Вісник Одеськ. держ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат.науки.– 1999.– Т.4, вип.4.– С.130–133.

УДК 517.928

О. Д. Кичмаренко
Одесский государственный университет им. И. И. Мечникова

# ОБОСНОВАНИЕ СХЕМЫ ЧАСТИЧНОГО УСРЕДНЕНИЯ

В статті доведено теорему про асимптотичну близькість розв'язків диференціальних рівнянь з асимптотично інтегрально-еквівалентними правими частинами, яка дозволяє отримати обгрунтування схеми часткового усереднення.

В статье доказана теорема об асимптотической близости решений дифференциальных уравнений с асимптотически интегрально-эквивалентными правыми частями, позволяющая получить обоснование схемы частичного усреднения.

In the present article the theorem on asymptotic proximity of solutions the differential equation with asymptotically integral-equivalent right-hand parts is proved. It allows to get the basing of the partial averaging sequence.

Теорема Боголюбова Н.Н. (первая основная теорема) [1], посвященная обоснованию принципа усреднения на конечном временном интервале, была обобщена многими авторами для более широкого класса уравнений [2–7]. В работах [2–4] были доказаны теоремы об интегральной непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt} = X(t,x,\lambda)$ от параметра, из которых можно вывести теорему о непрерывной зависимости решения от параметра, а также первую основную теорему Н.Н. Боголюбова.

В работе предлагается некоторая модификация данного подхода, позволяющая рассматривать более широкий класс функций $X(t,x,\lambda)$, а также получить как следствие обоснование общей схемы частичного усреднения [5–7].

**1. Дифференциальные уравнения с асимптотически интегрально-эквивалентными правыми частями.**

**Определение.** *Пусть $X_1(t,x,\lambda)$, $X_2(t,x,\lambda)$ – вектор-функции, определенные в области $Q = \{t \in [0,T], x \in D \subset R^n, \lambda \in \Lambda\}$. Будем говорить, что $X_1(t,x,\lambda)$ и $X_2(t,x,\lambda)$ асимптотически интегрально-эквивалентны в области $Q$ по параметру $\lambda$ в точке сгущения $\lambda_0 \in \Lambda$, если для любого $t \in [0,T]$ и для любого $x \in D$ выполняется:*

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\left\|\int_0^t X_1(\tau,x,\lambda)d\tau - \int_0^t X_2(\tau,x,\lambda)d\tau\right\| = 0. \qquad (1)$$

Рассмотрим в области $Q$ дифференциальные уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = X_1(t,x,\lambda) \qquad (2)$$

$$\frac{dy}{dt} = X_2(t,x,\lambda). \qquad (3)$$

**Теорема.** *Пусть $X_1(t,x,\lambda)$, $X_2(t,x,\lambda)$ определены в области $Q$, $\lambda_0$ – предельная точка множества $\Lambda$ и выполнены следующие условия:*

1) *$X_1(t,x,\lambda)$, $X_2(t,x,\lambda)$ равномерно ограничены, непрерывны по $t$ и удовлетворяют условию Липшица по $x$ с константой $\mu$;*

2) *равномерно относительно $t$ и $x$ в области $Q$ выполняется условие* (1);

3) *решение уравнения* (2) *при $|\lambda - \lambda_0| < \sigma$ вместе с $\rho$-окрестностью содержится в $D$.*

*Тогда для любого* $\eta > 0$ *существует* $\sigma > 0$ *такое, что для любого* $\lambda$, *удовлетворяющего условию* $|\lambda - \lambda_0| < \sigma$ *и для любого* $t \in [0, T]$ *справедливо неравенство:*

$$\|x(t) - y(t)\| < \eta,$$

*где* $x(t)$ *- решение уравнения* (2), $y(t)$ *- решение уравнения* (3) *и* $x(0) = y(0)$.

