Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2010. – Т.15, вип. 18. – С. 7–21

М А Т Е М А Т И К А

УДК 517.925

М. А. Белозерова
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПРАВИЛЬНО МЕНЯЮЩИМИСЯ В ОКРЕСТНОСТЯХ ОСОБЫХ ТОЧЕК НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Рекомендовано к публикации программным комитетом международной летней математической школы памяти В. А. Плотникова

Білозерова М. О. Зображення розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з правильно мінливими в околах особливих точок нелінійностями. Для диференціальних рівнянь другого порядку з правильно мінливими в околах особливих точок нелінійностями отримано асимптотичні зображення, необхідні та достатні умови існування достатньо широких класів розв'язків.
Ключові слова: асимптотичні зображення розв'язків, правильно мінливі нелінійності.

Белозерова М. А. Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений второго порядка с правильно меняющимися в окрестностях особых точек нелинейностями. Для дифференциальных уравнений второго порядка с правильно меняющимися в окрестностях особых точек нелинейностями получены асимптотические представления, необходимые и достаточные условия существования достаточно широких классов решений.
Ключевые слова: асимптотические представления решений, правильно меняющиеся нелинейности.

Bilozerova M. A. Asymptotic representations of the solutions of the differential equations of the second order with the nonlinearities,that are regularly varying at the critical points. The asymptotic representations, necessary and sufficient conditions of the existence of sufficient broad classes of the solutions are found for differential equations of the second order with nonlinearities, that are regularly varying at the singular points.
Key words: asymptotic representations of the solutions, regularly varying nonlinearities.

Введение. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y'), \tag{1}$$

в котором $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ $(-\infty < a < \omega \le +\infty)$ — непрерывная функция, $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \to]0, +\infty[$ $(i = 0, 1)$ — непрерывные функции, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} — либо промежуток $[y_i^0, Y_i[$[2] либо — $]Y_i, y_i^0]$.

[1]При $Y_i = +\infty (Y_i = -\infty)$ считаем $y_i^0 > 0$ $(y_i^0 < 0)$ соответственно.

Кроме того, предполагается, что каждая из функций φ_i является правильно меняющейся при $z \to Y_i$ $(z \in \Delta_{Y_i})$ порядка σ_i, причем

$$\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1.$$

Функция $\varphi : \Delta_Y \to]0, +\infty[$ называется правильно меняющейся порядка σ при $z \to Y$, где $Y \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_Y — некоторая односторонняя окрестность Y, если для произвольного $\lambda > 0$

$$\lim_{\substack{z \to Y \\ z \in \Delta_Y}} \frac{\varphi(\lambda z)}{\varphi(z)} = \lambda^\sigma. \tag{2}$$

При $\sigma = 0$ такая функция называется медленно меняющейся.

Из результатов монографии [14] вытекает, что правильно меняющиеся функции обладают следующими свойствами.

M_1: Функция $\varphi(z)$ является правильно меняющейся порядка σ при $z \to Y$ тогда и только тогда, когда имеет место представление

$$\varphi(z) = z^\sigma \theta(z),$$

где $\theta(z)$ — медленно меняющаяся при $z \to Y$ функция.

M_2: Если функции $L : \Delta_{Y^0} \to]0, +\infty[$ — медленно меняющаяся при $z \to Y_0$, $\varphi : \Delta_Y \to \Delta_{Y^0}$ — правильно меняющаяся при $z \to Y$, то функция $L(\varphi)$: $\Delta_Y \to]0, +\infty[$ является медленно меняющейся при $z \to Y$.

M_3: Для любой правильно меняющейся при $z \to Y$ функции φ предельное соотношение (2) выполняется равномерно по $\lambda \in [c, d]$ для любого отрезка $[c, d] \subset]0, +\infty[$.

В силу M_1 — M_3 для любого решения y уравнения (1), определенного на некотором промежутке $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ и удовлетворяющего условиям

$$y^{(i)} : [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_i}, \qquad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i \ \ (i = 0, 1), \tag{3}$$

имеют место представления $\varphi_i(y^{(i)}(t)) = |y^{(i)}(t)|^{\sigma_i + o(1)}$ $(i = 0, 1)$ при $t \uparrow \omega$. Это означает, что простейшим частным случаем (1) является обобщенное уравнение Эмдена–Фаулера

$$y'' = \alpha_0 p(t) |y|^{\sigma_0} |y'|^{\sigma_1},$$

возникающее во многих областях естествознания. Это уравнение было ранее детально исследовано (см., например, [1—5]).

При $0 < m < \varphi_1(y') < M$, $m, M \in \mathbb{R}$ асимптотические свойства монотонных решений уравнения (1) изучались в работах [6–8].

Для дважды непрерывно дифференцируемых функций φ_0, φ_1, удовлетворяющих при $i \in \{0, 1\}$ условиям

$$\lim_{\substack{z \to Y_i \\ z \in \Delta_{Y_i}}} \frac{z\varphi_i'(z)}{\varphi_i(z)} = \sigma_i, \quad \limsup_{\substack{z \to Y_i \\ z \in \Delta_{Y_i}}} \left| \frac{z\varphi_i''(z)}{\varphi_i'(z)} \right| < +\infty,$$

вопросы асимптотического поведения решений со свойствами (3) изучались в [9–12], причем в работах [9,10] рассматривался случай $\varphi_1(y') \equiv 1$.

Целью настоящей работы является распространение на общий случай уравнения (1) некоторых из полученных в этих работах результатов.

