

УДК 531.55:521.2

Д. Д. Лещенко*, А. Л. Рачинская**

*Одесская государственная академия строительства и архитектуры

**Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

ДВИЖЕНИЕ СПУТНИКА ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС ПОД ДЕЙСТВИЕМ МОМЕНТА СИЛ СВЕТОВОГО ДАВЛЕНИЯ В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Лещенко Д. Д., Рачинська А. Л. Рух супутника відносно центра мас під дією моменту сил світлового тиску в середовищі з опором. Досліджується швидкий обертальний рух супутника відносно центра мас під дією моментів сил світлового тиску та опору. Тіло припускається несиметричним, а його поверхня є поверхнею обертання. Момент сил опору припускається лінійною функцією кутової швидкості. Аналізується система, яка одержана після усереднення по руху Ейлера-Пуансо.

Ключові слова: супутник, світловий тиск, опір, усереднення.

Лещенко Д. Д., Рачинская А. Л. Движение спутника относительно центра масс под действием момента сил светового давления в сопротивляющейся среде. Исследуется быстрое вращательное движение спутника относительно центра масс под действием моментов сил светового давления и сопротивления. Тело предполагается несимметричным, а его поверхность является поверхностью вращения. Момент сил сопротивления предполагается линейной функцией угловой скорости. Анализируется система, полученная после усреднения по движению Эйлера-Пуансо.

Ключевые слова: спутник, световое давление, сопротивление, усреднение.

Leshchenko D. D., Rachinskaya A. L. Motion of a satellite relative to the centre of mass under the action of light pressure torque in a resistive medium. We investigate fast rotational motion of a satellite relative to centre of mass under the action of torque of light pressure forces and torque of resistive forces. We assume that the body is asymmetrical and its surface is a surface of revolution. The torque of the resistive forces is assumed to be a linear function of the angular velocity. The system obtained after averaging with respect to Euler-Poinsot motion is analyzed.

Key words: satellite, light pressure, resistance, averaging.

ВВЕДЕНИЕ. Рассмотрим движение спутника относительно центра масс под действием совместного влияния моментов сил светового давления и сопротивления. Вращательные движения рассматриваются в рамках модели динамики твердого тела, центр масс которого движется по эллиптической орбите вокруг Солнца. Задачи динамики обобщаются и усложняются учетом различных возмущающих факторов, и в настоящее время остаются достаточно актуальными. Исследованию вращательных движений тел относительно неподвижной точки под действием возмущающих моментов сил различной природы (гравитационных, аэродинамических, светового давления и др.), близкому к приводимому ниже, посвящены работы [1-6].

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

1. Постановка задачи. Введем три правых декартовых системы координат, начало которых совместим с центром инерции спутника [1, 2]. Система

координат Ox_i ($i = 1, 2, 3$) движется поступательно по орбите Солнца вместе со спутником; ось Ox_1 параллельна радиусу-вектору орбиты в ее перигелии, ось Ox_2 — направлению вектора скорости центра масс спутника в перигелии, ось Ox_3 — нормали к плоскости орбиты.

Система координат Oy_i ($i = 1, 2, 3$) связана с вектором кинетического момента спутника. Ось Oy_3 направлена по вектору кинетического момента \mathbf{G} , ось Oy_2 лежит в плоскости орбиты (т.е. в плоскости Ox_1x_2), ось Oy_1 лежит в плоскости Ox_3y_3 и направлена так, что векторы $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$ образуют правую тройку [1-3]. Оси системы координат Oz_i ($i = 1, 2, 3$) связаны с главными центральными осями инерции твердого тела. Взаимное положение главных центральных осей инерции и осей Oy_i определим углами Эйлера. При этом направляющие косинусы α_{ij} осей Oz_i относительно системы Oy_i выражаются через углы Эйлера φ, ψ, θ по известным формулам [1]. Положение вектора кинетического момента \mathbf{G} относительно его центра масс в системе координат Ox_i определяются углами λ и δ , как показано в [1-3].

Уравнения движения тела относительно центра масс запишем в форме [2]:

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= L_3; & \frac{d\delta}{dt} &= \frac{L_1}{G}; & \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{L_2}{G \sin \delta}; \\ \frac{d\theta}{dt} &= G \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) + \frac{L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi}{G}; \\ \frac{d\varphi}{dt} &= G \cos \theta \left(\frac{1}{A_3} - \frac{\sin^2 \varphi}{A_1} - \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} \right) + \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G \sin \theta}; \\ \frac{d\psi}{dt} &= G \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A_1} + \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} \right) - \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G} \operatorname{ctg} \theta - \frac{L_2}{G} \operatorname{ctg} \delta. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь L_i — моменты внешних сил относительно осей Oy_i , G — величина кинетического момента, A_i ($i = 1, 2, 3$) — главные центральные моменты инерции относительно осей Oz_i .

Проекции L_i момента внешних сил, складываются из момента сил светового давления L_i^c и момента сил внешнего сопротивления L_i^r .

Допустим, что поверхность космического аппарата представляет собой поверхность вращения, причем единичный орт оси симметрии \mathbf{k} направлен вдоль оси Oz_3 . Как показано в [1], в этом случае для момента сил светового давления L_i^c , действующего на спутник, имеет место формула

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^c &= (a_c(\varepsilon_s) R_0^2 / R^2) \mathbf{e}_r \times \mathbf{k}; \\ a_c(\varepsilon_s) \frac{R_0^2}{R^2} &= p_c S(\varepsilon_s) Z'_0(\varepsilon_s); & p_c &= \frac{E_0}{c} \left(\frac{R_0}{R} \right)^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь \mathbf{e}_r — единичный вектор по направлению радиус-вектора орбиты; ε_s — угол между направлениями \mathbf{e}_r и \mathbf{k} так, что $|\mathbf{e}_r \times \mathbf{k}| = \sin \varepsilon_s$; R — текущее расстояние от центра Солнца до центра масс спутника; R_0 — фиксированное значение R , например, в начальный момент времени; $a_c(\varepsilon_s)$ — коэффициент момента сил светового давления, определяемый свойствами поверхности; S — площадь “тени” на плоскости, нормальной к потоку; Z'_0 — расстояние от центра масс до центра давления; p_c — величина светового давления на расстоянии R от центра Солнца; c — скорость света; E_0 — величина потока энергии светового давления на расстоянии

R_0 от центра Солнца. Если R_0 — радиус орбиты Земли, тогда $p_{c0} = 4.64 \cdot 10^{-6}$ Па.

