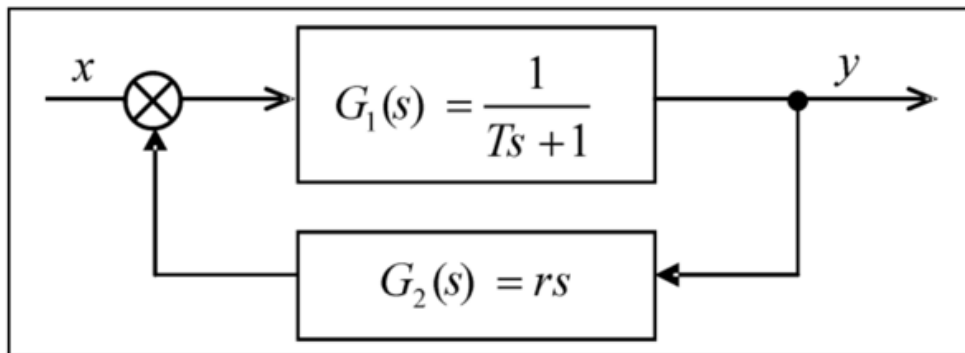
Висновок: таким чином, економіка, що описується моделлю Самуельсона-Хікса при $c > \frac{3}{4}$, є стійкою при $0 < r < 1$, і є нестійкою при $r \geq 1$. При $c \leq \frac{3}{4}$ дослідження дають ті самі результати, але випадку 1 і 2 (дійсні корені) будуть відсутніми.

Розглянемо прийом розширення області стійкості моделі Самуельсона-Хікса (при $r < 1$) шляхом її перетворення заміною запізнювального ефекту акселерації на випереджальний.

Для цього спочатку виключимо акселератор із моделі Самуельсона-Хікса, якщо покласти $r = 0$, тоді отримаємо



Мал. 6. Фазові траєкторії системи за різних значень коефіцієнта акселерації r ($c = 0.84, \eta_0 = -1, u_0 = -1$)



Мал. 7. Інерційна лавка з акселератором у ланцюзі додатнього зворотного зв'язку

динамічну модель Кейнса $y(t+1) = \underline{C} + y(t) + I$, неперервний аналог якої має вигляд

$$\frac{1}{1-c} \frac{dy}{dt} + y = \frac{C+I}{1-c},$$

тобто є інерційною ланкою з сталим часом

$$T = \frac{1}{(1-c)}.$$

Тепер введемо акселератор у контур додатнього зворотного зв'язку цієї інерційної ланки, як показано на мал. 7.

Функція системи з додатнім зворотним зв'язком має вигляд:

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 - G(s)G_2(s)} = \frac{1}{(T - r)s + 1},$$

тобто в результаті знову отримаємо інерційну ланку з сталим часом, зменшеною на коефіцієнт акселерації r , і перехідний процес відбуватиметься швидше. Диференціальне рівняння такої системи має вигляд

$$(T - r) \frac{dy}{dt} + y = \frac{C + I}{1 - c},$$

його дискретним аналогом є наступне кінцево-різницеve рівняння першого порядку:

$$y(t + 1) = \frac{c - r(1 - c)}{1 - r(1 - c)} y(t) + \frac{C + I}{1 - r(1 - c)},$$

яке легко перетворюється на вигляд

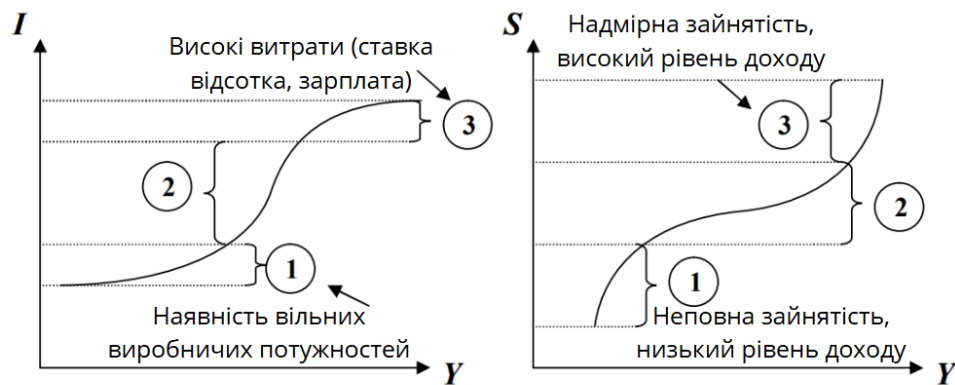
$$y = t + 1 = \underline{C} + cy(t) + r(1 - c)[y(t + 1) - y(t)] + I,$$