Введем следующие обозначения, полагая

$$\lambda_0^i = \begin{cases} \lambda_0, & \text{при } \ i=0, \\ 1, & \text{при } \ i=1, \end{cases} \quad \theta_i(z)=\varphi_i(z)|z|^{-\sigma_i}, \ i\in\{0,1\},$$

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t & \text{при } \omega=+\infty, \\ t-\omega & \text{при } \omega<+\infty, \end{cases}$$

$$I_0(t)=\int\limits_{A_\omega^0}^{t} \left|\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}\right|^{-\sigma_0} p(\tau)|\pi_\omega(\tau)|^{\sigma_0}\,d\tau,$$

$$A_\omega^0 = \begin{cases} a, & \text{если } \int_a^\omega p(\tau)|\pi_\omega(\tau)|^{\sigma_0}\,d\tau=+\infty, \\ \\ \omega, & \text{если } \int_a^\omega p(\tau)|\pi_\omega(\tau)|^{\sigma_0}\,d\tau<+\infty, \end{cases}$$

$$I_1(t)=\int_{A_\omega^1}^{t} p(\tau)\,d\tau, \ A_\omega^1 = \begin{cases} a, & \text{если } \int_a^\omega p(\tau)\,d\tau=+\infty, \\ \\ \omega, & \text{если } \int_a^\omega p(\tau)\,d\tau<+\infty. \end{cases}$$

$$J(t)=\int\limits_{B_\omega}^{t} |I_1(\tau)|^{1-\sigma_1} p^{\sigma_1}(\tau)\,d\tau,$$

$$B_\omega = \begin{cases} b, & \text{если } \int\limits_b^\omega |I_1(t)|^{1-\sigma_1}p^{\sigma_1}(t)\,dt=+\infty, \\ \\ \omega, & \text{если } \int\limits_b^\omega |I_1(t)|^{1-\sigma_1}p^{\sigma_1}(t)\,dt<+\infty. \end{cases}$$

Решение y уравнения (1) будем называть $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$- решением, если

$$y^{(i)}:[t_0,\omega[\longrightarrow \Delta_{Y_i}, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t)=Y_i \quad (i=0,1), \quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)}=\lambda_0. \tag{4}$$

$P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$- решениями являются все правильно меняющиеся при $t\uparrow\omega$ решения уравнения (1). Кроме того, $P_\omega(Y_0,Y_1,1)$- решения (1) являются быстро изменяющимися при $t\uparrow\omega$ функциями. В данной работе рассматриваются случаи $\lambda_0\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Основные результаты.

1. Формулировка результатов.

Теорема 1. *Для существования у уравнения* (1) $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$*-решений, где* $\lambda_0\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$*, необходимо, а если*

$$\lambda_0\neq\sigma_1-1, \quad \text{либо} \qquad (\sigma_1-1)(\sigma_0+\sigma_1-1)>0, \tag{5}$$

то и достаточно выполнение условий

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I_0'(t)}{I_0(t)}=\frac{\sigma_0+\sigma_1-1}{1-\lambda_0},$$
$$\alpha_0\lambda_0y_0^0>0,\ \alpha_0y_1^0(1-\sigma_0-\sigma_1)I_0(t)>0\quad \textit{при } t\in]a,\omega[, \tag{6}$$

$$Y_i=\begin{cases}\pm\infty, & \textit{если}\quad \alpha_0y_1^0\lambda_0^i>0,\\ 0, & \textit{если}\quad \alpha_0y_1^0\lambda_0^i<0\end{cases}\quad (i=0,1). \tag{7}$$

Более того, для каждого такого решения имеют место при $t\uparrow\omega$ *асимптотические представления*

$$\frac{y'(t)}{\varphi_1(y'(t))|y'(t)|^{\sigma_0}\theta_0(y(t))}=\alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1)I_0(t)[1+o(1)],$$
$$\frac{y'(t)}{y(t)}=\frac{\lambda_0}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}[1+o(1)]. \tag{8}$$

Теорема 2. *Для существования у уравнения* (1) $P_\omega(Y_0,Y_1,1)$*-решений необходимо, а если*

$$\sigma_1\in\mathbb{R}\setminus\{1,2\},\quad \textit{либо}\qquad \sigma_1=2\quad\textit{и}\quad \sigma_0>-1, \tag{9}$$

то и достаточно выполнение условий

$$\lim_{t\uparrow\omega}y_i^0|I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}=Y_i\quad (i=0,1), \tag{10}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{I_1(t)J'(t)}{p(t)J(t)}=1,\ \alpha_0y_0^0>0,$$
$$\alpha_0y_1^0(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)>0,\quad \textit{при } t\in]a,\omega[. \tag{11}$$

Более того, для каждого такого решения имеют место при $t\uparrow\omega$ *асимптотические представления*

$$\frac{y(t)}{\varphi_0(y(t))|y(t)|^{\sigma_1}\theta_1(y'(t))}\sim\alpha_0|1-\sigma_0-\sigma_1|^{2-\sigma_1}|J(t)|,$$
$$\frac{y'(t)}{y(t)}\sim\frac{J'(t)}{(1-\sigma_1-\sigma_0)J(t)}. \tag{12}$$

2. Доказательства теорем 1 и 2.

Необходимость. Пусть $y:[t_0,\omega[\to\Delta_{Y_0}$ — $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$-решение уравнения (1), где $\lambda_0\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. В силу (4) и (1), функция $y'(t)$ является строго монотонной на $[t_0,\omega[$, а значит, для нее существует обратная функция $(y')^{-1}$. При этом $y(t)\equiv$ $\equiv y\left((y')^{-1}(y'(t))\right)$ на $[t_0,\omega[$. Тогда, согласно (4), из тождества

$$\frac{z\left(y\left((y')^{-1}(z)\right)\right)'}{y\left((y')^{-1}(z)\right)}=\frac{zy'\left((y')^{-1}(z)\right)}{y\left((y')^{-1}(z)\right)y''\left((y')^{-1}(z)\right)}$$

следует, что

$$\lim_{\substack{z\to Y_1\\ z\in\Delta_{Y_1}}} \frac{z\left(y\left((y')^{-1}(z)\right)\right)'}{y\left((y')^{-1}(z)\right)} = \lambda_0,$$

а значит, функция $y\left((y')^{-1}(z)\right)$ является правильно меняющейся порядка λ_0 при $z\to Y_1$ $(z\in\Delta_{Y_1})$. В силу M_2 функция $\theta_0\left(y\left((y')^{-1}(z)\right)\right)$ является медленно меняющейся при $z\to Y_1$ $(z\in\Delta_{Y_1})$. Тогда функция

$$\psi(z) = \begin{cases} \dfrac{z\,|z|^{-\sigma_0}}{\varphi_1(z)\theta_0\left(y\left((y')^{-1}(z)\right)\right)} \text{ при } \lambda_0\in\mathbb{R}\backslash\{0,1\}, \\[2ex] \dfrac{z\left|y\left((y')^{-1}(z)\right)\right|^{-\sigma_0}}{\varphi_1(z)\theta_0\left(y\left((y')^{-1}(z)\right)\right)} \text{ при } \lambda_0=1, \end{cases}$$

является правильно меняющейся при $z\to Y_1$ $(z\in\Delta_{Y_1})$ порядка $1-\sigma_0-\sigma_1\neq 0$.