В работе предполагается, что момент сопротивления \mathbf{L}^r может быть представлен в виде $\mathbf{L}^r = I\omega$, где тензор I имеет постоянные компоненты I_{ij} в системе Oz_i , связанной с телом [1,5].

В некоторых случаях удобно, наряду с переменной θ использовать, в качестве дополнительной переменной важную характеристику — кинетическую энергию T , производная которой имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} = \frac{2T}{G}L_3 + G \sin \theta \left[\cos \theta \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A_1} + \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} - \frac{1}{A_3} \right) (L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi) + \right. \\ \left. + \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) (L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi) \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Центр масс спутника движется по кеплеровскому эллипсу с эксцентриситетом e и периодом обращения Q . Зависимость истинной аномалии ν от времени t дается соотношением

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{\omega_0(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}}; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{Q}. \quad (4)$$

Здесь ω_0 — средняя угловая скорость движения центра масс по эллиптической орбите, Q — период обращения спутника, e — эксцентриситет орбиты.

Рассматривается динамически несимметричный спутник, моменты инерции которого для определенности удовлетворяют неравенству $A_1 > A_2 > A_3$ в предположении, что угловая скорость ω движения спутника относительно центра масс существенно больше угловой скорости орбитального движения ω_0 , т.е.

$\varepsilon = \omega_0/\omega \sim A_1\omega_0/G_0 \ll 1$, где G_0 — кинетический момент спутника в начальный момент времени. В этом случае кинетическая энергия вращения тела велика по сравнению с моментами возмущающих сил.

Сопротивление среды предполагаем слабым порядка малости ε^2 : $\|I\|/G_0 \sim \varepsilon^2 \ll 1$, где $\|I\|$ - норма матрицы коэффициентов сопротивления.

Полагаем [1] $a_c = a_c(\cos \varepsilon_s)$ и аппроксимируем ее полиномами по степеням $\cos \varepsilon_s$. Представим функцию $a_c(\cos \varepsilon_s)$ в виде:

$$a_c = a_0 + a_1 \cos \varepsilon_s + \dots$$

Далее рассмотрим только второй член разложения. Предположим также, что $a_1 \sim \varepsilon$.

Ставится задача исследовать решение системы (3), (4) при малом ε на большом промежутке времени $t \sim \varepsilon^{-2}$. Для решения задачи будем применять метод усреднения [7]. Усреднение по движению Эйлера-Пуансо проводится по методике работы [2] для нерезонансных случаев.

2. Решение задачи в общем виде. Рассмотрим движение при условии $2TA_1 \geq G^2 \geq 2TA_2$, соответствующем траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось максимального момента инерции Oz_1 [19]. Введем величину

$$k^2 = \frac{(A_2 - A_3)(2TA_1 - G^2)}{(A_1 - A_2)(G^2 - 2TA_3)}; \quad (0 \leq k^2 \leq 1); \quad (5)$$

представляющую собой в невозмущенном движении постоянную-модуль эллиптических функций, описывающих это движение.

В результате усреднения по ψ , а затем по времени t с учетом зависимости φ, θ от t [2] получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{dt} &= -a_1 R_0^2 (2GR^2)^{-1} H \sin \delta \sin 2(\lambda - \nu); \\ \frac{d\lambda}{dt} &= -a_1 R_0^2 (GR^2)^{-1} H \cos \delta \cos^2(\lambda - \nu); \\ \frac{dG}{dt} &= -\frac{G}{D(k)} \left\{ I_{22}(A_1 - A_3)W(k) + I_{33}(A_1 - A_2)[k^2 - W(k)] + \right. \\ &\quad \left. + I_{11}(A_2 - A_3)[1 - W(k)] \right\}; \\ \frac{dT}{dt} &= -\frac{2T}{D(k)} \left\{ I_{22}(A_1 - A_3)W(k) + I_{33}(A_1 - A_2)[k^2 - W(k)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)(A_2 - A_3)}{V(k)} \left\{ \frac{I_{33}}{A_3}[k^2 - W(k)] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{I_{22}}{A_2}(1 - k^2)W(k) \right\} + \frac{I_{11}(A_2 - A_3)D(k)}{A_1 V(k)} [1 - W(k)] \right\}; \\ W(k) &= 1 - \frac{E(k)}{K(k)}; \quad D(k) = A_1(A_2 - A_3) + A_3(A_1 - A_2)k^2; \\ V(k) &= A_2 - A_3 + (A_1 - A_2)k^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно [9], функция $H(k)$ в первых двух уравнениях равна

$$H = \frac{1}{2} \left[3a^2 \frac{E(k)}{K(k)} - 1 \right], \text{ если } 2TA_2 - G^2 > 0;$$

$$H = \frac{1}{2} \left\{ \frac{3a^2}{k^2} \left[k^2 - 1 + \frac{E(k)}{K(k)} \right] - 1 \right\}, \text{ если } 2TA_2 - G^2 < 0;$$

$$a^2 = \frac{\varepsilon_1 + h}{1 + \varepsilon_1}; \quad \varepsilon_1 = \frac{A_3(A_1 - A_2)}{A_1(A_2 - A_3)}; \quad h = \left(\frac{2T}{G^2} - \frac{1}{A_2} \right) \frac{A_2 A_3}{A_2 - A_3}.$$