іншими словами, спостерігається ефект акселерації з попередженням (різниця $y(t + 1) - y(t)$), а не із запізненням, як у моделі Самуельсона-Хікса (різниця $y(t) - y(t - 1)$).

Таким чином, при переході від моделі Самуельсона-Хікса до контуру додатнього зворотного зв'язку динамічної моделі Кейнса (інерційна ланка) з акселератором отримуємо стійку систему, принаймні при $T - r \geq 0$ або при $r \leq \frac{1}{1 - c} > 1$, тобто діапазон зміни коефіцієнта акселерації r для нової моделі, в якій вона є стійкою, стає помітно ширшою, ніж для моделі Самуельсона-Хікса.

2.5 Модель Калдора

У моделі Калдора причиною циклічних коливань є **ендогенні фактори** – динаміка інвестицій (I) та заощаджень (S), які в його моделі залежать від доходу (Y) **нелінійно** (мал. 8). При незначному доході (i , відповідно, низького рівня зайнятості) чутливість інвестицій до доходу (гранична схильність до інвестування) буде низькою, оскільки в економіці є вільні виробничі потужності; зі збільшенням доходів і зайнятості підвищується інтенсивність інвестування (перевищує одиницю). Однак після досягнення повної зайнятості витрати виробників починають зростати, що знижує їхню інвестиційну активність.



Еластичність за доходом:

1 та 3 – низька; 2 – висока.

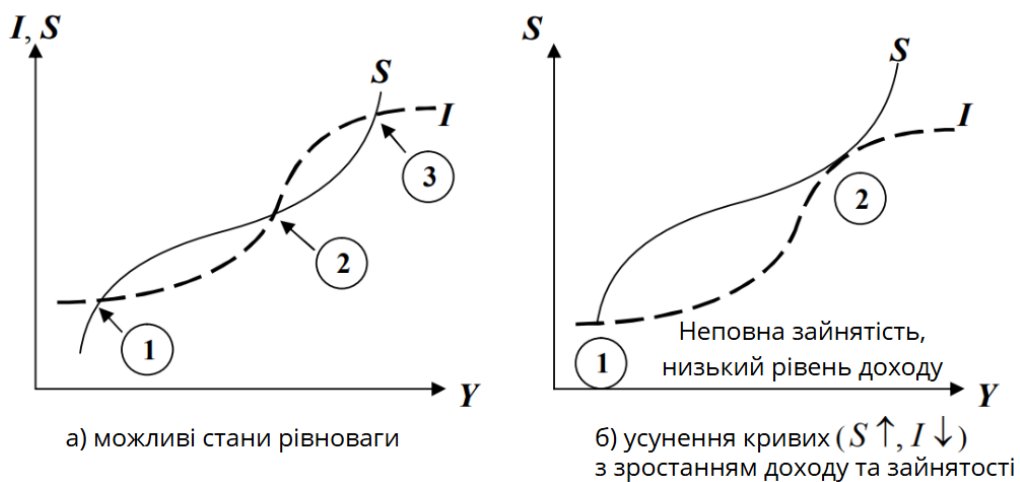
1 та 3 – висока; 2 – низька

Мал. 8. Функції інвестицій та заощаджень у моделі Калдора

Функція заощаджень, є зворотною, вона має вигнуту форму на ділянці 1 (низька зайнятість і низький рівень доходу), оскільки в домогосподарств переважає прагнення заощаджувати, і весь додатковий дохід буде заощаджено; в період зростання зайнятості та доходу домогосподарства починають збільшувати споживання, скорочуючи заощадження; а на ділянці 3, коли досягнуто повної зайнятості, знову спостерігається підвищення граничної схильності до заощадження, оскільки домогосподарства вже не в змозі витратити весь додатковий дохід.

