

В. П. Жёлтиков, В. В. Эфендиев

Одесский государственный университет им. И. И. Мечникова

УСРЕДНЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СТАНДАРТНЫХ СИСТЕМ С ОТКЛОНЯЮЩИМИСЯ АРГУМЕНТАМИ

Для задачи керування системи стандартного вигляду з запізненням згідно з принципом максимуму розглянуто граничну задачу з аргументами запізнення та випередження. Обґрунтовано метод усереднення для асимптотичного розв'язку граничної задачі.

Для задачи управления системами стандартного вида с запаздыванием согласно принципа максимума рассмотрена краевая задача с аргументами запаздывания и опережения. Обоснован метод усреднения для асимптотического решения краевой задачи.

The boundary problem with delay and overtaking for the problem of the control over standard systems with delay, according to maximum principle, is considered. The averaging method for the asymptotic solution of the obtained boundary problem is substantiated.

Введение. Применение принципа максимума в оптимальном управлении стандартной системой с запаздыванием [1] и другие приложения сводятся к следующей краевой задаче с отклоняющимися аргументами при заданных условиях, определяющих слева от интервала изменения независимой переменной t запаздывание по одним переменным и справа – опережение по остальным переменным:

$$\dot{x}(t, \varepsilon) = \varepsilon X(t, x_1(t - p_1(t), \varepsilon), x_2(t + p_2(t), \varepsilon)), \quad (1)$$

$$x_1|_{t \in [-\Delta_1, 0]} = \theta_1(t), \quad x_2|_{t \in [T, T + \Delta_2]} = \theta_2(t), \quad (2)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $t \in [0, T] \equiv I$, $T = L\varepsilon^{-1}$, $L > 0$, L, Δ_1, Δ_2 – константы; x, X, θ, p – $2n$ -мерные вектор-функции, первые n компонент которых имеют индекс “1”, а остальные n компонент имеют индекс “2”: $x = (x'_1, x'_2)'$, штрих означает транспонирование, дальше будет такое же разделение компонент $2n$ -мерных векторов:

$$x_1(t - p_1(t), \varepsilon) \equiv \{x_{1i}(t - p_{1i}(t), \varepsilon), i = 1, \dots, n\},$$

$$x_2(t + p_2(t), \varepsilon) \equiv \{x_{2i}(t + p_{2i}(t), \varepsilon), i = 1, \dots, n\},$$

т.е. каждая компонента имеет характерное для приложений свое запаздывание $p_{1i}(t)$ или опережение $p_{2i}(t)$, $\|p_k(t)\| \leq \Delta_k$, $k = 1, 2$.

Очевидно, что система (1), (2) реализуема, т.е. множество имеющих решение таких задач непусто. К числу таких задач относятся задачи оптимального управления [2].

Следующие имеющие решение задачи (1), (2), а также их асимптотическое решение решением более простых задач получим в связи с зависимостью уравнений (1) от малого параметра ε .

1. Усреднение исходной задачи и его обоснование. Поставим в соответствие исходной задаче (1), (2) усредненную краевую задачу:

$$\frac{dx}{d\tau} = \bar{X}(\bar{x}), \quad (3)$$

$$\bar{x}_1(0) = \theta_1(0), \quad \bar{x}_2(L) = \theta_2(T), \quad (4)$$

где $\tau = \varepsilon t$, $\tau \in [0, L]$, $\bar{x} = (x'_1, x'_2)'$,

$$\bar{X}(x) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \int_0^s X(t, x_1, x, x_2) dt, \quad (5)$$

предел (5) предполагается существующим.

Наряду с задачей (1), (2) введем задачу:

$$\dot{y}(t, \varepsilon) = \varepsilon X(t, y_1(t, \varepsilon), y_2(t, \varepsilon)), \quad (6)$$

$$y_1(0, \varepsilon) = \theta_1(0), \quad y_2(T, \varepsilon) = \theta_2(T), \quad (7)$$

для которой система (3), (4) также является усредненной.

Близость решений исходной (1), (2) и усредненной (3), (4) задач описывается следующей теоремой.

Теорема 1. Пусть в области $Q\{(t, y) | t \geq 0, y \in D \subset R_{2n}\}$, где множество D открыто и ограничено, выполнены следующие условия:

1) функция $X(t, y, y, y)$ ограничена: $|X(t, y, y, y)| \leq M_0$.