Для $\lambda_0\in\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, согласно (4), имеют место асимптотические представления

$$\frac{y^{(i+1)}(t)}{y^{(i)}(t)} = \frac{\lambda_0^i}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,\ (i=0,1), \tag{13}$$

откуда с учетом (4) и (1) получаем (7), второе из условий (6), а также второе из представлений (8).

Используя (1) и, в случае $\lambda_0\in\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ — соотношение (13), будем иметь при $t\uparrow\omega$

$$\frac{\psi(y'(t))y''(t)}{y'(t)} = \alpha_0 I_j'(t)[1+o(1)], \tag{14}$$

где

$$j = \begin{cases} 0 \text{ при } \lambda_0\in\mathbb{R}\backslash\{0,1\}, \\ 1 \text{ при } \lambda_0=1. \end{cases}$$

Отсюда с использованием теоремы 2.1 из [14] получим

$$\psi(y'(t)) = \alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1)I_j(t)[1+o(1)] \ \text{ при } t\uparrow\omega. \tag{15}$$

При $j=0$ для $\lambda_0\in\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ представление (15) является первым из представлений (8).

Используя (15) и (14), имеем

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{I_j'(t)}{I_j(t)(1-\sigma_0-\sigma_1)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega, \tag{16}$$

откуда для $\lambda_0\in\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ при $j=0$ с учетом (13) следует первое и третье из условий (6).

В случае $\lambda_0=1$ $(j=1)$ из (15) с учетом (16) получим при $t\uparrow\omega$ представление

$$\frac{y'(t)\,|y(t)|^{-\sigma_1}}{\varphi_0(y(t))\theta_1\left(y'\left(y^{-1}(y(t))\right)\right)} = \alpha_0|1-\sigma_0-\sigma_1|^{2-\sigma_1}J'(t)[1+o(1)]. \tag{17}$$

Функция $y(t)$ является строго монотонной на $[t_0, \omega[$, а значит, для нее существует обратная функция y^{-1} и из тождества

$$\frac{z\left(y'\left(y^{-1}(z)\right)\right)'}{y'\left(y^{-1}(z)\right)} = \frac{zy''\left(y^{-1}(z)\right)}{y'\left(y^{-1}(z)\right)y'\left(y^{-1}(z)\right)}$$

с учетом (4) при $\lambda_0 = 1$ следует, что

$$\lim_{\substack{z\to Y_0\\ z\in\Delta_{Y_0}}} \frac{z\left(y'\left(y^{-1}(z)\right)\right)'}{y'\left(y^{-1}(z)\right)} = 1.$$

Данное соотношение означает, что функция $y'\left(y^{-1}(z)\right)$ является правильно меняющейся порядка 1 при $z \to Y_0$ $(z \in \Delta_{Y_0})$. Тогда в силу M_2 функция $\theta_1\left(y'\left(y^{-1}(z)\right)\right)$ является медленно меняющейся при $z \to Y_0$ $(z \in \Delta_{Y_0})$. Поэтому из (17) с использованием теоремы 2.1 из [14] получим первое из представлений (12). Из первого из представлений (12) с учетом (16) и (17) следует первое из условий (11) и второе из представлений (12).

Достаточность. Пусть $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ и наряду с (6), (7) в случае $\lambda_0 \neq 1$ и с (10), (11) в случае $\lambda_0 = 1$ соблюдаются условия (5) и (9) соответственно. Рассмотрим функцию

$$F(s_0, s_1) = \begin{pmatrix} \Phi_0(s_0)\Phi_1(s_1) \\ \\ \frac{s_1}{s_0} \end{pmatrix},$$

заданную на множестве $\Delta = \Delta^1_{Y_0} \times \Delta^1_{Y_1}$, где

$$\Phi_i(z) = \int\limits_{Y_1^*}^{z} \frac{d\tau}{\varphi_i(\tau)|\tau|^{1-c_i-\sigma_i}} \quad (i = 0, 1),$$

$$c_i = \begin{cases} \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{2}, & \text{если } \alpha_0 y_0^0 > 0, \text{ либо } \lambda_0 = 1, \\ \frac{5(1-\sigma_0-\sigma_1)}{4}, & \text{если } \alpha_0 y_0^0 < 0,\ \alpha_0 y_1^0 \lambda_0^i (1-\sigma_0-\sigma_1) > 0,\ \lambda_0 \neq 1, \\ -\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{4}, & \text{если } \alpha_0 y_0^0 < 0,\ \alpha_0 y_1^0 \lambda_0^i (1-\sigma_0-\sigma_1) < 0,\ \lambda_0 \neq 1, \end{cases} \qquad (i = 0, 1),$$

$$Y_i^* = \begin{cases} y_i^0, & \text{если } \left|\int\limits_{y_i^0}^{Y_i} \frac{dz}{\varphi_i(z)|z|^{1-c_i-\sigma_i}}\right| = +\infty, \\ Y_i, & \text{если } \left|\int\limits_{y_i^0}^{Y_i} \frac{dz}{\varphi_i(z)|z|^{1-c_i-\sigma_i}}\right| < +\infty \end{cases} \qquad (i = 0, 1),$$

$$\Delta^1_{Y_i} = \begin{cases} [y_i^1, Y_i[, & \text{если } \Delta_{Y_i} = [y_i^0, Y_i[, \\ ]Y_i, y_i^1], & \text{если } \Delta_{Y_i} =]Y_i, y_i^0], \end{cases} \qquad (i = 0, 1),$$