На мал. 9 - а показано можливі варіанти рівноваги в моделі Калдора в

короткостроковому періоді, а на мал. 9 - б — як змінюються точки рівноваги при зсуві кривих заощаджень (вгору) та інвестицій (вниз) за умов стійкого тривалого зростання доходу і зайнятості. Дійсно, якщо протягом певного середньострокового періоду в економіці зберігатиметься стійке зростання зайнятості та доходу, то обсяг автономних заощаджень зросте, тобто крива S зміститься вгору. Крива інвестицій, навпаки, зміститься вниз, оскільки за тривалого накопичення капіталу в економіці автономні інвестиції скоротяться. У результаті точки 2 і 3 (мал. 9 - а) зіллються в точці 2 (мал. 9 - б).

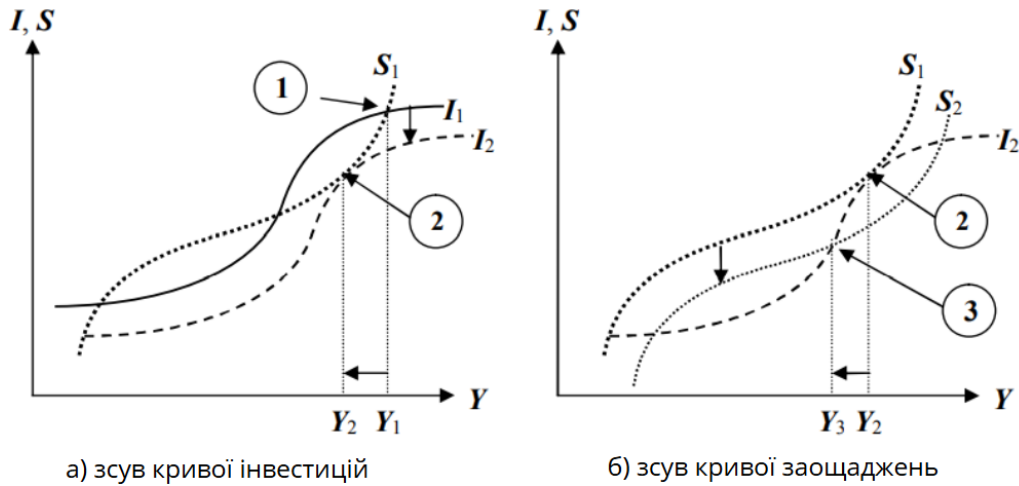


Мал. 9. Нестійкість рівноваги у моделі Калдора

Рівновага в точках 1, 2 і 3 (див. мал. 9 - а) є рівновагою короткострокового періоду, оскільки в точці 1 інвестиції не забезпечують належного відновлення капіталу, а їх обсяг у точці 3 не може зберігатися довго, тому що настане перенасичення економіки капіталом і недозавантаження виробничих потужностей через нестачу трудових ресурсів. У результаті крива інвестицій зміститься вниз (мал. 9 - б).

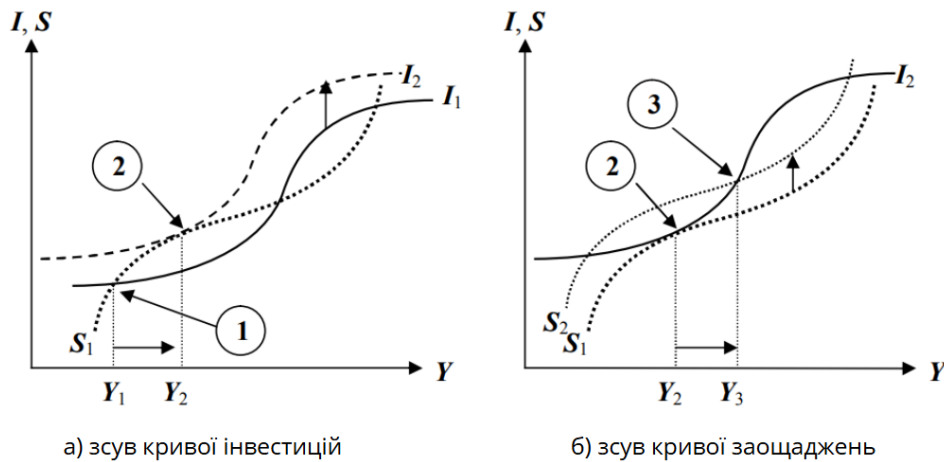
Циклічна динаміка в моделі Калдора полягає в послідовному переході від однієї точки короткострокової нестійкої рівноваги до іншої. На мал. 10 показано, як змінюватиметься кон'юнктура за короткострокової рівноваги в умовах надмірної зайнятості («пік» циклу – точка 1, рівень доходу Y_1). У результаті накопичення капіталу крива інвестицій зміститься вниз ($I_1 \rightarrow I_2$, мал. 10 - а) і нова короткострокова рівновага настане в точці 2 за