Дифференцируя выражение (5) для k^2 и используя два последних уравнения (6), получим дифференциальное уравнение, которое не зависит от других переменных:

$$\begin{aligned} \frac{dk^2}{d\xi} &= (1 - \chi)(1 - k^2) - [(1 - \chi) + (1 + \chi)k^2] \frac{E(k)}{K(k)}; \\ \chi &= (2I_{22}A_1A_3 - I_{11}A_2A_3 - I_{33}A_1A_2)/[(I_{33}A_1 - I_{11}A_3)A_2]; \\ \xi &= (t - t_*)/N; \quad N = A_1A_3/(I_{33}A_1 - I_{11}A_3) \sim \varepsilon^{-2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Из уравнений (6) следует, что на изменение G и T в первом приближении оказывает влияние только сила сопротивления. В [5] показано, что переменные G и T строго убывают для любых $k^2 \in [0, 1]$.

Отметим, что на эволюцию k^2 оказывает влияние только сопротивление среды. Численное интегрирование уравнения (7) при начальном условии $k^2(0) \approx 1$ показывает [5], что функция k^2 монотонно убывает с ростом ξ , причем тем быстрее, чем больше χ .

Уравнение (7) для k^2 допускает стационарные точки $k^2 = k_*^2$ при $\chi < -3$, когда независимо от G и T величина k^2 в силу уравнения (7) остается постоянной при соответствующем выборе начальных условий [5].

Как известно [3]

$$R = \frac{\rho_0}{1 + e \cos \nu},$$

а фокальный параметр орбиты определяется равенством

$$\rho_0 = \frac{\mu^{1/3}(1 - e^2)}{\omega_0^{2/3}},$$

где μ — гравитационная постоянная.

Тогда первые два уравнения системы (6) примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{dt} &= -\frac{a_1 R_0^2 \omega_0^{4/3} (1 + e \cos \nu)^2}{2G \mu^{2/3} (1 - e^2)^2} H \sin \delta \sin 2(\lambda - \nu); \\ \frac{d\lambda}{dt} &= -\frac{a_1 R_0^2 \omega_0^{4/3} (1 + e \cos \nu)^2}{G \mu^{2/3} (1 - e^2)^2} H \cos \delta \cos^2(\lambda - \nu); \end{aligned} \quad (8)$$

Рассмотрим эти два уравнения и уравнение для истинной аномалии (4). Уравнения можно записать в виде:

$$\dot{\delta} = a_1 \omega_0^{4/3} \Delta(\nu, \delta, \lambda); \quad \dot{\lambda} = a_1 \omega_0^{4/3} \Lambda(\nu, \delta, \lambda),$$

где предполагается $a_1 \omega_0^{4/3} \sim \varepsilon^2$.

$$\dot{\nu} = \frac{\omega_0}{h(e)} (1 + e \cos \nu)^2; \quad h(e) = (1 - e^2)^{3/2}.$$

Здесь Δ, Λ — правые части этих уравнений; δ, λ — медленные переменные, а ν — полумедленная. Применяем модифицированный метод усреднения [10] и имеем:

$$\dot{\delta} = 0, \quad \dot{\lambda} = -\frac{a_1 R_0^2 \omega_0^{4/3} H \cos \delta}{2\mu^{2/3} G (1 - e^2)^{1/2}}. \quad (9)$$

Численно проинтегрируем систему из двух уравнений (9) для δ, λ , уравнений для G, T системы (6), уравнения для ν (4) и уравнения для k^2

$$\begin{aligned} \frac{dk^2}{dt} &= \frac{I_{33} A_1 - I_{11} A_3}{A_1 A_3} \left\{ (1 - \chi) (1 - k^2) - [(1 - \chi) + (1 + \chi) k^2] \frac{E(k)}{K(k)} \right\}; \\ \chi &= (2I_{22} A_1 A_3 - I_{11} A_2 A_3 - I_{33} A_1 A_2) / [(I_{33} A_1 - I_{11} A_3) A_2]. \end{aligned} \quad (10)$$

Интегрирование производилось при начальных условиях $G(0) = 1$; $k^2(0) = 0.99$; $\omega(0) = 0.0011775$ рад/с; $\delta(0) = 0.785$ рад; $\lambda(0) = 0.785$ рад и значениях главных центральных моментов инерции тела $A_1 = 3.2$; $A_2 = 2.6$; $A_3 = 1.67$. Численный расчет выполнялся для орбиты спутника "Протон-2" с эксцентриситетом $e = 0.033$. Для коэффициентов сопротивления рассматривались два возможных варианта: $I_{11} = 2.322$; $I_{22} = 1.31$; $I_{33} = 1.425$ и $I_{11} = 0.919$; $I_{22} = 5.228$; $I_{33} = 1.666$. В первом случае величина χ уравнения (2.6) была отрицательной -4.474 , а во втором 3.852 . Величина коэффициента момента сил светового давления $a_1 = 10^{-5}$ Нм, гравитационная постоянная $\mu = 1.327 \cdot 10^{20}$ м³/с²; и начальное расстояние R_0 равно расстоянию между центрами Земли и Солнца — $149.5 \cdot 10^9$ м. Численный анализ показывает, что функции $G(t)$ и $T(t)$ являются монотонно убывающими (кривые 1-2, рис. 1-2).

Видно, что при положительной величине χ (кривые 2 рис. 1-2) функции убывают быстрее, но функция $G(t)$ стремится к асимпote медленнее за больший промежуток времени. Угол δ остается постоянным согласно первому уравнению (9). Угол λ изменяется и графики имеют вид, представленный на рис. 3.

