

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра Методів математичної фізики

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

**«Антиплоска задача теорії пружності для двошарового
сектору кільця»**

**«Antiplane problem of elasticity theory for the two-layered
sector of the ring»**

Виконав(ла): здобувач(ка) денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика
Освітня програма «Прикладна математика»
Сторожев Олег Ігорович

Керівник: кандидат фіз.-мат. наук, доц. Процеров Ю. С ____
Рецензент: кандидат фіз.-мат. наук, доц. Журавльова З. Ю.

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ ____ від ____ 2023 р.

Завідувач кафедри

Захищено на засіданні ЕК № ____

Протокол № ____ від ____ 2023 р.

Оцінка ____ / ____ / ____

Голова ЕК

Одеса — 2023 р.

ЗМІСТ

Вступ	3
1 Постановка задачі	4
2 Приведення задачі до одновимірної	5
3 Побудова неперервного розв’язку	6
4 Функція Грина	8
5 Побудова розривного розв’язку	11
6 Результати обчислень	13
6.1 Графіки напруження τ_{rz}	14
6.2 Графіки напруження $\tau_{\theta z}$	15
Висновки	18
Список літератури	19
Додатки	20

ВСТУП

Дана дипломна робота присвячена вивченню механічної поведінки тіла, яке знаходиться в умовах антиплоскої деформації. Антиплоска деформація виникає, коли тіло зазнає деформації уздовж однієї осі, при цьому деформація в площині, перпендикулярній до цієї осі, відсутня або незначна.

Ми розглядаємо циліндричну систему координат (r, θ, z) , в якій розташоване тіло обмежене областю $a < r < b$, $\alpha < \theta < \pi - \alpha$, $-\infty < z < \infty$. Тіло складається з двох частин з різними матеріалами, з модулями зсуву G_1 та G_2 відповідно.

Ціль даної роботи - знайти розв'язок рівняння Ламе, яке описує залежність зміщення $w(r, \theta)$ від координат r та θ в розглянутій області. Крім того, необхідно знайти напруження $\tau_{rz}(r, \theta)$ в тілі.

Ця тема є актуальною, оскільки розуміння механічної поведінки матеріалів у різних умовах деформації є важливим для багатьох галузей інженерії і науки. Зокрема, антиплоска деформація може виникати у тонкостінних конструкціях, наприклад, у трубопроводах або оболонках суден. Розуміння поведінки та властивостей таких матеріалів є ключовим для розробки безпечних і надійних конструкцій.

Дослідження даної задачі може сприяти розширенню наших знань про антиплоску деформацію та механічну поведінку тонкостінних конструкцій. Отримані результати можуть мати практичне значення для розробки нових матеріалів та оптимізації конструкцій для різних застосувань.

РОЗДІЛ 1

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо тіло в циліндричній системі координат (r, θ, z) область $a < r < b$, $\alpha < \theta < \pi - \alpha$, $-\infty < z < \infty$. Нехай краї тіла $\theta = \alpha$ і $\theta = \pi - \alpha$ нерухомо закріплені, край $r = a$ вільний від напружень, а до краю $r = b$ прикладено зсувне дотичне навантаження $p(\theta)$, величина якого залежить від z , у цьому разі тіло буде знаходитися в умовах антиплоскої деформації, при якій напружено-деформований стан тіла не залежить від z .

Відмінними від нуля буде тільки зміщення $w(r, \theta)$ уздовж осі Oz і два дотичні напруження $\tau_{rz} = G \frac{\delta w}{\delta r}$ і $\tau_{\theta z} = G \frac{1}{r} \frac{\delta w}{\delta \theta}$, де G модуль зсуву матеріалу тіла. Нехай далі розглянуте тіло складається з двох частин: $a < r < c$, $\alpha < \theta < \pi - \alpha n$ і $c < r < b$, $\alpha < \theta < \pi - \alpha n$.

Кожна частина складається з різного матеріалу: перша має модуль зсуву G_1 , а друга - G_2 .

Між цими шарами виконуються умови ідеальної механічної константа-неперервності зсуву $w(r, \theta)$ і напруги $\tau_{rz}(r, \theta)$ при переході через поверхню $r = c$, $\alpha < \theta < \pi - \alpha$.

У даній постановці зміщення $w(r, \theta)$ зобов'язане задовольняти рівнянню Ламе:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{d\theta^2} = 0, \quad a < r < b, \quad r \neq c, \quad \alpha < \theta < \pi - \alpha \quad (1)$$

З крайовими умовами:

$$w|_{\theta=\alpha} = 0, \quad w|_{\theta=\pi-\alpha} = 0 \quad (2)$$

$$\tau_{rz}|_{r=a} = G_1 \frac{\delta w}{\delta r}|_{r=a} = 0; \quad \tau_{rz}|_{r=b} = G_2 \frac{\delta w}{\delta r}|_{r=b} = p(\theta) \quad (3)$$

та умовами сполучення:

$$\langle w \rangle = w|_{r=c-0} - w|_{r=c+0} = 0$$

$$\langle \tau_{rz} \rangle = \tau_{rz}|_{r=c-0} - \tau_{rz}|_{r=c+0} = G_1 \frac{\delta w}{\delta r}|_{r=c-0} - G_2 \frac{\delta w}{\delta r}|_{r=c+0} \quad (4)$$

РОЗДІЛ 2

ПРИВЕДЕННЯ ЗАДАЧІ ДО ОДНОВИМІРНОЇ

Для зведення задачі до одновимірної скористаємося кінцевим синус-перетворенням Фур'є за змінною θ :

$$W_n(r) = \int_{\pi-2\alpha}^{\alpha} w(r, \theta) \sin(\lambda_n(\theta - \alpha)) d\theta, \quad \lambda_n = \pi - 2\alpha, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

з формулою обертання

$$w(r, \theta) = \frac{2}{\pi - 2\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} W_n(r) \sin(\lambda_n(\theta - \alpha))$$

Застосовуючи його до рівняння (1) (при цьому крайові умови (2) будуть задоволені), крайовим умовам (3) та умовам сполучення (4) прийдемо до однорідної розривної задачі

$$(rW_n'(r))' - \frac{1}{r}\lambda_n^2 W_n(r) = 0, \quad a < r < b, \quad r \neq c \quad (5)$$

$$W_n'(a) = 0, \quad W_n'(b) = \frac{P_n}{G_2} \quad (6)$$

$$\text{де } P_n = \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} P(\theta) \sin(\lambda_n(\theta - \alpha)) d\theta$$

з умовами спряження

$$\langle W_n \rangle = W_n(c-0) - W_n(c+0) = 0$$

$$\langle \tau_{rz, n} \rangle = G_1 W_n'(c-0) - G_2 W_n'(c+0) = 0$$

Нам потрібно розв'язати одновимірну розривну задачу в трансформантах - її розв'язок складається з двох доданків:

- 1) Безперервний розв'язок
- 2) Розривне рішення

Для розривного розв'язку нам потрібна функція Грину.