нижчого рівня доходу Y_2 . Скорочення доходу призведе до зменшення заощаджень (зсув кривої заощаджень ($S_1 \rightarrow S_2$, мал. 10 - б) і до нової короткострокової рівноваги (точка 3) за ще нижчого рівня доходу Y_3 .



Мал. 10. Нестійкість рівноваги в моделі Калдора у самій верхній точці циклу

Аналогічно відбувається перехід із найнижчої точки («дна») циклу (мал. 11). Якщо протягом певного періоду в економіці зберігатиметься низький рівень інвестиційної активності (мал. 11 - а, точка 1, рівень доходу Y_1 , то знос основного капіталу призведе до того, що обсяг виробництва опуститься нижче сукупного попиту; це стане сигналом для зростання інвестицій, тобто крива інвестицій зміститься вгору ($I_1 \rightarrow I_2$), в результаті чого нова короткострокова рівновага встановиться в точці 2 при вищому рівні доходу Y_2 . Підвищення доходу спричинить підйом кривої заощаджень ($S_1 \rightarrow S_2$, мал. 11 - б), і новий стан рівноваги буде в точці 3 (рівень доходу $Y_3 > Y_2 > Y_1$).



Мал. 11. Нестійкість рівноваги в моделі Калдора у самій нижній точці циклу

Отже, в економіці відбуватимуться циклічні коливання кон'юнктури за рахунок змін обсягів інвестицій і заощаджень як ендогенних факторів моделі Калдора.

РОЗДІЛ 3. СТОХАСТИЧНІ МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ

3.1 Формалізація стохастичних динамічних моделей

Стохастичні моделі економічних систем або процесів описують зв'язки між вимірюваними величинами (залежностями ендогенних змінних від інших ендогенних або екзогенних факторів), причому деякі з цих зв'язків мають імовірнісний характер (або виражаються через множину можливих значень). Такі взаємозв'язки формалізуються у вигляді рівнянь або умов оптимізації функцій внутрішніх змінних. Стохастичні моделі економічної динаміки враховують випадковість і невизначеність, які характерні для економічних процесів, систем та дозволяють точніше описати складну динаміку економічних явищ.

Повноцінні стохастичні моделі базуються на аналізі статистичної інформації, що надає змогу дослідникам застосовувати не тільки теоретичні

моделі, але й фактичні економічні дані та результати. Такі моделі враховують як теоретичні передумови, так і емпіричні дані, включаючи випадкові коливання, що можуть впливати на результати. У різних типах моделей випадковість реалізується через стохастичні компоненти, що враховуються у вигляді функціональних обмежень, умов мінімізації тощо.

Врахування випадкових складових дає можливість побудувати більш реалістичні моделі, які краще відображають поведінку реальних економічних систем. Наприклад, у рамках неокласичних підходів для дослідження макроекономічної динаміки часто використовують функцію сукупного попиту у формі:

$$y_t = y_{t-1} + a\Delta A_t + c\Delta\pi_t^e + h\widehat{M}_t - h\pi_t,$$

де y_t, y_{t-1} – обсяг загального попиту на товари та послуги у момент часу t ; A_t – екзогенний показник реальних доходів на душу населення; π_t – темп приросту цін у період t ; π_t^e – прогнозований темп приросту у період t ; $M_t \equiv \frac{M_t - M_{t-1}}{M_{t-1}}$ – темп зміни обсягу грошової маси; a, c, h – коефіцієнти.