дифференцируема по y , причем $\frac{\partial X}{\partial y} \in \text{Lip}_y(D, \lambda)$, $\left\| \frac{\partial X}{\partial y} \right\| \leq M_1$;

2) равномерно по $x \in D$ существует предел (5);

3) решение $x(\tau, x^0)$ уравнения (3) с начальным условием $x(0, x^0) = x^0 \in D^0 \subset D$ определено для $\tau \in [0, L]$ и лежит вместе с ρ -окрестностью в D ;

4) задача (3), (4) имеет решение $x(\tau)$ такое, что $\bar{x}^0 = x(0) \in \text{int} D^0$;

5) решение $\bar{x}(\tau, \bar{x}^0)$ уравнения (3) таково, что

$$\det(\partial \bar{x}_2(L, \bar{x}^0) / \partial \bar{x}_2^0) \neq 0; \quad (8)$$

6) функции $\theta_1(t), \theta_2(t)$ непрерывны соответственно на отрезках $[-\Delta_1, 0]$, $[T, T + \Delta_2]$.

Тогда для любого $\eta > 0$ существует такое $\varepsilon^0 = \varepsilon^0(\eta) > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ и равномерно по $t \in I$ имеет место неравенство

$$\|x(t, \varepsilon) - \bar{x}(t)\| < \eta, \quad (9)$$

где $x(t, \varepsilon)$ – решение исходной задачи.

Доказательство. В силу теоремы 10.1 [3] для любого $\eta > 0$ можно указать $\varepsilon_1 > 0$ такое, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ и $t \in I$ существует единственное решение $y(t, \varepsilon)$ задачи (6), (7), для которого

$$\|y(t, \varepsilon) - \bar{x}(t)\| < \eta, \quad (10)$$

причем для периодических по t правых частей исходных уравнений порядок малости η и ε одинаков: $\eta = C\varepsilon$, $C > 0$, $C = \text{const}$. Такое уточнение оценок имеет место и для неравенств (18), (23), (9).

Покажем, что отсюда следует существование единственного решения задачи (1), (2) при $p_2(t) \equiv 0$ и асимптотическая оценка этого решения для $0 \leq \varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$, где ε_2 будет определено при вычислении этой оценки.

Полагая $p_2(t) \equiv 0$, получим задачу:

$$\dot{z}(t, \varepsilon) = \varepsilon X(t, z_1(t - p_1(t), \varepsilon), z_2(t, \varepsilon), z_2(t, \varepsilon)), \quad (11)$$

$$z_1|_{t \in [-\Delta_1, 0]} = \theta_1(t), \quad z_2(T, \varepsilon) = \theta_2(T). \quad (12)$$

Задача (6), (7) для любого положительного $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ имеет решение $y(t, \varepsilon)$ такое, что

$$y_2(t, \varepsilon) \Big|_{t=0} = y_2(0, \varepsilon). \quad (13)$$

Вспользуемся вектором $y_2(0, \varepsilon)$ и наряду с краевой задачей (11), (12) введем начальную задачу, для которой краевое условие по $z_2(T, \varepsilon)$ заменено начальным условием

$$z_2(0, \varepsilon) = y_2(0, \varepsilon). \quad (14)$$

Сравним задачи (6), (7), (13) и (11), (12), (14). Первая из них имеет единственное решение, что влечет существование единственного решения задачи (11), (12), (14), которое легко получить, например, методом шагов с шагом Δ_1 .

Обозначим решение задачи (11), (12), (14) через $z(t, \varepsilon)$. Как и в лемме II.1[4], положим

$$p = \max_{t \in [0, \Delta_1]} \|\bar{z}(t - p_1(t), \varepsilon) - y(t, \varepsilon)\|$$

и сравним решения $\bar{z}(t, \varepsilon)$ и $y(t, \varepsilon)$:

$$\|\bar{z}(t, \varepsilon) - y(t, \varepsilon)\| \leq M_1 \int_0^t \left\{ \|\bar{z}(s - p_1(s), \varepsilon) - y(s, \varepsilon)\| + 2\|\bar{z}(s, \varepsilon) - y(s, \varepsilon)\| \right\} ds \leq$$

$$\leq 2\varepsilon M_1 \int_0^t \|\bar{z}(s, \varepsilon) - y(s, \varepsilon)\| ds + \varepsilon M_1 \int_0^{\Delta_1} \|\bar{z}(s - p_1(s), \varepsilon) - y(s, \varepsilon)\| ds +$$

$$+ \varepsilon M_1 \int_{\Delta_1}^t \|\bar{z}(s - p_1(s), \varepsilon) - \bar{z}(s, \varepsilon) + \bar{z}(s, \varepsilon) - y(s, \varepsilon)\| ds.$$