числа $y_0^1 \in \Delta_{Y_0}$, $y_1^1 \in \Delta_{Y_1}$ подобраны так, чтобы при $z_i \in \Delta_{Y_i}^1$

$$\left|\frac{z_i\Phi_i'(z_i)}{\Phi_i(z_i)} - c_i\right| < \frac{|1-\sigma_0-\sigma_1|}{16} \quad (i=0,1). \tag{18}$$

С учетом вида функций Φ_0 и Φ_1 очевидно, что для каждого $i \in \{0,1\}$ Φ_i возрастает на Δ_{Y_i} и в силу выбора c_i $(i=0,1)$ и условий (7) имеют место соотношения

$$\prod_{i=0}^{1} \Phi_i(z_i) > 0 \text{ при } z \in \Delta_{Y_i}, \quad \prod_{i=0}^{1} \lim_{\substack{z_i \to Y_i \\ z \in \Delta_{Y_i}}} \Phi_i(z_i) = \Phi_{01}, \tag{19}$$

где

$$\Phi_{01} = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \lambda_0 < 0, \text{ либо } \alpha_0 y_1^0(1-\sigma_0-\sigma_1) > 0, \\ 0, & \text{если } \lambda_0 > 0, \ \alpha_0 y_1^0(1-\sigma_0-\sigma_1) < 0. \end{cases}$$

Кроме того, в силу выполнения условий (6)

$$\lim_{\substack{z \to Y_i \\ z \in \Delta_{Y_i}}} \frac{z_i\Phi_i'(z_i)}{\Phi_i(z_i)} = c_i \quad (i=0,1), \quad c_0 + c_1 = 1 - \sigma_0 - \sigma_1.$$

Покажем, что F взаимно однозначно отображает Δ на множество

$$F(\Delta) = \begin{cases} [\Phi_0(y_0^1)\Phi_1(y_1^1); \Phi_{01}) \times \Delta_0, & \text{если } \Phi_0(y_0^1)\Phi_1(y_1^1) < \Phi_{01}, \\ (\Phi_{01}; \Phi_0(y_0^1)\Phi_1(y_1^1)] \times \Delta_0, & \text{если } \Phi_0(y_0^1)\Phi_1(y_1^1) > \Phi_{01}, \end{cases}$$

где

$$\Delta_0 = \begin{cases} (0; +\infty), & \text{если } \lambda_0 > 0, \ y_0^0 y_1^0 > 0, \\ (-\infty; 0), & \text{если } \lambda_0 > 0, \ y_0^0 y_1^0 < 0, \\ \left[\frac{y_1^1}{y_0^1}; Y_1^0\right), & \text{если } \lambda_0 < 0, \ \frac{y_1^1}{y_0^1} < Y_1^0, \\ \left(Y_1^0; \frac{y_1^1}{y_0^1}\right], & \text{если } \lambda_0 < 0, \ \frac{y_1^1}{y_0^1} > Y_1^0, \end{cases}$$

$$Y_1^0 = \begin{cases} Y_1, & \text{если } Y_1 = 0, \\ -\infty, & \text{если } Y_1 = \infty. \end{cases}$$

Рассмотрим поведение функции $\Phi_0(s_0)\Phi_1(s_1)$ на прямых

$$s_1 = ks_0, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{20}$$

На каждой такой прямой $\Phi_0(s_0)\Phi_1(s_1) = \Phi_0(s_0)\Phi_1(ks_0)$. Кроме того,

$$(\Phi_0(s_0)\Phi_1(ks_0))'_{s_0} = \frac{\Phi_0(s_0)\Phi_1(ks_0)}{s_0}\left(\frac{s_0\Phi_0'(s_0)}{\Phi_0(s_0)} + \frac{ks_0\Phi_1'(ks_0)}{\Phi_1(ks_0)}\right).$$

В силу определения функций Φ_i $(i \in \{0,1\})$, области Δ, (19) и (18) это означает, что

$$\operatorname{sign}\left((\Phi_0(s_0)\Phi_1(ks_0))'_{s_0}\right) = \operatorname{sign}(y_0^0(1-\sigma_0-\sigma_1)).$$

Поэтому функция $\Phi_0(s_0)\Phi_1(ks_0)$ строго монотонна на любой прямой вида (20). Предположим, что отображение F не является взаимно-однозначным. Тогда

$$\exists\ (p_0,p_1),(q_0,q_1)\in\Delta,\ (p_0,p_1)\neq(q_0,q_1):\quad F(p_0,p_1)=F(q_0,q_1).$$

С учетом определения множества Δ последнее равенство означает, что

$$\Phi_0(p_0)\Phi_1(p_1)=\Phi_0(q_0)\Phi_1(q_1),\quad \frac{p_0}{p_1}=\frac{q_0}{q_1}=c\in R\setminus\{0\}. \tag{21}$$

Получаем, что точки (p_0,p_1) и (q_0,q_1) лежат на одной прямой вида (20). Но тогда (21) не может иметь места, так как функция $\Phi_0(s_0)\Phi_1(cs_0)$ строго монотонна на этой прямой. Таким образом, существует обратная функция $F^{-1}:\ F(\Delta)\to\Delta$. Учитывая вид функции F, имеем

$$F^{-1}(w_0,w_1)=\begin{pmatrix} F_0^{-1}(w_0,w_1)\\ \\ F_1^{-1}(w_0,w_1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F_0^{-1}(w_0,w_1)\\ \\ w_1F_0^{-1}(w_0,w_1)\end{pmatrix}.$$

Поскольку якобиан

$$JF(s_0,s_1)=\begin{vmatrix} \Phi_0'(s_0)\Phi_1(s_1) & \Phi_0(s_0)\Phi_1'(s_1)\\ -\frac{s_1}{s_0^2} & \frac{1}{s_0}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{\Phi_0(s_0)\Phi_1(s_1)}{s_0^2}\left(\frac{s_0\Phi_0'(s_0)}{\Phi_0(s_0)}+\frac{s_1\Phi_1'(s_1)}{\Phi_1(s_1)}\right)\neq 0 \text{ при } (s_0,s_1)\in\Delta,$$