РОЗДІЛ 3

ПОБУДОВА НЕПЕРЕРВНОГО РОЗВ'ЯЗКУ

Маємо лінійне звичайне диференціальне рівняння другого порядку - розв'яжемо це рівняння методом заміни

Розв'язок має такий вигляд

$$[rw'_n(r)]' - \frac{1}{r}\lambda_n^2 w_n(r) = 0$$

$$rw''_n(r) + w'_n(r) - \frac{\lambda_n^2}{r}w_n(r) = 0 \mid \cdot r$$

$$r^2w''_n(r) + rw'_n(r) - \lambda_n^2 w_n(r) = 0$$

Нехай $w_n(r) = r^\lambda$ тоді

$$r^2(r^\lambda)'' + r(r^\lambda)' - \lambda_n^2 r^\lambda = 0$$

$$(r^\lambda)'' = \lambda(\lambda - 1)r^{\lambda-2} \text{ и } (r^\lambda)' = \lambda r^{\lambda-1}:$$

$$\lambda^2 r^\lambda - \lambda_n^2 r^\lambda = 0$$

$$(\lambda^2 - \lambda_n^2)r^\lambda = 0$$

Через те, що $r \neq 0$ маємо

$$\lambda^2 - \lambda_n^2 = 0$$

$$(\lambda - \lambda_n)(\lambda + \lambda_n) = 0 \quad \lambda = \lambda_n \text{ або } \lambda = -\lambda_n$$

$$\text{Звідки } w_1(r) = C_1 r^{-\lambda_n}, w_2(r) = C_2 r^{\lambda_n}$$

$$\text{Відповідь: } C_1 r^{-\lambda_n} + C_2 r^{\lambda_n}$$

$$(w_n^*)' = \lambda_n C_1 r^{-\lambda_n-1} + \lambda_n C_2 r^{\lambda_n-1}$$

$$w'_n(a)' = 0 \Rightarrow \lambda_n C_1 a^{-\lambda_n-1} + \lambda_n C_2 a^{\lambda_n-1} = 0$$

$$w'_n(b)' = \frac{P_n}{G} \Rightarrow \lambda_n C_1 b^{-\lambda_n-1} + \lambda_n C_2 b^{\lambda_n-1} = \frac{P_n}{G}$$

$$\begin{cases} C_2 a^\lambda - C_1 a^{-\lambda_n} = 0 \\ C_2 b^\lambda - C_1 b^{-\lambda_n} = \frac{P_n}{G} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 = C_1 a^{-2\lambda_n} \\ C_1 a^{-2\lambda_n} b_n^\lambda - C_1 b^{-\lambda_n} = \frac{P_n}{G} \end{cases}$$

$$C_1 = \frac{bP_n}{(a^{-2\lambda_n}b^{\lambda_n} - b^{-\lambda_n})G\lambda_n}$$

$$C_1 = -\frac{P_na^{2\lambda_n}b^{\lambda_n+1}}{G\lambda_n(a^{2\lambda_n} - b^{2\lambda_n})}$$

$$C_2 = -\frac{P_nb^{\lambda_n+1}}{G\lambda_n(a^{2\lambda_n} - b^{2\lambda_n})}$$

$$w_n^* = -\frac{P_nb^{\lambda_n+1}}{G\lambda_n(a^{2\lambda_n} - b^{2\lambda_n})}(a^{2\lambda_n}r^{-\lambda_n} + r^{\lambda_n})$$

Ми знайшли розв'язок безперервної, тепер знайдемо функцію Грина.

РОЗДІЛ 4

ФУНКЦІЯ ГРИНА

Для розв'язання крайової задачі нам крім неперервного розв'язку потрібно знайти й розривний розв'язок. Для розривного рішення ми побудуємо функцію Грина.

Оскільки далі ми будемо обертати трансформанту то побудуємо Грина через фундаментальну функцію

$$(rw'_n)' - \frac{\lambda_n^2}{r}w_n = 0$$

$$\phi_0(r) = r^{-\lambda_n}; \phi_1(r) = r^{\lambda_n}$$

$$\psi_0(r) = C_{00}r^{-\lambda_n} + C_{01}r^{\lambda_n}$$

$$U_0[\psi_0] = \psi'_0(a) - 1;$$

$$U_1[\psi_0] = \psi'_0(b) = 0$$

$$\begin{cases} -\lambda_n a^{\lambda_n-1} C_{00} + \lambda_n a^{\lambda_n-1} C_{01} = 1 \\ -\lambda_n b^{\lambda_n-1} C_{00} + \lambda_n b^{\lambda_n-1} C_{01} = 0 \end{cases}$$

$$\psi_1(r) = C_{10}r^{-\lambda_n} + C_{11}r^{\lambda_n};$$

$$\psi'_1(r) = C_{10}r^{-\lambda_n-1} + C_{11}r^{\lambda_n-1}$$

$$\begin{cases} U_0[\psi_1] = \psi'_1(a) = 0 \\ U_1[\psi_1] = \psi'_1(b) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^{-\lambda_n-1} C_{10} - a^{\lambda_n-1} C_{11} = -\frac{1}{\lambda_n} \\ b^{-\lambda_n-1} C_{10} - b^{\lambda_n-1} C_{11} = 0 \end{cases}$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a^{-\lambda_n-1} & -a^{\lambda_n-1} \\ b^{-\lambda_n-1} & -b^{\lambda_n-1} \end{vmatrix} = \frac{1}{ab} \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\lambda_n} \right]$$