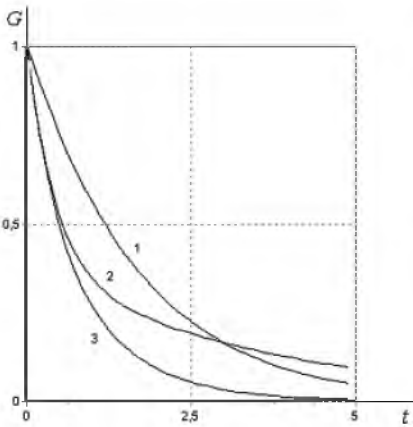


Рис. 1

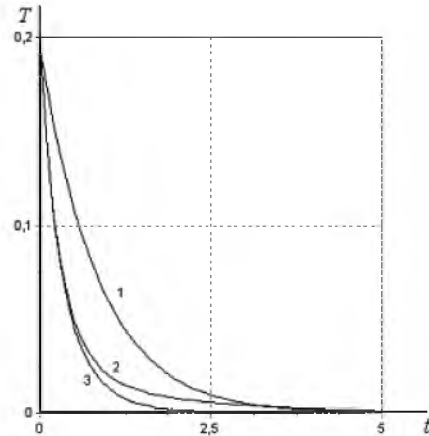


Рис. 2

Кривая 1 соответствует отрицательному значению χ , а кривая 2 — положительному. Как видно из графиков, с увеличением времени угол λ также увеличивается. Проанализируем второе уравнение (9) в случае положительного χ . График модуля эллиптических функций имеет вышеуказанный вид (рис. 4), т.е. $k^2 \rightarrow 0$, а функция $H \rightarrow \frac{1}{2} [3a^2 - 1]$ (6). График изменения величины a имеет вид, представленный на рис. 5.

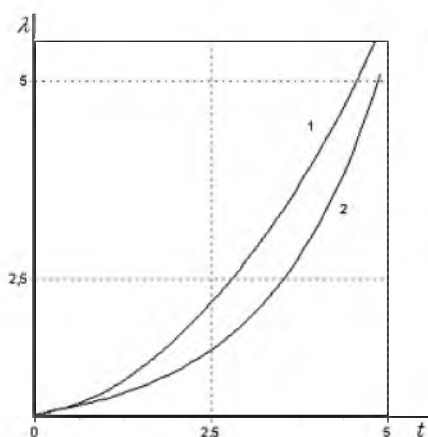


Рис. 3

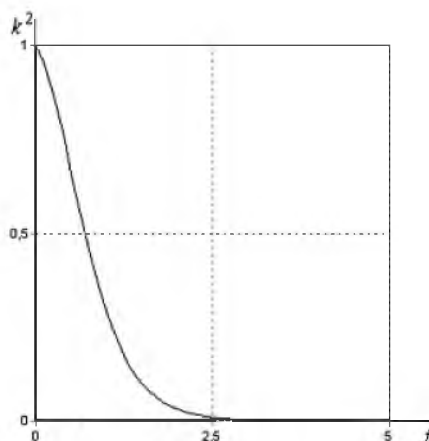


Рис. 4

Видно, что с увеличением времени $a \rightarrow 0$ (рис. 5), а значит функция H должна стремиться к величине -0.5 , что подтверждается численным расчетом (рис. 6).

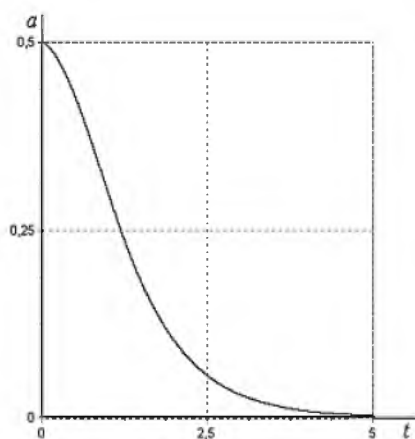


Рис. 5

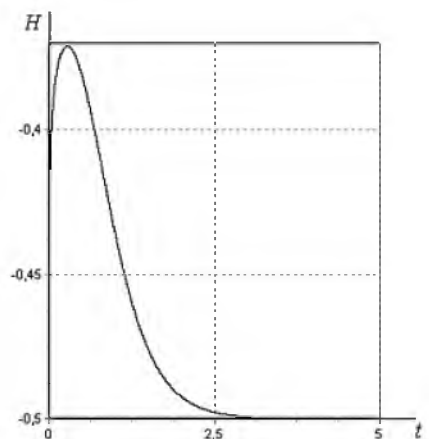


Рис. 6

Рассмотрим движение при условии $2TA_2 \geq G^2 \geq 2TA_3$, соответствующем траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось момента инерции Oz_3 . В этом случае в равенстве (5) и в уравнениях системы (6) необходимо поменять местами A_1 и A_3 , а также I_{11} и I_{33} . Кроме того, величину χ в уравнении (10) заменим на $-\chi$, а в самом уравнении (10) добавим знак “минус”. Начальные условия сохраняют те же значения. Величина χ в обоих расчетных вариантах не изменяется, а функции $G(t)$ и $T(t)$ также являются монотонно убывающими. Как видно из графиков (кривые 1 и 3, рис. 1-2) характер функций сохраняется, как в предыдущей постановке, однако убывание функций происходит быстрее в случае положительного значения величины χ (кривые 3, рис. 1-2).