функция F^{-1} является непрерывно дифференцируемой на $F(\Delta)$. Кроме того, для любого $k\in\{0,1\}$ справедливо равенство

$$\frac{F_k^{-1}(w_0,w_1)}{w_0\dfrac{\partial F_k^{-1}}{\partial w_0}(w_0,w_1)}=\sum_{i=0}^{1}\frac{F_i^{-1}(w_0,w_1)\Phi_i'\left(F_i^{-1}(w_0,w_1)\right)}{\Phi_i\left(F_i^{-1}(w_0,w_1)\right)}. \tag{22}$$

В силу вида функции F также имеем

$$\begin{gathered}\frac{F_0^{-1}(w_0,w_1)}{w_1\dfrac{\partial F_0^{-1}}{\partial w_1}(w_0,w_1)}=-\frac{\Phi_1\left(F_1^{-1}(w_0,w_1)\right)}{F_1^{-1}(w_0,w_1)\Phi_1'\left(F_1^{-1}(w_0,w_1)\right)}\times\\ \times\sum_{i=0}^{1}\frac{F_i^{-1}(w_0,w_1)\Phi_i'\left(F_i^{-1}(w_0,w_1)\right)}{\Phi_i\left(F_i^{-1}(w_0,w_1)\right)},\end{gathered} \tag{23}$$

$$\frac{w_1\dfrac{\partial F_1^{-1}}{\partial w_1}(w_0,w_1)}{F_1^{-1}(w_0,w_1)}=1+\frac{w_1\dfrac{\partial F_0^{-1}}{\partial w_1}(w_0,w_1)}{F_0^{-1}(w_0,w_1)}. \tag{24}$$

Уравнение (1) с помощью преобразования

$$\begin{aligned}&\Phi_0(y(t))\Phi_1(y'(t))=\tfrac{\alpha_0}{c_0c_1}H_1(t)[1+z_1(x)],\\ &\frac{y'(t)}{y(t)}=H_2(t)[1+z_2(x)],\end{aligned} \tag{25}$$

где

$$H_1(t) = \begin{cases} (c_0+c_1)\left|\dfrac{\lambda_0}{1-\lambda_0}\right|^{-c_0} I_0(t)|\pi_\omega(t)|^{c_0}\mathrm{sign} y_1^0, \text{ при } \lambda_0 \neq 1, \\ \\ \alpha_0|c_0+c_1|^{2-\sigma_1}|J(t)||J_1(t)|^{c_1}|J(t)|^{-c_1}, \text{ при } \lambda_0 = 1, \end{cases} \tag{26}$$

$$H_2(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_0}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}, \text{ при } \lambda_0 \neq 1, \\ \\ \dfrac{J_1(t)}{J(t)(1-\sigma_0-\sigma_1)}, \text{ при } \lambda_0 = 1, \end{cases} \qquad x = \beta\ln|Q(t)|, \tag{27}$$

$$Q(t) = \begin{cases} \pi_\omega(t) & \text{при} \quad \lambda_0 \neq 1, \\ J(t) & \text{при} \quad \lambda_0 = 1, \end{cases} \qquad \beta = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \omega = +\infty, \\ -1 & \text{при} \quad \omega < +\infty, \end{cases} \tag{28}$$

$$J_1(t) = |J(t)|\left|\frac{I_1(t)}{J(t)}\right|^{\frac{1}{1-\sigma_1}},$$

сведем, учитывая (6) и (7), к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} z_1' = \beta(1+z_1)\left[M(z_1,z_2)P_0(x,z_1,z_2)G_1(x) + \dfrac{B(x)(1+z_2)}{P_0(x,z_1,z_2)} - G_2(x)\right], \\ \\ z_2' = \beta(1+z_2)\left[M(z_1,z_2)\prod\limits_{i=0}^{1} P_i(x,z_1,z_2)G_1(x) - B(x)(z_2+1) - G_3(x)\right], \end{cases} \tag{29}$$

в которой

$$B(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_0}{\lambda_0-1}, & \text{при} \quad \lambda_0 \neq 1, \\ \dfrac{J_1(t(x))}{J'(t(x))(1-\sigma_0-\sigma_1)}, & \text{при} \quad \lambda_0 = 1, \end{cases}$$

$$G_1(x) = \frac{Q(t(x))p(t(x))}{Q'(t(x))H_1(t(x))}|H_2(t(x))|^{-c_0-\sigma_0}, \quad G_2(x) = \frac{Q(t(x))H_1'(t(x))}{Q'(t(x))H_1(t(x))},$$

$$G_3(x) = \frac{Q(t(x))H_2'(t(x))}{Q'(t(x))H_2(t(x))}, \quad M(z_1,z_2) = \frac{|(1+z_2)|^{-\sigma_0-c_0}}{1+z_1},$$

$$P_i(x,z_1,z_2) = \frac{\Phi_i(Y^{[i]}(t(x),z_1,z_2))}{Y^{[i]}(t(x),z_1,z_2)\Phi_i'(Y^{[i]}(t(x),z_1,z_2))},$$

$$Y^{[i]}(t,z_1,z_2) = F_i^{-1}\left(\frac{\alpha_0}{c_0c_1}H_1(t)[1+z_1], H_2(t)[1+z_2]\right), i = 0,1,$$

где $t(x)$ — функция, обратная для $x = \beta\ln|Q(t)(t)|$.

Покажем, что можно выбрать число $t_0 \in [a,\omega[$ так, чтобы для любых $|\xi_j| \le \frac{1}{2}$, $j = 1,2$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\alpha_0}{c_0c_1}H_1(t)[1+\xi_1] \\ \\ H_2(t)[1+\xi_2] \end{pmatrix} \in F(\Delta) \text{ при } t \in [t_0,\omega[. \tag{30}$$

В силу вида множества $F(\Delta)$, для этого достаточно обосновать предельные соотношения

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\alpha_0}{c_0c_1}H_1(t) = \Phi_{10}, \tag{31}$$

и при $\lambda_0 < 0$
$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\lambda_0}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)} = Y_1^0, \tag{32}$$
а также неравенство
$$y_0^0 y_1^0 H_2(t) > 0 \quad \text{при } t \in [b, \omega[. \tag{33}$$
Учитывая первое и третье из условий (6), для $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ будем иметь
$$\pi_\omega(t)(1 - \lambda_0)\alpha_0 y_1^0 < 0 \quad \text{при } t \in [b, \omega[, \tag{34}$$
откуда с учетом второго из условий (6) следует (33). В силу определения функции $\pi_\omega(t)$ и Y_1^0 из (34) в совокупности с (33) имеет место (32).