$$C_{00} = \frac{1}{\Delta_n} \begin{vmatrix} -\frac{1}{\lambda} & -a^{\lambda_n-1} \\ 0 & -b^{\lambda_n-1} \end{vmatrix} = \frac{b^{\lambda_n-1}}{\lambda_n \Delta_n}$$

$$C_{01} = \frac{1}{\Delta_n} \begin{vmatrix} a^{\lambda_n-1} & -\frac{1}{\lambda} \\ b^{-\lambda_n-1} & 0 \end{vmatrix} = \frac{b^{-\lambda_n-1}}{\lambda_n \Delta_n}$$

$$\psi_0 = \frac{1}{\lambda_n \Delta_n} [b^{\lambda_n-1} r^{-\lambda_n} + b^{-\lambda_n-1} r^{\lambda_n}]$$

$$\begin{cases} -\lambda_n a^{-\lambda_n-1} C_{10} + \lambda_n a^{\lambda_n-1} C_{11} = 0 \\ -\lambda_n b^{\lambda_n-1} C_{10} + \lambda_n b^{-\lambda_n-1} C_{11} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^{-\lambda_n-1} C_{10} - a^{\lambda_n-1} C_{11} = 0 \\ b^{-\lambda_n-1} C_{10} - b^{\lambda_n-1} C_{11} = -\frac{1}{\lambda_n} \end{cases}$$

$$C_{10} = \frac{1}{\Delta_n} \begin{vmatrix} 0 & -a^{\lambda_n-1} \\ -\frac{1}{\lambda_n} & -b^{\lambda_n-1} \end{vmatrix} = -\frac{a^{\lambda_n-1}}{\lambda_n}$$

$$C_{11} = \frac{1}{\Delta_n} \begin{vmatrix} a^{-\lambda_n-1} & 0 \\ b^{-\lambda_n-1} & -\frac{1}{\lambda_n} \end{vmatrix} = -\frac{a^{\lambda_n-1}}{\lambda_n \Delta_n}$$

Фундаментальна функція Грина:

$$u'' - \lambda^2 u = 0$$

$$\phi(x, \xi) = -\frac{1}{2\lambda} e^{-\lambda|x-\xi|}$$

Застосовуємо вигляд:

$$\phi(x, \rho) = -\frac{1}{2\lambda} e^{-\lambda \ln \frac{r}{\rho}}$$

$$G_n(r, \rho) = \phi(r, \rho) - \psi_0(r) U_0[\phi_0(r, \rho)] - \psi_1(r) U_1[\phi_n(r, \rho)]$$

$$U_0[\phi_n(r, \rho)] = \frac{\delta \phi_n}{\delta r} \Big|_{r=a} = \frac{1}{2a} \text{sign}(\ln \frac{a}{\rho}) e^{-\lambda_n |\ln \frac{a}{\rho}|}$$

$$U_1[\phi_n(r, \rho)] = \frac{\delta \phi_n}{\delta r} \Big|_{r=b} = \frac{1}{2b} \text{sign}(\ln \frac{b}{\rho}) e^{-\lambda_n |\ln \frac{b}{\rho}|}$$

$$a < \rho < b:$$

$$\frac{a}{\rho} < 1 \Rightarrow \ln \frac{a}{\rho} < 0 \Rightarrow \text{sign}(\ln \frac{a}{\rho}) = -1$$

$$\frac{b}{\rho} > 1 \Rightarrow \ln \frac{b}{\rho} > 0 \Rightarrow \text{sign}(\ln \frac{b}{\rho}) = 1$$

У підсумку фундаментальна функція Гріна має вигляд:

$$G_n(r, \rho) = \frac{1}{-\lambda_n} e^{-\lambda_n |\ln \frac{r}{\rho}|} + \psi_0(r) \frac{1}{2a} e^{-\lambda_n |\ln \frac{a}{\rho}|} - \psi_1(r) \frac{1}{2b} e^{-\lambda_n |\ln \frac{b}{\rho}|}$$

РОЗДІЛ 5

ПОБУДОВА РОЗРИВНОГО РОЗВ'ЯЗКУ

$$W_n = c \left[A_0 \frac{\delta G_n(r, \rho)}{\delta \rho} \Big|_{\rho=c} - A_1 G_n(r, \rho) \Big|_{\rho=c} \right] + w_n^*(r)$$

де A_0 - стрибок зміщення $W_n(r)$ при $r = c$, A_1 - W'_n при $r = c$

$$\text{Звідки } A_0 = \langle W_n \rangle = 0 \text{ і } A_1 = \langle W'_n \rangle = W'_n(c-0) - W'_n(c+0)$$

Звідси

$$W_n = c \left[-A_1 G_n(r, \rho) \Big|_{\rho=c+W_n^*(r)} \right] - \text{рівняння крайової}$$

$$\langle \tau_{rz, u} \rangle = G_1 W'_n(c-0) - G_2 W'_n(c+0) = 0$$

де G_1, G_2 - модулі зсуву

Знайдемо невідому величину A_1 і підставимо її в рівняння W_n

Маємо:

$$\psi_0(r) = \frac{1}{b\lambda_n \Delta_n} [b^{\lambda_n} r + b^{\lambda_n} r]$$

$$\psi_1(r) = -\frac{1}{a\lambda_n \Delta_n} [a^{\lambda_n} r + a^{\lambda_n} r]$$

$$\text{Де } \Delta_n = \frac{1}{ab} \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\lambda_n} \right]$$

$$\phi_n(r, \rho) = -\frac{1}{2\lambda} e^{-\lambda \ln \frac{r}{\rho}}$$

$$G_n(r, \rho) = \frac{1}{-\lambda_n} e^{-\lambda_n |\ln \frac{r}{\rho}|} + \psi_0(r) \frac{1}{2a} e^{-\lambda_n |\ln \frac{a}{\rho}|} - \psi_1(r) \frac{1}{2b} e^{-\lambda_n |\ln \frac{b}{\rho}|}$$

