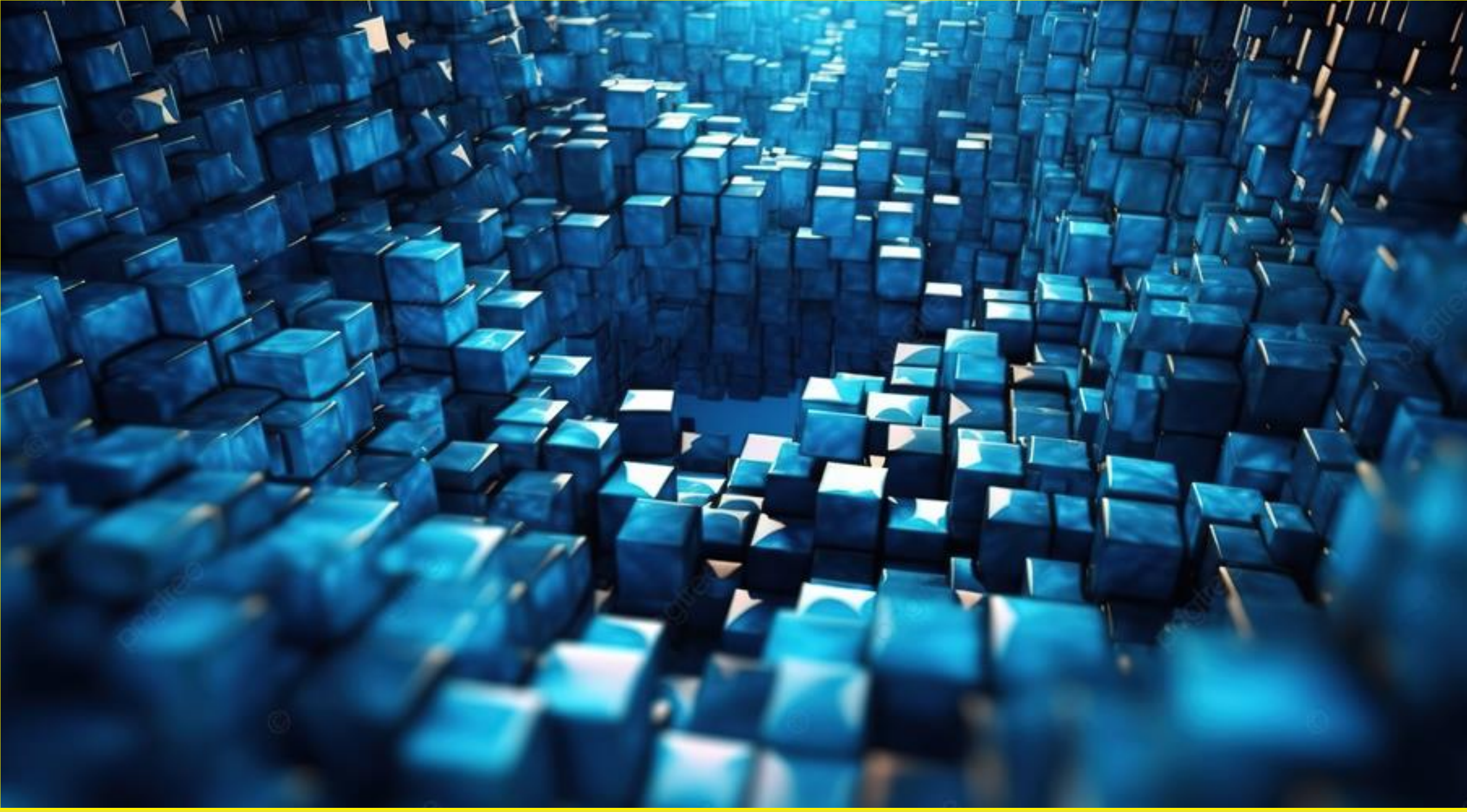


ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ ТА ТЕОРІЯ КЕРУВАННЯ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені І. І. МЕЧНИКОВА
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФІЗИКИ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

О. Д. Кічмаренко, А. О. Стехун, А. Т. Яровий

ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ ТА ТЕОРІЯ КЕРУВАННЯ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальностей 111 Математика, 113 Прикладна математика

ОДЕСА
ОНУ
2025

УДК 517.9,681
К46

Автори:

О. Д. Кічмаренко, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри оптимального керування та економічної кібернетики;

А. О. Стехун, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри оптимального керування та економічної кібернетики;

А. Т. Яровий, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри оптимального керування та економічної кібернетики.

Рецензенти:

А. В. Плотніков, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри інформаційних технологій та прикладної математики Одеської державної академії будівництва та архітектури;

С. А. Положаєнко, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри «Комп'ютеризовані системи та програмні технології» Національного університету «Одеська політехніка»;

О. Р. Георгаліна, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри фундаментальних наук, Військової академії (м. Одеса).

Рекомендовано до видання вченою радою
ОНУ імені І. І. Мечникова.
Протокол № 3 від 28 жовтня 2025 р.

Кічмаренко О. Д.

К46 Варіаційне числення та теорія керування [Електронний ресурс] : навч. посіб. для здобувачів першого (бакалавр.) рівня вищ. освіти спец. 111 Математика, 113 Прикладна математика / О. Д. Кічмаренко, А. О. Стехун, А. Т. Яровий. – Електронні текстові дані (1 файл : 1,9 МБ). Одеса : Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2025. 150 с.

ISBN 978-966-186-406-0

Навчальний посібник призначений для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальностей 111 Математика, 113 Прикладна математика. У посібнику викладено основні поняття й положення варіаційного числення, розглянуто класичні задачі та їх узагальнення, наведено постановки задач теорії керування й підходи до їх розв'язання, подано формулювання та доведення базових теорем. Основна увага приділяється методам варіаційного числення та принципу максимуму Понтрягіна як базовому інструменту теорії оптимального керування. Матеріал проілюстровано прикладами з розв'язаннями, а також доповнено завданнями для самостійної роботи та питаннями для самоконтролю. Це робить посібник корисним як для засвоєння теоретичних основ, так і для формування практичних навичок.

УДК 517.9,681

ISBN 978-966-186-406-0

Зміст

Вступ 7

I Частина перша. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

1 Основні поняття варіаційного числення 10
1.1 Основна задача варіаційного числення. Рівняння Ейлера 10
1.2 Питання для самопідготовки 17
1.3 Завдання для самостійної роботи 17

2 Часткові випадки рівняння Ейлера 20
2.1 Функція F не залежить від $y : F = F(x, y')$ 20
2.2 Функція F не залежить від $x : F = F(y, y')$ 21
2.3 Функція F не залежить від $y' : F = F(x, y)$ 23
2.4 Функція F залежить лише від $y' : F = F(y')$ 23
2.5 Функція F залежить від y' лінійно: $F = M(x, y) + N(x, y)y'$ 24
2.6 Питання для самопідготовки 26
2.7 Завдання для самостійної роботи 26

3 Узагальнення задачі варіаційного числення 28
3.1 Функціонали, що залежать від похідних вищого порядку 28
3.2 Функціонали від багатьох функцій 30
3.3 Функціонали, що залежать від функції кількох незалежних змінних 31
3.3.1 Функціонали, що залежать від функцій двох незалежних змінних . 31
3.3.2 Функціонали, що залежать від функції n незалежних змінних 34
3.4 Підінтегральна функція залежить від похідних до n-го порядку 35
3.5 Питання для самопідготовки 36
3.6 Завдання для самостійної роботи 37

4 Варіаційні задачі з рухомими кінцями 38
4.1 Основна формула для варіації функціонала 38
4.2 Задача з рухомими кінцями 40
4.3 Задача з вільними кінцями 45
4.4 Питання для самопідготовки 47
4.5 Завдання для самостійної роботи 47

5 Задачі з негладкими екстремалями 48
5.1 Задача про відбиття екстремалей 48
5.2 Умови Вейєрштрасса-Ердмана 51
5.3 Задача про переломлення екстремалей 54
5.4 Питання для самопідготовки 58
5.5 Завдання для самостійної роботи 58

6 Односторонні варіації 60
6.1 Односторонні варіації 60
6.2 Питання для самопідготовки 66
6.3 Завдання для самостійної роботи 66

7 Варіаційні задачі на умовний екстремум 67
7.1 Зв'язки виду $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n) = 0$ 67
7.2 Зв'язки виду $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') = 0$ 69
7.3 Ізопериметрична задача 71
7.4 Питання для самопідготовки 73
7.5 Завдання для самостійної роботи 73

8 Дослідження другої варіації 75
8.1 Необхідні умови екстремуму Лежандра-Клебша і Якобі 75
8.1.1 Приєднана задача про мінімум 75
8.1.2 Друга необхідна умова слабкого мінімуму - умова Лежандра-Клебша 76
8.1.3 Третя необхідна умова слабкого мінімуму - умова Якобі 77
8.2 Достатні умови екстремуму 79
8.3 Питання для самопідготовки 83
8.4 Завдання для самостійної роботи 83

9 Гамільтонова форма та рівняння 85
9.1 Канонічна (Гамільтонова) форма рівнянь Ейлера 85

9.2 Рівняння Гамільтона-Якобі 86
9.3 Питання для самопідготовки 90
9.4 Завдання для самостійної роботи 90

II Частина друга. ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ

10 Постановка основних задач оптимального керування 92
10.1 Задачі оптимального керування 92
10.2 Питання для самопідготовки 95
10.3 Завдання для самостійної роботи 96

11 Принцип максимуму Понтрягіна 97
11.1 Приріст критерію якості на припустимих керуваннях 97
11.2 Голкові варіації 99
11.3 Принцип максимуму Понтрягіна для задачі Майєра 100
11.4 Задачі оптимального керування типу Лагранжа і Больца 104
11.4.1 Задача оптимальної швидкодії із закріпленими кінцями 104
11.4.2 Задача Лагранжа 105
11.4.3 Задача Больца 105
11.5 Таблиця різних постановок задач 107
11.6 Питання для самопідготовки 110
11.7 Завдання для самостійної роботи 110

12 Оптимізація лінійних систем 111
12.1 Теорема про достатність принципу максимуму 111
12.2 Синтез лінійних систем, оптимальних по швидкодії 114
12.3 Приклади 117
12.4 Питання для самопідготовки 126
12.5 Завдання для самостійної роботи 126

13 Деякі питання, що пов'язані з принципом максимуму Понтрягіна 127
13.1 Принцип максимуму Понтрягіна для деяких класів задач 127
13.2 Використання принципа максимуму для перевірки керувань на оптимальність 129
13.3 Використання принципу максимуму для звуження класу керувань, підозрілих на оптимальність 133

13.4 Розв'язування лінійних задач оптимального керування 134
13.5 Питання для самопідготовки 143
13.6 Завдання для самостійної роботи 143

14 Зв'язок задач оптимального керування з задачами варіаційного числення . . . 145

14.1 Зв'язок задач оптимального керування з задачами варіаційного числення 145
14.2 Критерій Вейерштрасса 147
14.3 Питання для самопідготовки 148
14.4 Завдання для самостійної роботи 148
Рекомендована література 149

Вступ

Варіаційне числення та теорія оптимального керування є важливими розділами сучасної математики, що знаходять широке застосування у природничих науках, техніці, економіці та інформатиці. Вони виникли з практичної потреби досліджувати задачі, пов'язані з пошуком екстремумів функціоналів — величин, що залежать не від чисел, а від цілих функцій чи траєкторій. Прикладом таких задач є класичні проблеми мінімізації довжини, площі, часу або енергії. Згодом на основі варіаційного підходу було сформовано загальну теорію оптимального керування, яка дозволяє розв'язувати задачі вибору найкращих стратегій у динамічних системах.

Історично варіаційне числення бере початок від задачі бракістохрони, яку у XVII столітті поставив Йоганн Бернуллі. Пошук кривої найшвидшого падіння став поштовхом до розвитку цілої математичної теорії, що швидко знайшла відгук у фізиці, механіці та геометрії. Згодом ця область зазнала глибокого розвитку завдяки працям Ейлера, Лагранжа, Пуассона, Остроградського та інших учених. Саме вони заклали фундамент класичних методів варіаційного числення, які й сьогодні залишаються важливим інструментом для дослідження складних задач.

Оптимальне керування як окрема дисципліна сформувалося значно пізніше — у середині XX століття, коли зросла потреба в ефективному управлінні технічними, економічними та соціальними системами. Зокрема, виникнення космічних програм та складних інженерних задач зумовило потребу у створенні нових методів, які могли б забезпечити оптимальні траєкторії руху, мінімальні витрати ресурсів та досягнення заданих результатів у найкоротший час. У цьому контексті особливу роль відіграв принцип максимуму Понтрягіна, що став універсальним методом дослідження та розв'язання задач оптимального керування.

Структурно книга складається з двох частин. Перша, найбільш об'ємна, присвячена варіаційному численню. У ній досліджуються класичні задачі та їх узагальнення, аналізуються рівняння Ейлера, Ейлера–Пуассона, Ейлера–Остроградського, а також варіаційні задачі з рухомими кінцями та задачі з ламаними екстремалями. Розглядаються задачі на умовний екстремум. Викладено необхідні та достатні умови слабкого та сильного екстремуму, теорему Якобі, теореми Лежандра, теореми Вейєрштрасса, теорему Гамільтона-Якобі. Значне місце відведено розв'язанню прикладних екстремальних задач, що сприяє кращому засвоєнню теоретичного матеріалу.

Друга частина книги присвячена основам теорії оптимального керування. Тут розглянуто різні постановки задач та основні підходи до їх розв'язання, подано формулювання базових теорем і методів. Центральне місце посідає принцип максимуму Понтрягіна, який детально вивчається для різних класів задач. Окремо аналізуються питання оптимізації лінійних систем і синтезу керувань, що забезпечує зв'язок теорії з реальними прикладними задачами.

Запропонований матеріал викладено у доступній і систематизованій формі, яка дозволяє легко орієнтуватися у складних поняттях і методах. Кожен розділ супроводжується питаннями для самопідготовки та завданнями для самостійної роботи, що дозволяє студентам не лише засвоїти теоретичні положення, але й виробити навички практичного застосування варіаційних методів та методів оптимального керування. Книга може слугувати базовим курсом для студентів математичних спеціальностей, а також бути корисною для аспірантів, викладачів і фахівців, що працюють у галузях прикладної математики, математичного моделювання, економіки та інженерії. Крім того, посібник може використовуватися як довідкове джерело для самостійного опрацювання окремих тем, адже у ньому наведено достатню кількість задач з розв’язками, що робить матеріал зрозумілим і доступним.

Частина перша. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

1 Основні поняття варіаційного числення 10
1.1 Основна задача варіаційного числення. Рівняння Ейлера
1.2 Питання для самопідготовки
1.3 Завдання для самостійної роботи

2 Часткові випадки рівняння Ейлера 20
2.1 Функція F не залежить від $y : F = F(x, y')$
2.2 Функція F не залежить від $x : F = F(y, y')$
2.3 Функція F не залежить від $y' : F = F(x, y)$
2.4 Функція F залежить лише від $y' : F = F(y')$
2.5 Функція F залежить від y' лінійно: $F = M(x, y) + N(x, y)y'$
2.6 Питання для самопідготовки
2.7 Завдання для самостійної роботи

3 Узагальнення задачі варіаційного числення 28
3.1 Функціонали, що залежать від похідних вищого порядку
3.2 Функціонали від багатьох функцій
3.3 Функціонали, що залежать від функції кількох незалежних змінних
3.4 Підінтегральна функція залежить від похідних до n-го порядку
3.5 Питання для самопідготовки
3.6 Завдання для самостійної роботи

4 Варіаційні задачі з рухомими кінцями 38
4.1 Основна формула для варіації функціонала
4.2 Задача з рухомими кінцями
4.3 Задача з вільними кінцями
4.4 Питання для самопідготовки
4.5 Завдання для самостійної роботи

5 Задачі з негладкими екстремалями 48
5.1 Задача про відбиття екстремалей
5.2 Умови Вейєрштрасса-Ердмана
5.3 Задача про переломлення екстремалей
5.4 Питання для самопідготовки
5.5 Завдання для самостійної роботи

6 Односторонні варіації 60
6.1 Односторонні варіації
6.2 Питання для самопідготовки
6.3 Завдання для самостійної роботи

7 Варіаційні задачі на умовний екстремум . . . 67
7.1 Зв'язки виду $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n) = 0$
7.2 Зв'язки виду $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') = 0$
7.3 Ізопериметрична задача
7.4 Питання для самопідготовки
7.5 Завдання для самостійної роботи

8 Дослідження другої варіації 75
8.1 Необхідні умови екстремуму Лежандра-Клебша і Якобі
8.2 Достатні умови екстремуму
8.3 Питання для самопідготовки
8.4 Завдання для самостійної роботи

9 Гамільтонова форма та рівняння 85
9.1 Канонічна (Гамільтонова) форма рівнянь Ейлера
9.2 Рівняння Гамільтона-Якобі
9.3 Питання для самопідготовки
9.4 Завдання для самостійної роботи

1 Основні поняття варіаційного числення

1.1 Основна задача варіаційного числення. Рівняння Ейлера

Основна задача варіаційного числення виникла як узагальнення задачі про брахістохрону. Задачі варіаційного числення відрізняються від задач математичного програмування тим, що у них знаходять не скінченовимірний вектор, а функцію.

У цьому розділі ми розглядатимемо задачі знаходження екстремумів (максимумів чи мінімумів) функціоналів. Відразу відзначимо, що такі задачі належать до найважливіших завдань сучасної математики і досліджуються в багатьох математичних курсах таких, як, наприклад, «Екстремальні задачі», «Оптимальне керування», «Лінійне програмування», «Опукле програмування» та деяких інших. Варіаційне числення є класичним розділом математики, основи варіаційного числення закладені ще в 17-18 століттях.

Функціонали, що досліджуються у варіаційному численні, будуть описані нижче.

Функціонал - це оператор, множина значень якого складається з чисел. Ми розглядатимемо лише дійсні функціонали, множинами значень яких є дійсні числа.

Далі введемо деякі означення і сформулюємо основну задачу варіаційного числення.

Означення 1.1.1 Скалярні функції $y = y(x)$, що визначені і неперервні на відрізкові $[a,\ b]$ разом з першими похідними $y'(x)$ та приймають задані значення на кінцях відрізка $y(a) = c$, $y(b) = d$ називаються ***припустимими кривими***.

Означення 1.1.2 Задача мінімізації функціоналу

$$J(x) = \int\limits_a^b F\left(x,\ y(x),\ y'(x)\right) dx \tag{1.1.1}$$

на множині припустимих кривих $y(x),\ x \in [a,\ b]$, називається ***основною задачею*** варіаційного числення.

Означення 1.1.3 Припустима крива $y^0(x)$, $x \in [a,\ b]$, називається ***сильною мінімаллю функціоналу*** (1.1.1), якщо для деякого $\varepsilon > 0$ для всіх припустимих кривих $y(x)$, $x \in [a,\ b]$ таких, що

$$\left|y^0(x) - y(x)\right| \leq \varepsilon, \quad x \in [a,\ b]$$

виконується нерівність

$$J\left(y^0(x)\right) \leq J\left(y(x)\right).$$

Означення 1.1.4 Припустима крива $y^0(x)$, $x \in [a,\ b]$, називається ***слабкою мінімаллю функціоналу*** (1.1.1), якщо для деякого $\varepsilon > 0$ для всіх припустимих кривих $y(x)$, $x \in [a,\ b]$ таких, що

$$\left|y^0(x) - y(x)\right| \leq \varepsilon \quad \text{і} \quad \left|y^{0\,\prime}(x) - y'(x)\right| \leq \varepsilon, \quad x \in [a,\ b]$$

виконується нерівність

$$J\left(y^0(x)\right) \leq J\left(y(x)\right).$$

Таким чином, сильна мінімаль краща серед припустимих кривих, що близькі до неї за своїми значеннями, а слабка мінімаль краща серед припустимих кривих, що близькі не тільки за значенням функції, але і за значенням похідних.
Зрозуміло, що сильна мінімаль є і слабкою, тому необхідні умови слабкого мінімуму є і необхідними умовами сильного мінімуму.
Існування розв'язку найпростішої задачі варіаційного числення стверджує наступна теорема.

Теорема 1.1.1 Нехай $F(x,\ y,\ z) \in \mathbf{C}^1$ (неперервно диференційована функція), є опуклою по z,

$$F(x,\ y,\ z) \geq \Phi(z), \quad \text{де} \quad \frac{\Phi(z)}{z} \to \infty, \quad \text{при} \quad z \to \infty.$$

Тоді існує розв'язок найпростішої задачі варіаційного числення.

Далі будемо вважати, що функція $F\left(x, y(x), y'(x)\right)$ по сукупності своїх аргументів належить класу $\mathbf{C}^2$.

Означення 1.1.5 Нехай $y = y(x)$, $x \in [a,\ b]$ – припустима крива основної задачі варіаційного числення. Тоді функцію

$$\delta y(x), \quad x \in [a,\ b],$$

назвемо ***варіацією кривої*** $y = y(x)$, якщо функція

$$\overline{y}(x) = y(x) + \delta y(x)$$

є припустимою кривою.

При дослідженні слабких мінімалей варіацію кривої $\delta y(x)$ будемо розглядати у вигляді

$$\delta y(x) = \varepsilon h(x), \quad x \in [a,\ b], \quad \text{де } \varepsilon \text{ дійсне число.}$$

Функцію $h(x)$ далі будемо називати варіацією кривої, вона задовольняє наступним умовам

$$h(x) \in \mathbf{C}^1,\ x \in [a,\ b], \quad h(a) = h(b) = 0.$$

Означення 1.1.6 Нехай $J(y)$ – функціонал, що визначений на припустимих кривих $y(x)$. Якщо $y(x)$ і $h(x)$ фіксовані, $x \in [a,\ b]$ і функціонал має розвинення

$$J\left(y + \varepsilon h\right) = J(y) + \varepsilon \delta J(y) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \delta^2 J(y) + o(\varepsilon^2), \tag{1.1.2}$$

то коефіцієнт $\delta J(y)$ при ε називається ***першою варіацією функціонала*** $J(y)$ на кривій $y = y(x)$ і варіації $h(x)$.

Означення 1.1.7 Коефіцієнт $\delta^2 J(y)$ при $\frac{1}{2}\varepsilon^2$ у розвиненні (1.1.2) називається ***другою варіацією функціонала*** $J(y)$ на кривій $y = y(x)$ і варіації $h(x)$.

Легко отримати, що перша та друга варіації функціонала відповідно мають вигляд

$$\delta J(y(x)) = \int\limits_a^b \left[\frac{\partial F\left(x, y(x), y'(x)\right)}{\partial y} h(x) + \frac{\partial F\left(x, y(x), y'(x)\right)}{\partial y'} h'(x)\right] dx,$$

$$\delta^2 J(y(x)) = \int\limits_a^b \left[\frac{\partial^2 F\left(x, y(x), y'(x)\right)}{\partial y^2} h^2(x) + \right.$$

$$\left. + 2\frac{\partial^2 F\left(x, y(x), y'(x)\right)}{\partial y \partial y'} h(x) h'(x) + \frac{\partial^2 F\left(x, y(x), y'(x)\right)}{\partial y'^2} (h'(x))^2\right] dx.$$

Теорема 1.1.2 **(необхідна умова слабкого мінімуму у термінах варіацій функціоналу).** На кожній слабкій мінімалі $y^0(x)$, $x \in [a,\ b]$ і довільній варіації $h(x)$, $x \in [a,\ b]$ перша варіація функціоналу дорівнює нулеві (умова стаціонарності)

$$\delta J(y^0(x)) = 0,$$

а друга варіація – невід'ємна

$$\delta^2 J(y^0(x)) \geq 0.$$

Доведення. Нехай $\delta J(y^0(x)) = a \neq 0$. Розглянемо розвинення

$$J\left(y^0(x) + \varepsilon h\right) = J(y^0(x)) + \varepsilon \delta J(y^0(x)) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \delta^2 J(y^0(x)) + o(\varepsilon^2).$$

Тоді

$$0 \leq J\left(y^0(x) + \varepsilon h\right) - J(y^0(x)) = \varepsilon \left[a + \frac{1}{2}\varepsilon \delta^2 J(y^0(x)) + \frac{o(\varepsilon^2)}{\varepsilon}\right].$$

Якщо взяти досить мале ε, тоді знак виразу у квадратних дужках буде залежити від знаку величини a. Величину ε візьмемо такою, щоб $\operatorname{sign} \varepsilon = -\operatorname{sign} a$. Тоді

$$0 \leq J\left(y^0(x) + \varepsilon h\right) - J(y^0(x)) = -\left|\varepsilon\right| \left[|a| + \frac{1}{2}\varepsilon \delta^2 J(y^0(x)) + \frac{o(\varepsilon^2)}{\varepsilon}\right] < 0.$$

Отримали суперечність, отже $\delta J(y^0(x)) = 0$.
Тепер нехай $\delta^2 J(y^0(x)) = b < 0$. Тоді для досить малих ε отримаємо

$$0 \leq J\left(y^0(x) + \varepsilon h\right) - J(y^0(x)) = \varepsilon^2 \left[\frac{1}{2}b + \frac{o(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2}\right] < 0$$

Маємо суперечність. Теорему доведено. ☑

На жаль користуватися отриманими необхідними умовами слабкого мінімуму неможливо, тому що у вирази для першої і другої варіацій входять невідомі функції $h(x)$. Тому наступним кроком є завдання отримати більш прості для користування необхідні умови слабкого мінімуму.