Используя первое из условий (6), получим представление
$$\frac{(|\pi_\omega(t)|^{\sigma_0} I(t))'}{|\pi_\omega(t)|^{\sigma_0} I(t)} = \frac{c_0\lambda_0 + c_1}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)}[1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$
из которого с учетом вида функций $I(t)$ и $\pi_\omega(t)$ вытекает соотношение
$$\ln|I(t)|\pi_\omega(t)|^{\sigma_0}| = \frac{c_0\lambda_0 + c_1}{(\lambda_0 - 1)} \ln|\pi_\omega(t)|[1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \tag{35}$$
При $\lambda_0 > 0$ $\quad \mathrm{sign} c_0 = \mathrm{sign} c_1 = \mathrm{sign}(1 - \sigma_0 - \sigma_1)$. Поэтому в этом случае при $\lambda_0 \neq 1$ в силу (34)
$$\pi_\omega(t)(c_0\lambda_0 + c_1)(\lambda_0 - 1)y_1^0\alpha_0(1 - \sigma_0 - \sigma_1) > 0 \quad \text{при } t \in [b, \omega[,$$
откуда с учетом вида функции $\pi_\omega(t)$, числа Φ_{10} и (35) получаем (31) при $\lambda_0 \neq 1$.

При $\lambda_0 = 1$ (33) следует из (11). Покажем теперь, что (31) также имеет место при $\lambda_0 = 1$. В этом случае из первого из соотношений (11) и вида Φ_{10} следует предельное соотношение
$$\lim_{t\uparrow\omega} |J(t)| = \Phi_{10}.$$
В силу монотонности функции $|J|$ для нее существует обратная функция $|J|^{-1}$. Учитывая (11), имеем
$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{J(t)\left(\dfrac{I_1(t)}{J(t)}\right)' \dfrac{1}{J'(t)}}{\dfrac{I_1(t)}{J(t)}} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{J^2(t)}{I_1(t)J'(t)} \left(\frac{I_1'(t)}{J(t)} - \frac{I_1(t)J'(t)}{J^2(t)}\right) =$$
$$= \lim_{t\uparrow\omega} \frac{J(t)I_1'(t)}{I_1(t)J'(t)} - 1 = 0,$$
откуда с учетом (11) в силу M_2 следует, что функция $\dfrac{I_1(|J|^{-1}(z))}{z}$ является медленно меняющейся при $z \to \Phi_{10}$. Тогда
$$\lim_{t\uparrow\omega} |J(t)||J_1(t)|^{c_1}|J(t)|^{-c_1} = \lim_{t\uparrow\omega} |J(t)| \left|\frac{I_1(t)}{J(t)}\right|^{\frac{c_1}{1-\sigma_1}} =$$

$$= \lim_{z\to\Phi_{10}} z\left|\frac{I_1(|J|^{-1}(z))}{z}\right|^{\frac{c_1}{1-\sigma_1}} = \Phi_{10},$$

откуда получаем (31) для случая $\lambda_0 = 1$.

При $\lambda_0 < 0$ в силу определения c_0 и c_1

$$\mathrm{sign}\lambda_0 c_0 = \mathrm{sign} c_1 = \mathrm{sign} y_1^0 \alpha_0.$$

Тогда, используя (34), будем иметь

$$\pi_\omega(t)(c_0\lambda_0 + c_1)(\lambda_0 - 1) > 0 \quad \text{при } t \in [b, \omega[,$$

откуда с учетом вида функции $\pi_\omega(t)$, числа Φ_{10} и (35) получаем (31).

Таким образом, (31) имеет место для всех $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, что в совокупности с (32) и (33) дает (30). Из (30) в силу определения множества Δ следует, что можно выбрать $t_1 \in [t_0, \omega)$, такое, что для любых $|\xi_j| \le \dfrac{1}{2}$ $(j = 1, 2)$

$$\left|\frac{1}{P_i(x(t), \xi_1, \xi_2)} - c_i\right| < \frac{|1 - \sigma_0 - \sigma_1|}{16} \quad \text{при } t \in [t_0, \omega[.$$

Тогда

$$\frac{1}{\frac{|1-\sigma_0-\sigma_1|}{16} + c_i} < P_i(x(t), \xi_1, \xi_2) < \frac{1}{-\frac{|1-\sigma_0-\sigma_1|}{16} + c_i} \quad \text{при } t \in [t_0, \omega[,$$

откуда в силу равенства

$$\frac{\pi_\omega(t)\left(Y^{[i]}(t, \xi_1, \xi_2)\right)'_t}{Y^{[i]}(t, \xi_1, \xi_2)} = \frac{c_0 + G(x(t)) + \dfrac{1}{P_1(x(t), \xi_1, \xi_2)}}{\sum\limits_{i=0}^{1} \dfrac{1}{P_i(x(t), \xi_1, \xi_2)}} - i,$$

а также первого из условий (6) следует, что для каждого $i \in \{0, 1\}$ существуют такие константы $k_0^i, k_1^i \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sign} k_0^i = \mathrm{sign} k_1^i = \mathrm{sign}(\lambda_0^i(\lambda_0 - 1))$ и такое число $t_2 \in [t_1, \omega[$ что $\forall \xi_1, \xi_2 :\ |\xi_j| \le \frac{1}{2}$, $j = 1, 2$

$$\frac{k_0^i}{\pi_\omega(t)} < \frac{\left(Y^{[i]}(t, \xi_1, \xi_2)\right)'_t}{Y^{[i]}(t, \xi_1, \xi_2)} < \frac{k_1^i}{\pi_\omega(t)} \text{ при } t \in [t_2, \omega[.$$