$$G_1 \langle w'_n(c) \rangle + (G_1 - G_2) w'_n(c+0) = 0$$

$$\text{де } \langle w'_n(c) \rangle = \frac{G_2 - G_1}{G_1} G_1 w'_n(c+0)$$

$$G_{12} = \frac{G_2}{G_1} - 1$$

$$\text{Тоді } \langle w'_n(c) \rangle = G_{12} w'_n(c+0)$$

$$A_1 = G_{12} w'_n(c+0)$$

$$\text{Оскільки } w_n(r) = w_n^{*'} - c A_1 \frac{\delta G_n(r, c)}{\delta r}$$

$$\frac{\delta G_n(r, c)}{\delta r} = \frac{1}{2r} \text{sign}(\ln \frac{r}{c}) e^{-\lambda_n |\ln \frac{r}{c}|} + \frac{1}{2a} e^{\lambda_n |\ln \frac{a}{r}|} \psi'_0(r) - \frac{1}{2b} e^{-\lambda_n |\ln \frac{b}{c}|} \psi'_2(r)$$

$$\text{Рахуємо } w_n^*(r) = \frac{P_n b^{\lambda_n+1}}{G_2 \lambda_n (b^{2\lambda_n} - a^{2\lambda_n})} (r^{\lambda_n} + a^{2\lambda_n} + r^{-\lambda_n})$$

$$w_n^{*'}(r) = \frac{P_n b^{\lambda_n+1}}{G_2 \lambda_n (b^{2\lambda_n} - a^{2\lambda_n})} (r^{\lambda_n-1} + a^{2\lambda_n} + r^{-\lambda_n-1})$$

$$\psi'_0(r) = \frac{1}{b\Delta_n}[-b^\lambda r^{-\lambda_n-1} + b^{-\lambda_n} r^{\lambda_n-1}]$$

$$\psi'_1(r) = \frac{1}{a\Delta_n}[-a^\lambda r^{-\lambda_n-1} + a^{-\lambda_n} r^{\lambda_n-1}]$$

Отримуємо рівняння відносно A_1

$$A_1 = G_{12}w'_n(c+0)$$

$$A_1 = \frac{G_{12}P_nb^{\lambda_n+1}}{G_2(b^{2\lambda_n}-a^{2\lambda_n})}(r^{\lambda_n} - a^{2\lambda_n}c^{-\lambda_n-1})$$

$$w_n = c[(-\frac{G_{12}P_nb^{\lambda_n+1}}{G_2(b^{2\lambda_n}-a^{2\lambda_n})}(r^{\lambda_n} - a^{2\lambda_n}c^{-\lambda_n-1}))G_n(r,c)] -$$

$$-\frac{P_nb^{\lambda_n+1}}{G_2\lambda_n(a^{2\lambda_n}-b^{2\lambda})}(a^{2\lambda_n}r^{-\lambda_n} + r^{\lambda_n}) =$$

$$= -\frac{P_nb^{\lambda_n+1}}{G_2}\left[\frac{cG_{12}(r^{\lambda_n}-a^{2\lambda_n}c^{-\lambda_n-1})G_n(r,c)}{b^{2\lambda}-a^{2\lambda}} + \frac{a^{2\lambda_n}r^{-\lambda_n}+r^{\lambda_n}}{\lambda_n(a^{2\lambda_n}-b^{2\lambda_n})}\right]$$

$$\text{де } P_n = \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} P(\theta) \sin \lambda_n(\theta - \alpha) d\theta$$

РОЗДІЛ 6

РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЕНЬ

Знайдемо трансформанту напруження:

$$P(\theta) = P_k - \text{const};$$

$$\begin{aligned} P_n &= P_k \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \sin \lambda_n(\theta - \alpha) d\theta = \begin{pmatrix} u = \theta - \alpha & u_1 = 0 \\ du = d\theta & u_2 = \pi - 2\alpha \end{pmatrix} = \\ &= P_k \int_0^{\pi-2\alpha} \sin(\lambda_n u) = \begin{pmatrix} s = \lambda_n u & s_1 = 0 \\ ds = \lambda_n du & s_2 = \lambda(\pi - 2\alpha) \end{pmatrix} = \\ &= \frac{P_k}{\lambda_n} \int_0^{\lambda_n(\pi-2\alpha)} \sin(s) ds = -\frac{P_k \cos(s)}{\lambda_n} \Big|_0^{\lambda_n(\pi-2\alpha)} = -\frac{P_k}{\lambda_n} [\cos(\lambda_n(\pi - 2\alpha)) - \\ &- \cos(0)] = -\frac{P_k}{\lambda_n} [(-1)^n - 1] \\ w(r, \theta) &= \frac{2}{\pi-2\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} w_n(r) \sin \lambda_n(\theta - \alpha) = \\ &= \frac{2}{\pi-2\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_k b^{\lambda_n+1} [(-1)^n - 1]}{\lambda_n G_2} \left[\frac{c G_{12}(r^{\lambda_n} - a^{2\lambda_n} c^{-\lambda_n-1}) G_n(r, c)}{b^{2\lambda_n} - a^{2\lambda_n}} + \frac{a^{2\lambda_n} r^{-\lambda} + r^{\lambda_n}}{\lambda_n (a^{2\lambda_n} - 2\lambda_n)} \right] \sin(\lambda_n(\theta - \\ &- \alpha)) = \\ &= \frac{2P_k}{G_2(\pi-2\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^{\lambda_n+1} [(-1)^n - 1]}{\lambda_n} \left[\frac{c G_{12}(r^{\lambda_n} - a^{2\lambda_n} c^{-\lambda_n-1}) G_n(r, c)}{b^{2\lambda_n} - a^{2\lambda_n}} + \frac{a^{2\lambda_n} r^{-\lambda} + r^{\lambda_n}}{\lambda_n (a^{2\lambda_n} - 2\lambda_n)} \right] \sin(\lambda_n(\theta - \\ &- \alpha)) \end{aligned}$$