Лема 1.1.3 **(Лагранжа).** Якщо рівність

$$\int_a^b c(x)d(x)dx = 0$$

виконується для неперервної функції $c(x)$, $x \in [a,\ b]$ і всіх функцій $d(x)$,

$x \in [a,\ b]$ класу $\mathbf{C}^1$, таких, що $d(a) = d(b) = 0$, то

$$c(x) \equiv 0, \quad x \in [a,\ b].$$

Теорема 1.1.4 **(Ейлера - необхідна умова слабкого мінімуму).** Якщо припустима крива $y = y(x)$, $x \in [a,\ b]$ дає слабкий мінімум функціонала (1.1.1) основної задачі варіаційного числення, то необхідно, щоб вона задовольняла рівнянню Ейлера

$$\frac{\partial F\left(x, y(x), y'(x)\right)}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F\left(x, y(x), y'(x)\right)}{\partial y'} = 0. \tag{1.1.3}$$

Доведення. Використаємо необхідну умову слабкого мінімуму функціонала у термінах першої варіації: $\delta J(y(x)) = 0$. Тобто

$$\int\limits_a^b \left[\frac{\partial F\left(x, y(x), y'(x)\right)}{\partial y} h(x) + \frac{\partial F\left(x, y(x), y'(x)\right)}{\partial y'} h'(x)\right] dx = 0.$$

Іінтегруємо по частинам другий доданок

$$\int\limits_a^b \frac{\partial F\left(x, y(x), y'(x)\right)}{\partial y'} h'(x)dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = \dfrac{\partial F\left(x, y(x), y'(x)\right)}{\partial y'} & dv = h'(x)dx \\ \\ du = \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F\left(x, y(x), y'(x)\right)}{\partial y'}dx & v = h(x) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\partial F\left(x, y(x), y'(x)\right)}{\partial y'} h(x)\Bigg|_a^b - \int\limits_a^b \left[\frac{d}{dx}\frac{\partial F\left(x, y(x), y'(x)\right)}{\partial y'}\right] h(x)dx =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{функція } h(x) \\ \text{задовольняє умовам} \\ \\ h(a) = h(b) = 0 \end{bmatrix} = -\int\limits_a^b \left[\frac{d}{dx}\frac{\partial F\left(x, y(x), y'(x)\right)}{\partial y'}\right] h(x)dx.$$

Далі отримаємо

$$\delta J(y(x)) = \int\limits_a^b \left[\frac{\partial F\left(x, y(x), y'(x)\right)}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F\left(x, y(x), y'(x)\right)}{\partial y'}\right] h(x)dx = 0.$$

Використовуючи лему Лагранжа, отримуємо, що розв'язок основної задачі варіаційного числення повинен задовольняти рівнянню

$$\frac{\partial F\left(x, y(x), y'(x)\right)}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F\left(x, y(x), y'(x)\right)}{\partial y'} = 0.$$

Теорему доведено. ☑

Рівняння (1.1.3) має назву ***рівняння Ейлера у диференціальній формі***. Припустима крива, що задовольняє рівнянню Ейлера називається екстремаллю. Рівняння Ейлера можна написати у розгорнутому вигляді

$$\frac{\partial F\left(x, y, y'\right)}{\partial y} - \frac{\partial^2 F\left(x, y, y'\right)}{\partial x\, \partial y'} - \frac{\partial^2 F\left(x, y, y'\right)}{\partial y \partial y'}y' - \frac{\partial^2 F\left(x, y, y'\right)}{\partial y'^2}y'' = 0.$$

Дю-Буа-Реймонд вперше вказав на недоліки у отриманні рівняння Ейлера у його розгорнутому вигляді. А саме, при інтегруванні по частинам неявно вважалось, що функція $\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}$ є гладкою і у розгорнутому вигляді $\frac{d}{dx}\frac{\partial F(x,y(x),y'(x))}{\partial y'}$ має доданок з y'', що у постановці задачі не передбачається. Для строгого доведення теореми Ейлера використовується наступна

Лема 1.1.5 (Дю-Буа-Реймонда). Якщо рівність

$$\int\limits_a^b c(x)d(x)dx = 0$$

виконується для неперервної функції $c(x),\ x \in [a,\ b]$ і для всіх неперервних функцій $d(x)$, $x \in [a,\ b]$, що задовольняють умові

$$\int\limits_a^b d(x)dx = 0,$$

то необхідно, щоб $c(x) \equiv \text{const}$, $x \in [a,\ b]$.

Теорема 1.1.6 (рівняння Ейлера в інтегральній формі). Слабка мініmаль $y^0 = y^0(x),\ x \in [a,\ b]$ основної задачі задовольняє інтегральному рівнянню Ейлера

$$\frac{\partial F\left(x, y^0(x), y^{0\,\prime}(x)\right)}{\partial y'} = \int\limits_a^x \frac{\partial F\left(s, y^0(s), y^{0\,\prime}(s)\right)}{\partial y}ds + \text{const}\,. \qquad (1.1.4)$$

Доведення. Розглянемо першу варіацію на кривій, що є розв'язком основної задачі

$$\delta J(y^0(x)) = \int\limits_a^b \left[\frac{\partial F\left(x, y^0(x), y^{0\,\prime}(x)\right)}{\partial y} h(x) + \frac{\partial F\left(x, y^0(x), y^{0\,\prime}(x)\right)}{\partial y'} h'(x) \right] dx = 0.$$

Тоді

$$\int\limits_a^b \frac{\partial F\left(x, y^0(x), y^{0\,\prime}(x)\right)}{\partial y} h(x) dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = h(x) & dv = \dfrac{\partial F\left(x, y^0(x), y^{0\,\prime}(x)\right)}{\partial y} dx \\ \\ du = h'(x)dx & v = \int\limits_a^x \dfrac{\partial F\left(s, y^0(s), y^{0\,\prime}(s)\right)}{\partial y} ds \end{bmatrix} =$$

$$= -\int\limits_a^b \int\limits_a^x \frac{\partial F\left(s, y^0(s), y^{0\,\prime}(s)\right)}{\partial y}\, ds h'(x) dx.$$

Маємо

$$\delta J(y^0(x)) =$$

$$= \int\limits_a^b \left[-\int\limits_a^x \frac{\partial F\left(s, y^0(s), y^{0\,\prime}(s)\right)}{\partial y} ds + \frac{\partial F\left(x, y^0(x), y^{0\,\prime}(x)\right)}{\partial y'} \right] h'(x) dx = 0.$$

Застосуємо лему Дю-Буа-Реймонда і отримаємо рівняння Ейлера в інтегральній формі

$$\frac{\partial F\left(x, y^0(x), y^{0\,\prime}(x)\right)}{\partial y'} - \int\limits_a^x \frac{\partial F\left(s, y^0(s), y^{0\,\prime}(s)\right)}{\partial y} ds = \mathrm{const}\,. \tag{1.1.5}$$

Теорему доведено. ☑

Далі покажемо, як від рівняння Ейлера в інтегральній формі (1.1.4) перейти до рівняння Ейлера у диференціальній формі (1.1.3). Для цього розглянемо рівняння (1.1.4). Інтеграл справа є функцією класу $\mathbf{C}^1$, тому і ліва частина має неперервну повну похідну за змінною x. Беремо повну похідну по x від обох частин рівняння (1.1.4) і отримуємо рівняння Ейлера у диференціальній формі (1.1.3).

Залишилося відкритим питання про існування другої похідної у розв'язку $y^0(x)$. Знайдемо умову, при якій $y^0(x)$ буде належати класу $\mathbf{C}^2$.

Означення 1.1.8 Припустима крива $y = y(x)$ називається ***неособливою***, якщо вздовж неї виконується нерівність

$$\frac{\partial^2 F\left(x, y(x), y'(x)\right)}{\partial y'^2} \neq 0, \quad x \in [a,\ b].$$

Теорема 1.1.7 (Гільберта). Кожна неособлива екстремаль належить класу $\mathbf{C}^2$.

Доведення. Використовуючи інтегральне рівняння Ейлера (1.1.4) і екстремаль $y(x),\ x \in [a,\ b]$, побудуємо рівняння

$$B(x,z) \equiv -\int_a^x \frac{\partial F\left(s, y(s), y'(s)\right)}{\partial y} ds + \frac{\partial F\left(x, y(x), z(x)\right)}{\partial y'} - \mathrm{const} = 0. \quad (1.1.6)$$

Розв'язком цього рівняння є $z(x) = y'(x)$. Так як екстремаль є неособливою, то

$$\left.\frac{\partial B(x,z)}{\partial z}\right|_{z(x) = y'(x)} = \frac{\partial^2 F\left(x, y(x), y'(x)\right)}{\partial y'^2} \neq 0.$$

Тому за теоремою про неявні функції розв'язок $z = y'(x)$ рівняння (1.1.6) має стільки похідних по x, скільки їх по x має функція $B(x,z)$. Так як $F(x,y,z) \in \mathbf{C}^2$, то $B(x,z) \in \mathbf{C}^1$. А це означає, що $y'(x) \in \mathbf{C}^1$, тобто $y(x) \in \mathbf{C}^2$. Теорему доведено. ☑

1.2 Питання для самопідготовки

1. Сформулювати основну задачу варіаційного числення.
2. Сформулювати лему Лагранжа.
3. Сформулювати теорему Ейлера про необхідну умову слабкого мінімуму.
4. Сформулювати лему Дю-Буа-Реймонда.
5. Вміти написати рівняння Ейлера в диференціальній та інтегральній формах.
6. Сформулювати теорему Гільберта.

1.3 Завдання для самостійної роботи

Знайти екстремалі функціоналу

$$J(y) = \int_i^{i+j} \left(a(y')^2 + bxy' + cy + d\,xy + kx^j\right) dx,$$

$$y(i) = i + j, \qquad y(i + j) = 2i.$$

Варіант визначається параметрами i, j, a, b, c, d, k, де
i – порядковий номер ПІП студента у списку групи,
j – номер групи,
інші параметри задаються у таблиці нижче

Табл. 1.3.1: *Варіант. Значення параметрів.*

номер варіанта	a	b	c	d	k
1	1	0	2	4	5
2	2	1	0	4	6
3	3	1	2	0	3
4	2	4	6	1	0
5	3	7	5	0	2
6	2	6	3	1	0
7	4	0	1	2	1
8	8	2	0	1	4
9	2	4	0	1	1
10	7	2	1	0	2
11	9	0	4	2	1
12	10	5	6	1	0
13	3	0	4	5	2
14	4	2	0	7	3
15	5	6	1	0	2
16	3	2	0	7	1
17	2	1	7	0	3
18	2	0	4	5	1
19	7	3	0	2	2
20	8	5	1	0	4
21	3	4	0	2	5
22	4	0	6	1	7
23	21	1	1	1	0
24	9	6	0	7	2
25	8	3	2	1	0
26	4	5	6	7	10
27	5	7	0	6	1
28	9	0	3	2	2
29	10	2	0	3	1
30	14	1	2	0	2

номер варіанта	a	b	c	d	k
31	15	3	0	1	4
32	2	0	6	2	7
33	1	2	0	3	2
34	7	1	2	0	3
35	8	2	1	4	0
36	13	12	11	0	10
37	1	7	0	8	5
38	6	3	1	7	8
39	3	0	4	5	7
40	8	2	10	1	0
41	1	2	3	4	0
42	2	3	0	5	6
43	7	0	8	9	3
44	9	10	0	7	0
45	14	9	1	0	2
46	15	0	7	3	1
47	14	1	2	2	0
48	13	2	0	7	4
49	14	2	6	0	5
50	11	3	7	10	8
51	9	0	6	2	1
52	15	2	0	3	2
53	17	3	1	0	4
54	20	5	1	2	0
55	16	3	0	2	2
56	40	17	1	2	0
57	31	0	6	2	5
58	42	2	0	6	2
59	13	4	1	0	1
60	15	5	0	6	1
61	17	2	0	5	6
62	20	3	7	0	8
63	2	1	1	9	0
64	1	2	2	0	9

2 Часткові випадки рівняння Ейлера

Рівняння Ейлера є, взагалі кажучи, звичайним диференціальним рівнянням другого порядку, і тому знаходження його розв'язків є в більшості випадків складною задачею. У зв'язку з цим особливий інтерес привертають умови, за яких його порядок можна понизити чи, навіть, рівняння Ейлера інтегрується у квадратурах. Тому важливо виявити такі випадки, коли інтегрування у квадратурах можливо.
Розглянемо часткові випадки інтегрованості рівняння Ейлера.

2.1 Функція F не залежить від $y : F = F(x, y')$

У цьому випадку рівняння Ейлера приймає наступний вигляд

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F\left(x, y'(x)\right)}{\partial y'} = 0.$$

Інтегруючи це рівняння, отримаємо перший інтеграл

$$\frac{\partial F\left(x, y'(x)\right)}{\partial y'} = c_1.$$

Отримали рівняння першого порядку, тобто вдалося знизити порядок диференціального рівняння до першого, яке не містить y. Далі розв'язуємо його відносно y', отримуємо диференціальне рівняння першого порядку виду $y' = \varphi(x, c_1)$. Звідси знаходимо $y(x)$ квадратурою.

ПРИКЛАД 2.1 Знайти екстремалі функціоналу

$$J(y) = \int\limits_0^1 \left((y')^3 + 2x^2\right) dx, \quad y(0) = 0, \;\; y(1) = 2.$$

Розв'язання. Функція F має вигляд $F(x, y, y') = (y')^3 + 2x^2$, тобто не залежить від y, тоді рівняння Ейлера приймає наступний вид

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F(x, y')}{\partial y'} = 0,$$

тобто

$$\frac{d}{dx}(3y'^2) = 0.$$

Далі інтегруємо обидві частини цього рівняння

$$3(y')^2 = c \quad (\text{де } c \in \mathbb{R}_+)$$

та розв'язуємо відносно y'

$$y' = \pm\sqrt{\frac{c}{3}} \quad \Longrightarrow \quad y' = c_1 \quad \left(\text{де } c_1 = \pm\sqrt{\frac{c}{3}},\ c_1 \in \mathbb{R}\right).$$

Звідси

$$y(x) = c_1 x + c_2.$$

Використовуючи межові умови, отримаємо та розв'яжемо систему

$$\begin{cases} c_1 \cdot 0 + c_2 = 0, \\ c_1 \cdot 1 + c_2 = 2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad c_1 = 2,\ c_2 = 0.$$

Остаточно отримуємо екстремаль функціоналу

$$y(x) = 2x.$$

■

2.2 Функція F не залежить від $x : F = F(y, y')$

У цьому випадку рівняння Ейлера має вигляд

$$\frac{\partial F(y, y')}{\partial y} - \frac{\partial^2 F(y, y')}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial^2 F(y, y')}{\partial y'^2} y'' = 0.$$

Домножимо це рівняння на y'

$$\frac{\partial F(y, y')}{\partial y} y' - \frac{\partial^2 F(y, y')}{\partial y \partial y'} y'^2 - \frac{\partial^2 F(y, y')}{\partial y'^2} y' y'' = 0$$

і помітимо, що ліва частина отриманого рівняння є повною похідною

$$\frac{d}{dx}\left(F(y, y') - y' \frac{\partial F(y, y')}{\partial y'}\right) = 0.$$

Інтегруючи, знаходимо рівняння Ейлера

$$F(y, y') - y' \frac{\partial F(y, y')}{\partial y'} = c.$$

ПРИКЛАД 2.2 Знайти екстремалі функціоналу

$$J(y) = \int\limits_1^2 y^2(y')^2 dx, \quad y(1) = 1, \ \ y(2) = 0.$$

Розв'язання. Функція $F(x, y, y') = y^2(y')^2$, тобто не залежить від x, тоді рівняння Ейлера набуває вигляду

$$F(y, y') - y' \frac{\partial F(y, y')}{\partial y'} = c,$$

а саме

$$y^2 y'^2 - 2y^2(y')^2 = c.$$

Спрощуємо його

$$-y^2(y')^2 = c$$

або

$$y^2(y')^2 = c_1 \quad (\text{де } c_1 = -c).$$

Розв'язуємо отримане диференціальне рівняння першого порядку

$$yy' = c_2 \quad (\text{де } c_2 = \pm\sqrt{c_1}),$$

$$y\frac{dy}{dx} = c_2,$$

$$ydy = c_2 dx,$$

$$\frac{1}{2}y^2 = c_2 x + c_3.$$

Використовуючи межові умови, отримаємо систему

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = c_2 + c_3, \\ \\ 0 = 2c_2 + c_3 \end{cases} \quad \Longrightarrow \qquad c_2 = -\tfrac{1}{2}, \ c_3 = 1.$$

Остаточно екстремаль Ейлера має вигляд

$$y(x) = \sqrt{2 - x}.$$

■

2.3 Функція F не залежить від $y' : F = F(x,y)$

У цьому випадку рівняння Ейлера матиме вигляд

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 0.$$

Воно не є диференціальним рівнянням і до розв'язку не входять константи, тому межові умови можуть не задовольнятися. Отже, розв'язок варіаційної задачі, що розглядається, взагалі кажучи, не існує. Лише у виняткових випадках, коли крива, яка визначається рівнянням $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 0$, проходить через межові точки (x_0, y_0), (x_1, y_1) існує функція, на якої може досягатися екстремум функціоналу.

ПРИКЛАД 2.3 Знайти екстремалі функціоналу

$$J(y) = \int\limits_0^2 \left(x^2 y - y^2\right) dx, \quad y(0) = 10, \quad y(2) = 2.$$

Розв'язання. Функція $F(x,y,y') = x^2 y - y^2$, вона не залежить від y', тому рівняння Ейлера набуває вигляду

$$x^2 - 2y = 0, \text{ звідси } y = \frac{1}{2}x^2.$$

Задача має розв'язок, якщо знайдена крива проходить через задані граничні точки, тобто $y(0) = 10, \quad y(2) = 2$. Друга межова умова виконується

$$y(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 = 2.$$

А перша – не виконується

$$y(0) = \frac{1}{2} \cdot 0^2 = 0 \neq 10.$$

Отже, варіаційна задача розв'язку немає. ■

2.4 Функція F залежить лише від $y' : F = F(y')$

У цьому випадку $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ і $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\frac{dy'}{dx}$. Рівняння Ейлера зводиться до рівняння

$$\frac{\partial^2 F(y')}{\partial y'^2} \cdot y'' = 0.$$

Якщо $\frac{\partial^2 F(y')}{\partial y'^2} \neq 0$, то рівняння Ейлера має вигляд

$$y'' = 0.$$

Розв'язком якого є функція
$$y = c_1 x + c_2.$$
Ці криві утворюють двопараметричну сім'ю прямих. Таким чином, у випадку $F = F(y')$ екстремалями є всілякі прямі лінії $y = c_1 x + c_2$.

ПРИКЛАД 2.4 Знайти екстремаль функціоналу

$$J(y) = \int_1^2 \sqrt{1 + (y')^2}\, dx, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = 1.$$

Цей функціонал досить часто використовується. Він визначає довжину кривої, що з'єднує дві точки.
Розв'язання. Функція $F(y') = \sqrt{1 + (y')^2}$. Знаходимо

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{1}{2\sqrt{1 + (y')^2}} 2y' = \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}$$

$$\frac{\partial^2 F(y')}{\partial y'^2} = \frac{\sqrt{1 + y'^2} - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}}{\left(\sqrt{1 + y'^2}\right)^2} = \frac{1}{\left(\sqrt{1 + y'^2}\right)^3} \neq 0.$$

Тоді рівняння Ейлера набуває вигляду

$$y'' = 0,$$

звідки, двічі інтегруючи, знаходимо

$$y = c_1 x + c_2.$$

Враховуючи межові умови, отримаємо функцію

$$y = x - 1.$$

■

2.5 Функція F залежить від y' лінійно: $F = M(x, y) + N(x, y)y'$

Запишемо рівняння Ейлера

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial N(x, y)}{\partial y} y' - \frac{d}{dx} N(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial N(x, y)}{\partial y} y' - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial y} y' = 0$$

Тоді рівняння Ейлера вироджується у функціональне

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 0.$$

Розв'язок подібного рівняння у загальному випадку не задовольняє умови в крайніх точках, і тому функціонал, найімовірніше, екстремалей не має, тобто задача не матиме розв'язку. Більше того, варіаційна задача взагалі втрачає зміст, якщо

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \equiv 0,$$

бо тоді вираз

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$$

є повним диференціалом

$$dF(x,y,y') = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$$

і тоді функціонал

$$J(y) = \int\limits_a^b F(x,y,y')\,dx = \int\limits_{(a,c)}^{(b,d)} M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$$

не залежить від шляху інтегрування, тобто значення функціонала $J(y)$ однакове на усіх припустимих кривих, залежить лише від початкової та кінцевої точок, а не від вибору кривої $y = y(x)$. У цьому випадку кажуть, що варіаційна задача немає сенсу.

П Р И К Л А Д 2.5 Знайти екстремалі функціоналу, що задовольняють вказаним крайовим умовам (допустимі екстремалі):

$$J(y) = \int\limits_1^2 \left(xy^3 + \frac{3}{2}x^2y^2y'\right)\,dx, \quad y(1) = 1,\ y(2) = 2.$$

Розв'язання. Функція $F(x,y,y') = xy^3 + \frac{3}{2}x^2y^2y'$ залежить лінійно від y'. Позначимо

$$M = xy^3, \qquad N = \frac{3}{2}x^2y^2,$$

та знайдемо

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3xy^2, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3xy^2.$$

Отже

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \equiv 0.$$

Підінтегральний вираз є повним диференціалом функції $F(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^3$, а це означає, що інтеграл не залежить від шляху інтегрування. Тобто значення функціоналу на припустимих кривих одне і те ж, а варіаційна задача немає сенсу. Значення функціоналу дорівнює

$$J(y) = \int_1^2 \left(xy^3 + \frac{3}{2}x^2y^2y' \right) dx =$$

$$= \int_{(1,1)}^{(2,2)} xy^3dx + \frac{3}{2}x^2y^2dy =$$

$$= \int_{(1,1)}^{(2,2)} d\left(F(x,y)\right) = \int_{(1,1)}^{(2,2)} d\left(\frac{1}{2}x^2y^3\right) =$$

$$= \frac{1}{2}x^2y^3 \Big|_{(1,1)}^{(2,2)} = \frac{1}{2} - 16 = -15\frac{1}{2}.$$

■

2.6 Питання для самопідготовки

1. Знати усі п'ять часткових випадків рівняння Ейлера.
2. Показати, що у випадку незалежності функції F від y, тобто $F = F(x,y')$, рівняння Ейлера зводиться до диференціального рівняння першого порядку.
3. Показати, що твердження питання 2 справедливе у випадку $F = F(y,y')$.
4. У яких виняткових ситуаціях варіаційна задача має сенс, якщо підінтегральна функція F не залежить від y', тобто $F = F(x,y)$?
5. Знайти сімейство экстремалей у випадку залежності функції F лише від y', тобто $F = F(y')$.
6. Показати, що значення функціонала на екстремалях не залежить від шляху інтегрування у випадку лінійної залежності функції F від y', тобто $F = M(x,y) + N(x,y)y'$.

2.7 Завдання для самостійної роботи

1. Знайти екстремалі функціоналу

$$J(y) = \int_1^2 \left((jy')^3 + ix^3\right) dx, \quad y(1) = 2, \quad y(2) = 3.$$

2. Знайти екстремалі функціоналу

$$J(y) = \int\limits_{i}^{i+5} (jx^3 - y^3)dx, \quad y(i) = 2, \quad y(i+5) = 6.$$

3. Знайти екстремалі функціоналу

$$\int\limits_{4}^{i} (\sin y' + 4i \cos y')\, dx, \quad y(4) = j, \quad y(i) = 3.$$

4. Знайти екстремалі функціоналу

$$J(y) = \int\limits_{i}^{i+6} \left(ix^2y^2 + jxyy'\right) dx, \quad y(i) = j, \quad y(i+6) = i+1.$$

Значення параметрів i, j :
i - порядковий номер ПІП студента у списку групи,
j - номер групи.

3 Узагальнення задачі варіаційного числення

3.1 Функціонали, що залежать від похідних вищого порядку

Функціонали, що залежать від похідних вищого порядку, є важливою частиною варіаційного числення та використовуються для моделювання різних фізичних явищ, де важливу роль відіграють не лише значення функції, але й її похідні більш високих порядків. Розглянемо загальний вигляд таких функціоналів і рівняння Ейлера для них.

Досліджується на екстремум функціонал

$$J(y) = \int\limits_a^b F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) dx \tag{3.1.1}$$

на припустимих кривих, що задовольняють умовам

$$\begin{aligned} &y(a) = y_0, \quad y'(a) = y_0^1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(a) = y_0^{n-1}, \\ &y(b) = y_1, \quad y'(b) = y_1^1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(b) = y_1^{n-1}. \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Функцію $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right)$ будемо вважати диференційованою $n+2$ рази по усім своїм аргументам.

Теорема 3.1.1 Функція $y = y(x)$, що реалізує екстремум у задачі (3.1.1) – (3.1.2) задовольняє ***рівнянню Ейлера-Пуасона***

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} - \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}} = 0. \tag{3.1.3}$$

Так як загальний розв'язок рівняння Ейлера - Пуасона має $2n$ довільних постійних, то їх визначають з умов (3.1.2).