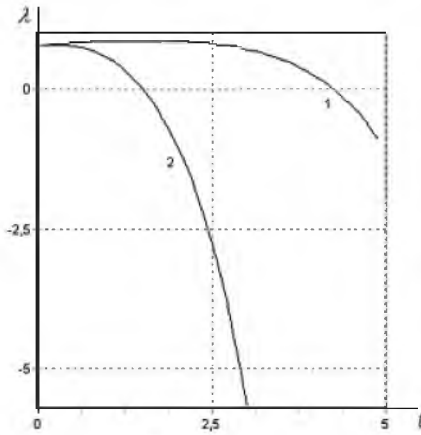


Рис. 7

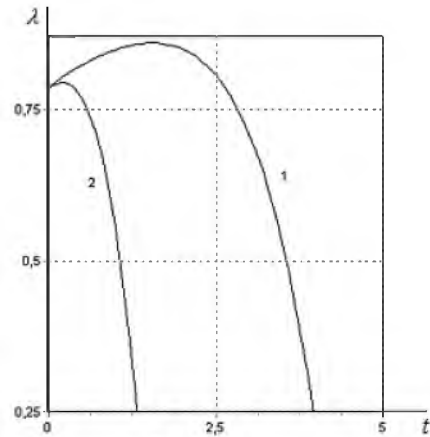


Рис. 8

Угол δ остается постоянным согласно первому уравнению (9). Угол λ изменяется и графики имеют вид, представленный рис.7. При более тщательном исследовании можно увидеть, что на малых значениях t , функция $\lambda(t)$ не является монотонно убывающей (рис. 8).

Промежутки возрастания и убывания функции $\lambda(t)$ означают, что производная этой функции, определяемая вторым уравнением (9), меняет свой знак. Все величины, входящие в это выражение являются знакопостоянными, кроме функции H . Численный расчет позволяет построить графики этой функции в двух расчетных вариантах при условии $2TA_2 \geq G^2 \geq 2TA_3$. Как видно из графиков функция $H(t)$ (рис. 9) сначала принимает отрицательные значения, а затем положительные. Моменты времени, когда функция принимает нулевые значения, соответствуют точкам максимума функции $\lambda(t)$ (рис. 8).

Проанализируем второе уравнение (9) в случае положительного χ . Модуль эллиптических функций $k^2 \rightarrow 0$, а функция $H \rightarrow \frac{1}{2} [3a^2 - 1]$ (6). График изменения величины a имеет вид, указанный на рис. 10. При подстановке асимптотического значения a в вышеуказанную формулу имеем асимптотическое значение H на кривой 2 рис. 9. Рассмотренный численный расчет проводился в размерном виде. Имеет смысл провести численный расчет также для безразмерной системы уравнений. Характерными величинами задачи будут G_0 — кинетический момент спутника при $t = 0$, Ω_0 — величина угловой скорости ω движения спутника относительно центра масс в начальный момент времени. Малым параметром задачи будет величина $\varepsilon = \frac{\omega_0}{\Omega_0}$. Безразмерные величины определяются равенствами

$$\tilde{t} = \Omega_0 t; \quad \tilde{G} = \frac{G}{G_0}; \quad \tilde{T} = \frac{T}{G_0 \Omega_0}; \quad \tilde{A}_i = \frac{A_i \Omega_0}{G_0}.$$

Введем обозначение

$$\Gamma = \frac{a_1 R_0^2 \Omega_0}{G_0 \mu^{2/3} \omega_0^{2/3}} \quad (11)$$

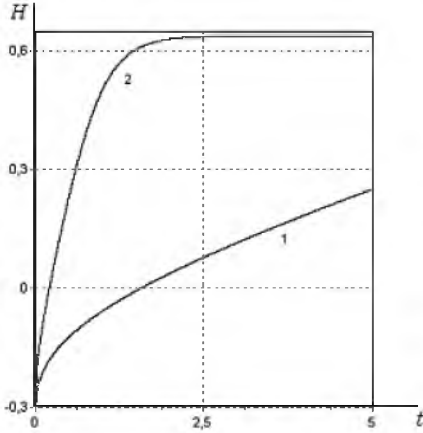


Рис. 9

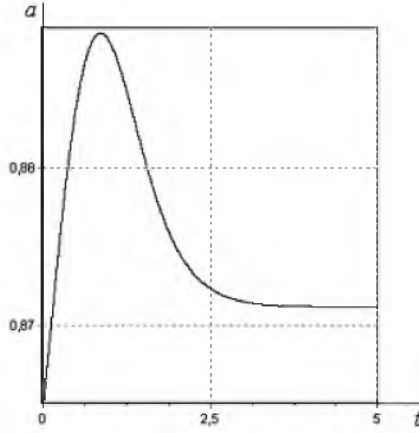


Рис. 10

и назовем эту величину приведенным коэффициентом момента сил светового давления.

После обезразмеривания система (6) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{d\tilde{t}} &= -\frac{\Gamma \tilde{H}(1+e\cos\nu)^2}{2\tilde{G}(1-e^2)^2} \varepsilon^2 \sin\delta \sin 2(\lambda-\nu); \\ \frac{d\lambda}{d\tilde{t}} &= -\frac{\Gamma \tilde{H}(1+e\cos\nu)^2}{\tilde{G}(1-e^2)^2} \varepsilon^2 \cos\delta \cos^2(\lambda-\nu); \\ \frac{d\tilde{G}}{d\tilde{t}} &= -\frac{\tilde{G}}{\tilde{D}(k)} \varepsilon^2 \left\{ \tilde{I}_{22}(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3) W(k) + \tilde{I}_{33}(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2) [k^2 - W(k)] + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{I}_{11}(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3) [1 - W(k)] \right\}; \\ \frac{d\tilde{T}}{d\tilde{t}} &= -\frac{2\tilde{T}}{\tilde{D}(k)} \varepsilon^2 \left\{ \tilde{I}_{22}(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3) W(k) + \tilde{I}_{33}(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2) [k^2 - W(k)] + \right. \\ &\quad + \frac{(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3)(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3)}{\tilde{V}(k)} \left\{ \frac{\tilde{I}_{33}}{\tilde{A}_3} [k^2 - W(k)] + \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\tilde{I}_{22}}{\tilde{A}_2} (1 - k^2) W(k) \right\} + \frac{\tilde{I}_{11}(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3)\tilde{D}(k)}{\tilde{A}_1 \tilde{V}(k)} [1 - W(k)] \right\}; \\ W(k) &= 1 - \frac{E(k)}{K(k)}, \quad \tilde{D}(k) = \tilde{A}_1(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3) + \tilde{A}_3(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)k^2; \\ \tilde{V}(k) &= \tilde{A}_2 - \tilde{A}_3 + (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)k^2. \end{aligned} \tag{12}$$