Коли ми знайшли $w(r, \theta)$, то ми можемо знайти напруження, використовуючи формули, що були дані з умови

$$\tau_{\theta z} = G \frac{dw}{dr}$$

$$\tau_{\theta z} = G \frac{1}{r} \frac{dw}{dr\theta}$$

$$\tau_{\theta z} = \frac{2P_k G}{r G_2(\pi-2\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} b^{\lambda_n+1} [(-1)^n - 1] \left[\frac{c G_{12}(r^{\lambda_n} - a^{2\lambda_n} c^{-\lambda_n-1}) G_n(r, c)}{b^{2\lambda_n} - a^{2\lambda_n}} + \frac{a^{2\lambda_n} r^{-\lambda} + r^{\lambda_n}}{\lambda_n (a^{2\lambda_n} - 2\lambda_n)} \right].$$

$$\cdot \cos(\lambda_n(\theta - \alpha))$$

$$\tau_{rz} = \frac{2P_k G}{G_2(\pi-2\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^{\lambda_n+1} [(-1)^n - 1]}{\lambda_n} \left[\frac{c G_{12}(\lambda_n r^{\lambda_n-1} - a^{2\lambda_n} c^{-\lambda_n-1}) G'_n(r, c)}{b^{2\lambda_n} - a^{2\lambda_n}} + \frac{\lambda_n a^{2\lambda_n} r^{\lambda-1} + \lambda_n r^{\lambda_n-1}}{\lambda_n (a^{2\lambda_n} - 2\lambda_n)} \right].$$

$$\cdot \sin(\lambda_n(\theta - \alpha))$$

де:

$$G'_n(r, c) = \frac{1}{2r} \text{sign}(\ln \frac{r}{c}) e^{-\lambda_n |\ln \frac{r}{c}|} + \frac{1}{2a} e^{\lambda_n |\ln \frac{a}{r}|} \psi'_0(r) - \frac{1}{2b} e^{-\lambda_n |\ln \frac{b}{c}|} \psi'_2(r)$$

$$\psi'_0(r) = \frac{1}{b\Delta_n} [-b^\lambda r^{-\lambda_n-1} + b^{-\lambda_n} r^{\lambda_n-1}]$$

$$\psi'_1(r) = \frac{1}{a\Delta_n} [-a^\lambda r^{-\lambda_n-1} + a^{-\lambda_n} r^{\lambda_n-1}]$$

$$\Delta_n = \frac{1}{ab} \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\lambda_n} \right]$$

$$\alpha_n = \frac{\pi n}{\pi - 2\alpha}$$

6.1 Графіки напруження τ_{rz}

Побудуємо 2 графіки для τ_{rz} . Розглянемо 2 випадки: коли напруження в першому матеріалі з модулем зсуву G_1 , на другому графіку - другий матеріал з модулем зсуву G_2

Для графіка вводимо такі значення: $P = 1$ $G_1 = 1$ $G_2 = 2$ $G_{12} = \frac{G_2}{G_1} - 1$
 $\alpha = \pi/3$ $a = 1$ $c = 2$ $b = 3$

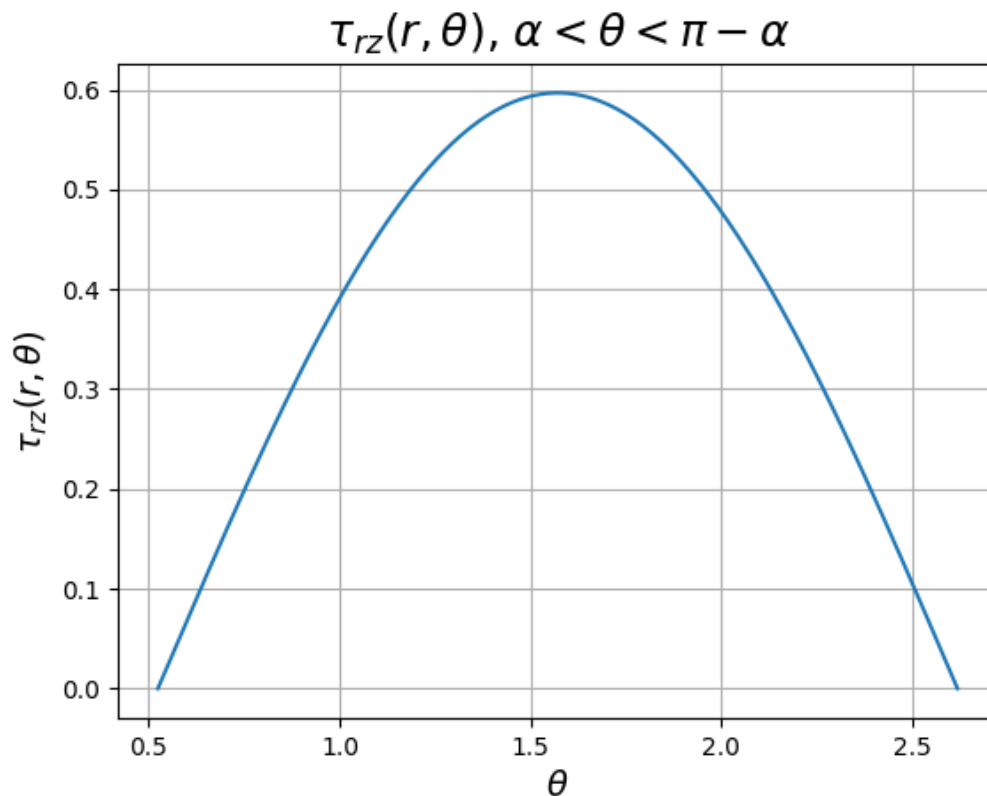
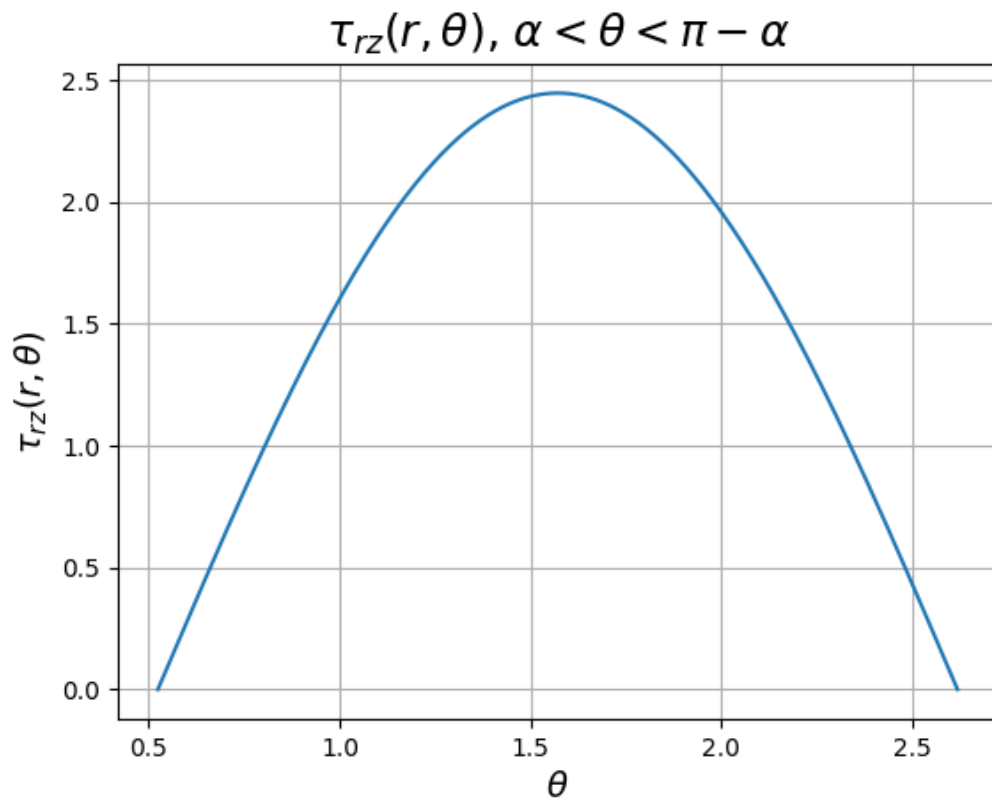