ПРИКЛАД 3.1 Знайти екстремум функціоналу

$$J(y) = \int\limits_0^1 \left[2y + (y'')^2\right] dx, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1.$$

Розв'язання. Тут функція $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 2y + (y'')^2$. Складемо рівняння

Ейлера - Пуассона, для цього знаходимо

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = 2, \quad F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \quad F_{y''} = \frac{\partial F}{\partial y''} = 2y''.$$

Підставляючи в (6.1.2), маємо

$$2 + 2\frac{d^2}{dx^2}y'' = 0 \quad \text{або} \quad y^{IV} = -1.$$

Послідовно інтегруючи останнє диференціальне рівняння, знаходимо

$$y''' = -x + c_1,$$

$$y'' = -\frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2,$$

$$y' = -\frac{x^3}{6} + c_1\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3,$$

$$y = -\frac{x^4}{24} + c_1\frac{x^3}{6} + c_2\frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4.$$

Використаємо межові умови для визначення постійних $c_i, i = \overline{1,4}$

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \\ y(1) = 1, \\ y'(1) = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_4 = 0, \\ c_3 = 0, \\ -\frac{1}{24} + \frac{1}{6}c_1 + \frac{1}{2}c_2 + c_3 + c_4 = 1, \\ -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}c_1 + c_2 + c_3 = 1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} c_4 = 0, \\ c_3 = 0, \\ \frac{1}{6}c_1 + \frac{1}{2}c_2 = 1\frac{1}{24}, \\ \frac{1}{2}c_1 + c_2 = 1\frac{1}{6} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_4 = 0, \\ c_3 = 0, \\ c_1 + 3c_2 = \frac{25}{4}, \\ c_1 + 2c_2 = \frac{7}{3}. \end{cases}$$

Остаточно отримаємо

$$c_1 = -\frac{11}{2}, \quad c_2 = \frac{47}{12}, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = 0.$$

Отже, знайдена екстремаль має вигляд

$$y = -\frac{x^4}{24} - \frac{11}{12}x^3 + \frac{47}{24}x^2.$$

■

3.2 Функціонали від багатьох функцій

Розглядається задача знаходження екстремалей функціоналу

$$J\left(y_1, \ldots, y_m\right)=\int\limits_a^b F\left(x, y_1, \ldots, y_m, y_1^{\prime}, y_2^{\prime}, \ldots, y_m^{\prime}\right) d x$$

при заданих умовах

$$\begin{aligned}
& y_1(a)=y_{10}, \quad y_2(a)=y_{20}, \ldots, \quad y_m(a)=y_{m 0}, \\
& y_1(b)=y_{11}, \quad y_2(b)=y_{21}, \ldots, \quad y_m(b)=y_{m 1} .
\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Будемо варіювати лише одну із функцій $y_i(x)$ $(i=1, \ldots, m)$, а усі інші функції не змінюємо. У такому випадку функціонал перетворюється у функціонал, що залежить лише від однієї функції, що варіруємо. Тоді, зрозуміло, що функція y_i буде задовольняти рівнянню Ейлера

$$F_{y_i}-\frac{d}{d x} F_{y_i^{\prime}}=0 .$$

Ці міркування застосуємо до довільної функції y_i $(i=\overline{1, m})$ і тоді отримаємо систему диференціальних рівнянь другого порядку

$$F_{y_i}-\frac{d}{d x} F_{y_i^{\prime}}=0 \quad(i=\overline{1, m}) .$$

Невідомі параметри знаходимо з умови (3.2.1).

ПРИКЛАД 3.2 Знайти екстремалі функціонала

$$J=\int\limits_0^1\left[\left(y^{\prime}\right)^2+y z^{\prime}+\left(z^{\prime}\right)^2\right] d x, \quad y(0)=0, \quad y(1)=1, \quad z(0)=1, \quad z(1)=2 .$$

Розв'язання. По черзі варіюючи кожну з функцій $y(x)$ та $z(x)$ складемо систему рівнянь Ейлера

$$\left\{\begin{array}{l}
F_y-\dfrac{d}{d x} F_{y^{\prime}}=0, \\
\\
F_z-\dfrac{d}{d x} F_{z^{\prime}}=0,
\end{array} \quad \Longrightarrow \quad\left\{\begin{array}{l}
z^{\prime}-2 y^{\prime \prime}=0, \\
z^{\prime \prime}=0 .
\end{array}\right.\right.$$

З другого рівняння системи знайдемо $z(x)$

$$z^{\prime \prime}=0 \quad \Longrightarrow \quad z^{\prime}=c_1 \quad \Longrightarrow \quad z=c_1 x+c_2 .$$

Далі, використовуючи умови $z(0) = 1, \quad z(1) = 2$ отримаємо

$$\begin{cases} c_2 = 1, \\ c_1 + c_2 = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} c_2 = 1, \\ c_1 = 1 \end{cases} \implies z = x + 1.$$

Так як $z' = 1$, то рівняння для $y(x)$ має наступний вигляд

$$1 - 2y'' = 0.$$

Зайдемо загальний розв'язок цього рівняння

$$y = \frac{1}{4}x^2 + c_1 x + c_2,$$

а використавши умови $y(0) = 0, \quad y(1) = 1$, отримаємо

$$y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x.$$

Отже, знайдені екстремалі функціоналу

$$y(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x, \qquad z(x) = x + 1.$$

■

3.3 Функціонали, що залежать від функції кількох незалежних змінних

3.3.1 Функціонали, що залежать від функцій двох незалежних змінних

Спочатку розглянемо випадок, коли функціонал залежить від функції двох незалежних змінних. Нехай G—замкнена обмежена область у просторі $\mathbb{R}^2$ з гладкою межею ∂G. Досліджується на екстремум функціонал

$$J(z) = \iint\limits_G F\left(x, y, z(x,y), \frac{\partial}{\partial x} z(x,y), \frac{\partial}{\partial y} z(x,y)\right) dx\,dy \tag{3.3.1}$$

у класі припустимих функцій з простору $C^1(G)$– один раз неперервно диференційованих по всіх змінних функцій $z(x, y)$, що на межі ∂G області G приймають заданих значень

$$z(x,y) = v(x,y), \quad (x,y) \in \partial G.$$

Теорема 3.3.1 Нехай $z = z(x,y)$– розв'язок екстремальної задачі (3.3.1). Тоді функція $z = z(x,y)$ задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right) = 0 \tag{3.3.2}$$

з граничними умовами

$$z(x,y) = v(x,y), \quad (x,y) \in \partial G,$$

де $p = \dfrac{\partial}{\partial x} z(x,y)$, $q = \dfrac{\partial}{\partial y} z(x,y)$.

Диференціальне рівняння (3.3.2) другого порядку в частинних похідних називається ***рівнянням Ейлера-Остроградського***.

ПРИКЛАД 3.3 Визначити екстремалі функціоналу

$$J(z) = \iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy,$$

з граничними умовами

$$z(x,y) = v(x,y), \quad (x,y) \in \partial G.$$

Розв'язання. Складемо рівняння Ейлера-Остроградського, де $F = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$. Розрахуємо кожний з доданків рівняння (3.3.2)

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial p} = 2\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = 2\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Далі, підставляючи у рівняння Ейлера-Остроградського, отримаємо

$$0 - \frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial z}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(2\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0.$$

Остаточно

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Помітимо, що це є рівняння Лапласа, а задача знаходження неперервної функції $z(x,y)$, що задовольняє рвнянню Лапласа і на межі набуває заданих значень $v(x,y)$, є задачею Діріхле. Отже, для знаходження екстремалей необхідно розв'язати задачу Діріхле. ■

ПРИКЛАД 3.4 Знайти екстремалі функціонала

$$J(z) = \iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 2zf(x,y) \right] dx\,dy,$$

з граничними умовами

$$z(x,y) = v(x,y), \quad (x,y) \in \partial G.$$

Розв'язання. Випишемо підінтегральну функцію

$$F = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 2zf(x,y).$$

Для неї знаходимо

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2f(x,y), \quad \frac{\partial F}{\partial p} = 2\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = 2\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Далі, підставляючи у рівняння Ейлера-Остроградського, отримаємо

$$2f(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(2\frac{\partial z}{\partial y} \right) = 0.$$

Рівняння Ейлера-Остроградського набуває вигляд

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x,y),$$

а це є рівняння Пуассона. Отже, екстремалі є розв'язком задачі Пуассона. ■

ПРИКЛАД 3.5 Написати рівняння Ейлера-Остроградського для функціоналу

$$J(z) = \iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^4 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^4 + 12zf(x,y) \right] dx\,dy.$$

Розв'язання. Функція F має вигляд

$$F = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^4 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^4 + 12zf(x,y).$$

Далі знаходимо

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 12f(x,y), \quad \frac{\partial F}{\partial p} = 4\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^3, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = 4\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^3.$$

Підставляючи в рівняння Ейлера-Остроградського і спрощуючи отримане рівняння, матимемо

$$12f(x,y) - 4\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^3\right] - 4\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^3\right] = 0,$$

$$3f(x,y) - 3\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 3\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Рівняння Ейлера-Остроградського приймає вигляд

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x,y).$$

■

3.3.2 Функціонали, що залежать від функції n незалежних змінних

Розглянемо випадок, коли функціонал залежить від функції n незалежних змінних, тобто $x = (x_1, \cdots, x_n)$. Це може бути корисно для задач, де є декілька просторових змінних або коли функція залежить від багатьох параметрів, як, наприклад, в задачах фізики або економіки, що описують багатозмінні системи. Нехай G– замкнена обмежена область у просторі $\mathbb{R}^n$ з гладкою межою ∂G. Необхідно дослідити на екстремум функціонал

$$J(z) = \int\limits_G \cdots \int F(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) dx_1 \ldots dx_n \tag{3.3.3}$$

у класі припустимих функцій з простору $C^1(G)$, що набувають на межі ∂G області G фіксованих значень

$$z(x_1, \ldots, x_n) = v(x_1, \ldots, x_n),$$

де $(x_1, \ldots, x_n) \in \partial G, \;\; p_k = \dfrac{\partial z}{\partial x_k}, \; k = \overline{1, n}.$

Теорема 3.3.2 Нехай $z = z(x_1, \ldots, x_n)$ є розв'язок екстремальної задачі (3.3.3). Тоді функція $z = z(x_1, \ldots, x_n)$ задовольняє рівнянню Ейлера-Остроградського

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial F}{\partial p_k}\right) = 0$$

або у розгорнутому вигляді

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial p_k} + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial p_k} p_k + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial p_k \partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial x_k}\right) = 0.$$

П Р И К Л А Д 3.6 Написати рівняння Ейлера-Остроградського для задачі

$$\int_G \cdots \int \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial z}{\partial x_k}\right)^2 dx_1 dx_2 \ldots dx_n \to extr,$$

$$z(x_1, \ldots, x_n) = v(x_1, \ldots, x_n), \;\; (x_1, \ldots, x_n) \in \partial G.$$

Розв'язання. Нагадаємо, що заданий кратний інтеграл – це інтеграл Діріхле. У даному завданні функція

$$F = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial z}{\partial x_k}\right)^2$$

явно не залежить від $x_1, \ldots, x_n$ та z, тому

$$F_z = F_{zp_i} = F_{x_i p_i} = 0,$$

$$F_{p_i p_j} = \begin{cases} 2, & \text{якщо } i = j, \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases} \quad (i = \overline{1, n}, \; j = \overline{1, n})$$

Тоді рівняння Ейлера-Остроградського матиме наступний вигляд

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 z}{\partial x_k^2} = 0$$

та є n-вимірним рівнянням Лапласа. ■

3.4 Підінтегральна функція залежить від похідних до n-го порядку

Розглянемо випадок, коли підінтегральна функція залежить від похідних до n-го порядку. У випадку двох незалежних змінних (x, y) отримаємо наступне рівняння Ейлера-Остроградського

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{z_{xx}} + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{z_{xy}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} F_{z_{yy}} - \ldots + \\ + (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial y^n} F_{\underbrace{z_{y \ldots y}}_{n}} = 0. \tag{3.4.1}$$

ПРИКЛАД 3.7 Записати рівняння Ейлера-Остроградського для функціонала

$$J(z) = \iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 - 2zf(x,y) \right] dxdy.$$

Розв'язання. Рівняння Ейлера-Остроградського при наявності двох незалежних змінних матиме наступний вигляд

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{z_{xx}} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{z_{xy}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} F_{z_{yy}} = 0. \tag{3.4.2}$$

Підінтегральна функція

$$F = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 - 2zf(x,y).$$

Для неї знаходимо

$$F_z = -2f(x,y), \quad F_{z_x} = 0, \quad F_{z_y} = 0,$$

$$F_{z_{xx}} = 2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad F_{z_{xy}} = 4\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad F_{z_{yy}} = 2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Згідно з (3.4.2) отримаємо

$$-2f(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(4\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0$$

або

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 4\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = f(x,y).$$

■

3.5 Питання для самопідготовки

1. Написати рівняння Ейлера - Пуасона.
2. Вміти написати рівняння Ейлера для функціонала з декількома функціями.
3. Написати рівняння Ейлера-Остроградського у випадку двох незалежних змінних. Які умови повинні виконуватися для застосування цього рівняння?
4. Як розв'язувати задачі, що містять дві змінні, та які особливості потрібно враховувати?
5. Написати рівняння Ейлера-Остроградського для багатьох змінних.

3.6 Завдання для самостійної роботи

1. Знайти екстремум функціоналу

$$J(y) = \int\limits_{i}^{i+1} \left(iy + jxy + (y'')^2\right) dx, \quad y(i) = 2, \quad y(i+1) = j.$$

2. Знайти екстремалі функціоналу

$$J(y) = \int\limits_{0}^{\pi} (i(y')^2 + ijy'z + j(z')^2) dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 1, \quad z(0) = 1, \quad z(\pi) = 3i.$$

Значення параметрів i, j :
i – порядковий номер ПІП студента у списку групи,
j – номер групи.

4 Варіаційні задачі з рухомими кінцями

4.1 Основна формула для варіації функціонала

Розглянемо задачу дослідження на екстремум функціонала $J(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$ у випадку, коли на кінці допустимих кривих $y(x)$ не накладено ніяких обмежень, тобто вони є вільними. У цьому випадку область визначення допустимих функцій не є фіксованою, а змінюється у залежності від вибору функції $y(x)$.

Виведемо загальну формулу для варіації функціонала

$$J(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx. \tag{4.1.1}$$

Вважаємо, що кінці кривих, на яких визначається функціонал, можуть рухатись довільним чином. Усі криві $y(x)$ вважаємо гладкими, тобто неперервно диференційовними на відрізку інтегрування $[x_0, x_1]$, причому на його межах $x = x_0$ та $x = x_1$ існують відповідні односторонні похідні, то функцію $y(x)$ можна продовжити на більший відрізок так, що продовжена функція буде неперервно диференційовною на цьому відрізкові.
Відстань між кривими $y(x)$ і $\overline{y}(x)$ визначається таким чином

$$\rho(y, \overline{y}) = \max|y - \overline{y}| + \max|y' - \overline{y'}| + \rho(\rho_0, \overline{\rho_0}) + \rho(\rho_1, \overline{\rho_1}), \tag{4.1.2}$$

де $\rho_0, \overline{\rho_0}$ і $\rho_1, \overline{\rho_1}$ – ліві, відповідно праві кінці кривих y і $\overline{y}$.
Так як функції y і $\overline{y}$ визначені на різних інтервалах, то для того, щоб формула (4.1.2) мала сенс, ці криві необхідно продовжити на інтервал, що містить ті інтервали, на яких визначені y і $\overline{y}$. Для цього можна провести дотичні у кінцевих точках кривих (див. рис.4.1.1).
Визначимо варіацію функціонала (4.1.1) як вираз, лінійний відносно приросту h функції y і відносно приростів координат кінців, і відрізняється від повного приросту функціонала $J(y)$ на величину вище першого порядку мализни у порівнянні з відстанню між функціями y і $y + h$.
Позначимо координати кінців кривої $y(x)$ через (x_0, y_0) і (x_1, y_1), а координати кінців проварійованої кривої $y + h$ через $(x_0 + \delta x_0, y_0 + \delta y_0)$ і $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$ відповідно.

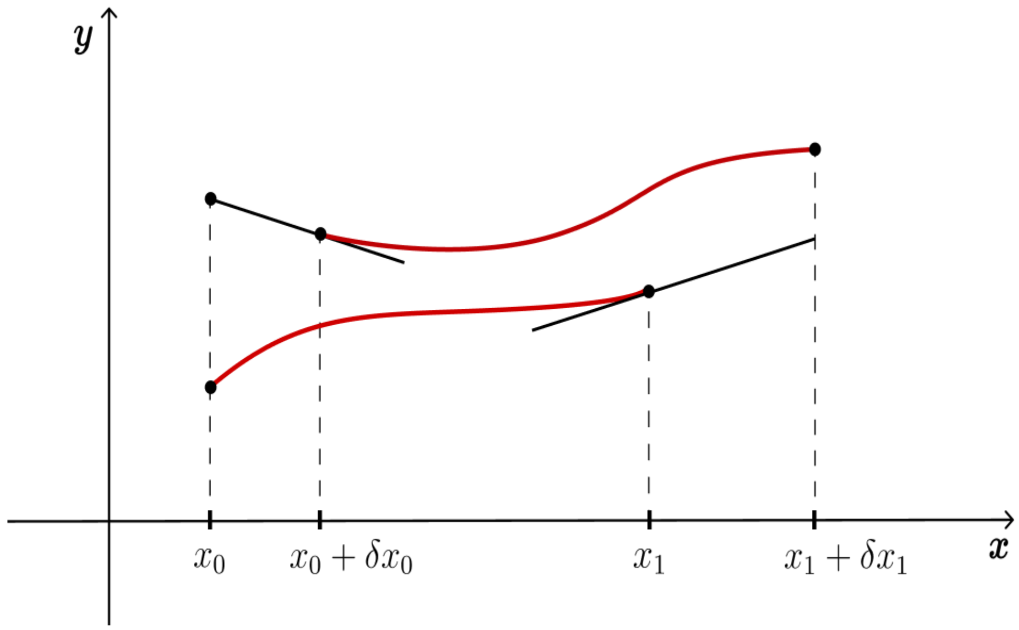


Рис. 4.1.1

Розрахуємо приріст функціоналу $J(y)$. Отримаємо

$$J(y+h)-J(y)=\int\limits_{x_0+\delta x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x,y+h,y'+h')dx-\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx=$$

$$=\int\limits_{x_0}^{x_1}\left[F(x,y+h,y'+h')-F(x,y,y')\right]dx+$$

$$+\int\limits_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x,y+h,y'+h')dx-\int\limits_{x_0}^{x_0+\delta x_0} F(x,y+h,y'+h')dx.$$

Скористаємося формулою Тейлора і, відкидаючи члени вище першого порядку мализни, отримаємо

$$J(y+h)-J(y)\sim$$

$$\sim\int\limits_{x_0}^{x_1}\left[F_y(x,y,y')h+F_{y'}(x,y,y')h'\right]dx+$$

$$+F(x,y,y')\big|_{x=x_1}\delta x_1-F(x,y,y')\big|_{x=x_0}\delta x_0=$$

$$=\int\limits_{x_0}^{x_1}\left[F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right]h(x)dx+F_{y'}h\big|_{x_0}^{x_1}+F|_{x=x_1}\delta x_1-F|_{x=x_0}\delta x_0,$$

де знак тільда $\sim$ означає рівність з точністю до величин порядка вище першого відносно $\rho(y, y+h)$. Зазначимо, що під інтегралом входять функції, що визначені на різних інтервалах. Як ми і домовились, їх продовжуємо, наприклад, за допомогою лінійної екстраполяції.
З рисунку 4.1.1 на стор.39 зрозуміло, що

$$h(x_0) \sim \delta y_0 - y'\delta x_0, \quad h(x_1) \sim \delta y_1 - y'\delta x_1, \tag{4.1.3}$$

де $\sim$ знову означає рівність з точністю до нескінченно малих порядка вище першого.
Тепер випишемо варіацію функціонала $J(y)$

$$\begin{gathered}\delta J(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} \left[F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right] h(x)dx + F_{y'}|_{x=x_1}\delta y_1 + \\ + \left.(F - F_{y'}y')\right|_{x=x_1} \delta x_1 - F_{y'}|_{x=x_0}\delta y_0 - (F - F_{y'}y')|_{x=x_0}\delta x_0.\end{gathered} \tag{4.1.4}$$

Отримано загальну формулу варіації для функціонала. Вона включає в собі формулу варіації для задачі з вільними кінцями ($\delta x_0 = \delta x_1 = 0$) і формулу варіації найпростішої задачі варіаційного числення
$(\delta x_0 = \delta x_1 = 0 \text{ і } \delta y_0 = \delta y_1 = 0)$.

4.2 Задача з рухомими кінцями

Розглянемо функціонал

$$J(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx, \tag{4.2.1}$$

що визначений на гладких кривих, кінці яких лежать на двох фіксованих лініях $y = \varphi(x)$ і $y = \psi(x)$. Необхідно знайти екстремум функціонала (4.2.1).
Скористаємося варіацією функціонала (4.1.4) на стор.40. Якщо на будь-якій кривій $y = y(x)$ досягається екстремум у задачі з рухомими межовими точками, то екстремум тим більш буде досягатися по відношенню до більш вузького класу кривих, що мають спільні межові точки з кривою $y = y(x)$ і тому виконується необхідна умова мінімуму в задачі з нерухомими межами, тобто функція $y(x)$ є розв'язком рівняння Ейлера

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0.$$

Отже, криві $y = y(x)$, на яких реалізується екстремум у задачі з рухомими межами, є екстремалі. Тому у виразі (4.1.4) перший доданок перетворюється в нуль, і отримуємо

$$\delta J(y) = F_{y'}|_{x=x_1}\delta y_1 + (F - F_{y'}y')|_{x=x_1}\delta x_1 - \\ - F_{y'}|_{x=x_0}\delta y_0 - (F - F_{y'}y')|_{x=x_0}\delta x_0. \tag{4.2.2}$$

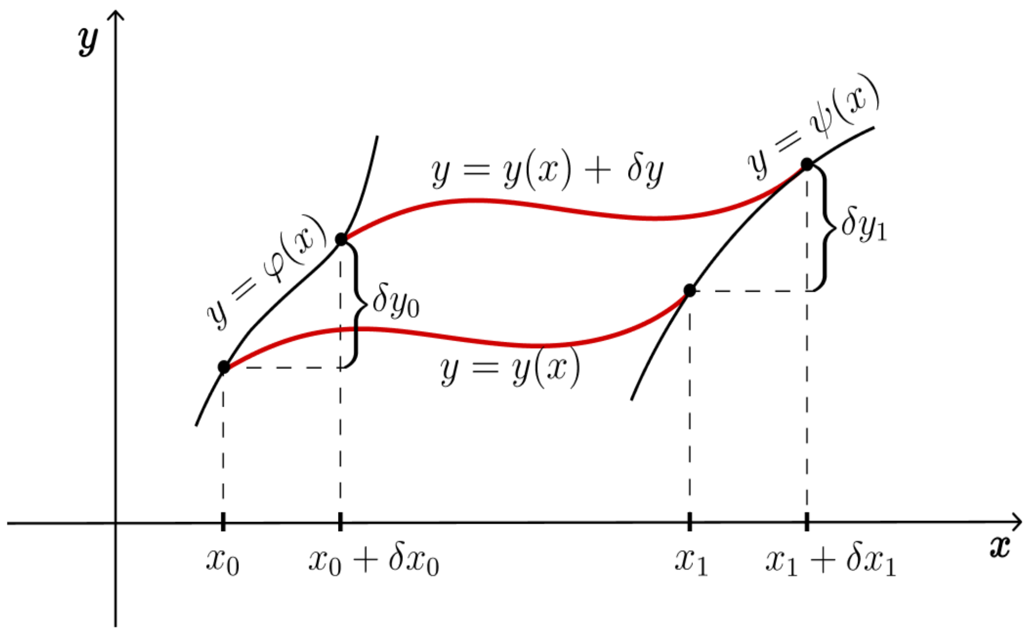


Рис. 4.2.1

Так як (дивись рис.4.2.1)

$$\delta y_1 = \psi'\delta x_1 + \alpha_1, \quad \delta y_0 = \varphi'\delta x_0 + \alpha_0,$$

де α_1 і α_0 – нескінченно малі величини порядку вище першого, то умову екстремуму $\delta J(y) = 0$ перепишимо у вигляді

$$\delta J(y) = (F_{y'}\psi' + F - y'F_{y'})|_{x=x_1}\delta x_1 - (F_{y'}\varphi' + F - y'F_{y'})|_{x=x_0}\delta x_0 = 0.$$

Так як δx_1 і δx_0 – незалежні прирости, то отримаємо

$$F_{y'}\psi' + F - y'F_{y'}|_{x=x_1} = 0,$$
$$F_{y'}\varphi' + F - y'F_{y'}|_{x=x_0} = 0,$$

і остаточно

$$F + F_{y'}(\psi' - y')|_{x=x_1} = 0,$$
$$F + F_{y'}(\varphi' - y')|_{x=x_0} = 0.$$

Ці дві умови називаються ***умовами трансверсальності***.

Теорема 4.2.1 Нехай крива $y = y(x)$ дає екстремум функціоналу (4.2.1) серед усіх кривих класу C^1, що з'єднують задані криві $\varphi(x)$ і $\psi(x)$. Тоді:
1)крива $y = y(x)$ є екстремаллю функціонала (задовольняє рівняння Ейлера),
2) у точках x_0 і x_1, що є точками перетину кривої $y = y(x)$ з кривими $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ відповідно, виконуються умови трансверсальності

$$F + F_{y'}(\varphi' - y')|_{x=x_0} = 0,$$

$$F + F_{y'}(\psi' - y')|_{x=x_1} = 0.$$

Алгоритм розв'язування задачі

1. Написати і розв'язати рівняння Ейлера. Розв'язком буде сукупність кривих $y = f(x, c_1, c_2)$, параметри c_1 і c_2 є невідомі.
2. Для визначення невідомих параметрів x_0, x_1, c_1, c_2 скористатися умовами трансверсальності і перетину екстремалі з кривими $y = \varphi(x)$ і $y = \psi(x)$.