У рамках моделі нових класичних передбачається, що економічні агенти визначають обсяги сукупного попиту та пропозиції, базуючись на прогнозах цін згідно з концепцією раціональних очікувань. Це робить модель стохастичною через наявність випадкової змінної. Сукупний попит у такій моделі описується як стохастична динамічна функція:

$$y_t^D = A_t + h(\widehat{M}_t - \pi_t) + U_t,$$

де U_t – випадкова величина з математичним сподіванням, що дорівнює нулю.

Стохастичні моделі економічної еволюції часто базуються на використанні регресійних співвідношень для опису відповідних економічних явищ. Формування стохастичних регресійних співвідношень виконується на базі часових послідовностей за допомогою класичного методу найменших квадратів та автокореляцій першого порядку, разом з іншими - із використанням лагових та граничних параметрів.

Стохастичні динамічні моделі досить ефективно застосовуються в сучасній науці для аналізу фінансових потоків. Проаналізуємо основні принципи стохастичного моделювання фінансових потоків на прикладі конкретної фінансової організації, зокрема, банку.

Як зовнішні фактори, що впливають на роботу фінансової установи, так і внутрішні процеси, що розвиваються в самій установі, є наслідком складної та суперечливої взаємодії численних елементів, причин, зв'язків, багато з яких мають випадкову (ймовірнісну) природу, і суттєво впливають на її функціонування. У підсумку, діяльність фінансової інституції значною мірою характеризується невизначеністю та супроводжується ризиками.

Поточний стан банку можна описати за допомогою вектору параметрів:

$$x = (x_1, \dots, x_n).$$

Стан окремого j -го ресурсу пов'язується з певним елементом множини невідомих дійсних функцій часу, тому стан банку можна зобразити як деяку n -вимірну еволюцію. Можливо побудувати математичну модель (векторну) характеристик

$$y = (y_1, \dots, y_n),$$

яка є функцією від вектора x

$$y = f(x).$$

Щоб врахувати чинник часу, необхідно ввести множину T , елементи якої $t \in T$ інтерпретуються як моменти часу. Стан банку загалом — це значення векторної функції часу:

$$x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

а траєкторія системи $\{x(t)\}_{t \in T}$ — це певна крива (або гіперповерхня) в n -вимірному просторі.

Еволюція банку в цьому просторі може бути представлена вектором потоків ресурсів

$$\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t)),$$

який визначає вектор швидкостей зміни стану досліджуваного об'єкта.

У результаті вибудовується модель, що розглядає банк як систему базових ресурсних потоків:

$$\dot{x}(t) = \{\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t)\}, t \in (T_-, T_+).$$

Досить часто виникає потреба у переході від «моментного» подання до інтегрального відображення поведінки j -ї змінної протягом певного часового інтервалу $(t_-, t_+) \subseteq (T_-, T_+)$. Це досягається через введення середнього значення характеристики (j -ї компоненти вектору стану) на проміжку часу

$$\tilde{x}_j(t_-, t_+) = \frac{1}{t_+ - t_-} \int_{t_-}^{t_+} \dot{x}_j(t) dt,$$

а також відповідного середнього потоку

$$\tilde{\dot{x}}_j(t_-, t_+) = \frac{\dot{x}_j(t_+) - \dot{x}_j(t_-)}{t_+ - t_-},$$

що визначає середнє значення темпу зміни обсягу j -го ресурсу на вказаному проміжку часу (t_-, t_+) .

Ресурсні моделі, які базуються на неперервному представленні часу, хоча й забезпечують точніші результати, не завжди адекватно відображають реальні умови, в яких економічні зміни відбуваються дискретно, тобто через фіксовані проміжки часу. Це зумовлює необхідність переходу до дискретного формату моделювання.

Якщо для цього поділити часовий інтервал (t_-, t_+) на однакові за довжиною частини δ , то весь інтервал розбивається на K рівних проміжків (наприклад, напівінтервалів):

$$[t_-, t_- + \delta), [t_- + \delta, t_- + 2\delta), \dots, [t_- + (K - 1)\delta, t_+],$$

де $t_- + K\delta = t_+$.