Рис. 6.1. $r = \frac{1}{2}$

Рис. 6.2. $r = \frac{5}{2}$

6.2 Графіки напруження $\tau_{\theta z}$

Побудуємо 4 графіки для $\tau_{\theta z}$. Розглянемо 4 випадки: при $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\theta = \alpha$ і $\theta = \pi - \alpha$

Для графіка вводимо такі значення: $P = 1$, $G_1 = 2$, $G_2 = 4$, $G_{12} = \frac{G_2}{G_1} - 1$, $a = 1$, $c = 2$, $b = 3$

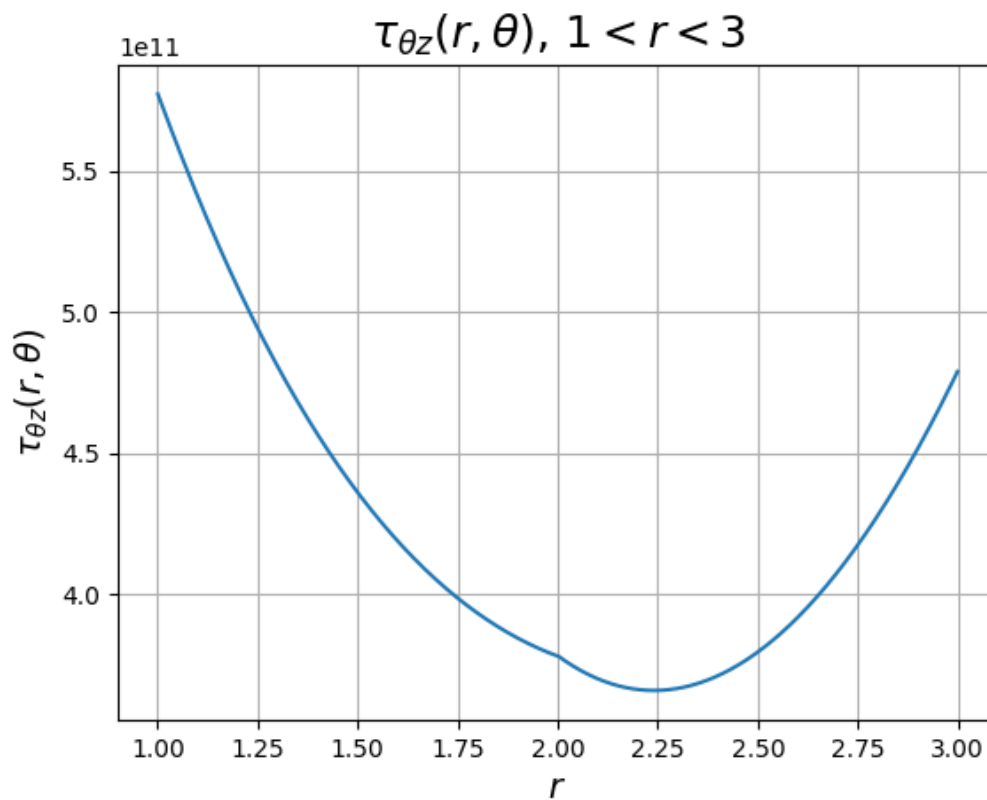


Рис. 6.3. $\alpha = \frac{\pi}{4}, \theta = \alpha$

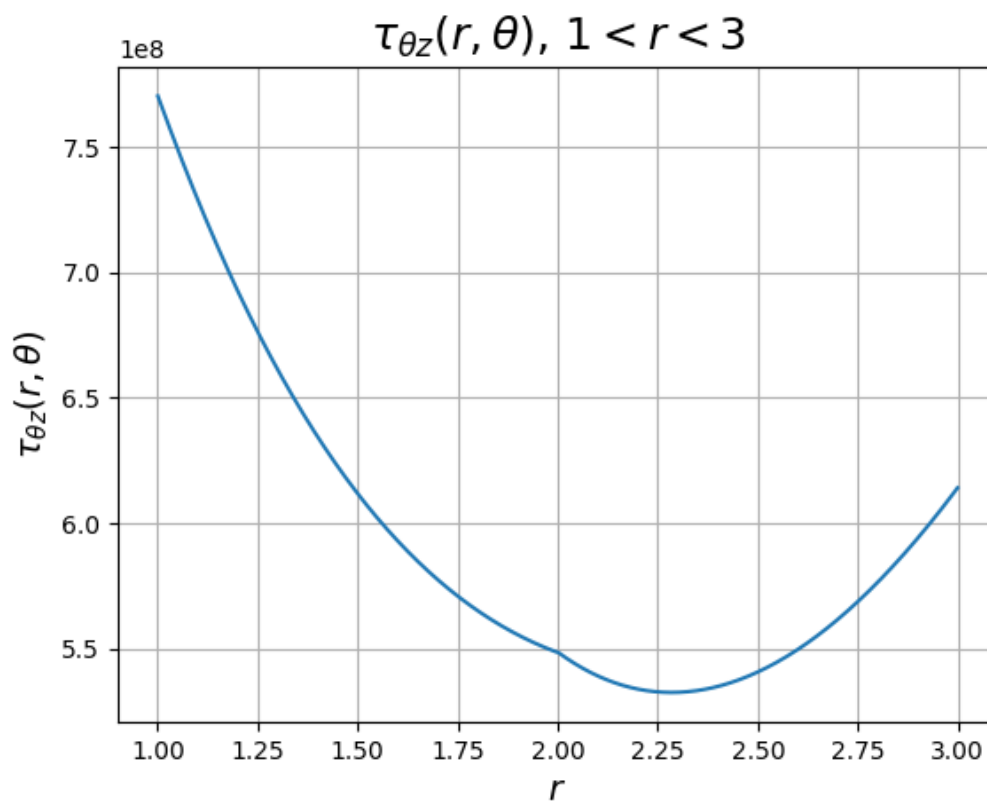


Рис. 6.4. $\alpha = \frac{\pi}{6}, \theta = \alpha$