**Доказательство.** Представим решения уравнений (2), (3) в виде интегральных уравнений:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t X_1(\tau, x(\tau), \lambda) d\tau, \tag{4}$$

$$y(t) = y(0) + \int_0^t X_2(\tau, y(\tau), \lambda) d\tau. \tag{5}$$

Оценим

$$\|x(t) - y(t)\| \le \left\| \int_0^t X_1(\tau, x(\tau), \lambda) d\tau - \int_0^t X_2(\tau, y(\tau), \lambda) d\tau \right\| \le$$

$$\le \int_0^t \|X_1(\tau, x(\tau), \lambda) - X_1(\tau, y(\tau), \lambda)\| d\tau + \left\| \int_0^t X_1(\tau, y(\tau), \lambda) d\tau - \int_0^t X_2(\tau, y(\tau), \lambda) d\tau \right\| \le$$

$$\le \mu \int_0^t \|x(\tau) - y(\tau)\| d\tau + \left\| \int_0^t X_1(\tau, y(\tau), \lambda) d\tau - \int_0^t X_2(\tau, y(\tau), \lambda) d\tau \right\|.$$

По лемме Гронуола-Белмана

$$\|x(t) - y(t)\| \le e^{\mu T} \left\| \int_0^t [X_1(\tau, y(\tau), \lambda) - X_2(\tau, y(\tau), \lambda)] d\tau \right\|. \tag{6}$$

Для получения оценки правой части неравенства (6) разобьем отрезок $[0, T]$ на $m$ частей: $t_i = Tim^{-1}$, $i = \overline{0, m}$.

Тогда

$$\left\| \int_0^t [X_1(\tau, y(\tau), \lambda) - X_2(\tau, y(\tau), \lambda)] d\tau \right\| \le$$

$$\le \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [X_1(\tau, y(\tau), \lambda) - X_2(\tau, y(\tau), \lambda)] d\tau + \int_{t_k}^{t} [X_1(\tau, y(\tau), \lambda) - X_2(\tau, y(\tau), \lambda)] d\tau \right\| \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{k-1} \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} [X_1(\tau, y(\tau), \lambda) - X_2(\tau, y(\tau), \lambda)] d\tau \right\| + \int_{t_k}^{t} \|X_1(\tau, y(\tau), \lambda) - X_2(\tau, y(\tau), \lambda)\| d\tau \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{k-1} \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} [X_1(\tau, y(t_i), \lambda) - X_2(\tau, y(t_i), \lambda)] d\tau \right\| + \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|X_1(\tau, y(\tau), \lambda) - X_1(\tau, y(t_i), \lambda)\| d\tau +$$

$$+ \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|X_2(\tau, y(\tau), \lambda) - X_2(\tau, y(t_i), \lambda)\| d\tau + \int_{t_k}^{t} \|X_1(\tau, y(\tau), \lambda) - X_2(\tau, y(\tau), \lambda)\| d\tau.$$

Оценим каждое слагаемое.

В силу равномерности (1) для любого $\eta_1 > 0$ существует $\sigma > 0$ такое, что при $\|\lambda - \lambda_0\| \le \sigma$ выполняется неравенство

$$\left\| \int_0^{t} [X_1(\tau, y(t_i), \lambda) - X_2(\tau, y(t_i), \lambda)] d\tau \right\| \le \eta_1.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=0}^{k-1} \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} [X_1(\tau, y(t_i), \lambda) - X_2(\tau, y(t_i), \lambda)] d\tau \right\| \le \sum_{i=0}^{k-1} \left\| \int_0^{t_{i+1}} [X_1(\tau, y(t_i), \lambda) - X_2(\tau, y(t_i), \lambda)] d\tau \right\| +$$

$$+ \sum_{i=0}^{k-1} \left\| \int_0^{t_i} [X_1(\tau, y(t_i), \lambda) - X_2(\tau, y(t_i), \lambda)] d\tau \right\| \le 2\eta_1 m.$$