ПРИКЛАД 4.1 Знайти відстань від точки $O(0,0)$ до прямої $y = -x + 4$.
Розв'язання. З точки зору варіаційного числення ця задача формулюється наступним чином: серед усіх кривих один кінець яких закріплений у точці $O(0,0)$, а інший рухається по прямій $y = -x + 4$, знайти ту, довжина якої є мінімальною. Згадаємо, що довжина кривої визначається за формулою

$$S = \int\limits_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

Отже, маємо наступну задачу:
мінімізувати функціонал $J(y) = \int\limits_0^{x_1} \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx$ на кривих, у яких один кінець закріплений у точці $O(0,0)$, а другий вільно рухається по кривій $\varphi(x) = -x + 4$.
Так як функція $F(x, y, y')$ залежить тільки від y', то екстремаль має вигляд $y = c_1 x + c_2$. З умов трансверсальності у точці x_1, враховуючи, що криві закріплені у точці $O(0,0)$ та перетинають $\varphi(x) = -x + 4$, знайдемо невідомі параметри c_1, c_2 і x_1. Отримали систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} \left.\sqrt{1 + c_1^2} + \dfrac{c_1}{\sqrt{1 + c_1^2}}(-1 - c_1)\right|_{x=x_1} = 0, & \text{(умова трансверсальності)} \\ c_1 \cdot 0 + c_2 = 0, & \text{(умова проходження екстремалі через точку } O(0,0)) \\ c_1 x_1 + c_2 = -x_1 + 4. & \text{(умова перетину екстремалі і функції } \varphi(x)) \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо

$$c_1 = 1,\ c_2 = 0,\ x_1 = 2.$$

Знайдено рівняння екстремалі

$$y = x.$$

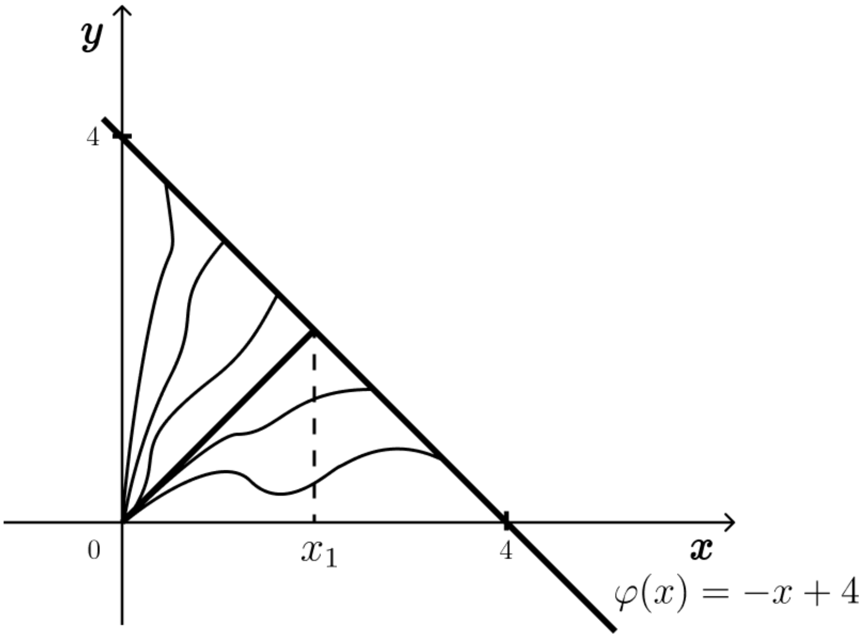


Рис. 4.2.2

А так, як очевидно, що задача має розв'язок, то відстань від точки $O(0,0)$ до прямої $\varphi(x) = -x + 4$ буде дорівнювати

$$J(y) = \int_0^2 \sqrt{1 + 1^2}\ dx = 2\sqrt{2}.$$

■

ПРИКЛАД 4.2 Знайти відстань від точки $A(0, \alpha)$ до кривої $y = x^2$.
Розв'язання. Розглядається задача: серед усіх припустимих кривих, один кінець яких закріплений у точці А$(0, \alpha)$, а другий рухається по кривій $\varphi(x) = x^2$, знайти ту, що дає мінімум функціоналу

$$J(y) = \int_0^{x_1} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx.$$

Так як підінтегральна функція залежить тільки від y', то шукаємо екстремаль у вигляді $y = c_1x + c_2$. Система, для знаходження параметрів c_1, c_2 і x_1 має вигляд

$$\begin{cases} \sqrt{1+c_1^2} + \dfrac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}}(2x_1 - c_1) = 0, & \text{(умова трансверсальності)} \\ c_1 \cdot 0 + c_2 = \alpha, & \text{(екстремаль виходить з т. } A(0,\alpha)) \\ x_1^2 = c_1x_1 + c_2 & \text{(умова перетину} \\ & \quad \text{екстремалі і кривої } y = x^2). \end{cases}$$

Отримаємо два розв'язки:

1. $y = -\dfrac{1}{2\sqrt{\alpha - \frac{1}{2}}}x + \alpha, \quad x_1 = \sqrt{\alpha - \frac{1}{2}};$
2. $y = \dfrac{1}{2\sqrt{\alpha - \frac{1}{2}}}x + \alpha, \quad x_1 = -\sqrt{\alpha - \frac{1}{2}}.$

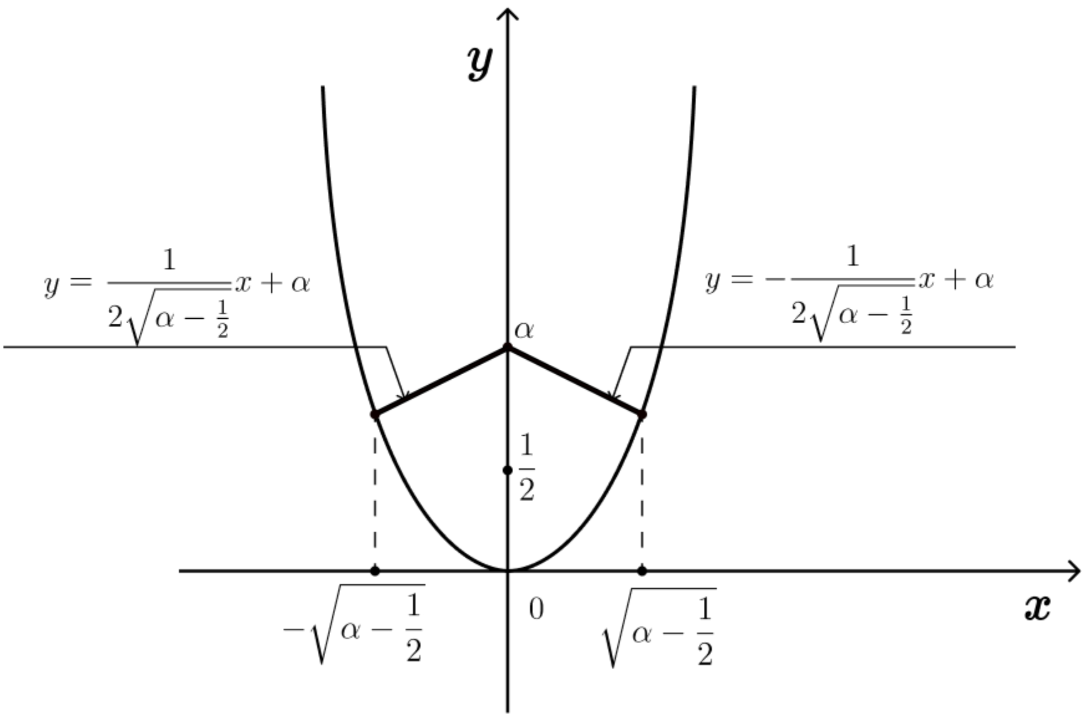


Рис. 4.2.3: *Випадок* $\alpha > \frac{1}{2}$.
При $\alpha > \frac{1}{2}$, $J(y) = \sqrt{\alpha - \frac{1}{4}}$.

Зрозуміло, що розв'язки існують при $\alpha > \frac{1}{2}$. Розглянемо випадок, коли $\alpha = \frac{1}{2}$.

Екстремалі мають вигляд

$$y = \pm\frac{1}{2\sqrt{\alpha - \frac{1}{2}}}x + \alpha.$$

Далі знаходимо

$$2\sqrt{\alpha - \frac{1}{2}} \cdot y = \pm x + 2\sqrt{\alpha - \frac{1}{2}} \cdot \alpha$$

$$\lim_{\alpha \to \frac{1}{2}} \left[2\sqrt{\alpha - \frac{1}{2}} \cdot y \right] = \lim_{\alpha \to \frac{1}{2}} \left[\pm x + 2\sqrt{\alpha - \frac{1}{2}} \cdot \alpha \right].$$

Отримали, що екстремаль має вигляд: $x = 0$. Отже, розв'язком задачі при $\alpha = \frac{1}{2}$ є недиференційована функція.

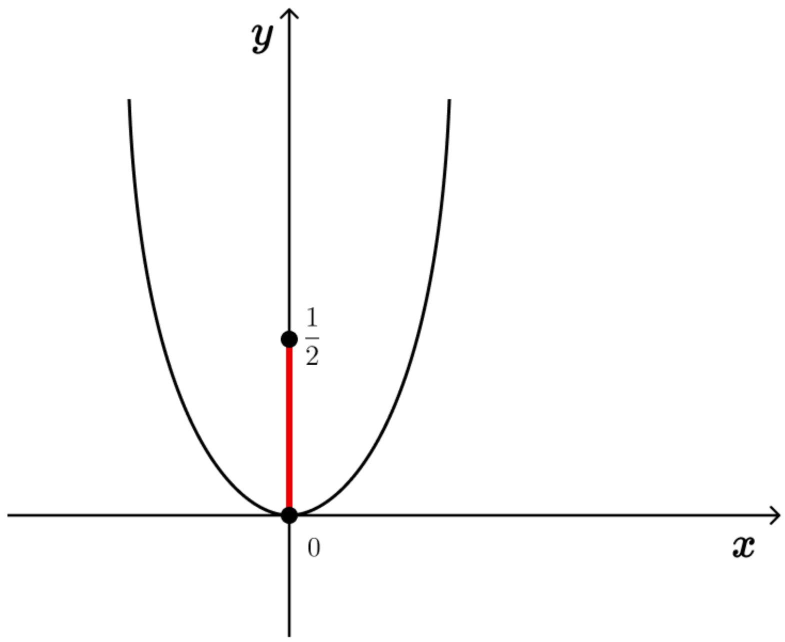


Рис. 4.2.4: *Випадок* $\alpha = \frac{1}{2}$.
При $\alpha = \frac{1}{2}$, $J(y) = \frac{1}{2}$.

При $\alpha \le \frac{1}{2}$ задача у класі диференційованих функцій розв'язку немає. ∎

4.3 Задача з вільними кінцями

Задача формулюється наступним чином. Серед усіх кривих, кінці яких належать двом заданим вертикалям $x = x_0$ і $x = x_1$, знайти ту, яка дає екстремум функціонала

$$J(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx.$$

Скористаємося виразом варіації функціонала (4.1.4)

$$\delta J(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right] h(x)dx + F_{y'}|_{x=x_1}\delta y_1 +$$

$$+(F - F_{y'}y')|_{x=x_1}\delta x_1 - F_{y'}|_{x=x_0}\delta y_0 - (F - F_{y'}y')|_{x=x_0}\delta x_0.$$

Якщо на кривій $y = y(x)$ досягається екстремум у задачі з рухомими межовими точками, то екстремум тим більше буде досягатися по відношенню до більш вузького класу кривих, що мають спільні межові точки з кривою $y = y(x)$ і тому скористаємося необхідною умовою мінімуму для задачі з нерухомими межами, а це означає, що $y(x)$ є розв'язком рівняння Ейлера, тобто $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$. Далі, у нашому випадку δx_0 і δx_1 дорівнюють нулеві. Тоді отримаємо

$$\delta J(y) = F_{y'}|_{x=x_1}\delta y_1 - F_{y'}|_{x=x_0}\delta y_0 = 0.$$

А так як δy_0 і δy_1 довільні, то отримаємо

$$F_{y'}|_{x=x_1} = F_{y'}|_{x=x_0} = 0. \tag{4.3.1}$$

Отже, для розв'язання задачі з вільними кінцями потрібно знайти розв'язок рівняння Ейлера, а невідомі константи знайти з умови (4.3.1).

ПРИКЛАД 4.3 Знайти екстремалі функціоналу

$$J(y) = \int\limits_{1}^{2} ((y')^2 - xy)dx$$

серед кривих, один кінець яких закріплений $y(1) = 3$, а другий кінець рухається по вертикалі $x = 2$.

Розв'язання. Складемо рівняння Ейлера

$$y'' = -\frac{x}{2}.$$

Його розв'язками будуть функції

$$y = -\frac{x^3}{12} + c_1 x + c_2.$$

Використовуючи умови $y(1) = 3$ і $F_{y'}|_{x=2} = 0$, знайдемо невідомі c_1 і c_2. Отримаємо

$$F_{y'}|_{x=2} = 2y'|_{x=2} = 2\left(-\frac{x^2}{4} + c_1\right)\bigg|_{x=2} = 0,$$

$$2(-1 + c_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 1.$$

Використовуємо умову $y(1) = 3$, знаходимо

$$3 = -\frac{1}{12} + c_1 + c_2, \quad c_2 = 3 - c_1 + \frac{1}{12} = 3 - 1 + \frac{1}{12} = \frac{25}{12}.$$

Отже, шукана екстремаль має вигляд: $y = -\dfrac{x^3}{12} + x + \dfrac{25}{12}$. ■

4.4 Питання для самопідготовки

1. Сформулювати задачу з рухомими кінцями.
2. Написати умови трансверсальності.
3. Сформулювати задачу з вільними кінцями.
4. Написати алгоритм розв'язування задачі з вільними кінцями.

4.5 Завдання для самостійної роботи

1. Знайти відстань від точки $A(-i, -j)$ до прямої $y = -i \cdot x + i + j$.
2. Знайти відстань від прямої $y = 2i \cdot x - (i + 10) \cdot j$
   до кривої $y = (i + j)x^2 + i$.
3. Знайти екстремалі функціонала

$$J(y) = \int\limits_{i}^{i+j} \left(a(y')^2 + by'x + cy + dxy + kx^j\right) dx$$

   серед кривих, один кінець яких закріплений $y(i) = i + j$, а другий рухається по вертикалі вздовж $x = i + j$.

Значення параметрів a, b, c, d, k обираються із таблиці 1.3.1 на стор. 18 згідно з варіантом; як і в завданні попередньої теми, тут:
i - порядковий номер ПІП студента у списку групи,
j - номер групи.

5 Задачі з негладкими екстремалями

5.1 Задача про відбиття екстремалей

Задача про відбиття екстремалей є важливою частиною варіаційного числення та теорії оптимальних траєкторій. Вона виникає в контексті задач, де шукаються оптимальні криві або траєкторії в певних межах, які підлягають деяким геометричним чи фізичним обмеженням, наприклад, при відбитті від границь або при досягненні певних умов на межах області.
Задача про відбиття екстремалей ставить питання про поведінку функцій, що мінімізують або максимізують функціонал, коли на шляху екстремалей є певні перешкоди або умови відбиття. Це дає можливість знайти екстремальні функції, які, хоча і не можуть перетнути певні межі, тим не менш забезпечують оптимальний шлях у межах заданих обмежень.
Екстремаль функціонала

$$J(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$$

є двічі неперервно диференційовною функцією, якщо $F_{y'y'}(x, y(x), y'(x))$ не перетворюється в нуль. Однак, зустрічаються варіаційні задачі, у яких екструмум досягається на кусково-гладких кривих.
Розглянемо таку задачу: знайти криву, що реалізує екстремум функціонала $J(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$ і проходить через дві задані точки $A(x_0, y_0)$ і $B(x_2, y_2)$, і до того, крива повинна попасти у точку B лише після відбиття від заданої кривої $y = \varphi(x)$ (дивись рис.5.1.1).

Точка відбиття може бути кутовою точкою екстремалі, тобто

$$y'(x_1 - 0) \neq y'(x_1 + 0).$$

Тому функціонал представимо у вигляді суми двох функціоналів

$$J(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx + \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx.$$

На кожному з інтервалів інтегрування похідна $y'(x)$ вважається неперервною і тому використаємо отримані раніше результати.

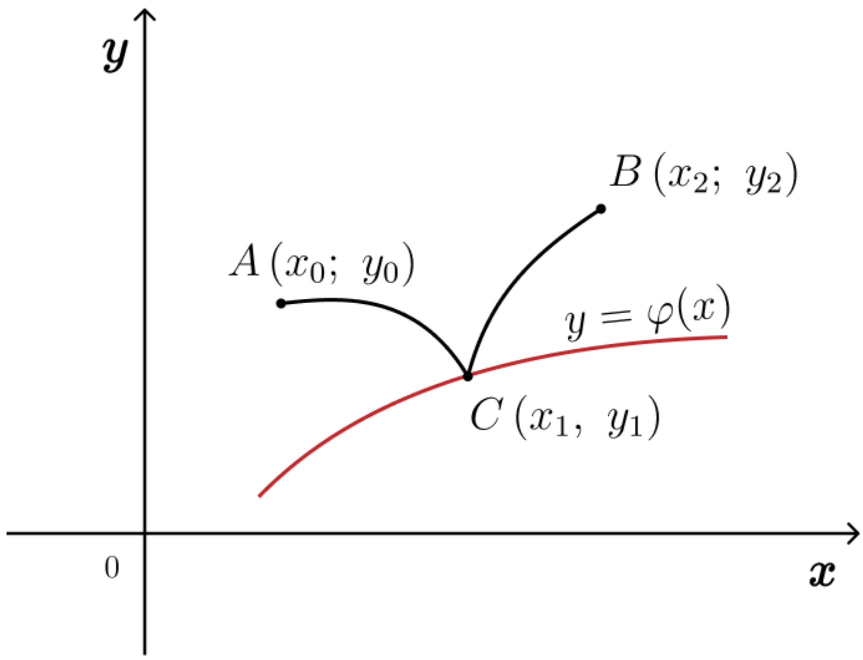


Рис. 5.1.1

Основна необхідна умова екстремуму $\delta J(y) = 0$ прийме вигляд

$$\delta J(y) = \delta \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx + \delta \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx = 0.$$

Так як точка $C(x_1, y_1)$ переміщується по кривій $y = \varphi(x)$, то при розрахунку двох варіацій використовуємо раніше отримані результати, коли одна межова точка рухома. Криві AC і CB є екстремалями. Дійсно, це так, так якщо вважати одну з кривих знайденою і варіювати іншу, то задача зводиться до знаходження екстремума першого або другого функціонала в задачі з закріпленими межовими точками. Тому будемо вважати, що функціонал розглядається на екстремалях, що мають кутову точку C.

Раніше ми отримали, що

$$\delta \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx = \left[F + (\varphi' - y')F_{y'}\right]\big|_{x=x_1-0} \delta x_1$$

і

$$\delta \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx = -\left[F + (\varphi' - y')F_{y'}\right]\big|_{x=x_1+0} \delta x_1.$$

Тоді умова $\delta J(y) = 0$ з урахуванням того, що δx_1 довільна величина прийме вигляд

$$\left[F + (\varphi' - y')F_{y'}\right]\big|_{x=x_1-0} = \left[F + (\varphi' - y')F_{y'}\right]\big|_{x=x_1+0}.$$

Звертаємо увагу на те, що розриви має тільки похідна. Тому остаточно отримаємо

$$F(x_1, y(x_1), y'(x_1-0)) + (\varphi'(x_1) - y'(x_1-0))F_{y'}(x_1, y(x_1), y'(x_1-0)) =$$
$$= F(x_1, y(x_1), y'(x_1+0)) + (\varphi'(x_1) - y'(x_1+0))F_{y'}(x_1, y(x_1), y'(x_1+0)).$$

ПРИКЛАД 5.1 Знайти криву, що надає екстремум функціоналу

$$J(y) = \int_1^3 (y'(x))^2 dx,$$

виходить з точки $A(1,3)$, відбивається від кривої $\varphi(x) = x$ і потрапляє у точку $B(3,4)$.

Розв'язання. Так як $F(x, y, y') = F(y')$, то єкстремаль – пряма. Нехай екстремаль до точки відбиття має вигляд $y_-(x) = mx + n$, а після відбиття $y_+(x) = px + q$, тоді $y'_-(x) = m$, а $y'_+(x) = p$. Позначимо точку відбиття через $C(a, \varphi(a)) = C(a, a)$ (враховуючи $\varphi(x) = x$).

Складемо систему рівняннь для визначення параметрів m, n, p, q та a

$$\begin{cases} 3 = m + n & \text{(умова проходження } y_-(x) \text{ через т. } A(1,3)), \\ a = ma + n & \text{(умова проходження } y_-(x) \text{ через т. } C(a,a)), \\ 4 = 3p + q & \text{(умова проходження } y_+(x) \text{ через т. } B(3,4)), \\ a = pa + q & \text{(умова проходження } y_+(x) \text{ через т. } C(a,a)), \\ m^2 + (1-m)2m = p^2 + 2p(1-p) & \text{(умова відбиття кривої).} \end{cases}$$

П'ята умова - умова відбиття кривої, що отримана з

$$\left[F + (\varphi' - y'_-)F_{y'}\right]\big|_{x=a-0} = \left[F + (\varphi' - y'_+)F_{y'}\right]\big|_{x=a+0},$$

представляється у вигляді

$$(m-p)(m+p-2) = 0.$$

Випадок $m = p$ відкидається, так як відбиття не відбувається. Розв'язуючи систему рівняннь, знаходимо

$$m = -\frac{1}{2}, \quad n = \frac{7}{2}, \quad q = -\frac{7}{2}, \quad p = \frac{5}{2}, \quad a = \frac{7}{3}.$$

Отже

$$y_-(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}, \quad y_+(x) = \frac{5}{2}x - \frac{7}{2}.$$

■

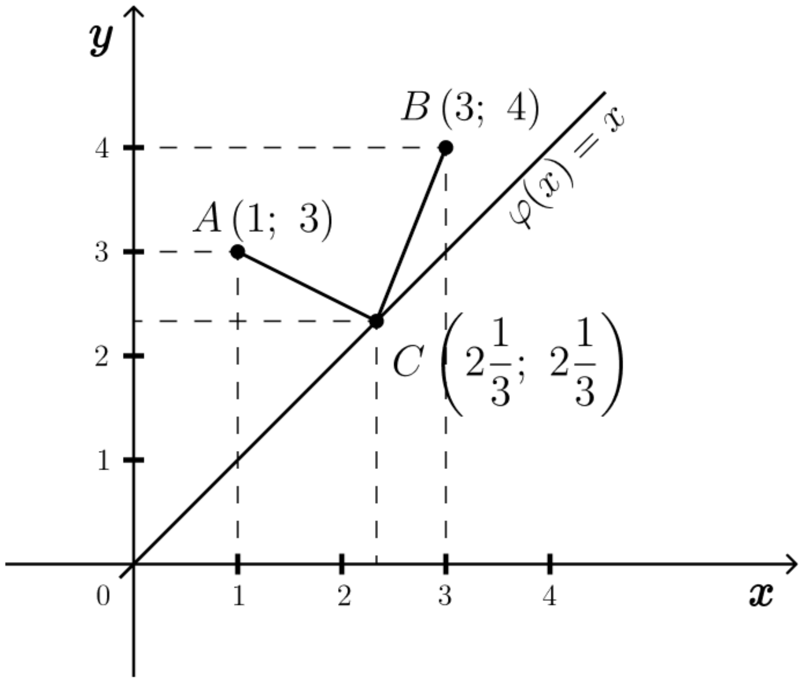


Рис. 5.1.2

5.2 Умови Вейєрштрасса-Ердмана

Задача про екстремум функціонала на припустимих кривих, що мають злам у деякій точці, є складною варіаційною задачею. У цьому випадку мова йде про ситуацію, коли криві, що мінімізують або максимізують функціонал, можуть мати точку зламу, і ми повинні врахувати це при знаходженні екстремуму. Розглянемо задачу про знаходження екстремуму функціонала

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$$

на припустимих кривих, що задовольняють умовам

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1$$

та можуть мати злам у деякій точці c $(x_0 < c < x_1)$. У цій точці $F_{y'y'}(c) = 0$. На кожному з відрізків $[x_0, c]$ і $[c, x_1]$ крива, на якій функціонал $J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$ досягає екстремуму, задовольняє рівнянню Ейлера (дивись попередній пункт).

Представимо функціонал у вигляді суми двох

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx =$$

$$= \int_{x_0}^{c} F(x,y,y')dx + \int_{c}^{x_1} F(x,y,y')dx = J_1(y) + J_2(y)$$

і розрахуємо варіацію для кожного з них. На кожному з інтервалів один кінець кривої закріплений, а інший вільний. Використовуючи раніше отримані результати запишемо

$$\delta J_1 = F_{y'}|_{x=c-0}\,\delta y_1 + (F - y'F_{y'})|_{x=c-0}\,\delta x_1,$$

$$\delta J_2 = -F_{y'}|_{x=c+0}\,\delta y_1 - (F - y'F_{y'})|_{x=c+0}\,\delta x_1.$$

Якщо має місце екстремум, то

$$\delta J = \delta J_1 + \delta J_2,$$

тобто,

$$[F_{y'}|_{x=c-0} - F_{y'}|_{x=c+0}]\,\delta y_1 + [(F - y'F_{y'})|_{x=c-0} - (F - y'F_{y'})|_{x=c+0}]\,\delta x_1 = 0.$$

Так як δy_1 і δx_1 довільні, то отримаємо

$$F_{y'}|_{x=c-0} = F_{y'}|_{x=c+0},$$

$$(F - y'F_{y'})|_{x=c-0} = (F - y'F_{y'})|_{x=c+0}.$$

Отримані умови називаються ***умовами Вейєрштрасса-Ердмана***.