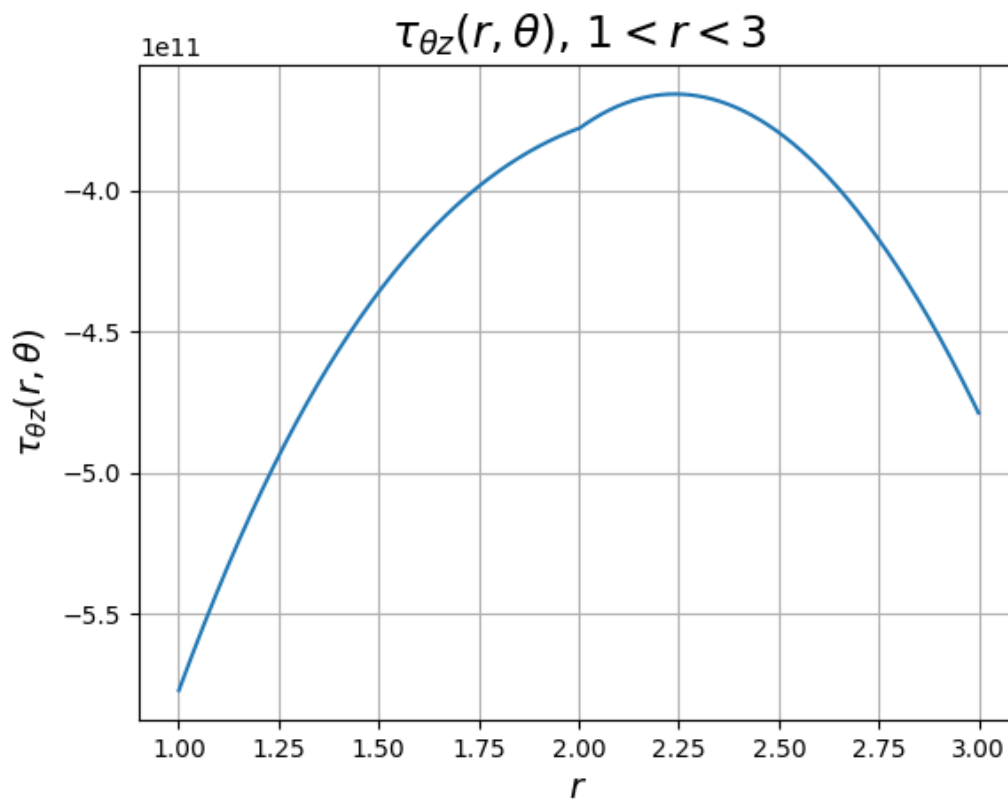


Рис. 6.5. $\alpha = \frac{\pi}{4}, \theta = \pi - \alpha$

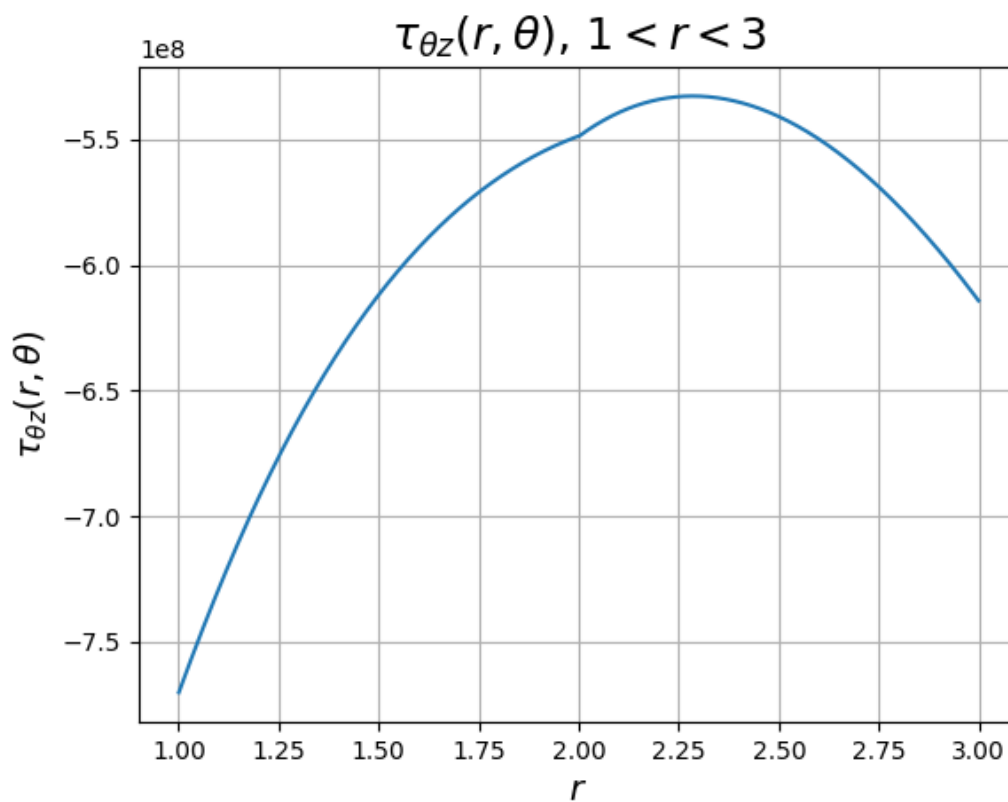


Рис. 6.6. $\alpha = \frac{\pi}{6}, \theta = \pi - \alpha$

ВИСНОВКИ

Ми розглянули тіло в циліндричній системі координат (r, θ, z) , в якій розташоване тіло обмежене областю $a < r < b$, $\alpha < \theta < \pi - \alpha$, $-\infty < z < \infty$, тіло знаходилось в умовах антиплоської деформації та складалось з двох частин з різними матеріалами, з модулями зсуву G_1 та G_2 відповідно.