Проинтегрировав данное неравенство на промежутке $[t_2, t]$, получим $\forall \xi_1, \xi_2$: $|\xi_j| \le \le \frac{1}{2}$ $(j = 1, 2)$

$$\ln\frac{|\pi_\omega(t)|^{k_0^i}}{|\pi_\omega(t_2)|^{k_0^i}} + \ln\left|Y^{[i]}(t_2, \xi_1, \xi_2)\right| < \ln\left|Y^{[i]}(t, \xi_1, \xi_2)\right| < \ln\frac{|\pi_\omega(t)|^{k_1^i}}{|\pi_\omega(t_2)|^{k_1^i}} +$$

$$+ \ln\left|Y^{[i]}(t_2, \xi_1, \xi_2)\right|.$$

Тогда, так как в силу (30) и взаимной однозначности F для каждого $i \in \{0, 1\}$ $\mathrm{sign} Y^{[i]}(t, \xi_1, \xi_2) = \mathrm{sign} y_i^0$, имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega} Y^{[i]}(t,\xi_1,\xi_2) = Y_i \tag{36}$$

то из (22) — (24) следует, что для каждого $i \in \{0,1\}$ и $\forall \xi_1,\xi_2:\ |\xi_j| \le \frac{1}{2}$ $(j=1,2)$

$$\lim_{x\to+\infty} P_i(x,\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{c_i}.$$

В силу (18) и (23) функции F_i^{-1} строго монотонны по обеим переменным, поэтому существуют $g_1, g_2 \in \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$ такие, что при $|\xi_j| \le \frac{1}{2}$, $j=1,2$

$$Y^{[i]}(t,-g_1,-g_2) \le Y^{[i]}(t,\xi_1,\xi_2) \le Y^{[i]}(t,g_1,g_2)\,.$$

Отсюда следует, что (36) выполняется равномерно по $\xi_1,\xi_2:\ |\xi_j| \le \frac{1}{2}$, $j=1,2$.

Теперь рассмотрим систему дифференциальных уравнений (29) на множестве

$$\Omega = [x_0,+\infty[\times D, \quad \text{где} \quad x_0 = \beta \ln|\pi_\omega(t_2)|,$$

$$D = \left\{(z_1,z_2) : |z_i| \le \frac{1}{2},\ i=1,2\right\}.$$

Перепишем систему (29) в виде

$$\begin{cases} z_1' = A_{11}z_1 + A_{12}z_2 + R_1(x,z_1,z_2) + R_2(x,z_1,z_2), \\ z_2' = A_{21}z_1 + A_22z_2 + R_3(x,z_1,z_2) + R_4(x,z_1,z_2), \end{cases} \tag{37}$$

где

$$A_{11} = \begin{cases} \dfrac{\beta c_1}{1-\lambda_0}, & \text{при } \lambda_0 \ne 1, \\ \dfrac{\beta c_1}{\sigma_0+\sigma_1-1}, & \text{при } \lambda_0 = 1, \end{cases}$$

$$A_{12} = \begin{cases} \dfrac{\beta(\lambda_0 c_0 - c_1\sigma_0 - c_1 c_0)}{\lambda_0 - 1}, & \text{при } \lambda_0 \ne 1, \\ \dfrac{\beta(c_0 - c_1\sigma_0 - c_1 c_0)}{1-\sigma_0-\sigma_1}, & \text{при } \lambda_0 = 1, \end{cases}$$

$$A_{21} = \begin{cases} \dfrac{\beta}{(1-\lambda_0)}, & \text{при } \lambda_0 \ne 1, \\ \dfrac{\beta}{\sigma_0+\sigma_1-1}, & \text{при } \lambda_0 = 1, \end{cases}$$

$$A_{22} = \begin{cases} \dfrac{\beta(\lambda_0+\sigma_0+c_0)}{(1-\lambda_0)}, & \text{при } \lambda_0 \ne 1, \\ \dfrac{\beta(\lambda_0+\sigma_0+c_0)}{\sigma_0+\sigma_1-1}, & \text{при } \lambda_0 = 1, \end{cases}$$

$$R_1(x,z_1,z_2) = \beta(1+z_1)\left[G_1(x)\left(P_0(x,z_1,z_2)(1+M(z_1,z_2)) - \frac{1}{c_0}M(z_1,z_2)\right) + \right.$$

$$+\frac{B(x)(2+z_2)}{P_0(x,z_1,z_2)}-\frac{B(x)}{c_0}-G_2(x)\Bigg],$$

$$R_2(x,z_1,z_2)=\beta z_1\left(A_{11}z_1+A_{12}z_2\right)+\frac{\beta(1+z_1)}{2c_0}G_1(x)\times$$

$$\times\left(M(z_1,z_2)-1+z_1+(\sigma_0+c_0)z_2\right),$$

$$R_3(x,z_1,z_2)=\beta(1+z_2)G_1(x)\times$$

$$\times\left(\prod_{i=0}^{1}P_i(x,z_1,z_2)(1+M(z_1,z_2))-\frac{M(z_1,z_2)}{c_1c_0}\right)-$$

$$-(\beta(1+z_2))(B(x)-G_3(x)),$$

$$R_4(x,z_1,z_2)=\beta z_2\left(A_{21}z_1+A_{22}z_2\right)+\frac{1}{2c_0c_1}\beta(1+z_2)G_1(x)\times$$

$$\times\left(M(z_1,z_2)-1+z_1+(\sigma_0+c_0)z_2\right).$$

Матрица коэффициентов линейной части системы (37) имеет вид

$$A=\begin{pmatrix}\dfrac{\beta c_1}{1-\lambda_0} & -\dfrac{\beta(\lambda_0c_0-c_1\sigma_0-c_1c_0)}{1-\lambda_0}\\[2ex] \dfrac{\beta}{(1-\lambda_0)} & \dfrac{\beta(\lambda_0+\sigma_0+c_0)}{(1-\lambda_0)}\end{pmatrix}\ \text{при}\ \lambda_0\neq1,$$

$$A=\begin{pmatrix}\dfrac{\beta c_1}{\sigma_0+\sigma_1-1} & \dfrac{\beta(c_0-c_1\sigma_0-c_1c_0)}{1-\sigma_0-\sigma_1}\\[2ex] \dfrac{\beta}{\sigma_0+\sigma_1-1} & \dfrac{\beta(\lambda_0+\sigma_0+c_0)}{\sigma_0+\sigma_1-1}\end{pmatrix}\ \text{при}\ \lambda_0=1,$$