П Р И К Л А Д 5.2 Знайти ламані екстремалі, якщо вони існують, функціонала

$$J(y) = \int_0^2 (3(y')^2 - 4y^3)dx, \quad y(0) = 1,\ y(2) = 5.$$

Розв'язання. Злами екстремалі можуть бути у точках, у яких $F_{y'y'} = 0$. А так як $F_{y'y'} = 6 > 0$ всюди, то екстремум може досягатися на гладких кривих.
Цей результат можна отримати і іншим шляхом. Скористаємося першою умовою Вейєрштрасса-Ердмана

$$F_{y'}(c-0) = F_{y'}(c+0),$$

де c - можлива точка зламу і $0 < c < 2$. Маємо $F_{y'} = 6y'$. Тоді умова Вейєрштрасса-Ердмана матиме вигляд

$$y'(c-0) = y'(c+0),$$

а це означає, що похідна екстремалі є неперервною, і на проміжку $(0,2)$ не існує точок зламу. ■

ПРИКЛАД 5.3 Знайти ламані екстремалі функціонала

$$J(y)=\int\limits_0^1((y')^4-(y')^2)dx,\quad y(0)=0,\quad y(1)=0,$$

вважаючи, що y' може мати одну точку розрива $x=c$.
Розв'язання. Так як

$$F_{y'y'}=12(y')^2-2$$

і може перетворюватися в нуль, тому можливе існування точок зламу. Крім того, підінтегральна функція залежить тільки від y', отже екстремалями є прямі

$$y=c_1x+c_2.$$

Покладемо

$$y_-=mx+n\ (0\le x<c),\qquad y_+=px+q\ (c\le x\le 2).$$

З граничних умов отримаємо, що $n=0$ і $q=-p$ і тоді

$$y_-=mx,\quad y_+=p(x-1).$$

Екстремаль у точці зламу c повинна бути неперервною, тобто

$$mc=p(c-1).$$

Випишемо умови Вейєрштрасса-Ердмана

$$\begin{cases} F_{y'}=4(y')^3-2y',\\ F_{y'}-y'F_{y'}=-3(y')^4+(y')^2.\end{cases}$$

Так як $y'_-=m,\ ay'_+=p$, то отримаємо таку систему

$$\begin{cases} 2m^3-m=2p^3-p,\\ -3m^4+m^2=-3p^4+p^2\end{cases}$$

або

$$\begin{cases} (m-p)(2m^2+2mp+2p^2-1)=0,\\ (m-p)(m+p)(3m^2+3p^2-1)=0.\end{cases}$$

Друге рівняння дає

$$\text{або}\quad m=p,\quad\text{або}\quad m=-p,\quad\text{або}\quad 3m^2+3p^2-1=0.$$

Розв'язок $m = p$ відхиляємо, так як у цьому випадку отримуємо, що $y'_- = y'_+$. А це означає, що точки зламу відсутні та з умови неперервності екстремалі у точці зламу отримуємо $m = 0$, тобто екстремаль є відрізок осі Ox.
Лишаються два випадки, тому остання система розпадається на дві системи

$$\begin{cases} 2m^2 + 2mp + 2p^2 - 1 = 0, \\ m = -p \end{cases} \qquad \begin{cases} 2m^2 + 2mp + 2p^2 - 1 = 0, \\ 3m^2 + 3p^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язок системи:

$$m_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad p_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$m_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad p_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Розв'язок системи:

$$m = p$$

цей розв'язок відкидаємо.

Точку зламу c знайдемо з умови неперервності екстремалі у цій точці, так як $m = -p$, то вираз $mc = p(c-1)$ набуває вигляд $mc = -m(c-1)$. Звідси $c = \frac{1}{2}$.
Отже, ламані екстремалі функціонала

$$y = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}x, & 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1), & \frac{1}{2} \le x \le 1, \end{cases} \qquad y = \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2}x, & 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(x-1), & \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases} \qquad \blacksquare$$

5.3 Задача про переломлення екстремалей

Задача про переломлення екстремалей є класичним прикладом у варіаційному численні, що виникає, коли функціонал містить розрив у підінтегральній функції або її параметрах. У таких випадках екстремаль може змінювати свою форму або напрямок на межі, де відбувається розрив, подібно до того, як світло змінює свій напрямок при переході через межу двох середовищ з різними оптичними властивостями (таке явище називається переломленням).
Будемо вважати, що підінтегральна функція F функціонала

$$J(y) = \int\limits_{x_0}^{x_2} F(x, y(x), y'(x))dx$$

має лінію розриву $y = \varphi(x)$, а точки A і B розташовані по різні сторони лінії розриву (див. рис.5.3.1). Криві, які є екстремалями функціонала, можуть змінювати свій напрямок на межі цього розриву, і завдання полягає в тому, щоб описати цю зміну за допомогою варіаційного числення.
Запишемо функціонал $J(y)$ у вигляді

$$J(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F_1(x, y, y')dx + \int\limits_{x_1}^{x_2} F_2(x, y, y')dx,$$

де $F_1(x, y, y') = F(x, y, y')$ з однієї сторони лінії розриву, а $F_2(x, y, y') = F(x, y, y')$ з другої сторони лінії розриву. Нехай F_1 і F_2 двічі диференційовані. У точці C перетину кривої, що визначається, з лінією розриву природно очікувати наявність кутової точки.

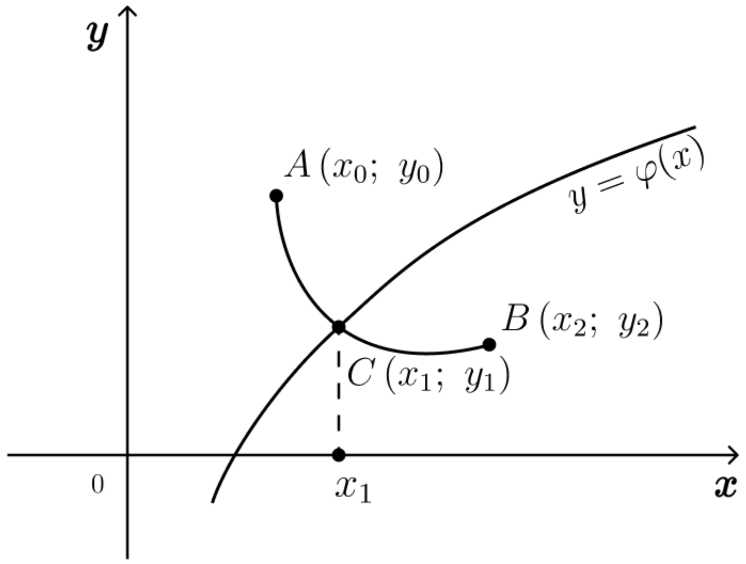


Рис. 5.3.1

Дуги AC і CB є екстремалями своїх функціоналів, це випливає з того, що фіксуючи одну з цих дуг і варіюючи лише другу, отримаємо задачу з закріпленими межами.

Тоді варіація функціонала $J(y)$ і враховуючи, що точка $C(x_1, y_1)$ рухається по кривій $y = \varphi(x)$, матиме вигляд

$$\delta J(y) = \delta \int\limits_{x_0}^{x_1} F_1(x, y, y')dx + \delta \int\limits_{x_1}^{x_2} F_2(x, y, y')dx =$$

$$= \left[F_1 + (\varphi' - y')F_{1y'}\right]\Big|_{x=x_1-0} \delta x_1 - \left[F_2 + (\varphi' - y')F_{2y'}\right]\Big|_{x=x_1+0} \delta x_1.$$

Використовуючи необхідну умову екстремуму $\delta J(y) = 0$, отримаємо, що умова $\delta J(y) = 0$ зводиться до умови

$$\left[F_1 + (\varphi' - y')F_{1\,y'}\right]\Big|_{x=x_1-0} = \left[F_2 + (\varphi' - y')F_{2\,y'}\right]\Big|_{x=x_1+0}.$$

Отримали, що шуканий розв'язок складається з двох кусків екстремалей функціоналів

$$J_1(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F_1 dx \quad \text{і} \quad J_2(y) = \int\limits_{x_1}^{x_2} F_2 dx.$$

Для визначення цих екстремалей необхідно розрахувати чотири параметри. П'ятий невідомий параметр – абсциса точки переломлення $C(x_1, y_1)$. Для знаходження цих невідомих маємо умови проходження екстремалей через точки A і C та C і B. П'ята умова – це переломлення екстремалей.
Розглянемо на прикладі.

ПРИКЛАД 5.4 Знайти екструмум функціоналу

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$$

на кривих, що виходять з точки $A(0, 1)$ і перетинають лінію розриву $\varphi(x) = x$ та входять у точку $B(1, 0)$ після преломлення. Точки A і B знаходяться по різні сторони лінії розриву, $F_1(x, y, y') = y'^2, F_2(x, y, y') = y'^2 + 1$.

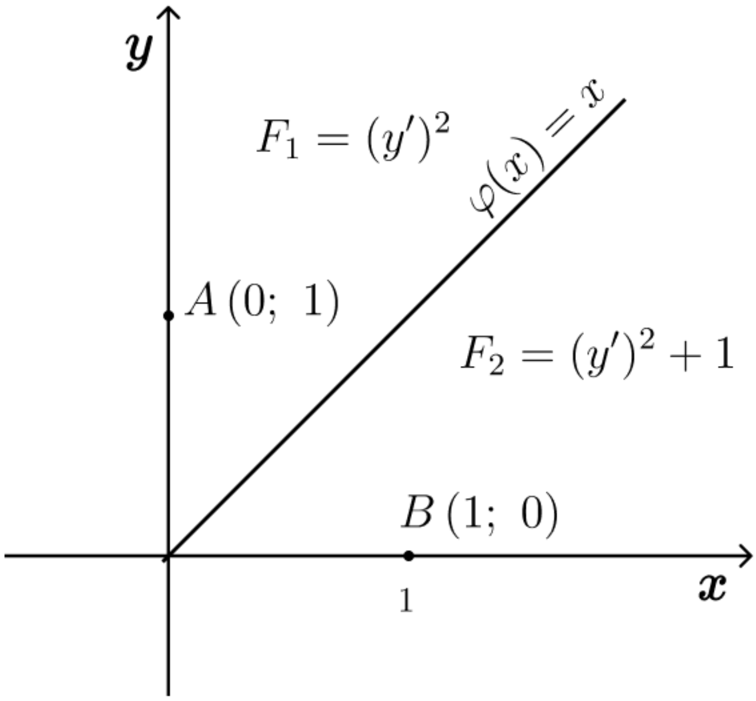


Рис. 5.3.2

Розв'язання. Нехай екстремалі AC і CB відповідно мають вигляд

$$y_-(x) = mx + n \quad \text{i} \quad y_+(x) = px + q.$$

Точку розриву функкії $F(x, y, y')$ позначимо через $C(a, a)$, так як $\varphi(a) = a$. Далі знаходимо $y'_- = m$ та $y'_+ = p$. Рівняння для визначення параметрів m, n, p, q і a мають вигляд

$1 = m \cdot 0 + n$ – умова проходження $y_{-}(x)$ через точку $A(0;1)$,
$a = m \cdot a + n$ – умова проходження $y_{-}(x)$ через точку $C(a;a)$,
$0 = p \cdot 1 + q$ – умова проходження $y_{+}(x)$ через точку $B(1;0)$,
$a = p \cdot a + q$ – умова проходження $y_{+}(x)$ через точку $C(a;a)$,
$m^2 + (1-m)2m = p^2 - 1 + (1-p)2p$ – умова розриву екстремалі у т. $C(a;a)$.
Спростимо п'яту умову

$$m^2 + 2m - 2m^2 = p^2 - 1 + 2p - 2p^2,$$

$$2m - m^2 - 2p + p^2 + 1 = 0.$$

Отже маємо наступну систему рівнянь

$$\begin{cases} n = 1, \\ ma + n = a, \\ p + q = 0, \\ pa + q = a, \\ 2m - m^2 - 2p + p^2 + 1 = 0. \end{cases}$$

Після нескладних перетворень отримаємо, що параметр m задовольняє рівнянню:

$$m^4 - 2m^3 - m^2 + 2m - 1 = 0,$$

а інші параметри виражаються через m

$$p = \frac{1}{m}, \quad q = -\frac{1}{m}, \quad a = \frac{1}{1-m}.$$

Пам'ятаємо, що $n = 1$. Розв'яжемо рівняння і розрахуємо параметри p, q і a

$$m_1 = -1.13, \quad p_1 = -0.82, \quad q_1 = 0.88, \quad a_1 = 0.47$$

$$m_2 = 2.13, \quad p_2 = 0.47, \quad q_2 = -0.47, \quad a_2 = -0.88.$$

Випишемо рівняння екстремалей

$$y_{1-} = -1.13x + 1, \quad y_{1+} = -0.82x + 0.88, \quad a_1 = 0.47,$$

$$y_{2-} = 2.13x + 1, \quad y_{2+} = 0.47x - 0.47, \quad a_2 = -0.88$$

та накреслимо їх (див. рис.5.3.3).
Одна екстремаль AKB, друга — ACB. ■

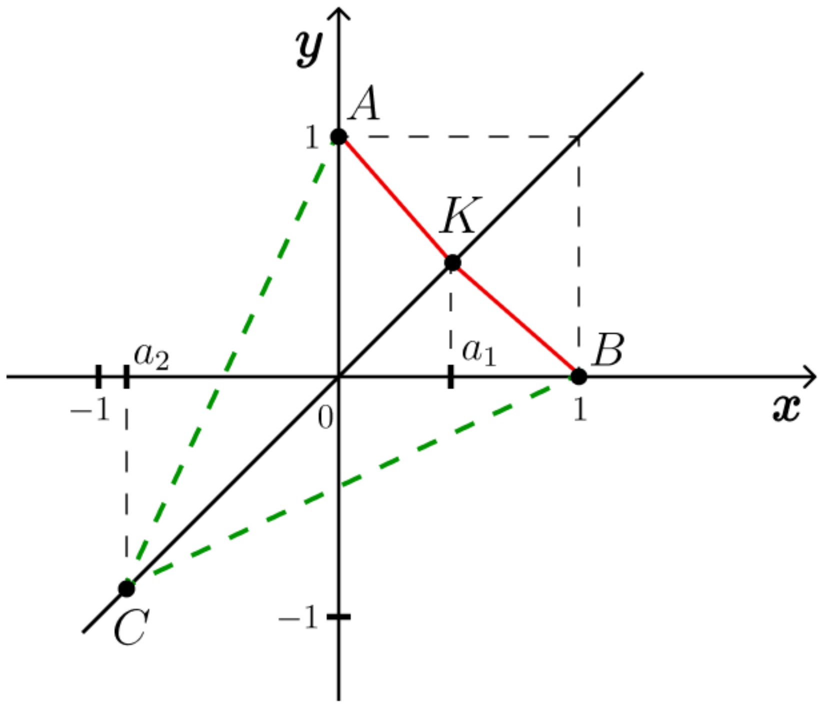


Рис. 5.3.3

5.4 Питання для самопідготовки

1. Зробити постановку задачі про відбиття.
2. Написати умову у точці відбиття.
3. Сформулювати задачу з розривними похідними.
4. Написати умови Вейєрштрасса-Ердмана.
5. Сформулювати задачу про переломлення екстремалей.
6. Написати умови у точці переломлення екстремалей.

5.5 Завдання для самостійної роботи

Нехай i - порядковий номер ПІП студента у списку групи, j - номер групи, під $[m]$ розуміємо цілу частину числа m.
Виконати наступні завдання.

1. Знайти криву, що надає екстремум функціонала

$$J(y) = \int\limits_{[\frac{i}{2}]}^{i} (y'^2 + jx)dx,$$

що виходить з точки $A([\frac{i}{2}], i+j)$, відбивається від кривої $\varphi(x) = jx - i$ та потрапляє у точку $B(i, i+j)$.

2. Знайти ламані екстремалі функціонала

$$J(y) = \int\limits_{i}^{i+1} (iy'^2 - (i+j)y'^2)dx, \quad y(i) = 0, \quad y(i+1) = 0,$$

вважаючи, що y' може мати одну точку розрива $x = c$.

3. Знайти екстремум функціонала

$$J(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$$

на кривих, що виходять з точки $A(0, i+j)$ і перетинають лінію розриву $\varphi(x) = ix - (2i + j)$ і входять у точку $B(i + 4j, 0)$. Точки A і B знаходяться по різні сторони лінії розриву
$y = \varphi(x), \;\; F_1(x, y, y') = iy'^2 + j,$ а $F_2 = y'^2 + ij.$

6 Односторонні варіації

6.1 Односторонні варіації

У деяких варіаційних задачах про екстремум функціонала $J(y) = \int\limits_a^b F(x, y, y')dx$ існують заборони на проходження через точки деякої області R, що обмежена кривою $\Phi(x, y) = 0$. У цьому випадку (див. рис.6.1.1)

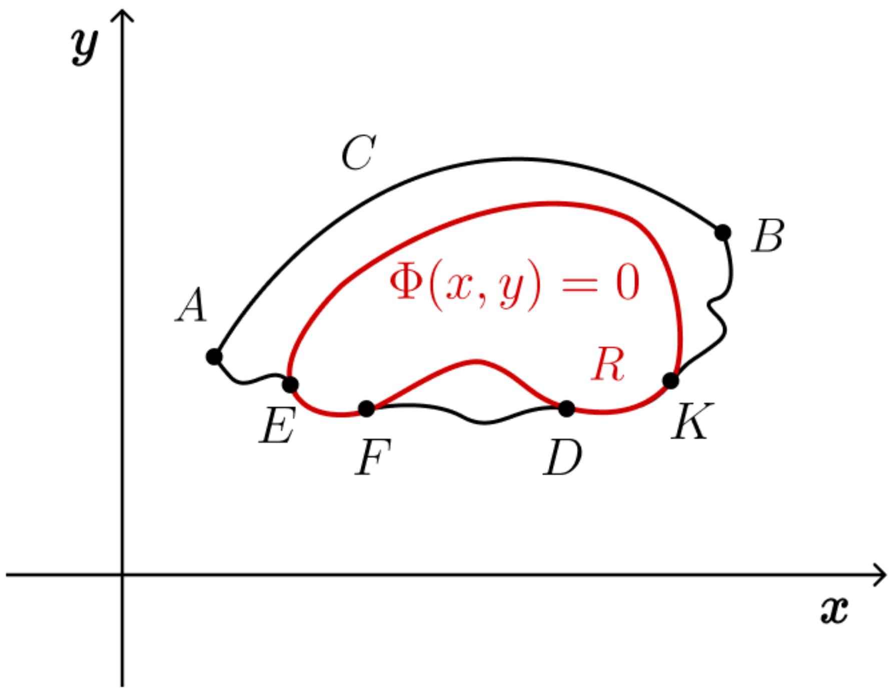


Рис. 6.1.1

крива C, що реалізує екстремум, може проходити поза областю R, і тоді вона є екстремаллю, тому що заборонена область R не впливає на властивості функціонала і його варіації в околі кривої C. Вона також може складатися з дуг, що лежать поза межею області R і частин межі області R. Але на межі області R можливі лише односторонні варіації кривої C , тому що в області R припустимі криві заходити не можуть. Частини кривої C, що лежать поза межею області R будуть екстремалями, тому що у цих частинах можна робити варіації кривої C - наявність області R не впливає на варіації.

Отже, у розглянутій задачі екстремум може досягатися на кривих, що складаються з дуг екстремалей і частин межі області R. Для побудови кривої, що дає екстремум функціонала необхідно отримати умови у точках переходу екстремалі на межу області R, які допоможуть визначити ці точки.

У випадку, що зображений на рис.6.1.1, необхідно отримати умови у точках E, F, D та K.

Дослідимо на екстремум функціонал

$$J(y) = \int\limits_{x_0}^{x_2} F(x, y, y')dx, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_2) = y_2$$

за умови, що $y \geq \varphi(x)$, де $\varphi(x)$ – неперервно диференційовна функція.

Нехай функція $y = y(x)$, що дає екстремум функціоналу $J(y)$, складається з двох частин $y = y(x),\ x \in [x_0; x_1]$ і $y = \varphi(x),\ x \in [x_1; x_2]$. Представимо функціонал $J(y)$ у вигляді суми

$$J(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx + \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx = J_1(y) + J_2(y).$$

Функціонал $J_1(y)$ має рухому межову точку, що рухається на межі забороненої області, тобто по кривій $y = \varphi(x)$. Як відомо варіація функціонала $J_1(x)$ з рухомою правою межовою точкою дорівнює

$$\delta J_1(y) = \left[F(x, y(x), y'(x)) + (\varphi'(x) - y'(x))F_{y'}(x, y(x), y'(x))\right]\delta x_1,$$

де $y = y(x)$ – розв'язок рівняння Ейлера на відрізку $[x_0, x_1]$, а δx_1 варіація точки x_1.

Функціонал $J_2(y) = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx$ також має рухому межову точку (x_1, y_1), однак у околі цієї точки крива, на якій може досягатся екстремум $y = \varphi(x)$, не варірується. Отже, зміна функціонала $J_2(y)$ при переміщенні точки (x_1, y_1) у точку $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$ зводиться лише до зміни нижньої межі інтегрування. Отримаємо

$$\Delta J_2(y) = \int\limits_{x_1+\delta x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx - \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx =$$

$$= -\int\limits_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y, y')dx = -\int\limits_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, \varphi, \varphi')dx$$

у зв'язку з тим, що на інтервалі $(x_1, x_1 + \delta x_1)$ $y(x) = \varphi(x)$. Використовуючи неперервність функції $F(x, y, y')$ і теорему про середнє значення, отримаємо

$$\Delta J_2(y) = -\,F(x, \varphi, \varphi')\big|_{x=x_1}^{\delta x_1} + \alpha\delta x_1, \quad \text{де } \alpha \to 0, \text{ при } \delta x_1 \to 0.$$

Отримали, що

$$\delta J_2(y) = -F(x, \varphi, \varphi')|_{x=x_1}\delta x_1.$$

Тоді

$$\delta J(y) = \delta J_1(y) + \delta J_2(y) =$$
$$= [F(x, y, y') + (\varphi' - y')F_{y'}(x, y, y')]\big|_{x=x_1}\delta x_1 - F(x, y, \varphi')\big|_{x=x_1}\delta x_1 =$$
$$= [F(x, y, y') - F(x, y, \varphi') - (y' - \varphi')F_{y'}(x, y, y')]\big|_{x=x_1}\delta x_1$$

так як $y(x_1) = \varphi(x_1)$.

Необхідна умова екстремуму $\delta J(y) = 0$ при умові довільності δx_1 має вигляд

$$[F(x, y, y') - F(x, y, \varphi') - (y' - \varphi')F_{y'}(x, y, y')]\big|_{x=x_1} = 0. \qquad (6.1.1)$$

Застосуємо теорему про середнє значення, отримаємо

$$(y' - \varphi')\,[F_{y'}(x, y, a) - F_{y'}(x, y, y')]\big|_{x=x_1} = 0$$

де a-значення між $\varphi'(x_1)$ і $y'(x_1)$. Знову застосовуємо теорему про середнє значення і отримаємо

$$(y' - \varphi')(a - y')F_{y'y'}(x, y, b)|_{x=x_1} = 0,$$

де b значення між a і $\varphi'(x_1)$.

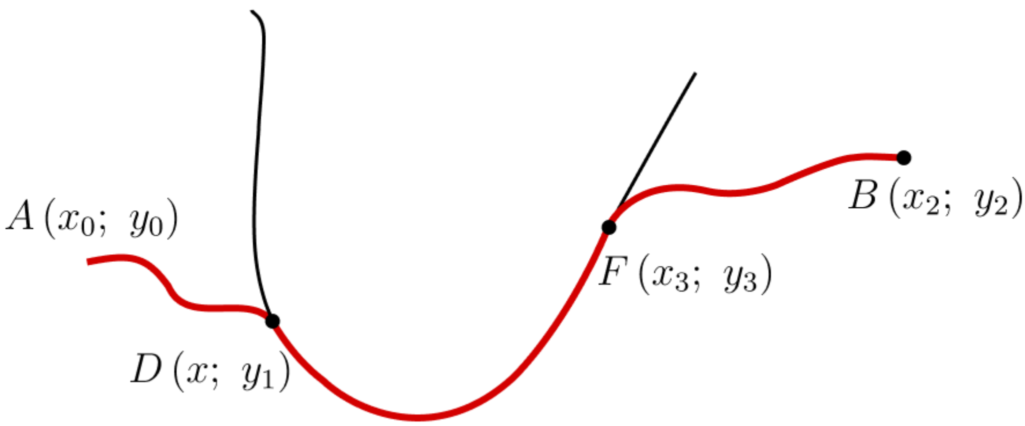


Рис. 6.1.2

Нехай $F_{y'y'}(x, y, b) \neq 0$. У цьому випадку у точці $(x_1, \varphi(x_1))$ виконується рівність

$$\varphi'(x_1) = y'(x_1). \tag{6.1.2}$$

Це означає, що крива $y = y(x)$ у точці $(x_1, \varphi(x_1))$ є дотичною до $y = \varphi(x)$ ($a = y'$ тільки при $\varphi'(x_1) = y'(x_1)$, так як a–значення між $y'(x_1)$ і $\varphi'(x_1)$).

Отже, підведемо підсумки. Якщо необхідно мінімізувати функціонал $J(y) = \int_a^b F(x, y, y')dx$ на кривих, кінці яких закріплені у точках $A(x_0, y_0)$ і $B(x_2, y_2)$, і припустимі криві лежать у області $y \leq \varphi(x)$, тоді для отримання екстремалі складаємо систему рівнянь, з якої знаходимо невідомі її параметри:

1) проходження екстремалі через точку $A(x_0, y_0)$,
2) проходження екстремалі через точку $D(x_1, y_1)$,
3) якщо $F_{y'y'} \neq 0$, то у точці $D(x_1, y_1)$ виконується умова (6.1.2), інакше - умова (6.1.1).
4) точка $D(x_1, y_1)$ лежить на кривій $y = \varphi(x)$.

ПРИКЛАД 6.1 Визначити найкоротший шлях з точки $A(-1; 0)$ в точку $B(2; 3)$ в області $y \leq x^2$.

Розв'язання. Маємо наступну задачу

$$\text{мінімізувати} \quad J(y) = \int_{-1}^{2} \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

$$\text{при умовах} \quad y(-1) = 0, \quad y(2) = 3, \quad y \leq x^2.$$

Так як функція $F(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}$ залежить тільки від y', то екстремалі функціонала є прямі $y = c_1 x + c_2$.