Так как

$$\|\bar{z}(s, \varepsilon) - \bar{z}(s - p_1(s), \varepsilon)\| \leq \varepsilon \int_0^{\Delta_1} \|X(t, \bar{z}(t - p_1(t), \varepsilon), \bar{z}(t, \varepsilon), \bar{z}(t, \varepsilon))\| dt \leq M_0 \Delta_1,$$

$$\int_{\Delta_1}^t \|\bar{z}(s - p_1(s), \varepsilon) - \bar{z}(s, \varepsilon)\| ds \leq \int_{\Delta_1}^t M_0 \Delta_1 ds \leq M_0 L \Delta_1,$$

то

$$\|\bar{z}(t, \varepsilon) - y(t, \varepsilon)\| \leq \varepsilon M_1 P \Delta_1 + \varepsilon M_0 M_1 L \Delta_1 + 3\varepsilon M_1 \int_0^t \|\bar{z}(s, \varepsilon) - y(s, \varepsilon)\| ds.$$

Применив лемму Гронуолла-Беллмана, получим из этого неравенства для любого $t \in I$:

$$\|\bar{z}(t, \varepsilon) - y(t, \varepsilon)\| \leq \varepsilon M_1 \Delta_1 (P + M_0 L) \exp(3M_1 L) < C\varepsilon, \quad (15)$$

где $C = \text{const}$, $C > M_1 \Delta_1 (P + M_0 L) \exp(3M_1 L)$.

Таким образом, $\bar{z}_2(T, \varepsilon)$ сколь угодно мало отклоняется от $0_2(T)$. Из условия 3) теоремы 1 следует [3], что решение уравнения (6) с начальным условием $y(0, \varepsilon, x^0) = x^0 \in D^0$ определено для $t \in I$ и лежит с ρ -окрестностью в D , а из условия 5) следует, что решение $y(t, \varepsilon, y^0)$ уравнения (6), где $y^0 = (y_1(0, \varepsilon)', y_2(0, \varepsilon)')$, в силу теоремы о неявных функциях таково [3], что выполняется условие

$$\det(\partial y_2(t, \varepsilon, y_0) / \partial y_2(0, \varepsilon)) \neq 0. \quad (3.0)_{\varepsilon} = \dots (3.1) \quad (16)$$

Как неравенство (16) получено из неравенства (8), так же из (16) следует для решения уравнения (11):

$$\det(\partial z_2(t, \varepsilon, \theta_1(0), y_2(0, \varepsilon)) / \partial y_2(0, \varepsilon)) \neq 0. \quad (17)$$

Из (17) и сколь угодно малого отклонения $z_2(T, \varepsilon)$ от $\theta_2(T)$ следует существование $z_2(0, \varepsilon)$ такого, что единственное решение $z(t, \varepsilon)$ уравнения (11) с начальным условием (12), и $z_{|t=0} = z_2(0, \varepsilon)$ таково, что $z_2(t, \varepsilon)|_{t=T} = \theta_2(T)$, т.е. $z(t, \varepsilon)$ оказывается единственным решением задачи (11), (12). Учитывая неравенство (10), для любого $\eta > 0$ найдем $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1]$ такое, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$ существует единственное решение $z(t, \varepsilon)$ задачи (11), (12), для которого выполняется неравенство

$$\|z(t, \varepsilon) - x(\varepsilon t)\| < \eta. \quad (18)$$

Исходя из решения $z(t, \varepsilon)$ задачи (11), (12), рассмотрим существование решения $x(t, \varepsilon)$ исходной задачи (1), (2) и доказательство исходного неравенства (9). Для этого применим метод последовательных приближений Пикара.