Таким чином, вводиться дискретний «економічний» час τ , який набуває значень $0, 1, \dots, k, \dots, K$. В рамках дискретного часу формуються відповідні моменти вектору стану

$$x(\tau) = (x_1(\tau), \dots, x_n(\tau)),$$

та векторів потоків ресурсів

$$\dot{x}(\tau) = (\dot{x}_1(\tau), \dots, \dot{x}_n(\tau)).$$

Наступним етапом у процесі удосконалення обраної моделі є врахування факторів невизначеності.

Під *стохастичним (випадковим) процесом* (тобто випадковою функцією часу) мається на увазі функція $x(t)$, яка залежно від певної випадкової ситуації може набувати конкретних реалізацій, формуючи таким чином модель поведінки або траєкторію системи.

Отже, при моделюванні динаміки в умовах непередбачуваності стан може бути представлений у вигляді векторного стохастичного процесу:

$$\tilde{x}(t) = (\tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_n(t)),$$

де кожна компонента $\tilde{x}_j(t)$ описує випадкову еволюцію відповідної j -ї характеристики ресурсу. Темп зміни такої випадкової змінної визначається похідною функцією часу за допомогою стохастичного вектору:

$$\dot{\tilde{x}}_j(t) = \dot{\tilde{x}}_1(t), \dots, \dot{\tilde{x}}_n(t), t \in (T_-, T_+).$$

Проведення аналізу, орієнтованого на змістовне вивчення закономірностей роботи банку, повинно спиратися на емпіричні дані та гіпотези щодо природи і параметрів випадкових змінних.

3.2 Розгляд стохастичної моделі динаміки фінансового ресурсу

Запропонована модель базується на припущенні про можливість відстеження зміни обсягу досліджуваного ресурсу через дискретні інтервали часу t .

Позначимо через x_t початковий обсяг ресурсу на момент часу t , а x_0 – обсяг у початковий момент часу (припускаючи, що $x_0 > 0$).

Також припустимо, що перехід частоти ресурсу, який описується дійсним числом $x_{t-1} > 0$ у момент часу $t = i - 1$ до ресурсу обсягом $x_t > 0$,

який відповідає моменту часу $t = i$, можна подати рівнянням

$$x_i = a_i x_{i-1},$$

де a_i – невід'ємний коефіцієнт елементарного переходу між

$$x_{t-1} \text{ і } x_t, i = 1, \dots, n,$$

тоді

$$x_n = x_0 \prod_{i=1}^n a_i.$$

У випадку, коли всі коефіцієнти елементарних переходів однакові ($a_i = a > 0, i = 1, \dots, n$), отримуємо таку рівність:

$$x_n = x_0 a^n = x_0 e^{n \ln a}.$$

Це вказує на експоненціальну залежність обсягу ресурсу від часу. Тому $x_n \rightarrow \infty$, якщо $a < 1$.

Якщо значення спостережень a_1, \dots, a_n трактувати як результат випадкових величин $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n$, то можна побудувати таку стохастичну мультиплікативну модель зміни ресурсу з дискретним часом:

$$\tilde{x}_n = x_0 \prod_{i=1}^n \tilde{a}_i,$$

де \tilde{x}_n – випадкова величина обсягу ресурсу в момент $t = n$.

Варто зауважити, що випадкові коефіцієнти переходів не є незалежними, вони можуть бути корельованими між собою або з іншими величинами, що підкоряються логарифмічно-нормальному розподілу

$$(\tilde{a}_i \in L_n(\mu_i, \sigma_i^2)),$$

де μ_i, σ_i^2 - відповідно математичне сподівання та дисперсія логнормально розподіленої випадкової величини

$$\tilde{a}_i: M(\ln \tilde{a}_i) = \mu_i, D(\ln \tilde{a}_i) = \sigma_i^2,$$

функція щільності розподілу \tilde{a}_i

$$f_{\tilde{a}_i}(x) = \frac{1}{x \sigma_i \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}},$$

математичне сподівання

$$m_i = M(\tilde{a}_i^2) = \int_0^\infty x f_{\tilde{a}_i}(x) dx = e^{\mu_i + \frac{\sigma_i^2}{2}},$$