Из условия 1) теоремы имеем:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \| X_1(\tau, y(\tau), \lambda) - X_1(\tau, y(t_i), \lambda) \| d\tau \le \mu \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \| y(\tau) - y(t_i) \| d\tau \le \frac{\mu M L^2}{m},$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \| X_2(\tau, y(\tau), \lambda) - X_2(\tau, y(t_i), \lambda) \| d\tau \le \mu \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \| y(\tau) - y(t_i) \| d\tau \le \frac{\mu M L^2}{m},$$

$$\int_{t_k}^{t} \| X_1(\tau, y(\tau), \lambda) - X_2(\tau, y(\tau), \lambda) \| d\tau \le 2M \frac{L}{m}.$$

Итак, имеем:

$$\left\| \int_0^{t} [X_1(\tau, y(\tau), \lambda) - X_2(\tau, y(\tau), \lambda)] d\tau \right\| \le 2\eta_1 m + \frac{2ML}{m} (\mu L + 1).$$

Тогда

$$\| x(t) - y(t) \| \le e^{\lambda T} \frac{2}{m} ML(\mu L + 1) + e^{\lambda T} 2\eta_1 m.$$

Выбирая $m > \dfrac{e^{\mu T} 4ML(\mu L + 1)}{\eta}$, а $\eta_1 > \dfrac{\eta e^{-\mu T}}{4m}$, получим утверждение теоремы.

**Замечание 1.** Если в области $Q$ равномерно относительно $x$, $t$ выполняется условие

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_t^{t+\tau} X_1(s, x, \lambda) ds = \int_t^{t+\tau} X_1(s, x, \lambda_0) ds,$$

где $0 \le t < t + \tau \le T$ то, взяв $X_2(s, x, \lambda) = X_1(s, x, \lambda_0)$, получим теорему И.И. Гихмана [2] об интегральной непрерывной зависимости решений и обоснование схемы полного усреднения.

**Замечание 2.** Если в уравнениях

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x) \qquad (7)$$

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon \tilde{X}(t, y), \tag{8}$$

где

$$\lim_{T\to\infty}\left\| \frac{1}{T}\int_0^T X(t,y)dt - \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{X}(t,y)dt \right\| = 0, \quad t \in [o, L\varepsilon^{-1}], \tag{9}$$

сделать замену $\tau = \varepsilon t$, то получим следующие системы уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = X\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x\right), \tag{10}$$

$$\frac{dy}{dt} = \tilde{X}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y\right), \tag{11}$$

и

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\| \int_0^\tau X\left(\frac{s}{\varepsilon}, x\right)ds - \int_0^\tau \tilde{X}\left(\frac{s}{\varepsilon}, x\right)ds \right\| = 0. \tag{12}$$

Таким образом, применяя доказанную теорему к уравнениям (10), (11), получаем обоснование схемы частичного усреднения (7)–(9).


1. **Митропольский В.А.** Метод усреднения в нелинейной механике. - К.: Наук. думка, 1971. – 440 с.
2. **Гихман И.И.** По поводу одной теоремы Н.Н.Боголюбова //Укр. матем. журнал. – 1952. – Т.4, № 2. – С.215–219.
3. **Демидович Б.П.** Об одном обобщении принципа усреднения Н.Н. Боголюбова //ДАН СССР. - 1954. – Т.96, № 4. – С.693–694.
4. **Красносельский М.А., Крейн С.Г.** О принципе усреднения в нелинейной механике //УМН. – 1955. - Т.10,№3 (65). - С.147–152.
5. **Митропольский В.А., Хома Г.Л.** Математическое обоснование асимптотических методов нелинейной механики. К.: Наук. думка, 1983.- 216 с.
6. **Плотников В.А.** Метод усреднения в задачах управления. – Киев: Одесса: Лыбидь, 1992. - 188 с.
7. **Плотников В.А., Яровой А.Т.** Обоснование одной схемы усреднения для систем стандартного вида // Укр. матем. журнал. – 1979. – Т.31, № 2. – С.166–171.