За нулевое приближение примем решение системы (11), (12):

$$x^0(t, \varepsilon) = z(t, \varepsilon). \quad (19)$$

Построим последовательность приближенных решений задачи (1), (2) по правилу:

$$x^i(t, \varepsilon) = \varepsilon X(t, x_1^i(t - p_1(t), \varepsilon), x^i(t, \varepsilon), x_2^{i-1}(t + p_2(t), \varepsilon)), \quad (20)$$

$$x^i|_{t \in [-\Delta_1, 0]} = \theta_1(t), \quad x_2^i(T, \varepsilon) = \theta_2(T), \quad (21)$$

где

$$x_2^{i-1}|_{t \in [T, T + \Delta_2]} = \theta_2(t), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (22)$$

В (20) правая часть X зависит от функции $x_2^{i-1}(t + p_2(t), \varepsilon)$, которая доопределена в (22), и это известная функция от t и ε , так что задача (20)–(22) есть задача типа (11), (12), в которой, однако, имеется явная зависимость X от ε . Но в силу условия 1) и свойств решения уравнения (11) эта зависимость не меняет асимптотических характеристик решения, так что в силу неравенства (18) для любого $\eta > 0$ найдется $\varepsilon_2' \in (0, \varepsilon_2]$ такое, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2']$ и $t \in I$

$$\|x^i(t, \varepsilon) - \bar{x}(\varepsilon t)\| < \eta, \quad (23)$$

где ε_2' есть ε_2 для неравенства (18), когда $z(t, \varepsilon) = x^i(t, \varepsilon)$.

Рассмотрим функциональные ряды, i -тые частичные суммы которых равны $x^i(t, \varepsilon)$:

$$x^0(t, \varepsilon) + [x^1(t, \varepsilon) - x^0(t, \varepsilon)] + \dots + [x^i(t, \varepsilon) - x^{i-1}(t, \varepsilon)] + \dots \quad (24)$$

Оценим каждый член ряда отдельно для $x_1^i(t, \varepsilon)$ и отдельно для $x_2^i(t, \varepsilon)$. Из (23) получим $\|x^{i+1}(t, \varepsilon) - x^i(t, \varepsilon)\| < \eta$, однако этого недостаточно для обоснования сходимости ряда (24) и требуется усилить эти оценки.

Имеем для $x^0(t, \varepsilon)$:
 $\|x_1^0(t, \varepsilon)\| \leq \|\theta_1(0)\| + M_0 \tau, \quad \|x_2^0(t, \varepsilon)\| \leq \|\theta_2(T)\| + M_0(L - \tau),$ где $\tau \in [0, L], \tau = \varepsilon t$.

Будем считать, для определенности, что $\tau \geq L/2$ (для $0 < \tau < L/2$ выкладки аналогичны) и что $\|x\|_3 = \|x\|_2$, т.к. $\|x\|_3 \leq \sqrt{2n} \|x\|_1 \leq 2n \|x\|_2$ [4]. Тогда

$$\|x^0(t, \varepsilon)\| \leq C + M_0 \tau, \text{ где } C = \max\{\|\theta_1(0), \theta_2(T)\|\}. \quad (25)$$

Далее

$$\begin{aligned} \|x_1^1(t, \varepsilon) - x_1^0(t, \varepsilon)\| &\leq \varepsilon \int_0^t \|X_1(t, x_1^1(t - p_1(t), \varepsilon), x^1(t, \varepsilon), x_2^0(t + p_2(t), \varepsilon)) - \\ &- X_1(t, x_1^0(t, \varepsilon), x_2^0(t, \varepsilon))\| dt \leq \varepsilon M_1 \int_0^t [\|x_1^1(t - p_1(t), \varepsilon) - x_1^0(t, \varepsilon)\| + 2\|x^1(t, \varepsilon) - x^0(t, \varepsilon)\| + \\ &+ \|x_2^0(t + p_2(t), \varepsilon) - x_2^0(t, \varepsilon)\|] dt \leq \varepsilon M_1 \int_0^t [M_0(\Delta_1 + \Delta_2) + 2\|x^1(t, \varepsilon) - x^0(t, \varepsilon)\|] dt. \end{aligned}$$

Аналогично оценим $\|x_2^1(t, \varepsilon) - x_2^0(t, \varepsilon)\|$, так что окончательно получим:

$$\|x^1(t, \varepsilon) - x^0(t, \varepsilon)\| \leq CM_1 \exp(2M_1 L) \tau, \quad (26)$$

где C — положительная постоянная.