другий момент

$$M(\tilde{a}_i^2) = \int_0^\infty x^2 f_{\tilde{a}_i}(x) dx = e^{2\mu_i + 2\sigma_i^2},$$

дисперсія

$$S_i^2 = D(a_i^2) = M(a_i^2) - m_i^2 = e^{2\mu_i + 2\sigma_i^2} - e^{2\mu_i + 2\sigma_i^2}.$$

Визначимо функцію розподілу випадкового коефіцієнта

$$\tilde{a}_{1,n} = \prod_{i=1}^n \tilde{a}_i.$$

Очевидно, що в даному випадку коефіцієнти $\tilde{a}_{1,n}$ також підкоряються логнормальному розподілу ($\tilde{a}_{1,n} \in L_n(\mu_i, \sigma_i^2)$), з параметрами

$$\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i, \quad \sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2.$$

На цій основі неважко записати формули для математичного очікування:

$$m_{1,n} = M(\tilde{a}_{1,n}) = e^{\sum_{i=1}^n \mu_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2},$$

другого початкового моменту

$$M(\tilde{a}_{1,n}^2) = e^{2 \sum_{i=1}^n \mu_i + 2 \sum_{i=1}^n \sigma_i^2},$$

та дисперсії

$$S_{1,n}^2 = e^{2 \sum_{i=1}^n \mu_i + 2 \sum_{i=1}^n \sigma_i^2} - e^{2 \sum_{i=1}^n \mu_i + \sum_{i=1}^n \sigma_i^2}.$$

Отримаємо також вираз для випадкової величини

$$\tilde{x}_n: \tilde{x}_n = x_0 \tilde{a}_{1,n}.$$

Щоб здійснити оцінку обсягу ресурсу на момент часу $t = n$, можна скористатися очікуваним значенням змінної \tilde{x}_n :

$$\tilde{m}_n = M(\tilde{x}_n) = x_0 M(\tilde{a}_{1,n}) = x_0 m_{1,n}.$$

Точність такої оцінки доцільно характеризувати через середньоквадратичне відхилення:

$$s_n = \sqrt{D(\tilde{x}_n)} = x_0 \sqrt{D(\tilde{a}_{1,n})} = x_0 s_{1,n},$$

яке застосовується для формування довірчого інтервалу:

$$[\tilde{m}_n - \gamma s_n, \tilde{m}_n + \gamma s_n].$$

Щодо ймовірного діапазону можливих значень ресурсу в момент $t = n$, коефіцієнт $\gamma > 0$ підбирається так, щоб імовірність потрапляння випадкової змінної \tilde{x}_n у вказаний інтервал $[\tilde{m}_n - \gamma s_n, \tilde{m}_n + \gamma s_n]$ відповідала заздалегідь заданому рівню:

$$a = 1 - \gamma,$$

тобто ймовірність того, що \tilde{x}_n не потрапить до інтервалу — це γ .

Побудова мультиплікативної стохастичної моделі дозволяє досягти прийнятної рівня точності прогнозу на відносно короткий період, оскільки зі зростанням прогнозного горизонту зростає значення питання оновлення методів для своєчасного та ефективного виявлення змін у факторах, що впливають на динаміку ресурсу (тобто моментів зміни параметрів μ, σ^2).

Це завдання вирішується шляхом аналізу середніх значень ресурсу у послідовних часових інтервалах з урахуванням результатів спостереження

$$m_i = M(\tilde{a}_i)$$

та дисперсії

$$S_i^2 = D(\tilde{a}_i^2)$$

випадкових коефіцієнтів елементарного переходу $\tilde{a}_i, i = 1, \dots, n$.

Розв'язок такої задачі відкриває нові підходи до аналізу стохастичного характеру зміни фінансових ресурсів підприємств, що входить до класу економіко-математичних моделей із випадковими чинниками.

ВИСНОВКИ

У даній роботі виконано системний аналіз та порівняння різних підходів до моделювання економічної динаміки – починаючи з класичної кейнсіанської концепції та моделей Кейнса і закінчуючи сучасними нелінійними й стохастичними системами.

У *першому розділі* було сформульовано теоретичні засади побудови динамічних моделей: диференціальні та різницеві рівняння, принципи формування моделей ділових циклів і економічного зростання.