и с учетом M_3

$$\lim_{|z_1|+|z_2|\to0}\frac{R_{2i}(x,z_1,z_2)}{|z_1|+|z_2|}=0\quad(i=1,2)\quad\text{равномерно по}\quad x\in[x_0,+\infty[,$$

$$\lim_{x\to+\infty}R_{2i-1}(x,z_1,z_2)=0\quad(i=1,2)\quad\text{равномерно по}\quad z_1,z_2:\ (z_1,z_2)\in D.$$

Характеристическое уравнение матрицы A $\det[A-\nu E_2]=0$, где E_2 — единичная матрица второго порядка имеет вид

$$\nu^2-\frac{\beta(\lambda_0-\sigma_1+1)}{(1-\lambda_0)}\nu-\lambda_0\frac{(\sigma_0+\sigma_1-1)}{(1-\lambda_0)^2}=0\ \text{при}\ \lambda_0\neq1,$$

$$\nu^2-\frac{\beta(2-\sigma_1)}{(\sigma_0+\sigma_1-1)}\nu-\frac{1}{(\sigma_0+\sigma_1-1)}=0\ \text{при}\ \lambda_0=1.$$

В силу (5) и (9) у этих уравнений при соответствующих значениях λ_0 нет корней с нулевой действительной частью. Таким образом, для системы дифференциальных уравнений (37) выполнены все условия леммы 1 из [13]. Согласно этой лемме система (29) имеет хотя бы одно решение $\{z_i\}_{i=1}^2:[x_1,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}^2$ $(x_1\geq x_0)$, стремящееся к нулю при $x \to +\infty$. Ему в силу замен (25 — 28) соответствует решение y уравнения (1), допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления

$$\begin{aligned} &\Phi_0(y(t))\Phi_1(y'(t)) = \frac{\alpha_0}{c_0 c_1} H_1(t)[1+o(1)], \\ &\frac{y'(t)}{y(t)} = H_2(t)[1+o(1)]. \end{aligned} \tag{38}$$

С учетом вида функций Φ_0, Φ_1, H_1, H_2 и второго из представлений (38) первое из представлений (38) можно переписать при $\lambda_0 \neq 1$ в виде первого из представлений (8), а при $\lambda_0 = 1$ — в виде первого из представлений (12).

В силу этих представлений и (1) ясно, что полученное решение y является $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$- решением. Теоремы 1 и 2 полностью доказаны.

Заключение. В настоящей работе устанавливаются необходимые условия существования у уравнения (1) так называемых $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$- решений для случаев $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Получены асимптотические представления и доказано существование таких решений. На функции φ_0, φ_1 не накладываются никакие дополнительные ограничения, кроме правильного изменения в окрестности особой точки, что требует изменения методики исследования по сравнению с предыдущими исследованиями уравнений такого вида.

1. **Кигурадзе И. Т.** Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений [текст] / И. Т. Кигурадзе, Т. А. Чантурия. – М.: Наука, 1990. – 430 с.
2. **Костин А. В.** Об асимптотике продолжаемых решений уравнения типа Эмдена–Фаулера [текст] / А. В. Костин // Докл. АН СССР. – 1971. – 200, № 1. – С. 28–31.
3. **Костин А. В.** Асимптотика решений одного нелинейного дифференциального уравнения [текст] / А. В. Костин, В. М. Евтухов // Докл. АН СССР. – 1976. – 231, № 5. – С. 1059–1062.
4. **Евтухов В.М.** Об одном нелинейном дифференциальном уравнении второго порядка // Докл. АН СССР.– 1977.– 233, № 4.– С. 531–534.
5. **Евтухов В. М.** Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [текст] / В. М. Евтухов // Сообщ. АН ГССР. – 1982. – 106, № 3. – С. 473–476.
6. **Wong P. K.** Existence and asymptotic behavior of proper solutions of a class of second-order nonlinear differential equations [text] / P. K. Wong // Pacific. J. Math. – 1963. – V. 13. – P. 737–760.
7. **Marić V.** Asymptotic Properties of Solutions of the Equation $y'' = f(x)\Phi(y)$ [text] / V. Marić, M. Tomić // Math. Zeit. – 1976. – V. 149. – P. 261-266.
8. **Talliaferro S. D.** Asymptotic behavior of the solutions of the equation $y'' = \Phi(t)f(y)$ [text] / S. D. Talliaferro // SIAM J. Math. Anal. – 1981. – 12, № 6. – P. 1–24.
9. **Евтухов В. М.** Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [текст] / В. М. Евтухов, Л. А. Кириллова // Дифференц. уравнения. – 2005. – 41, № 8. – С. 1053–1061.

10. **Кириллова Л. А.** Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [текст] / Л. А. Кириллова // Нелінійні коливання. – 2005. – 8, № 1. – С. 18–28.
11. **Евтухов В. М.** Асимптотические представления решений существенно нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка [текст] / В. М. Евтухов, М. А. Белозерова // Укр. мат. журнал. – 2008. – Т. 60, № 3. – С. 310–331.
12. **Белозерова М. А.** Асимптотические представления решений неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностями, близкими к степенным [текст] / М. А. Белозерова // Нелінійні коливання. – 2009. – Т. 12, № 1. – С. 3–15.
13. **Евтухов В. М.** Асимптотические представления решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [текст] / В. М. Евтухов, В. М. Харьков / Дифференц. уравнения. – 2007. – Т. 43, № 10. – С. 1311–1323.
14. **Сенета Е.** Правильно меняющиеся функции [текст] / Е. Сенета. – М.: Наука, 1985. – 141 с.