Уравнение истинной аномалии (4) записывается следующим образом

$$\frac{d\nu}{d\tilde{t}} = \varepsilon \frac{(1+e\cos\nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}}.$$

В первых двух уравнениях системы (12) функция \tilde{H} равна

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \left[3 \tilde{a}^2 \frac{E(k)}{K(k)} - 1 \right], \text{ если } 2\tilde{T}\tilde{A}_2 - \tilde{G}^2 > 0;$$

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{3 \tilde{a}^2}{k^2} \left[k^2 - 1 + \frac{E(k)}{K(k)} \right] - 1 \right\}, \text{ если } 2\tilde{T}\tilde{A}_2 - \tilde{G}^2 < 0;$$

$$\tilde{a}^2 = \frac{\tilde{\varepsilon}_1 + \tilde{h}}{1 + \tilde{\varepsilon}_1}; \quad \tilde{\varepsilon}_1 = \frac{\tilde{A}_3 (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)}{\tilde{A}_1 (\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3)}; \quad \tilde{h} = \left(\frac{2\tilde{T}}{\tilde{G}^2} - \frac{1}{\tilde{A}_2} \right) \frac{\tilde{A}_2 \tilde{A}_3}{\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3}.$$

Из системы (12) видно, что δ, λ — медленные переменные, а ν — полумедленная:

$$\dot{\delta} = \varepsilon^2 \Delta(\nu, \delta, \lambda); \quad \dot{\lambda} = \varepsilon^2 \Lambda(\nu, \delta, \lambda);$$

$$\dot{\nu} = \frac{\varepsilon}{h(e)} (1 + e \cos \nu)^2; \quad h(e) = (1 - e^2)^{3/2}.$$

Применим модифицированный метод усреднения [10] и получим:

$$\dot{\delta} = 0; \quad \dot{\lambda} = -\varepsilon^2 \frac{\Gamma \tilde{H} \cos \delta}{2\tilde{G}(1 - e^2)^{1/2}}. \quad (13)$$

Численный расчет производился при тех же начальных условиях, для тех же значений моментов инерции и коэффициентов сопротивления. При значении $\Omega_0 = 0.043611$ рад/с для малого времени $\tau = \varepsilon^2 \tilde{t}$ имеем картину, представленную на рис. 11.

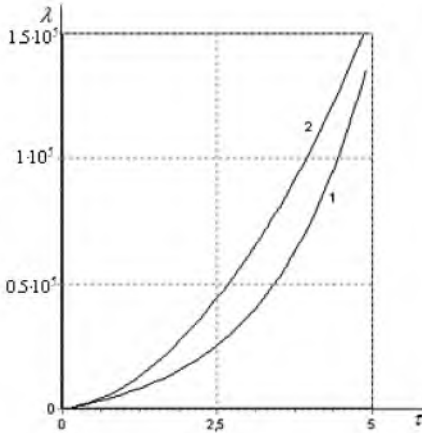


Рис. 11

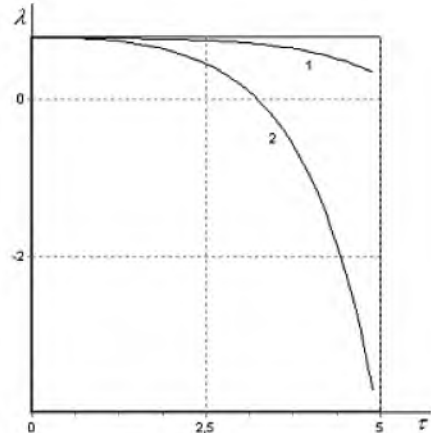


Рис. 12

Проанализируем уравнение для угла λ в системе (13). В правой части уравнения приведенный коэффициент момента сил светового давления Γ выражается согласно формуле (11). Проведем численное исследование зависимости угла λ от значения этого коэффициента. На рис. 12 изображены графики изменения угла λ , полученные из уравнения (13): кривая 1 соответствует значению коэффициента $\Gamma = 10^{-2}$, а кривая 2 - $\Gamma = 10^{-1}$. Видно, что при увеличении коэффициента на один порядок, убывание функции $\lambda(\tilde{t})$ происходит существенно быстрее.

3. Анализ предельных случаев. Исследуем систему (6) в случае малого модуля эллиптических функций $k^2 \ll 1$. При этом предположении асимптотическое решение записывается в виде:

$$k^2 = k_0^2 \exp[-\rho t]; \rho = \alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_1; \alpha_i = I_{ii}/A_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (14)$$

Функции кинетического момента $G(t)$ и кинетической энергии $T(t)$ представимы в аналитической форме:

$$\begin{aligned} G &= G_0 \exp\{-\alpha_1 t + b \exp[-\rho t]\}; \quad T = T_0 \exp\{-2\alpha_1 t + c \exp[-\rho t]\}; \\ b &= \frac{0.5k_0^2}{\rho A_1^2(A_2 - A_3)} [\alpha_1 A_1(2A_2 A_3 - A_1 A_2 - A_1 A_3) + \alpha_2 A_1 A_2(A_1 - A_3) + \\ &\quad + \alpha_3 A_1 A_3(A_1 - A_2)]; \\ c &= \frac{k_0^2}{(A_2 - A_3)\rho} [\alpha_2(A_1 - A_3) + \alpha_3(A_1 - A_2) + \alpha_1(A_2 + A_3 - 2A_1)]. \end{aligned} \quad (15)$$