Далее,

$$\begin{aligned} \|x_1^2(t, \varepsilon) - x_1^1(t, \varepsilon)\| &\leq \varepsilon \int_0^t \|X_1(t, x_1^2(t - p_1(t), \varepsilon), x^2(t, \varepsilon), x_2^1(t - p_2(t), \varepsilon)) - \\ &- X_1(t, x_1^1(t - p_1(t), \varepsilon), x^1(t, \varepsilon), x_2^0(t - p_2(t), \varepsilon))\| dt \leq \\ &\leq \varepsilon M_1 \int_0^t [\|x_1^2(t - p_1(t), \varepsilon) - x_1^1(t - p_1(t), \varepsilon)\| + \|x^2(t, \varepsilon) - x^1(t, \varepsilon)\| + \\ &+ \|x_2^1(t - p_2(t), \varepsilon) - x_2^0(t - p_2(t), \varepsilon)\|] dt \leq \varepsilon M_1 \int_0^t [CM_1 \exp(2M_1 L) \tau + 2\|x^2(t, \varepsilon) - x^1(t, \varepsilon)\|] dt. \end{aligned}$$

Аналогично оценим $\|x_2^2(t, \varepsilon) - x_2^1(t, \varepsilon)\|$, так что окончательно получим:

$$\|x^2(t, \varepsilon) - x^1(t, \varepsilon)\| \leq \frac{C}{2!} [M_1 \tau \exp(2M_1 L)]^2. \quad (27)$$

Продолжая так далее, получим:

$$\|x^i(t, \varepsilon) - x^{i-1}(t, \varepsilon)\| \leq \frac{C}{i!} M_1^i \tau^i \exp(2iM_1 L). \quad (28)$$

Ряд (24) мажорируется числовым рядом

$$C + M_0 L + C \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[M_1 L \exp(\tau M_1 L)]^i}{i!}. \quad (29)$$

Обозначим через $\varepsilon^0 > 0$ величину $\inf \varepsilon_2^i, i = 1, 2, \dots$. Очевидно, что для $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ сумма ряда есть решение задачи (1), (2) $x(t, \varepsilon)$. Так как $x^1(t, \varepsilon)$ удовлетворяет неравенству (23), то и $x(t, \varepsilon)$ также удовлетворяет неравенству (23), это соответствует искомому неравенству (9), что и требовалось.

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть в области Q выполнены условия 1), 2), 6) теоремы 1 и следующие условия:

3') решение $x(\tau, x^1)$ уравнения (3) с дополнительным условием

$$\dot{x}(L, x^1) = x^1 \in D^1 \subset D$$

определено для $\tau \in [0, L]$ и лежит вместе с ρ -окрестностью в D ;

4') задача (3), (4) имеет решение $\bar{x}(\tau)$ такое, что $x^1 = \bar{x}(L) \in \text{int } D^1$;

5') решение $x(\tau, \bar{x}^1)$ уравнения (3) таково, что

$$\det(\partial x_1(\theta, x^1) / \partial x_1^1) \neq 0.$$

Тогда для любого $\eta > 0$ существует такое $\varepsilon^1 = \varepsilon^1(\eta) > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon^1]$ равномерно для $t \in I$ имеет место неравенство (9).

Доказательство. Выполним замсну независимой переменной $t_2 = T - t$. Тогда для задач (1), (2) и (3), (4) выполнены все условия теоремы 1, и неравенство (9) примет вид

$$\|x(T - t_1, \varepsilon) - \bar{x}(\varepsilon(T - t_1))\| < \eta$$

и будет справедливым в силу теоремы 1. При этом для $t_1 \in [0, T]$ слева на интервале $[-\Delta_2, 0]$ определена функция $O_2(T - t_1)$ и справа на интервале $[T, T + \Delta_1]$ определена функция $\theta_1(T - t_1)$, так что в доказательстве вместо θ_1 будет θ_2 и наоборот.

Теорема доказана.

Заключение. Таким образом, асимптотическое решение задачи (1), (2) при выполнении условий теоремы 1 или условий теоремы 2 есть решение усредненной задачи (3), (4), у которой проще вид и решение.

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. - Минск: Наука и техника, - 1974. - 272 с.
2. Желтиков В.П., Эфендиев В.В. Усреднение красвых задач в управлении стандартной системой с запаздыванием // Украинський математичний журнал. - 1996. - Т.48. №4. - С.548-553.
3. Плотников В.А. Метод усреднения в задачах управления. - Киев:Одесса: Лыбидь, 1992. - 188 с.
4. Филатов А.Н. Асимптотические методы в теории дифференциальных уравнений. - Ташкент: Фан, 1974. - 216 с.
5. Филатов А.Н., Шарова Л.В. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. - М.: Наука, 1976. - 152 с.