Друга похідна

$$F_{y'y'} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + y'^2\right)^3}} \neq 0,$$

тому шукана екстремаль буде складатися з дотичної до кривої $y = \varphi(x)$ і частини кривої $y = \varphi(x)$. Отримаємо наступні рівняння при розгляді точки $B(2; 3)$ і точки $D(x_1; y_1)$ – точки дотику екстремалі до кривої $y = x^2$:

$$\begin{cases} 3 = 2c + c_2 & \text{– умова проходження екстремалі через точку } B(2;3), \\ c_1 a + c_2 = a^2 & \text{– значення екстремалі і } y = x^2 \text{ у точці } D \text{ співпадають}, \\ b = a^2 & \text{– точка } D(a;b) \text{ лежить на кривій } y = x^2, \\ c_1 = 2a & \text{– похідні } y'(a) \text{ і } \varphi'(a) \text{ співпадають у точці } D(a;b). \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, отримаємо

$$1)\ a=1,\ b=1,\ c_1=2,\ c_2=-1,$$
$$y=2x-1, \qquad D_1(1;1);$$
$$2)\ a=3,\ b=9,\ c_1=6,\ c_2=9,$$
$$y=6x-9, \qquad D_2(3;9).$$

Тепер розглянемо точки $A(-1;0)$ і $F(e;d)$, де F– точка дотику екстремалі до кривої $y=x^2$. Рівняння екстремалі шукаємо у вигляді $y=c_1x_1+c_2$. Складемо систему рівнянь для визначення невідомих параметрів

$$\begin{cases} 0=-c_1+c_2 & \text{– умова проходження екстремалі через точку } A(-1;0), \\ e^2=c_1e+c_2 & \text{– значення екстремалі і } y=x^2 \text{ у точці } F(e;d) \text{ співпадають,} \\ d=e^2 & \text{– точка } F(e;d) \text{ лежаить на кривій } y=x^2, \\ c_1=2e & \text{– похідні } y'(e) \text{ і } \varphi'(e) \text{ співпадають у точці } F(e;d). \end{cases}$$

Отримали такі розв'язки:

$$1)\ e=0,\ d=0,\ c_1=0,\ c_2=0,$$
$$y=0, \quad F_1(0;0);$$
$$2)\ e=-2,\ d=4,\ c_1=-4,\ c_2=-4,$$
$$y=-4x-4, \quad F_2(-2;4).$$

Існують декілька шляхів, що ведуть з точки A в точку B. Розглянемо їх

$$1) AF_1D_1B; \quad 2) AF_2F_1D_1B; \quad 3) AF_2F_1D_1D_2B; \quad 4) AF_1D_1D_2B.$$

Розрахуємо окремі ділянки шляхів

$$AF_2 : l=\sqrt{17}; \quad D_1B : l=\sqrt{5}; \quad BD_2 : l=\sqrt{37}; \quad AF_1 : l=1;$$
$$F_1D_1 : l=\frac{1}{8}\left[4\sqrt{5}+2\ln(\sqrt{5}+2)\right];$$
$$D_1D_2 : l=\frac{1}{8}\left[12\sqrt{37}-4\sqrt{5}+2\ln\left(\frac{\sqrt{37}+6}{\sqrt{5}+2}\right)\right];$$
$$F_2F_1 : l=\frac{1}{8}\left[8\sqrt{17}+2\ln(\sqrt{17}+4)\right].$$

Тепер можна розрахувати довжини усіх шляхів

1) AF_1D_1B :

$$l=1+\frac{1}{8}\left[4\sqrt{5}+2\ln(\sqrt{5}+2)\right]+\sqrt{5}=$$
$$=1+\left[\frac{3}{2}\sqrt{5}+2\ln(\sqrt{5}+2)\right]\cdot\frac{1}{8}=1+\frac{3}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{4}\ln(\sqrt{5}+2)=4,715;$$

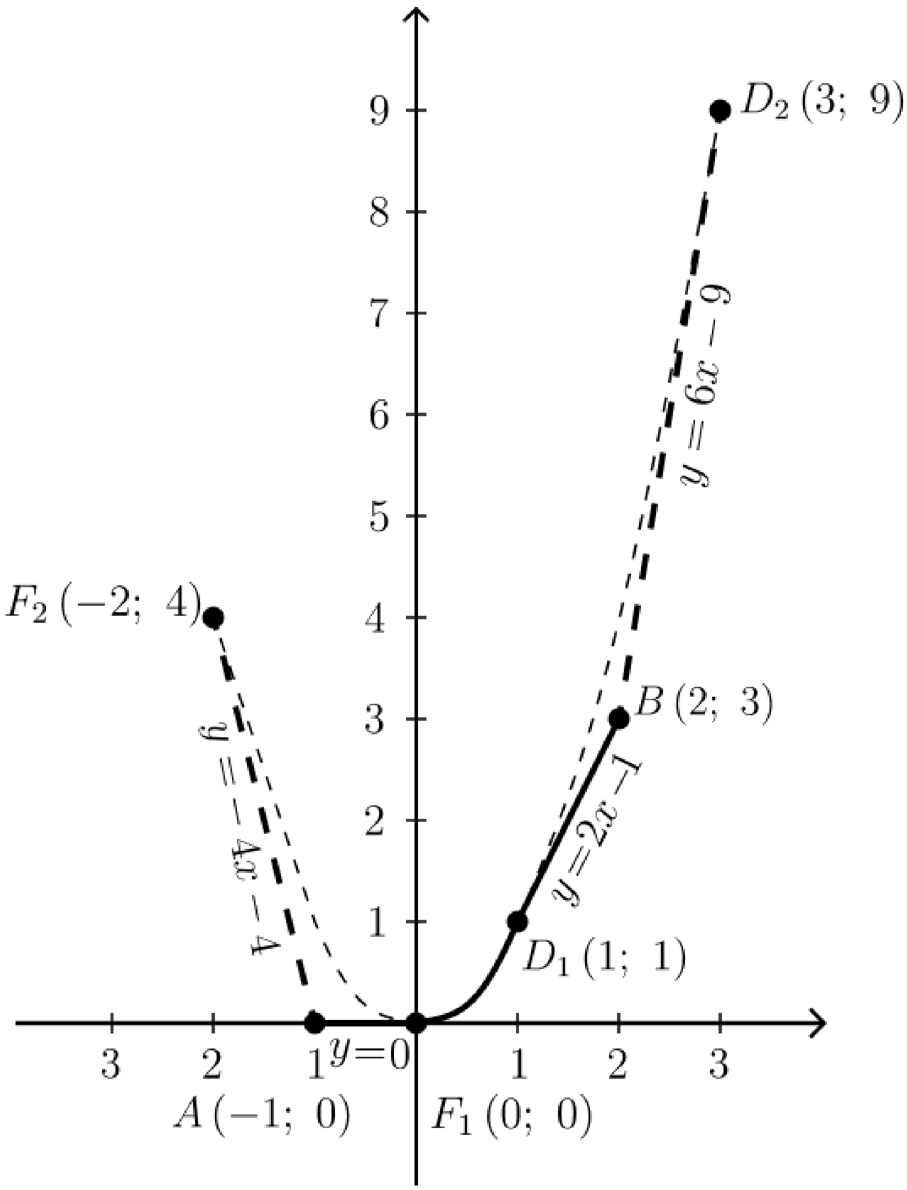


Рис. 6.1.3

2) $AF_2F_1D_1B$:

$$l=\sqrt{17}+\frac{1}{8}\left[8\sqrt{17}+2\ln\left(\sqrt{17}+4\right)\right]+\frac{1}{8}\left[4\sqrt{5}+2\ln\left(\sqrt{2}+2\right)\right]+\sqrt{5}=$$

$$=2\sqrt{17}+\frac{3}{2}\sqrt{5}+2\ln\left[\left(\sqrt{17}+4\right)\left(\sqrt{2}+2\right)\right]=18,677;$$

3) $AF_2F_1D_1D_2B$:

$$l=\sqrt{17}+\frac{1}{8}\left[8\sqrt{17}+2\ln(\sqrt{17}+4)\right]+$$

$$+\frac{1}{8}\left[4\sqrt{5}+2\ln(\sqrt{5}+2)\right]+\frac{1}{8}\left[12\sqrt{37}-4\sqrt{5}+2\ln\left(\frac{\sqrt{37}+6}{\sqrt{5}+2}\right)\right]+\sqrt{37}=$$

$$=2\sqrt{17}+\frac{5}{2}\sqrt{37}+\frac{1}{4}\ln[(\sqrt{17}+4)(\sqrt{37}+6)]=24,6;$$

4) $AF_1D_1D_2B$:

$$l=1+\frac{1}{8}\left[4\sqrt{5}+2\ln(\sqrt{5}+2)\right]+\frac{1}{8}\left[12\sqrt{37}-4\sqrt{5}+2\ln\left(\frac{\sqrt{37}+6}{\sqrt{5}+2}\right)\right]+\sqrt{37}=$$

$$=1+\frac{5}{2}\sqrt{37}+\frac{1}{4}\ln(\sqrt{37}+6)=16,83.$$

Отже, знайдено найкоротший шлях з точки А до точки В – це щлях AF_1D_1B довжиною $l=4.715$. ■

6.2 Питання для самопідготовки

1. Сформулювати задачу про односторонні варіації.
2. Написати алгоритм розв'язання задач з односторонніми варіаціями.

6.3 Завдання для самостійної роботи

Визначити найкоротший шлях з точки $A(-i;0)$ до точки $B(i;3i+j)$ в області $y\le x^2$, де
i – порядковий номер ПІП студента у списку групи,
j – номер групи.

7 Варіаційні задачі на умовний екстремум

7.1 Зв'язки виду $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n) = 0$

У найпростішій задачі варіаційного числення на припустимі криві накладались умови тільки у межових точках. Але існують задачі, в яких на припустимі криві, крім межових умов, накладаються і інші умови.

Розглянемо задачу знаходження екстремума функціонала

$$J = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')dx,$$

$$y_i(x_0) = y_{i0}, \quad y_i(x_1) = y_{i1} \quad (i = \overline{1, n}), \tag{7.1.1}$$

при наявності умов

$$\varphi_j(x, y_1, \ldots, y_n) = 0 \quad (j = \overline{1, m}, \ m < n). \tag{7.1.2}$$

Функції φ_j вважаються незалежними. Це означає, що один з якобіанів порядка m не дорівнює нулеві. Для розв'язування задачі розглянемо новий функціонал

$$J_1 = \int\limits_a^b F^*(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')dx, \quad \text{де} \quad F^* = F + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(x)\varphi_j.$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 7.1.1 Функції $y_1, \ldots, y_n$, що реалізують екстремум функціонала

$$J = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')dx$$

при наявності умов $\varphi_j(x, y_1, \ldots, y_n) = 0$ $(j = \overline{1, m})$ при відповідному виборі множників $\lambda_j(x)$ $(j = \overline{1, m})$ задовольняють рівнянням Ейлера, складених для функціонала

$$J_1 = \int\limits_{x_0}^{x_1} \left[F(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(x) \varphi_j(x, y_1, \ldots, y_n) \right] dx.$$

Отже, $\lambda_i(x)$ $(j = \overline{1, m})$ і $y_i(x)$ $(i = \overline{1, n})$ знаходяться з системи рівнянь Ейлера

$$F^*_{y_i} - \frac{d}{dx} F^*_{y_i'} = 0 \ (i = \overline{1, n})$$

і умов (7.1.1) і (7.1.2).

ПРИКЛАД 7.1 Знайти екстремалі функціонала

$$J = \int\limits_0^1 y'^2 dx$$

$$\text{при умовах } y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \tag{7.1.3}$$

$$\text{і} \qquad y - x^2 = 0. \tag{7.1.4}$$

Розв'язання. Складаємо новий функціонал

$$J_1 = \int\limits_0^1 \left[y'^2 + \lambda(x)(y - x^2) \right] dx.$$

Побудуємо рівняння Ейлера. Для цього знаходимо

$$F_y = \lambda(x), \quad F_{y'} = 2y'.$$

Підставляючи, отримаємо

$$\lambda(x) - \frac{d}{dx}(2y') = 0,$$

$$\lambda(x) - 2y'' = 0,$$

$$y'' - \frac{1}{2}\lambda(x) = 0. \tag{7.1.5}$$

З умови (7.1.4) диференціюючи знаходимо

$$y'' = 2.$$

Підкладемо знайдене y'' у рівняння (7.1.5)

$$2 - \frac{1}{2}\lambda(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda(x) = 4.$$

Тепер рівняння Ейлера (7.1.5) має вигляд

$$y'' - 2 = 0.$$

Звідси послідовним інтегруванням, знаходимо

$$y = x^2 + c_1 x + c_2.$$

Використовуючи умову (7.1.1) отримаємо

$$y = x^2.$$

Отже, екстремаль функціонала має вигляд

$$y = x^2.$$

■

Так як умови задачі дуже, прості, то екстремаль можна зразу побачити (у даному випадку умова (7.1.2)).

7.2 Зв'язки виду $\varphi(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) = 0$

Розглядається задача знаходження екстремума функціонала

$$J(y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx,$$

$$y_i(x_0) = y_{i0}, \quad y_i(x_1) = y_{i1} \tag{7.2.1}$$

при наявності зв'язків у вигляді диференціальних рівнянь

$$\varphi_j(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) = 0 \qquad (j = \overline{1, m}).$$

Будемо вважати, що один з функціональних визначників порядка m не дорівнює нулеві, тобто

$$\frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{D(y'_1, \dots, y'_m)} \neq 0.$$

Для цієї задачі справедливе правило множників Лагранжа, яке стверджує, що розв'язок сформульованої задачі знаходиться серед екстремалей функціонала

$$J_1 = \int\limits_{x_0}^{x_1} \left[F + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(x)\varphi_j \right] dx = \int\limits_{x_0}^{x_1} F^*(y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')dx.$$

Отже, функції, що реалізують екстремум функціонала $J = (y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')$ і множники $\lambda_j(x)$, $j = \overline{1, m}$, задовольняють системі рівнянь

$$\begin{cases} F^*_{y_i} - \dfrac{d}{dx} F^*_{y_i'} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \\ \varphi_j = 0, \quad j = \overline{1, m}, \\ y_i(x_0) = y_{i0}, \quad y_i(x_1) = y_{i1}, \quad i = \overline{1, n}. \end{cases}$$

П Р И К Л А Д 7.2 Знайти екстремалі функціонала

$$J = \int\limits_0^1 y'^2 dx \qquad \text{при умовах} \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad y' - 2x = 0.$$

Розв'язання. Складемо новий функціонал

$$J_1 = \int\limits_0^1 \left[y'^2 + \lambda(x)(y' - 2x) \right] dx$$

і напишемо для нього рівняння Ейлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y' + \lambda(x), \quad \frac{d}{dx} F_{y'} = \frac{d}{dx}(2y' + \lambda(x)),$$

$$0 + \frac{d}{dx}(2y' + \lambda(x)) = 0,$$

$$2y' + \lambda(x) = c - \text{рівняння Ейлера.}$$

З умови $y' - 2x = 0$ знаходимо, що $y' = 2x$, та підкладаючи у рівняння Ейлера, отримаємо

$$4x + \lambda(x) = c.$$

Звідки визначаємо $\lambda(x)$ і його значення підкладаємо у рівняння Ейлера

$$\lambda(x) = c - 4x,$$

$$
\begin{gathered}
2y' + c - 4x = c, \\
2y' = 4x, \\
y' = 2x, \\
y = x^2 + c_2.
\end{gathered}
$$

Константу c_2 знаходимо з умов задачі і отримаємо, що $c_2 = 0$.
Отже, екстремаль функціонала $J(y)$ є крива $y = x^2$. ■

7.3 Ізопериметрична задача

Ізопериметрична задача — це класична задача варіаційного числення, в якій необхідно знайти екстремум функціонала $J(y)$, при цьому додатково накладається обмеження на інший функціонал $K(y)$, що має задане значення l. Задача є ізопериметричною, оскільки вона має на меті максимізувати або мінімізувати функціонал за умови, що певний інший функціонал є сталим (тобто має задане значення).
Отже, розглянемо наступну задачу:
серед припустимих неперервно диференційованих кривих $y = y(x)$, кінці яких закріплені і вздовж яких функціонал

$$K(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} G(x, y(x), y'(x))dx$$

приймає задане значення l, знайти ту, для якої функціонал

$$J(y) = \int\limits_{a}^{b} F(x, y(x), y'(x))dx$$

приймає екстремальне значення.

Вважаємо, що функції $F(x, y, y')$ і $G(x, y, y')$ мають неперервні часткові похідні першого і другого порядків по усім своїм аргументам.

Теорема 7.3.1 Якщо крива $y = y(x)$ надає екстремум функціонала

$$J(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$$

при умовах

$$y(x_0) = y_0,\ \ y(x_1) = y_1,\ \ K(y) \equiv \int\limits_a^b G(x, y, y')dx = l$$

і якщо $y = y(x)$ не є екстремаллю функціонала $K(y)$, то існує константа λ така, що $y = y(x)$ є екстремаллю функціонала

$$L(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} \left[F(x, y, y') + \lambda G(x, y, y')\right] dx.$$

П Р И К Л А Д 7.3 Знайти екстремалі функціонала

$$J(y) = \int\limits_0^1 y'^2 dx \quad \text{при умовах} \quad \int\limits_0^1 xy'dx = 1,\ y(0) = 0,\ y(1) = 1.$$

Розв'язання. Перевіримо умову теореми 7.3.1. Екстремаль $y = y(x)$, що надає екстремум функціонала $J(y)$ не повинна бути екстремаллю функціонала $K(y) = \int\limits_0^1 xy'dx$. Рівняння Ейлера для $K(y)$ має вигляд

$$0 - \frac{dx}{dx} = 0.$$

Отримали $0 = 1$. Отже, екстремалі відсутні.
Складаємо функціонал

$$L(y) = \int\limits_0^1 \left[y'^2 + \lambda xy'\right] dx.$$

Будуємо рівняння Ейлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y' + \lambda x.$$

Рівняння Ейлера має вигляд

$$\frac{d}{dx}(2y' + \lambda x) = 0.$$

Отримаємо,

$$2y' + \lambda x = c_1 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{\lambda}{2}x + \frac{c_1}{2} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{\lambda}{4}x^2 + \frac{c_1}{2}x + c_2.$$

Використовуючи умови $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, отримаємо, що $c_2 = 0$, $c_1 = 2 + \frac{\lambda}{2}$.
Для визначення λ використовуємо ще третю умову $\int\limits_0^1 y' x dx = 1$. Маємо

$$\int\limits_0^1 \left[-\frac{\lambda}{2}x + \left(1 + \frac{\lambda}{4}\right) \right] x dx = 1$$

або

$$-\frac{\lambda}{6}x^3 + \left(1 + \frac{\lambda}{4}\right) \frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 = 1,$$

$$-\frac{\lambda}{6} + \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{8} = 1,$$

$$\lambda = -12.$$

Тоді шукана екстремаль має вигляд

$$y = 3x^2 - 2x.$$

■

7.4 Питання для самопідготовки

1. Сформулювати задачу на умовний мінімум: зв'язки виду $\varphi(x, y_1, \dots, y_n) = 0$.
2. Описати алгоритм розв'язування таких задач.
3. Сформулювати задачу на умовний мінімум: зв'язки виду $\varphi(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') = 0$.
4. Описати алгоритм розв'язання таких задач.
5. Зробити постановку ізопериметричної задачі.
6. Описати алгоритм розв'язання ізопериметричних задач.

7.5 Завдання для самостійної роботи

1. Знайти екстремалі функціонала

$$J(y) = \int\limits_i^{i+1} \left[(i + j)y'^2 + ix^3 \right] dx,$$

при умовах

$$y(i) = i + j, \quad y(i + 1) = 2i + 3j, \quad y - ix^3 - jx^2 = 0.$$

2. Знайти екстремалі функціонала

$$J(y) = \int\limits_{i}^{i+2} \left[(i+2)y'^2 + 3i\sqrt{x}\,\right] dx$$

при умовах

$$y(i) = i + j, \quad y(i+2) = 2i + j, \quad y' - (i+j)x^3 = 0.$$

3. Знайти екстремалі функціонала

$$J(y) = \int\limits_{i}^{i+3} \left[(i+j)y'^2 - ix^5\right] dx$$

при умовах

$$y(i) = i + j, \quad y(i+3) = 2i + 3j, \quad \int\limits_{i}^{i+3} (i+j)xy'dx = i + j,$$

де i – порядковий номер ПІП студента у списку групи,
j – номер групи.

8 Дослідження другої варіації

8.1 Необхідні умови екстремуму Лежандра-Клебша і Якобі

У попередніх пунктах на основі дослідження першої варіації функціонала основної задачі варіаційного числення отримано необхідні умови слабкого мінімуму першого порядку. Для отримання нових необхідних і достатніх умов слабкого мінімуму будемо досліджувати другу варіацію функціонала.

8.1.1 Приєднана задача про мінімум

Вираз для другої варіації функціонала $\delta^2 J(y,h)$ основної задачі вздовж припустимої кривої $y(x)$, $x \in [a,b]$ запишемо у вигляді

$$\delta^2 J(y,h) = \int\limits_a^b \omega(x,h,h')dx \tag{8.1.1}$$

де

$$\omega(x,h,h') = h^2 \frac{\partial^2 F(x,y(x),y'(x))}{\partial y^2} + \\ +2hh' \frac{\partial^2 F(x,y(x),y'(x))}{\partial y \partial y'} + h'^2 \frac{\partial^2 F(x,y(x),y'(x))}{\partial y'^2}. \tag{8.1.2}$$

Задача мінімізації другої варіації (8.1.1) на варіаціях $h(x)$, $x \in [a,b]$, припустимої кривої $y(x)$, $x \in [a,b]$, називається ***приєднаною задачею про мінімум,*** відповідно до припустимої кривої $y(x)$, $x \in [a,b]$.

Раніше було доведено, що на усіх варіаціях $h(x)$ $\delta^2 J(y^0,h) \geq 0$ і тому приєднана задача про мінімум вздовж слабкої мінімалі $y^0(x)$, $x \in [a,b]$ завжди має розв'язок $h^0(x) \equiv 0$, $x \in [a,b]$ і $\delta^2 J(y^0,h^0) = 0$.

Застосувавши рівняння Ейлера до функціонала приєднаної задачі про мінімум отримаємо

$$\frac{\partial \omega}{\partial h} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \omega}{\partial h'} = 0, \tag{8.1.3}$$

яке називається ***рівняння Якобі основної задачі*** варіаційного числення. Враховуючи вираз для $\omega(x,h,h')$ рівняння Якобі матиме вигляд

$$a(x)h'' + b(x)h' + c(x)h = 0, \tag{8.1.4}$$

де

$$a(x) = \frac{\partial^2 F(x, y(x), y'(x))}{\partial y'^2},$$

$$b(x) = \frac{d}{dx}\frac{\partial^2 F(x, y(x), y'(x))}{\partial y'^2}, \tag{8.1.5}$$

$$c(x) = \frac{d}{dx}\frac{\partial^2 F(x, y(x), y'(x))}{\partial y \partial y'} - \frac{\partial^2 F(x, y(x), y'(x))}{\partial y^2}.$$

Рівняння Якобі (8.1.4) – це лінійне диференціальне рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами. Щоб запобігти тривіального розв'язку цього рівняння, визначають такі розв'язки $h(x)$, які задовольняють ненульові початкові умови

$$h(a) = 0, \quad h'(a) = 1.$$

8.1.2 Друга необхідна умова слабкого мінімуму - умова Лежандра-Клебша

Доведемо необхідну умову слабкого мінімуму другого порядку.

Теорема 8.1.1 Вздовж кожної неперервно диференційованої мінімалі $y^0(x)$, $x \in [a, b]$, виконується умова Лежандра-Клебша

$$\frac{\partial^2 F(x, y^0(x), y^{0\prime}(x))}{\partial y'^2} \geq 0, \quad x \in [a, b].$$

Доведення. Нехай теорема несправедлива і у точці $\overline{x} \in [a, b]$, виконується нерівність

$$\frac{\partial^2 F(\overline{x}, y^0(\overline{x}), y^{0\prime}(\overline{x}))}{\partial y'^2} = \alpha < 0. \tag{8.1.6}$$

Розглянемо варіацію, так як вона довільна, покладемо

$$\begin{cases} h(x) = \sin^2\left(\dfrac{\pi(x - \bar{x} + \varepsilon)}{2\varepsilon}\right) \quad \text{при } x \in (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon), \\ h(x) \equiv 0 \quad \text{при } x \notin (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon), \end{cases} \tag{8.1.7}$$

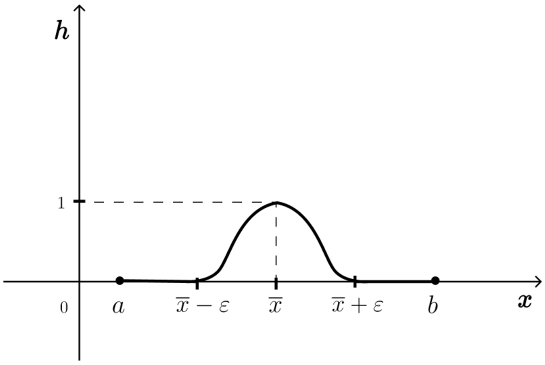
для якої

$$\begin{cases} h'(x) = \dfrac{\pi}{2\varepsilon}\sin\left(\dfrac{\pi(x - \bar{x} + \varepsilon)}{\varepsilon}\right) \quad \text{при } x \in (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon), \\ h'(x) \equiv 0 \quad \text{при } x \notin (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon), \end{cases} \tag{8.1.8}$$

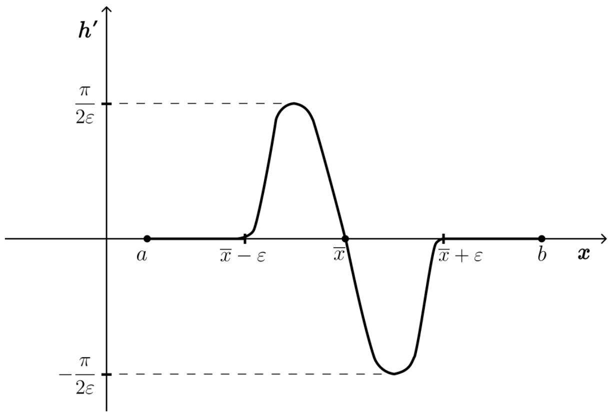
Тоді друга варіація функціонала (8.1.1) з урахуванням (8.1.7) і (8.1.8) вздовж кривої $y = y^0(x)$ дорівнює

$$\delta^2 J(y^0, h) = \int\limits_{\bar{x}-\varepsilon}^{\bar{x}+\varepsilon} \omega^0(x, h, h')dx, \tag{8.1.9}$$

де $\omega^0(x, h, h')$ - це вираз (8.1.2) вздовж $y = y^0(x)$.



а)$h(x)$



б)$h'(x)$

Рис. 8.1.1: *Зображення варіації* $h(x)$ *та її похідної* $h'(x)$.