Тогда выражение для величины h системы (6) в случае $k^2 \ll 1$ имеет вид

$$h = \left(\frac{2T_0}{G_0^2} q(t) - \frac{1}{A_2} \right) \frac{A_2 A_3}{A_2 - A_3}; \quad q(t) = e^{(c-2b) \exp(-\rho t)}.$$

а величина a^2 определяется равенством

$$a^2 = \frac{A_1 A_3}{A_1 - A_3} \left[\frac{2T_0}{G_0^2} q(t) - \frac{1}{A_1} \right].$$

Получим, что функция $H(t)$ для $k^2 \ll 1$ в случаях $2TA_2 - G^2 \geq 0$ определена, соответственно, формулами:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{3A_1 A_3}{A_1 - A_3} \left[\frac{2T_0}{G_0^2} q(t) - \frac{T_0}{G_0^2} k^2 q(t) - \frac{1}{A_1} + \frac{1}{2A_1} k^2 \right] - 1 \right\}; \\ H &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{3}{2} \frac{A_1 A_3}{A_1 - A_3} \left[\frac{2T_0}{G_0^2} q(t) - \frac{1}{A_1} \right] - 1 \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставим (16) во второе уравнение системы (9) и получим дифференциальные уравнения изменения угла λ , которые могут быть аналитически проинтегрированы в обоих случаях.

При движении вектора кинетического момента в окрестности оси Oz_3 функция $\lambda(t)$ определена формулой

$$\begin{aligned} \lambda = & \frac{a_1 R_0^2 \omega_0^{4/3} \cos \delta}{4\mu^{2/3} G_0 (1-e^2)^{1/2} \rho} \times \\ & \times \left\{ \frac{2T_0 M}{G_0^2} (3b-c)^{\frac{\alpha_1}{\rho}} \left[-\gamma\left(-\frac{\alpha_1}{\rho}, (3b-c)\right) + \gamma\left(-\frac{\alpha_1}{\rho}, (3b-c)e^\tau\right) \right] - \right. \\ & - \frac{T_0 M k_0^2}{G_0^2} (3b-c)^{\frac{\alpha_1-\rho}{\rho}} \left[-\gamma\left(-\frac{\alpha_1-\rho}{\rho}, (3b-c)\right) + \gamma\left(-\frac{\alpha_1-\rho}{\rho}, (3b-c)e^\tau\right) \right] - \\ & - \left(\frac{M}{A_1} + 1 \right) b^{\frac{\alpha_1}{\rho}} \left[-\gamma\left(-\frac{\alpha_1}{\rho}, b\right) + \gamma\left(-\frac{\alpha_1}{\rho}, be^\tau\right) \right] + \\ & \left. + \frac{M k_0^2}{2A_1} b^{\frac{\alpha_1-\rho}{\rho}} \left[-\gamma\left(-\frac{\alpha_1-\rho}{\rho}, b\right) + \gamma\left(-\frac{\alpha_1-\rho}{\rho}, be^\tau\right) \right] \right\} + \lambda_0. \end{aligned}$$

Аналогично при движении в окрестности оси Oz_1 имеем выражение

$$\begin{aligned} \lambda = & -\frac{a_1 R_0^2 \omega_0^{4/3} \cos \delta}{4\mu^{2/3} G_0 (1-e^2)^{1/2} \rho} \left\{ \frac{3A_1 A_3}{(A_1 - A_3)} \frac{T_0 M}{G_0^2} (3b-c)^{\frac{\alpha_1}{\rho}} \left[-\gamma\left(-\frac{\alpha_1}{\rho}, (3b-c)\right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \gamma\left(-\frac{\alpha_1}{\rho}, (3b-c)e^\tau\right) \right] - \left(\frac{A_3 + 2A_1}{2(A_1 - A_3)} \right) b^{\frac{\alpha_1}{\rho}} \left[-\gamma\left(-\frac{\alpha_1}{\rho}, b\right) + \gamma\left(-\frac{\alpha_1}{\rho}, be^\tau\right) \right] \right\} + \lambda_0. \end{aligned}$$

Здесь

$$M = \frac{3A_1 A_3}{A_1 - A_3}$$

и $\gamma(n, x)$ — неполная гамма-функция [9].

Представляет интерес исследование системы (6) в случае малых диагональных коэффициентов сопротивления, т.е.

$$I_{11} = \mu' i_{11}, I_{22} = \mu' i_{22}, I_{33} = \mu' i_{33}, \mu' \ll 1. \quad (17)$$

Функции кинетического момента G и кинетической энергии T могут быть представлены в виде степенных рядов по μ' :

$$G = G_0 + \mu' G_1 + \dots, T = T_0 + \mu' T_1 + \dots$$

Два последних уравнения системы (6) после интегрирования записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} G = & G_0 - \frac{G_0 \mu' t}{D(k_0)} \{ i_{22}(A_1 - A_3)W(k_0) + \\ & + i_{33}(A_1 - A_2) [k_0^2 - W(k_0)] + i_{11}(A_2 - A_3)(1 - W(k_0)) \}; \\ T = & T_0 - \frac{2T_0 \mu' t}{D(k_0)} \left\{ i_{22}(A_1 - A_3)W(k_0) + i_{33}(A_1 - A_2) [k_0^2 - W(k_0)] + \right. \\ & + \frac{(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)(A_2 - A_3)}{V(k_0)} \left\{ \frac{i_{33}}{A_3} [k_0^2 - W(k_0)] + \right. \\ & \left. \left. + \frac{i_{22}}{A_2} (1 - k_0^2)W(k_0) \right\} + \frac{i_{11}}{A_1} \cdot \frac{(A_2 - A_3)D(k_0)}{V(k_0)} [1 - W(k_0)] \right\}. \end{aligned}$$