У *другому розділі* розглянуто приклади відомих моделей, зокрема модель Кейнса, модель Самуельсона-Хікса, модель Калдора та нелінійна модель Гудвіна.

Перш за все, модель Кейнса заклала фундамент: вона продемонструвала ключову роль сукупного попиту, мультиплікатора й схильності до споживання для формування національного доходу. Саме від неї пішли перші ідеї про те, що державне втручання (через фіскальні стимули чи пряме регулювання інвестицій) може позбавити економіку стану тривалої безробітності. Ця концепція створила методологічну базу для подальшої розробки динамічних моделей.

На основі кейнсіанського підходу було сформовано модель Самуельсона-Хікса, яка пояснила виникнення економічних циклів через взаємодію мультиплікатора та акселератора. Аналіз цієї моделі показав, що при певних значеннях акселераційного коефіцієнта економіка демонструє згасаючі коливання, а вихід за межі цього інтервалу призводить до незгасаючих циклів або автоколивань. Запропонована модифікація з випереджальним акселератором розширює діапазон стабільності, що має важливе значення для монетарної й фіскальної політики.

Нелінійні моделі Гудвіна та Кальдора продовжили розвиток кейнсіанських і мультиплікаторно-акселераторних підходів, врахувавши

асиметрію інвестиційних і споживчих функцій. Вони показали, що в реальній економіці фази «підйом – спад» мають замкнуту й асиметричну природу, яку неможливо відтворити у простих лінійних системах. Ці моделі краще відображають періоди наростання напруги (перенасичення) та відновлення, що відповідає спостережуваним кон'юнктурним коливанням.

У *третьому розділі* досліджено стохастичні моделі, що враховують випадкову природу економічних процесів. Особливу увагу приділено побудові стохастичної моделі фінансового ресурсу банку з урахуванням ризиків, невизначеності та динаміки дискретного часу.

Стохастична частина роботи продемонструвала необхідність врахування випадкових флуктуацій (наприклад, на ринку фінансових ресурсів банків). Модель із логнормально розподіленими коефіцієнтами переходу дозволяє не лише прогнозувати середнє значення ресурсу, але й оцінювати ризики через довірчі інтервали й дисперсію. Це підкреслює важливість включення непередбачуваних шоків і невизначеності до макродинамічних моделей.

Таким чином, у роботі було показано як класичні, так і сучасні підходи до аналізу економічних процесів за допомогою математичних моделей, що дозволяє краще розуміти механізми економічної динаміки та прогнозувати її розвиток.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Acemoglu D. Introduction to Modern Economic Growth / D. Acemoglu. – Princeton: Princeton University Press, 2012. – 1008 p.
2. Romer D. Advanced Macroeconomics / D. Romer. – 4th ed. – New York: McGraw-Hill, 2012. – 736 p.
3. Simon C. P., Blume L. Mathematics for Economists / C. P. Simon, L. Blume. – International ed. – New York: W. W. Norton, 2010. – 792 p.
4. Sydsæter K. et al. Further Mathematics for Economic Analysis / K. Sydsæter, P. Hammond, A. Seierstad, A. Strøm. – 2nd ed. – Harlow: Pearson, 2012. – 720 p.
5. Gandolfo G. Economic Dynamics / G. Gandolfo. – 4th ed. – Berlin: Springer, 2010. – 672 p.
6. Vohra R. V. Advanced Mathematical Economics / R. V. Vohra. – London: Routledge, 2011. – 248 p.
7. Blanchard O. Macroeconomics / O. Blanchard. – 6th ed. – Boston: Pearson, 2012. – 624 p.
8. Касьяненко В. О., Старченко Л. В. Моделювання та прогнозування економічних процесів: навчальний посібник. - Суми: Університетська книга, 2015. - 185с.
9. Вовк В.М., Зомчак Л.М. Оптимізаційні моделі економіки: навчальний посібник. - Львів: ЛНУ імені Івана Франка.2014. - 320с.
10. Козицький В.А.,Лавренюк С.П.,Оліскевич М.О. Основи математичної економіки. Теорія споживання. Частина 1: навчальний посібник/ Львівський національний університет імені Івана Франка. - Львів: Видавництво «Піраміда».2004. - 264с.