Розглядаючи вирази для $h(x), h'(x)$, тобто (8.1.7) і (8.1.8), зрозуміло, що при достатньо малих $\varepsilon > 0$ величина $h'(x)$ набагато більша за $h(x)$. Тоді при малих $\varepsilon > 0$ у виразі (8.1.2) найбільшим буде доданок $h'^2 \frac{\partial^2 F(x,y^0(x),y^{0\prime}(x))}{\partial y'^2}$ і він вносить найбільший внесок у другу варіацію (8.1.9). При умові (8.1.6) і неперервності функції $\frac{\partial^2 F(x,y^0(x),y^{0\prime}(x))}{\partial y'^2}, \ x \in [a, b]$, знайдеться достатньо мале число $\varepsilon > 0$, що $\frac{\partial^2 F(x,y^0(x),y^{0\prime}(x))}{\partial y'^2} < 0, \ x \in (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$. Підкладемо цю нерівність у (8.1.9) і враховуючи вираз $h(x)$, отримаємо нерівність $\delta^2 J(y^0, h) < 0$, що суперечить необхідній умові мінімуму у термінах другої варіацій $\delta^2 J(y^0, h) \geq 0$. Теорему доведено. ☑

8.1.3 Третя необхідна умова слабкого мінімуму - умова Якобі

О з н а ч е н н я 8.1.1 Точка $\overline{x} \in (a, b]$ називається ***спряженою*** з точкою a вздовж припустимої кривої $y = y(x)$, $x \in [a, b]$, якщо існує такий нетривіальний розв'язок $h(x) \not\equiv 0, \ \ x \in [a, b]$, рівняння Якобі (8.1.4), що $h(a) = 0, \ h(\overline{x}) = 0$.

Т е о р е м а 8.1.2 (Якобі). Вздовж неособливої неперервно диференційованої мінімалі $y^0(x)$, $x \in [a,b]$, не існує точок $\overline{x} \in (a,b)$, спряжених з точкою a.

Доведення. Ідемо від зворотнього. Нехай вздовж кривої $y^0(x)$, $x \in [a,b]$, існує точка $\overline{x} \in (a,b)$, що спряжена з точкою a та нехай $h^*(x) \not\equiv 0,\ x \in [a,b]$ – відповідний розв'язок рівняння Якобі. Зрозуміло, що

$$h^{*\prime}(\overline{x}-0) \neq 0, \tag{8.1.10}$$

інакше за теоремою існування та єдиності розв'язків лінійних диференціальних рівнянь отримаємо тотожність $h^* \equiv 0,\ x \in [a,b]$. Побудуємо варіацію

$$h(x) = \begin{cases} h^*(x), & x \in [a,\overline{x}], \\ \\ 0, & x \in [\overline{x},b]. \end{cases} \tag{8.1.11}$$

Вздовж цієї варіації підрахуємо другу варіацію (8.1.1). Використовуючи формулу Ейлера для однорідних функцій другого ступеня

$$2\omega(x,h,h') = h\frac{\partial\omega}{\partial h} + h'\frac{\partial\omega}{\partial h'},$$

та рівняння Якобі (8.1.3), якому задовольняє функція $h^*(x),\ x \in [a,b]$, та властивість $h^*(a) = h^*(b) = 0$, отримаємо

$$\delta^2 J(y^0,h) = \int\limits_a^b \omega^0(x,h,h')dx = \int\limits_a^{\overline{x}} \omega^0(x,h^*,h^{*\prime})dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_a^{\overline{x}} \left(h^*\frac{\partial\omega^0}{\partial h} + h^{*\prime}\frac{\partial\omega^0}{\partial h'}\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_a^{\overline{x}} \left(h^*\frac{d}{dx}\frac{\partial\omega^0}{\partial h'} + h^{*\prime}\frac{\partial\omega^0}{\partial h'}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_a^{\overline{x}} \frac{d}{dx}\left(h^*\frac{\partial\omega^0}{\partial h'}\right)dx = \frac{1}{2}h^*(x)\frac{\partial\omega^0}{\partial h'}\bigg|_a^{\overline{x}} = 0.$$

А так як $\delta^2 J(x,h,h') \geq 0$, то варіація (8.1.11) надає мінімум $\delta^2 J(x,h,h')$. Співвідношення (8.1.10) разом з $h'(\overline{x}+0) = 0$ означає, що варіація (8.1.11) у точці $x = \overline{x}$ має злам. Тоді при $x = \overline{x}$ виконується умова Вейєрштраса - Ердмана

$$\frac{\partial\omega^0}{\partial h'}\bigg|_{x=\overline{x}-0} = \frac{\partial\omega^0}{\partial h'}\bigg|_{x=\overline{x}+0}.$$

Використовуючи вираз для $\omega(x,h,h')$ отримаємо

$$\left[2h^* \frac{\partial^2 F(x,y^0(x),y^{0\prime}(x))}{\partial y \partial y'} + 2h^{*\prime} \frac{\partial^2 F(x,y^0(x),y^{0\prime}(x))}{\partial y'^2}\right]_{x=\overline{x}-0} = \\ = \left[2h^* \frac{\partial^2 F(x,y^0(x),y^{0\prime}(x))}{\partial y \partial y'} + 2h^{*\prime} \frac{\partial^2 F(x,y^0(x),y^{0\prime}(x))}{\partial y'^2}\right]_{x=\overline{x}+0}. \tag{8.1.12}$$

Та як $h(\overline{x}-0) = h(\overline{x}+0) = 0$, $h'(\overline{x}+0) = 0$, $\frac{\partial^2 F(x,y^0(x),y^{0\prime}(x))}{\partial y'^2} > 0$, $x \in (a,b]$, то з (8.1.12) отримаємо $h'(\overline{x}-0) = h'(\overline{x}+0) = 0$, що суперечить, що точка $\overline{x}$ є точка злама варіації (8.1.11). Теорему доведено. ☑

8.2 Достатні умови екстремуму

Введемо деякі означення.

Означення 8.2.1 Припустима крива $y = y(x),\ x \in [a,b]$ задовольняє ***посиленій умові Лежандра-Клебша***, якщо вздовж неї виконується умова

$$F_{y'y'}(x,y(x),y'(x)) > 0 \quad (F_{y'y'}(x,y(x),y'(x)) < 0)\,, \quad x \in [a,b].$$

Означення 8.2.2 Припустима крива $y = y(x),\ x \in [a,b]$ задовольняє ***посиленій умові Якобі***, якщо вздовж неї на $(a,b]$ не існує точок спряжених з точкою a.

Означення 8.2.3 Кутовий коефіцієнт $p(x,y)$ дотичної до кривої сім'ї $y = y(x,c)$, що проходить через точку (x,y) називається ***нахилом поля*** у точці (x,y).

Теорема 8.2.1 **(достатня умова слабкого екстремуму).** Якщо припустима крива $y = y(x)$ задовольняє умовам:

1) вона є екстремаллю функціонала,
2) задовольняє посиленій умові Лежандра,
3) задовольняє посиленій умові Якобі,

то ця крива є слабкою мінімаллю, якщо $F_{y'y'}(x,y(x),y'(x)) > 0$, і слабкою максималлю, якщо $F_{y'y'}(x,y(x),y'(x)) < 0$.

ПРИКЛАД 8.1 Дослідити на екстремум функціонал

$$J(y) = \int_0^a y'^2 dx, \quad y(0) = 0, \ \ y(a) = 1.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння Ейлера

$$y'' = 0.$$

Загальний розв'язок його наступний

$$y(x) = c_1 x + c_2.$$

З межових умов знайдемо

$$c_2 = 0, \quad c_1 = \frac{1}{a}.$$

Отже, екстремаллю задачі буде функція

$$y = \frac{1}{a}x.$$

Так як $\dfrac{\partial^2 F}{\partial {y'}^2} = 2 > 0$, то екстремаль неособлива і виконується посилена умова Лежандра.
Рівняння Якобі (8.1.3) має вигляд

$$h'' = 0.$$

Нетривіальний розв'язок якого, що задовольняє умови $h(0) = 0$, наступний

$$h(x) = cx, \quad c \neq 0.$$

Нетривіальний розв'язок $h(x) = cx$ не перетворюється в нуль при довільному a. Тому виконується посилена умова Якобі.
Усі вимоги теореми про достатність слабкого мінімуму виконані і тому крива $y = \frac{1}{a}x$ дає слабкий мінімум функціоналу, який дорівнює нулеві. ■

ПРИКЛАД 8.2 Дослідити на екстремум функціонал

$$J(y) = \int\limits_0^a \Big(\left(y'(x)\right)^2 - y^2(x) \Big)\, dx, \quad y(0) = 0, \;\; y(a) = 0.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння Ейлера

$$y'' + y = 0.$$

Загальний розв'язок рівняння такий

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x.$$

Використовуючи межові умови отримаємо, що

$$c_1 \sin a = 0, \quad c_2 = 0.$$

отже екстремаль має вигляд

$$y(x) = c_1 \sin x.$$

Екстремаль неособлива, тому що $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = 2 > 0$ і виконується посилена умова Лежандра.
Рівняння Якобі $h'' + h = 0$ має нетривіальний розв'язок $h(x) = c \sin x, \ c \neq 0$.
Умова Якобі виконується на відрізкові $0 < a \leq \pi$, а при $0 < a < \pi$ виконується посилена умова Якобі. Якщо $a > \pi$, то на відрізку $(0, a]$ існує точка $\overline{x}$ (наприклад, $\overline{x} = \pi$), спряжена з точкою 0 і умова Якобі не виконується.
Отже, якщо $0 < a < \pi$, то екстремаль $y(x) = 0$ дає слабкий мімнімум функціонала задачі і $J(y) = 0$. Якщо $a > \pi$, то задача не має розв'язків. При $a = \pi$ припустимі екстремалі мають вигляд $y(x) = c \sin x$. ■

Теорема 8.2.2 (Лежандра, достатня умова сильного екстремуму). Нехай функція $F(x, y, y')$ має неперервну часткову похідну другого порядку $F_{y'y'}(x, y, y')$ і виконуються наступні умови:

1) функція $y = y(x)$ є екстремаллю функціонала,
2) виконується посилена умова Якобі,
3) у випадку, якщо $F_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) > 0$ у точках (x, y), близьких до екстремалі, при довільних значеннях y', то $y = y(x)$ надає сильний мінімум функціоналу, а якщо $F_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) < 0$ – то сильний максимум.

ПРИКЛАД 8.3 Досліджується на екстремум функціонал

$$J(y) = \int\limits_0^1 \left(y'^3 - y'\right) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = -2.$$

Розв'язання. Так як підінтегральна функція залежить тільки від y', то екстремаллю є пряма $y = c_1 x + c_2$.
Враховуючи межові умови, отримаємо, що екстремаль має вигляд $y = -2x$.
Побудуємо рівняння Якобі

$$a(x)h'' + b(x)h' + c(x)h = 0.$$

Отримаємо

$$h'' = 0,$$

і його розв'язок

$$h(x) = c_1 x + c_2.$$

Знаходимо c_1 і c_2 з умови $h(0) = 0$. Отримали сім'ю розв'язків $y = cx$. Жодна крива $y = cx$ на відрізкові $(0; 1]$ не перетворюється в нуль, це означає, що на $(0; 1]$ відсутні точки, що спряжені з точкою 0. Посилена умова Якобі виконується.
Перейдемо до третьої умови. На екстремалі $y = -2x$ нахил поля $p = -2$. Знаходимо $F_{y'y'} = 6y'$. На екстремалі $y = -2x$ $F_{y'y'} = 6y'|_{y=-2x} = -12$. Це означає, що на екстремалі $y = -2x$ досягається слабкий максимум функціонала. Зазначимо, що при довільних значеннях y' знак $F_{y'y'} = 6y'$ не зберігається. Отже, достатня умова сильного максимуму не виконується. ■

Означення 8.2.4 ***Функцією Вейєрштрасса*** $E(x, y, p, y')$ називається функція, що визначається рівністю

$$E(x, y, p, y') = F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p)F_p(x, y, p),$$

де $p = p(x, y)$– нахил поля екстремалей.

Теорема 8.2.3 **(достатня умова Вейєрштрасса слабкого екстремуму).**
Функція $y = y(x)$ доставляє слабкий екстремум функціонала, якщо:
1) функція $y = y(x)$ є екстремаллю функціонала,
2) виконується посилена умова Якобі,
3) функція Вейєрштрасса $E(x, y, p, y')$ зберігає знак у всіх точках (x, y) близьких до екстремалі і для близьких до $p(x, y)$ значень y'.

Функціонал буде досягати слабкого максимуму на екстремалі $y = y(x)$, якщо функція Вейєрштрасса набуває не додатних значень $E < 0$ і буде досягати слабкого мінімуму, якщо $E > 0$.

Теорема 8.2.4 **(достатня умова Вейєрштрасса сильного екстремуму).**
Функція $y = y(x)$ доставляє сильний екстремум функціонала, якщо:
1) функція $y = y(x)$ є екстремаллю функціонала,
2) виконується посилена умова Якобі,
3) функція Вейєрштрасса $E(x, y, p, y')$ зберігає знак у всіх точках (x, y) близьких до екстремалі і для довільних значень y'.

Функціонал буде досягати сильного максимуму на екстремалі $y = y(x)$, якщо $E < 0$ і досягати сильного мінімуму, якщо $E > 0$.

ПРИКЛАД 8.4 Дослідити на екстремум функціонал

$$\int_0^1 (y'^3 + y')dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2.$$

Розв'язання. Так як підінтегральна функція залежить тільки від y', то екстремалями будуть функції $y = c_1x + c_2$. Враховуючи межові умови, отримаємо вид екстремалі $y = 2x$. Нахил поля у точках цієї екстремалі $p = 2$. Рівняння Якобі має вигляд $h'' = 0$, а звідси $h(x) = c_1x + c_2$. З умови $h(0) = 0$ отримаємо $h(x) = cx$. Функція $h(x) = cx$ крім точки 0 ніде не перетворюється в нуль. Отже, на $(0; 1]$ відсутні точки, спряжені с точкою 0. Посилена умова Якобі виконується.

Складемо функцію Вейєрштрасса

$$E(x, y, p, y') = y'^3 + y' - p^3 - p - (y' - p)(3p^2 + 1) =$$

$$= (y'^3 - p^3) + (y' - p) - (y' - p)(3p^2 + 1) = (y' - p)^2(y' + 2p).$$

Перший множник завжди невід'ємний при довільних y', а другий додатній при значеннях y', близьких до 2. Отже, виконані усі умови існування слабкого мінімуму. Але якщо $y' < -4$, то функція E уже буде від'ємною і достатня умова сильного екстремуму не виконується. Отже, функціонал сильного екстремуму не має. ■

8.3 Питання для самопідготовки

1. Який має вигляд друга варіація функціонала в основній задачі варіаційного числення?
2. Сформулювати теорему Лежандра - Клебша.
3. Дати означення спряженої точки.
4. Сформулювати теорему Якобі.
5. Сформулювати теорему про достатню умову слабкого екстремуму.
6. Сформулювати теорему Лежандра.
7. Сформулювати теорему Вейєрштрасса про достатню умову слабкого екстремуму.
8. Сформулювати теорему Вейєрштрасса про достатню умову сильного екстремуму.

8.4 Завдання для самостійної роботи

1. Дослідити на екстремум функціонал

$$J(y) = \int_0^{ia} \left[(i + j)y'^2 - 3iy^2\right] dx, \quad y(0) = 0, \quad y(ia) = 0.$$

2. Використовуючи достатню умову сильного екстремуму Лежандра,

дослідити на екстремум функціонал

$$\int\limits_{i}^{i+1} \left[(i+j)y'^3 - iy'\right] dx, \quad y(i) = i+j, \quad y(i+1) = i-j.$$

3. Використовуючи достатню умову сильного екстремуму Вейєрштрасса, дослідити на екстремум функціонал

$$J(y) = \int\limits_{i}^{i+1} \left[(i+j)y'^3 - iy'\right] dx, \quad y(i) = i+j, \quad y(i+1) = i-j.$$

В кожному завданні: i – номер ПІБ студента у списку групи, j – номер групи.

9 Гамільтонова форма та рівняння

9.1 Канонічна (Гамільтонова) форма рівнянь Ейлера

Розглянемо основну задачу варіаційного числення. По цій задачі складемо ***функцію Гамільтона***

$$H(x, y, p) = -F(x, y, z) + pz,$$

де змінна z виражається через p з рівняння

$$p = \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z}. \tag{9.1.1}$$

Теорема 9.1.1 Рівняння Ейлера еквівалентне канонічній системі диференціальних рівнянь

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \frac{dp}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y}. \tag{9.1.2}$$

Доведення. Нехай $y = y(x)$ $(y'(x) = z'(x))$- розв'язок рівняння Ейлера $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$. Покажемо, що $y = y(x)$, $p(x) = \frac{\partial F(x,y(x),y'(x))}{\partial y'}$– розв'язок системи (9.1.2). Перше рівняння в (9.1.2) є наслідком визначення функції $z(x)$. Розглянемо друге рівняння в (9.1.2) з урахуванням рівняння Ейлера, отримаємо

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{\partial F(x, y(x), y'(x))}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial H}{\partial y}.$$

Тепер, навпаки, нехай $y(x)$ і $z(x)$– розв'язок системи (9.1.2). Доведемо, що $y(x)$– розв'язок рівняння Ейлера. Так як

$$p = \frac{\partial F}{\partial y'} \quad \text{і} \quad \frac{dp}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}$$

тоді

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Прирівнюючи праві частини рівнянь з $\frac{dp}{dx}$, отримаємо рівняння Ейлера. Теорему доведено. ☑

Змінні y, p системи (9.1.2) називаються ***канонічними змінними***. У механіці допоміжну змінну p називають ***імпульсом***. Канонічна симтема проста і симетрична. За її допомогою доводиться важлива властивість гамільтоніана вздовж екстремалі

$$\frac{dH}{dx} = \frac{\partial H}{\partial x}. \tag{9.1.3}$$

Дійсно,

$$\frac{dH}{dx} = \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y}y' + \frac{\partial H}{\partial p}p' = \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial x}.$$

Формула (9.1.3) означає, що вздовж кожної екстремалі основної задачі, у якій функція $F(x, y, z)$ не залежить від x, гамільтоніан постійний, тобто функція $H(x, y(x), p(x))$ – перший інтеграл канонічної системи.

9.2 Рівняння Гамільтона-Якобі

Розглянемо сім'ю задач

$$\begin{gathered} J_{x,u}(y) = \int\limits_a^x F(t, y(t), y'(t))dt \to \min, \quad y(t) \in C^1, \\ t \in [a, x], \quad y(a) = c, \quad y(x) = u, \end{gathered} \tag{9.2.1}$$

що залежить від двох параметрів x, u. Позначимо через $y(t, x, u)$, $t \in [a, x]$, $S(x, u)$ мінімаль і значення функціонала $J_{x,u}(y)$ на ній для загальної задачі сім'ї (9.2.1). Тоді

$$\begin{gathered} S(x, u) = \int\limits_a^x F(t, y(t, x, u), y'(t, x, u))dt = \\ = \int\limits_a^{x-\Delta x} F(t, y(t, x, u), y'(t, x, u))dt + \int\limits_{x-\Delta x}^{x} F(t, y(t, x, u), y'(t, x, u))dt = \\ = S\left(x - \Delta x, y(x - \Delta x, x, u)\right) - F\left(t, y(t, x, u), y'(t, x, u)\right)\Delta x + o(|\Delta x|). \end{gathered} \tag{9.2.2}$$

Тут використана очевидна властивість мінімалі, що відрізок $y(t, x, u)$, $t \in [a, x - \Delta x]$, є мінімаллю задачі (9.2.1) з параметрами $x - \Delta x$, $y(x - \Delta x, x, u)$.
Поділимо обидві частини тотожності (9.2.2) на Δx і спрямуємо $\Delta x \to 0$, отримаємо

$$\frac{dS(x, u)}{dx} = F(x, y(x), y'(x)). \tag{9.2.3}$$

Будемо вважати, що функція $S(x,u)$ диференційована за аргументами. Розрахуємо

$$\frac{dS(x,u)}{dx} = \frac{\partial S(x,u)}{\partial x} + \frac{\partial S(x,u)}{\partial y} y'$$

і тоді рівняння (9.2.3) можна записати у вигляді

$$\frac{\partial S(x,u)}{\partial x} - F(x, y(x), y'(x)) + \frac{\partial S(x,u)}{\partial y} y' = 0. \tag{9.2.4}$$

Якщо від змінних $y, z = y'$ перейти до канонічних y, p і скористатися тим, що $p = \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}$ із (9.2.4) отримаємо рівняння для функції $S(x,u)$

$$\frac{\partial S(x,u)}{\partial x} + H\left(x, y, \frac{\partial S}{\partial y}\right) = 0. \tag{9.2.5}$$

Це рівняння називається ***рівнянням Гамільтона-Якобі***. За допомогою розв'язків рівняння (9.2.5) можна будувати розв'язки основної задачі. Канонічні рівняння Ейлера – це рівняння характеристик рівняння Гамільтона-Якобі.
Розглянемо взаємозв'язок між розв'язками рівняння Гамільтона-Якобі та першими інтегралами системи рівнянь Ейлера.
Нагадаємо, що першим інтегралом деякої системи диференціальних рівнянь називається функція, що зберігає постійні значення вздовж кожної інтегральної кривої цієї системи.
Повним інтегралом рівняння в часткових похідних першого порядку називається такий його розв'язок що містить стільки невідомих констант, скільки є незалежних змінних.

Теорема 9.2.1 (Якобі). Нехай $S = S(x, y, \alpha) \in C^2$ – повний інтеграл рівняння (9.2.5) і $\dfrac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} \neq 0$. Тоді функція $y(x, \alpha, \beta) \in C^1$, $x \in [a, b]$, знайдена з рівняння

$$\frac{\partial S(x, y, \alpha)}{\partial \alpha} = \beta,$$

у сукупності з функцією

$$p(x, \alpha, \beta) = \frac{\partial S(x, y(x, \alpha, \beta))}{\partial y}, \; x \in [a, b],$$

є загальний розв'язок канонічної системи.

Доведення. Спочатку доведемо, що $\dfrac{\partial S(x, y, \alpha)}{\partial \alpha} = \beta$ – перший інтеграл канонічної системи, тобто

$$\frac{d\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)}{dx} = 0.$$

Маємо

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \alpha} + \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial \alpha} y'. \tag{9.2.6}$$

У рівняння (9.2.5) підкладемо функцію $S(x, y, \alpha)$ і воно стане тотожністю

$$\frac{\partial S(x, y, \alpha)}{\partial x} + H\left(x, y, \frac{\partial S(x, y, \alpha)}{\partial y}\right) \equiv 0. \tag{9.2.7}$$

Диференціюємо (9.2.7) за α і отримаємо

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \alpha} = -\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial^2 S}{\partial y \partial \alpha}. \tag{9.2.8}$$

Підкладемо цей вираз у (9.2.6) і отримаємо, враховуючи рівняння канонічної системи, шуканий результат

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \left(-\frac{\partial H}{\partial p} + y'\right)\frac{\partial^2 S}{\partial y \partial \alpha} = 0.$$

Доведемо, що функції $y(x, \alpha, \beta)$, $p(x, \alpha, \beta)$ задовольняють канонічній системі. З визначення $y(x, \alpha, \beta)$ і рівності (9.2.8) маємо

$$y' = -\frac{\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \alpha}}{\frac{\partial^2 S}{\partial y \partial \alpha}} = \frac{\partial H}{\partial p}.$$

Отже, рівняння отримані.
Використовуючи значення

$$p(x, \alpha, \beta) = \frac{\partial S(x, y, \alpha)}{\partial y},$$

отримаємо

$$p' = \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} y' = \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\frac{\partial H}{\partial p}.$$

Далі, диференціюємо по y тотожність (9.2.5)

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} + \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = 0. \tag{9.2.9}$$

Підкладемо цей результат у (9.2.9) і отримаємо друге рівняння канонічної системи. Теорему доведено. ☑

ПРИКЛАД 9.1 Скласти канонічну систему рівнянь Ейлера для функціонала

$$J(y) = \int_1^2 \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+(y')^2}\,dx.$$

Розв'язання. Введемо функцію

$$p = \frac{\partial F}{\partial y'} = \sqrt{x^2+y^2}\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}.$$

З отриманої рівності знаходимо y'

$$y'^2 = \frac{p^2}{x^2+y^2-p^2}$$

$$y' = \frac{p}{\sqrt{x^2+y^2-p^2}}.$$

Будуємо функцію Гамільтона

$$H = \left[-F + y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right]\Bigg|_{y'=\frac{p}{\sqrt{x^2+y^2-p^2}}} = -\sqrt{x^2+y^2-p^2}.$$

Далі будуємо канонічну систему рівнянь

$$y' = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad p' = -\frac{\partial H}{\partial y}.$$

Отримаємо

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-p^2}}, \qquad p' = y' = \frac{p}{\sqrt{x^2+y^2-p^2}}.$$

■

9.3 Питання для самопідготовки

1. Що таке перший інтеграл системи диференціальних рівнянь?
2. Сформулювати означення повного інтегралу системи диференціальних рівнянь.
3. Сформулювати теорему Гамільтона-Якобі.
4. Сформулювати теорему Якобі.

9.4 Завдання для самостійної роботи

Написати канонічну систему рівнянь для функціонала, що заданий у завданні для самостійної роботи 1.3 на стор. 17.