Здесь $W(k_0)$, $D(k_0)$, $V(k_0)$ — значения функций (6) при $k = k_0$. Видно, что функции $G(t)$ и $T(t)$ являются строго убывающими, как и в случае системы (6). Для малых моментов сопротивления необходимо также построить приближенное решение для переменной k^2 :

$$k^2 = k_0^2 + \frac{2\mu't}{A_1 A_2 A_3} \left\{ A_1(i_{33}A_2 - i_{22}A_3)(1 - k_0^2) - \right. \\ \left. - [A_1(i_{33}A_2 - i_{22}A_3) + A_3(i_{22}A_1 - i_{11}A_2)k_0^2] \cdot \frac{E(k_0)}{K(k_0)} \right\}.$$

В обоих случаях при $2TA_2 - G^2 \geq 0$ для малых $\mu' \ll 1$ функция $\lambda(t)$ интегрируется аналитически и выражается через квадратические функции времени вида

$$\lambda = -\frac{\alpha_1 \omega_0^{4/3} \cos \delta}{2\mu^{2/3}(1 - e^2)^{1/2} G_0} (Z_1 t + Z_2 t^2), \quad (18)$$

где коэффициенты $Z_i (i = 1, 2)$ выражаются через моменты инерции $A_i (i = 1, 2, 3)$, коэффициенты сопротивления $i_{ii} (i = 1, 2, 3)$, начальные значения кинетической энергии T_0 и кинетического момента G_0 и значения полных эллиптических интегралов первого $K(k)$ и второго рода $E(k)$ при $k = k_0$.

Был также рассмотрен случай малых k^2 и малых коэффициентов сопротивления (16). При малых k^2 получены законы изменения кинетического момента G , кинетической энергии T (15), которые с учетом малых первого порядка μ' дают

$$G = G_0 \{1 + m - nt\}; \quad T = T_0 \{1 + q - \varsigma t\}; \\ n = \mu' \left\{ \alpha_{1\mu} + \frac{k_0^2}{2A_1^2(A_2 - A_3)} [\alpha_{1\mu} A_1 (A_2 A_3 - A_1 A_2 - A_1 A_3) + \right. \\ \left. + \alpha_{2\mu} A_1 A_2 (A_1 - A_3) + \alpha_{3\mu} A_1 A_3 (A_1 - A_2)] \right\}; \\ m = \frac{0.5k_0^2}{\rho_\mu A_1^2 (A_2 - A_3)} [\alpha_{1\mu} A_1 (A_2 A_3 - A_1 A_2 - A_1 A_3) + \\ + \alpha_{2\mu} A_1 A_2 (A_1 - A_3) + \alpha_{3\mu} A_1 A_3 (A_1 - A_2)]; \\ q = \frac{k_0^2}{(A_2 - A_3)\rho_\mu} [\alpha_{2\mu} (A_1 - A_3) + \alpha_{3\mu} (A_1 - A_2) + \alpha_{1\mu} (A_2 + A_3 - 2A_1)]; \\ \varsigma = \mu' \left\{ 2\alpha_{1\mu} + \frac{k_0^2}{(A_2 - A_3)} [\alpha_{2\mu} (A_1 - A_3) + \right. \\ \left. + \alpha_{3\mu} (A_1 - A_2) + \alpha_{1\mu} (A_2 + A_3 - 2A_1)] \right\}; \quad (19) \\ \rho_\mu = \alpha_{2\mu} + \alpha_{3\mu} - 2\alpha_{1\mu}; \quad \alpha_{i\mu} = i_{ii}/A_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Функции $G(t)$ и $T(t)$ являются строго убывающими, как во всех ранее рассмотренных случаях. Для определения направления вращения вектора \mathbf{G} второе

уравнение системы (9) приведено к другому виду с учетом (19). После интегрирования получим также квадратичную функцию вида (9).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Таким образом, в рассматриваемом приближении возмущенное движение тела складывается из быстрого движения Эйлера-Пуансо вокруг вектора \mathbf{G} и из медленной эволюции параметров этого движения. Величины кинетического момента и кинетической энергии строго убывают, и их изменение зависит только от момента сил сопротивления среды. Движение вектора кинетического момента вокруг вертикали к плоскости орбиты в первом приближении описывается первыми двумя уравнениями системы (6). Скорость вращения вектора \mathbf{G} вокруг вертикали переменна с переменным отклонением вектора от вертикали. Во втором приближении метода усреднения отклонение вектора \mathbf{G} от вертикали остается постоянным, при этом угловая скорость вращения переменна (9). Эволюция параметров движения Эйлера-Пуансо в системе координат, связанной с телом, описывается уравнением (10).

Авторы благодарят Л. Д. Акуленко за внимание к работе, ценные советы и полезные обсуждения.

1. **Белецкий В. В.** Движение искусственного спутника относительно центра масс. – М.: Наука, 1965. – 416с.
2. **Черноусько Ф. Л.** О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // Прикладная математика и механика. – 1963. – Т.27, №3. – С.471–483.
3. **Белецкий В. В.** Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. – М.: Изд-во МГУ, 1975. – 308с.
4. **Белецкий В.В., Яншин А.М.** Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. – К.: Наук.думка, 1984. – 168 с.
5. **Акуленко Л.Ф., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л.** Быстрое движение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1982. – №3. – С.5–13.
6. **Поляхова Е. Н.** Космический полет с солнечным парусом: проблемы и перспективы. – М.: Наука, 1986. – 304с.
7. **Волосов В.М., Моргунов Б.И.** Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 507с.
8. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Теоретическая физика. Т.1. Механика. – М.: Наука, 1973. – 208с.
9. **Градштейн И.С., Рыжик И.М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108с.
10. **Акуленко Л. Д.** Схемы усреднения высших степеней в системах с медленной и быстрой фазами // Прикладная математика и механика. – 2002. – Т.66, №2. – С.165–176.