Знайшли розв'язок рівняння Ламе, що описувало залежність зміщення $w(r, \theta)$ від координат r та θ в розглянутій області. А також знайшли напруження $\tau_{rz}(r, \theta)$ в тілі та побудували графіки.

Для розв'язку рівняння привели його до одновимірної через синус перетворення Фур'є за змінною θ та розв'язали одновірну розривну задачу в трансформантах, що складався з безперервного розв'язку та розривного розв'язку, для якої ми побудували функцію Грину

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Методичні вказівки до курсу «Математичне моделювання деяких задач механіки та техніки» для студентів 3 курсу спеціальності 6.04030101 «Прикладна математика» (укладачі Процеров Ю.С., Мойсеєнок О.П.). Одеса, 2015, 61 с. (Розміщена на сайті Наукової бібліотеки Одеського національного університету ім. І.І. Мечнікова).
2. Попов Г.Я., Реут В.В., Вайсфельд Н.Д. Навчальний посібник з курсу «Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень». Одеса: Астропринт, 2005, 184 с.
3. Божедарник В.В., Сулім Г.Т. Елементи теорії пружності. Львів: Світ, 1994, 560 с.
4. Можаровський М.С. Теорія пружності, пластичності і повзучості. К: Вища школа, 2002, 312 с.

ДОДАТКИ

```

1 import math
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from tqdm import tqdm
4
5 import numpy as np
6
7 e = 1 * 10 ** (-9)
8 pi = math.pi
9 P = 1
10 G1 = 1
11 G2 = 2
12 G_12 = G2/G1-1
13 alpha = pi/3
14 a = 1
15 c = 2
16 b = 3
17 # r = 1/2
18 r = 2
19 # r = 3
20
21 def delta_n(n):
22     return 1/(a*b) * ((a/b)**lambda_n(n) - (b/a)**lambda_n(n))
23
24 def lambda_n(n):
25     return pi*n/(pi-2*alpha)
26
27
28 def phi_0(r,n):
29     return 1/(b*delta_n(n)) * (-b**(lambda_n(n)) * r**(-lambda_n(n)-1) +
30         b**(-lambda_n(n))*r**(lambda_n(n)-1))
31
32 def phi_1(r,n):
33     return 1/(a*delta_n(n)) * (a**(lambda_n(n))*r**(-lambda_n(n)-1) -
34         a**(-lambda_n(n))*r**(lambda_n(n)-1))
35
36 def G_n(n,r):
37     part_1 = 1/(2*r) * np.sign(math.log(r/c)) *

```

```

        math.e**(-lambda_n(n)*abs(math.log(a/c)))
38     part_2 = 1/(2*a)*e**(lambda_n(n) * abs(math.log(a/c)))*phi_0(r,n)
39     part_3 = 1/(2*b) * math.e**(-lambda_n(n)*abs(math.log(b/c)))*phi_1(r,n)
40     return part_1 + part_2 - part_3
41
42
43 def fun(n, theta):
44     f_1 = (b**(lambda_n(n) + 1) * ((-1)**n-1) ) / lambda_n(n)
45     part_1 = (c * G_12 * (lambda_n(n) * r**(lambda_n(n) - 1) -
        a**(2*lambda_n(n)) * c**(-lambda_n(n)-1)) * G_n(n, r)) /
        (b**(2*lambda_n(n)) - a**(2*lambda_n(n)))
46     part_2 = (lambda_n(n) * r ** (lambda_n(n) - 1) * a ** (2* lambda_n(n))
        + lambda_n(n) * r ** (lambda_n(n) - 1)) / (lambda_n(n)*( a ** (2*
        lambda_n(n)) - b ** (2* lambda_n(n))))
47     f_2 = part_1 + part_2
48     f_3 = math.sin(lambda_n(n)* (theta - alpha))
49     return f_1 * f_2 * f_3
50
51
52 def get_g(r):
53     if r <= c:
54         return G1
55     return G2
56
57
58 def summary(theta):
59     prev_s = 1000
60     s = 0.0
61     n = 1
62     while abs(prev_s - s) > e:
63         prev_s = s
64         res = fun(n, theta)
65         res = round(res, 6)
66         s += res
67         n += 1
68     return s
69
70
71 def tau_r_z(theta, step):
72     G = get_g(r)
73     f = (2*P*G)/(G2*(pi-2*alpha)) * summary(theta)

```

```

74     d[r] = f
75     return f
76
77 if __name__ == '__main__':
78     step = 1 / 10000
79     x_1 = np.arange(alpha+step, pi-alpha, step)
80     y_1 = list()
81     x_1_n = list()
82     d = dict()
83     for i in tqdm(x_1):
84         i = round(i, 4)
85         x_1_n.append(i)
86         answ = tau_r_z(i, step)
87         y_1.append(answ)
88     print(d)
89     print(f"c = {(2*P*G2)/(G2*(pi-2*alpha)) * summary(c)}")
90
91     plt.plot(x_1_n, y_1)
92     plt.grid(True)
93     plt.xlabel('$\\theta$', fontsize=14)
94     plt.ylabel('$\\tau_{rz}(r, \\theta)\\$', fontsize=14)
95     plt.title('$\\tau_{rz}(r, \\theta)\\$, $\\alpha < \\theta < \\pi-\\alpha$', fontsize=18)
96     plt.show()

```