II Частина друга. ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ

10 Постановка основних задач оптимального керування . . . 92
10.1 Задачі оптимального керування
10.2 Питання для самопідготовки
10.3 Завдання для самостійної роботи

11 Принцип максимуму Понтрягіна . . . 97
11.1 Приріст критерію якості на припустимих керуваннях
11.2 Голкові варіації
11.3 Принцип максимуму Понтрягіна для задачі Майєра
11.4 Задачі оптимального керування типу Лагранжа і Больца
11.5 Таблиця різних постановок задач
11.6 Питання для самопідготовки
11.7 Завдання для самостійної роботи

12 Оптимізація лінійних систем . . . 111
12.1 Теорема про достатність принципу максимуму
12.2 Синтез лінійних систем, оптимальних по швидкодії
12.3 Приклади
12.4 Питання для самопідготовки
12.5 Завдання для самостійної роботи

13 Деякі питання, що пов'язані з принципом максимуму Понтрягіна . . . 127
13.1 Принцип максимуму Понтрягіна для деяких класів задач
13.2 Використання принципа максимуму для перевірки керувань на оптимальність
13.3 Використання принципу максимуму для звуження класу керувань, підозрілих на оптимальність
13.4 Розв'язування лінійних задач оптимального керування
13.5 Питання для самопідготовки
13.6 Завдання для самостійної роботи

14 Зв'язок задач оптимального керування з задачами варіаційного числення . . . 145
14.1 Зв'язок задач оптимального керування з задачами варіаційного числення
14.2 Критерій Вейерштрасса
14.3 Питання для самопідготовки
14.4 Завдання для самостійної роботи
Рекомендована література

10 Постановка основних задач оптимального керування

10.1 Задачі оптимального керування

Домовимося у наступному, що вектор – це вектор-стовпець, норма вектора – це Евклідова норма.
Елементом задач оптимального керування є керований об'єкт або система. Їх положення в момент часу t описується вектором

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))^T \in \mathbb{R}^n.$$

Змінні $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називаються ***фазовими змінними***, вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ – ***фазовим вектором***. Множина усіх можливих фазових векторів у $\mathbb{R}^n$ називається ***фазовим простором***. Керуючі пристрої об'єкта або системи, положення яких у кожний момент часу t визначається вектором $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_r(t))^T$ називаються ***вектором керування***. Множина усіх можливих значень вектора керування – це замкнена і обмежена множина $U \in \mathbb{R}^r$. Щодо властивостей вектора керування можна сказати таке: вимагати неперервності керування недоцільно. Вважається, що керування – це кусково-неперервна функція, тобто вона має розриви першого роду в скінченій кількості точок.
Закон руху об'єкта визначається системою диференціальних рівнянянь

$$\dot{x} = f\left(t, x(t), u(t)\right), \tag{10.1.1}$$

де $x(t)$ і $u(t)$ – вектори. Векторозначна функція $f\left(t, x, u\right)$ неперервна і має неперервні похідні по $t, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ці умови забезпечують існування і єдиність розв'язку диференціального рівняння (10.1.1) при початковій умові $x(t_0) = x_0$ і обраному припустимому керуванні $u(t)$ на відрізку $[t_0, t_1]$. Розв'язок $x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ рівняння (10.1.1), що відповідає заданому керуванню $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ називається ***фазовою траєкторією*** керованого об'єкта, а $(x(t), u(t))$, $t \in [t_0, t_1]$ називається ***керованим процесом***. Керований процес $(x(t), u(t))$ називається ***припустимим***, якщо він задовольняє граничні умови.
Як завжди, мета керування – це перевести керований об'єкт з початкового положення $x(t_0) \in S_0 \subset \mathbb{R}^n$ у деяку множину $S_1 \subset \mathbb{R}^n$ в момент t_1, такий, що $x(t_1) \in S_1$.
Зрозуміло, що існує багато керувань по переводу об'єкта з множини S_0 на множину S_1. Серед цих керувань треба знайти оптимальне керування. Для цього потрібно знати критерій якості або оптимальності керування, який і допоможе визначити найкраще керування серед усіх можливих.

Критерій оптимальності $J(u)$ – це функціонал, що визначений на множині припустимих керованих процесів $(x(t), u(t))$, де $u(t)$– припустиме керування, а $x(t)$– відповідна траєкторія. Так як функціонал $J(u)$ приймає числові значення, то кожному керованому процесу $(x(t), u(t))$ відповідає число, по якому і судять про якість керування.

Задача оптимального керування полягає в тому, щоб визначити припустиме керування $\widehat{u}(t) \in U$, $t \in [t_0, t_1]$ за якого фазова траєкторія задовольняє граничні умови $\widehat{x}(t_0) \in S_0$, $\widehat{x}(t_1) \in S_1$ і критерій оптимальності на керованому процесі $(\widehat{x}(t), \widehat{u}(t))$, $t \in [t_0, t_1]$ досягає екстремального значення. У залежності від вигляду критерію оптимальності розрізняють наступні задачі оптимального керування.

Означення 10.1.1 (задача Майєра). Задача оптимального керування з критерієм якості

$$J(u) = \varphi(t_1, x(t_1)),$$

де функція φ неперервно диференційована по своїм аргументам, називається ***задачею Майєра***. Цю задачу ще називають ***термінальною***.

Означення 10.1.2 (задача Лагранжа). Задача оптимального керування з критерієм якості

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} g(x, u, t)dt,$$

де функція $g(x, u, t)$ неперервно диференційована по t і x, і неперервна по u називається ***задачею Лагранжа***.

Означення 10.1.3 (задача Больца). Задача оптимального керування з критерієм якості

$$J(u) = \varphi(t_1, x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} g(x, u, t)dt,$$

де функції φ і $g(x, u, t)$ мають тіж властивості, що і у задачах Майєра і Лагранжа, називається ***задачею Больца***.

Якщо у задачі Больца функція $\varphi \equiv 0$, то отримаємо задачу Лагранжа, якщо ж функція $g \equiv 0$, то маємо задачу Майєра.

Якщо у задачі Лагранжа $g \equiv 1$, то критерій оптимальності є час $(t_1 - t_0)$ переходу об'єкта з початкового положення у кінцеве. У цій задачі за таких умов оптимальне керування мінімізує час, який витрачається на перехід. Така задача називається ***задачею оптимальної швидкодії***.

Якщо множини S_0, S_1 початкових і кінцевих положень керованого об'єкта не залежать від моментів часу t_0, t_1 і мають лише по одній точці $S_0 = \{x_0\}, S_1 = \{x_1\}$, то задача оптимального керування називається ***задачею з закріпленими кінцями***.
Якщо множина S_0 (або S_1) збігається з усім простором $\mathbb{R}^n$, то маємо задачі з вільним лівим (правим) кінцем траєкторії.
Якщо множина S_0 (або S_1) – це деякій підпростір простору $\mathbb{R}^n$ виміру меншого ніж n, то лівій (правий) кінець траєкторії називається ***рухомим***.
У деяких задачах оптимального керування можуть зустрічатися випадки, коли моменти часу t_0, t_1 не фіксовані, тоді проміжок $[t_0, t_1]$ необхідно включити в означення припустимого керованого процесу і розглядати керовані процеси $(x(t), u(t), t_0, t_1)$.
Зробивши деякі заміни змінних, можна від однієї задачі оптимального керування перейти до іншої. Наприклад, розглянемо задачу Лагранжа і введемо змінну

$$x_{n+1}(t) = \int\limits_{x_0}^{t} g(x(s), u(s), s)ds,$$

що задовольняє рівнянню

$$\dot{x}_{n+1}(t) = g(x, u, t), \quad x_{n+1}(t_0) = 0,$$

то задача Лагранжа зводиться до задачі Майєра

$$\min x_{n+1}(t_1),$$

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t),$$

$$\dot{x}_{n+1}(t) = g(x, u, t),$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x_{n+1}(t_0) = 0, \quad u \in U$$

Аналогічним способом задача Больца зводиться до задачі Майєра.
Присутність диференціальних рівнянь у постановках задач оптимального керування робить їх схожими з задачами варіаційного числення з диференціальними зв'язками. Але у задачах оптимального керування присутнє керування, яке, як правило, обмежене і кусково-неперервне. Тобто, в теорії оптимального керування досліджується більш вузький клас екстремальних задач. Але таке спрощення задач виявилося не недоліком нової теорії оптимального керування, а її перевагою, достоїнством. А це тому що:

1) основні результати варіаційного числення випливають з результатів теорії оптимального керування;
2) за допомогою теорії оптимального керування отримано результати, які неможливо отримати методом класичного варіаційного числення;

3) багато сучасних прикладних задач формулюються в рамках теорії оптимального керування.

Далі сформулюємо основні проблеми теорії оптимального керування.
Перша проблема, що виникає при розв'язанні задач оптимального керування, називається ***проблемою ідентифікації*** і полягає в математичному описі об'єкта або процеса.
Наступна проблема, це ***проблема керованості***, в якій вияснється питання існування хоча б однієї припустимої траєкторії.
З проблемою керованості тісно пов'язана ***проблема спостережливості***. Справа у тому, що вектор стану x, як правило, малодоступний для вимірювання, тому система вважається спостережливою, якщо за доступними вимірами можна відновити стан системи.
Далі йде проблема існування ***оптимальних керувань***, тобто питання про існування у класі припустимих керувань найкращого керування, яке дає критерію якості оптимальне значення.
Якщо задача оптимального керування має розв'язок, то необхідно серед припустимих керувань виділити більш вузьку множину керувань, що можуть бути оптимальними. А це вже ***проблема необхідних умов***.
Проблема ***достатніх умов*** полягає у тому, щоб сформулювати співвідношення, виконання яких гарантувало б оптимальність керувань, отриманих з необхідних умов.
Основною проблемою теорії оптимального керування вважається проблема ***обчислювальних методів***.

10.2 Питання для самопідготовки

1. Що таке фазова траєкторія?
2. Якою повинна бути множина керувань?
3. Зробити постановку задачі Майєра.
4. Сформулювати задачу Лагранжа.
5. Сформулювати задачу Больця.
6. У чому полягає задача про швидкодію?

10.3 Завдання для самостійної роботи

1. Задачу Лагранжа звести до задачі Майєра

$$\min_{u\in U}\int\limits_{4+i}^{8+2ij}(x_1^2+4ix_1x_2)dt,$$

$$\dot{x}_1(t)=5ix_1-8jx_2u,$$

$$\dot{x}_2(t)=7jx_1+18ix_1x_2u,$$

$$x_1(4+i)=4j,\ \ x_2(4+i)=i-j,\ \ u\in U.$$

2. Задачу Больца звести до задачі Майєра

$$\min_{u\in U}\left[(7ix_1+2j\cos x_2)+\int\limits_{i}^{2i+j}(ix_1^2+jx_2\ln x_1)dt\right],$$

$$\dot{x}_1(t)=5i\sin(tx_1)-j\cos x_2,$$

$$\dot{x}_2(t)=4i\sin x_1+8ijx_2,$$

$$x_1(i)=7i+j,\ \ x_2(i)=3i+4j,\ \ u\in U.$$

В кожному завданні: i–номер ПІБ студента у списку групи, j– номер групи.

11 Принцип максимуму Понтрягіна

11.1 Приріст критерію якості на припустимих керуваннях

Розглядається задача Майєра

$$\min_{u\in U} J(u) \equiv \varphi(x(t_1)),$$

$$\dot{x} = f(x,u,t), \;\; t\in T=[t_0,t_1],$$
$$x(t_0)=x^0, \; u\in U, \; x\in\mathbb{R}^n, \; u\in\mathbb{R}^r, \; U\in\mathbb{R}^r.$$

Нехай $u=u(t)$, $t\in T$ є оптимальним керуванням, а $\bar{u}(t)$ – довільне припустиме керування. Тоді

$$\Delta J(u) = J(\bar{u}(t)) - J(u(t)) \geq 0. \tag{11.1.1}$$

Введемо позначення

$$\Delta u(t) = \bar{u}(t) - u(t), \quad \Delta x(t) = \bar{x}(t) - x(t), \tag{11.1.2}$$

де $\bar{x}(t)$ – траєкторія, що відповідає припустимому керуванні $\bar{u}(t)$, $x(t)$ – оптимальна траєкторія, яка відповідає оптимальному керуванні.
Використовуючи розвинення в ряд Тейлора і позначення (11.1.2) отримаємо

$$\begin{gathered}\Delta J(u) = \varphi(\bar{x}(t_1)) - \varphi(x(t_1)) = \varphi(x(t_1)+\Delta x(t_1)) - \varphi(x(t_1)) = \\ = \frac{\partial\varphi^T(x(t_1))}{\partial x}\Delta x(t_1) + o\left(||\Delta x(t_1)||\right),\end{gathered} \tag{11.1.3}$$

де $o(\alpha)$ – величина, що визначається таким чином: $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{o(\alpha)}{\alpha}=0.$
Далі запишемо очевидну тотожність для функції $\Delta x(t)$, $t\in T$ і довільної кускового-гладкої n-вимірної функції $\psi(t), \; t\in T$

$$\frac{d}{dt}\left[\psi^T(t)\Delta x(t)\right] = \dot{\psi}^T(t)\Delta x(t) + \psi^T(t)\Delta\dot{x}(t).$$

Інтегруючи останнє співвідношення на $[t_0,t_1]$ та використовуючи, що $\Delta x(t_0)=0$, отримаємо

$$\psi^T(t_1)\Delta x(t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1}\left[\dot{\psi}^T(t)\Delta x(t) + \psi^T(t)\Delta\dot{x}(t)\right]dt. \tag{11.1.4}$$

Так як $\psi(t)$ довільна функція, то накладемо на неї наступну умову

$$\psi(t_1) = -\frac{\partial \varphi(x(t_1))}{\partial x}. \tag{11.1.5}$$

Враховуючи (11.1.3)–(11.1.5) отримаємо

$$\Delta J(u) = -\int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\dot{\psi}^T(t)\Delta x(t) + \psi^T(t)\Delta \dot{x}(t)\right] dt + o(||\Delta x(t_1)||). \tag{11.1.6}$$

З (11.1.2) маємо

$$\Delta \dot{x}(t) = f(x(t)+\Delta x(t); u(t)+\Delta u(t); t) - f(x(t); u(t); t), \quad \Delta x(t_0) = 0. \tag{11.1.7}$$

Введемо функцію Гамільтона сформульованої задачі

$$H(x, \psi, u, t) = \psi^T(t) f(x, u, t).$$

Використовуємо розвинення в ряд Тейлора і отримаємо

$$\psi^T(t)\Delta\dot{x}(t) = H\left(x(t) + \Delta x(t),\ \psi(t),\ u(t) + \Delta u(t),\ t\right) - H\left(x(t), \psi(t), u(t), t\right) =$$

$$= H\left(x(t), \psi(t), u(t) + \Delta u(t), t\right) + \frac{\partial H^T\left(x(t), \psi(t), u(t) + \Delta u(t), t\right)}{\partial x}\Delta x(t) +$$

$$+ o_1(||\Delta x(t)||) - H\left(x(t), \psi(t), u(t), t\right) =$$

$$= \Delta_{\bar{u}} H\left(x(t), \psi(t), u(t), t\right) + \frac{\partial H^T\left(x(t), \psi(t), \bar{u}(t), t\right)}{\partial x}\Delta x(t) + o_1(||\Delta x(t)||).$$

Довизначимо функцію $\psi(t),\ t \in T$, у такий спосіб

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H\left(x(t), \psi(t), u(t), t\right)}{\partial x} \tag{11.1.8}$$

і підкладемо вираз $\dot{\psi}(t)$ з (11.1.8) у (11.1.6). Отримаємо остаточний вираз приросту критерію якості

$$\Delta J(u) = -\int\limits_{t_0}^{t_1} \Delta_{\bar{u}} H\left(x(t), \psi(t), u(t), t\right) dt + \eta, \tag{11.1.9}$$

де

$$\begin{gathered}
\eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3, \qquad \eta_1 = o(||\Delta x(t_1)||), \\
\eta_2 = -\int\limits_{t_0}^{t_1} o_1(\|\Delta x(t)\|) dt, \\
\eta_3 = -\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \Delta_{\bar{u}} H^T(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial x}\Delta x(t) dt.
\end{gathered} \tag{11.1.10}$$

Система диференціальних рівнянь (11.1.8) називається ***спряженою до початкової системи*** $\dot{x} = f(x, u, t)$, а вектор $\psi(t)$ – ***імпульсом*** або ***вектором спряжених змінних***.

11.2 Голкові варіації

Введемо поняття голкової варіації керування:

$$\Delta u(t) = \begin{cases} v - u(t), & t \in [\theta, \theta + \varepsilon]; \\ 0, & t \notin [\theta, \theta + \varepsilon], \end{cases} \tag{11.2.1}$$

де v – елемент множини U, θ – точка проміжку $[t_0, t_1)$, $\varepsilon > 0$ – достатньо мале число таке, що $\theta + \varepsilon < t_1$. Цю варіацію називають голковою.

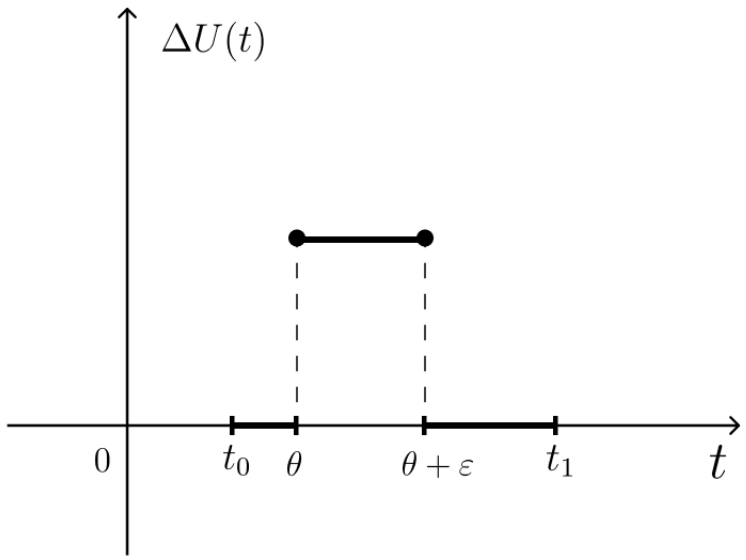


Рис. 11.2.1

У варіаційному численні варіація була малою на великому відрізку, а в оптимальному керуванні вона велика на малому відрізку.
Оцінимо приріст припустимої траєкторії на голковій варіації. Розглянемо три випадки:

1) $t \in [t_0, \theta)$. Рівняння (11.1.7) вказує на те, що на цьому відрізку $\Delta x(t) \equiv 0$, так як воно є розв'язком диференціального рівняння

$$\Delta \dot{x}(t) = f(x(t) + \Delta x(t), u(t), t) - f(x(t), u(t), t)$$

за умови $\Delta x(t_0) = 0$.

2) $t \in [\theta, \theta+\varepsilon)$. На цьому проміжку функція $\Delta x(t)$ є розв'язком рівняння

$$\Delta \dot{x}(t) = f(x(t)+\Delta x(t), v, t) - f(x(t), u(t), t), \quad \Delta x(\theta) = 0.$$

За теоремою про інтегральну неперервність розв'язку диференціального рівняння виконується асимптотичне співвідношення

$$\Delta x(t) \sim \varepsilon, \quad t \in [\theta, \theta+\varepsilon).$$

3) $t \in [\theta+\varepsilon, t_1]$. На цьому проміжку $\Delta x(t)$ задовольняє рівнянню

$$\Delta \dot{x}(t) = f(x(t)+\Delta x(t), u(t), t) - f(x(t), u(t), t), \quad \Delta x(\theta+\varepsilon) \sim \varepsilon.$$

Використовуючи неперервну залежність розв'язку диференціального рівняння від початкових умов, отримаємо, що $\Delta x(t) \sim \varepsilon$, $t \in [\theta+\varepsilon, t_1]$.

11.3 Принцип максимуму Понтрягіна для задачі Майєра

Теорема 11.3.1 Нехай $u^0(t), t \in T$ – оптимальне керування задачі Майєра, $x^0(t), t \in T$ – оптимальна траєкторія, $\psi^0(t), t \in T$ – розв'язок системи

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H(x^0(t), \psi(t), u^0(t), t)}{\partial x}, \quad \psi(t_1) = -\frac{\partial \varphi(x^0(t_1))}{\partial x}.$$

Тоді виконується умова максимуму

$$H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) = \max_{u \in U} H(x^0(t), \psi^0(t), u, t), \quad t \in T.$$

Доведення. Оцінюємо приріст критерію якості на голковій варіації (11.2.1). Використовуючи оцінки пунктів 1), 2), 3) , отримаємо, що доданки залишкового члена η матимуть вигляд

$$\eta_1 = o(\|\Delta x(t_1)\|) = o_1(\varepsilon),$$

$$\eta_2 = -\int_{t_0}^{t_1} o(\|\Delta x(t)\|)dt = o_2(\varepsilon),$$

$$\eta_3 = -\int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} \frac{\partial \Delta_v H^T(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial x} \Delta x(t)dt = o_3(\varepsilon).$$

Розвиваючи у ряд Тейлора перший доданок у (11.1.9), отримаємо

$$\int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} \Delta_v H(x(t), \psi(t), u(t), t)\, dt = \varepsilon \Delta_v H(x(\theta), \psi(\theta), u(\theta), \theta) + \widetilde{o}(\varepsilon)$$

Отже, ми отримаємо, що приріст критерію якості має вигляд

$$\Delta J(u) = -\varepsilon \Delta_v H\left(x(\theta), \psi(\theta), u(\theta), \theta\right) + \widetilde{o}(\varepsilon) \tag{11.3.1}$$

Нехай $u(t), t \in T$ – оптимальне керування. Тоді при достатньо малих ε і таких, що $\theta + \varepsilon < t_1$ на голковій варіації (11.2.1) виконується нерівність $\Delta J(u) \geq 0$. Враховуючи (11.3.1), нерівність $\Delta J(u) \geq 0$ буде виконуватись, якщо

$$\Delta_v H(x(\theta), \psi(\theta), u(\theta), \theta) \leq 0. \tag{11.3.2}$$

Якщо припустити, що

$$\Delta_v H(x(\theta), \psi(\theta), u(\theta), \theta) = \alpha > 0,$$

то з (11.3.1) отримаємо

$$\Delta J = \varepsilon \left[-\alpha + \frac{\widetilde{o}(\varepsilon)}{\varepsilon} \right] < 0,$$

що при $\alpha > 0$ неможливо.
Нерівність (11.3.2) отримана для довільного керування v, $v \in U$ і у кожній точці $t = \theta$, $\theta \in [t_0; t_1)$.
Тоді нерівність (11.3.2) може бути записана у такому вигляді

$$\max_{u \in U} H\left(x^0(t), \psi^0(t), u, t\right) = H\left(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t\right), \quad t \in T. \tag{11.3.3}$$

Теорему доведено. ☑

О з н а ч е н н я 11.3.1 Припустиме керування $u(t), t \in T$ задовольняє умові максимуму, якщо для нього виконується умова (11.3.3).
Так як принцип максимуму Понтрягіна – це необхідна умова, то керування, що задовольняє умові максимуму, називається ***екстремальним***.

Сформулюємо ***алгоритм знаходження екстремального керування і екстремальної траєкторії***.

1. Складемо функцію Гамільтона $H(x, \psi, u, t) = \psi^T f(x, u, t)$.
2. Екстремальне керування знаходимо з умови максимуму

$$H(x(t), \psi(t), u^0(t), t) = \max_{u \in U} H(x(t), \psi(t), u, t).$$

3. Підставляємо значення екстремального керування у систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u^0, t), & x(t_0) &= x^0, \\ \dot{\psi} &= -\frac{\partial f^T\left(x, u^0(x, \psi, t), t\right)}{\partial x}\psi, & \psi(t_1) &= -\frac{\partial \varphi(x(t_1))}{\partial x}. \end{aligned}$$

Отримали крайову задачу. Якщо вона має розв'язок, то оптимальна траєкторія знаходиться серед розв'язків крайової задачі.

ПРИКЛАД 11.1 Написати крайову задачу принципу максимума для задачі Майєра

$$\min_{|u|\le 2}\left[7x_1^2(4)-15x_2(4)\right], \quad t\in[0,4]$$

$$\dot{x}_1 = 7x_1 + 8x_2^2 - 4u,$$
$$\dot{x}_2 = 8x_1^2 + 3x_2u,$$
$$x_1(0)=3, \quad x_2(0)=9, \quad |u|\le 2.$$

Розв'язання. Складаємо функцію Гамільтона

$$H(x,\psi,u,t) = (7x_1+8x_2^2-4u)\psi_1 + (8x_1^2+3x_2u)\psi_2 =$$
$$= 7x_1\psi_1 + 8x_2^2\psi_1 + 8x_1^2\psi_2 + u(3x_2\psi_2 - 4\psi_1).$$

Екстремальне керування має вигляд

$$u^0(t) = 2\,\mathrm{sign}(3x_2\psi_2 - 4\psi_1).$$

Отримаємо таку крайову задачу

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = 7x_1 + 8x_2^2 - 8\,\mathrm{sign}(3x_2\psi_2 - 4\psi_1),\\
&\dot{x}_2 = 8x_1^2 + 6x_2\,\mathrm{sign}(3x_2\psi_2 - 4\psi_1),\\
&\dot{\psi}_1 = -7\psi_1 - 16x_1\psi_2,\\
&\dot{\psi}_2 = -16x_2\psi_1 - 6\,\mathrm{sign}(3x_2\psi_2 - 4\psi_1)\psi_2,\\
&x_1(0)=3, \quad x_2(0)=9,\\
&\psi_1(4) = -14x_1(4), \quad \psi_2(4)=15.
\end{aligned}$$

Оптимальний розв'язок задачі повинен задовольняти отриманій крайовій задачі. ■

Теорема 11.3.2 Нехай $u^0(t)$, $x^0(t)$, $t\in T$, є оптимальне керування і оптимальна траєкторія в задачі

$$J(u) = \varphi(x(t_1)) \to \min,$$

$$\dot{x} = f(x,u,t), \quad x(t_0)=x_0, \quad t\in T=[t_0,t_1], \quad u(t)\in U,$$
$$g_i(x(t_1)) \le 0 \quad i=\overline{1,m},$$
$$h_k(x(t_1)) = 0 \quad k=\overline{1,l}.$$

Тоді знайдуться числа $\mu_0 \ge 0$, $\mu_i \ge 0$, $i=\overline{1,m}$, v_k, $k=\overline{1,l}$, не усі рівні нулеві, такі, що вздовж $u^0(t)$, $x^0(t)$ і траєкторії $\psi^0(t)$, $t\in T$, спряженої системи

$$\dot{\psi}^0 = -\frac{\partial H(x^0,\psi^0,u^0,t)}{\partial x}$$

виконуются:

1) умова максимуму

$$H(x^0(t),\psi^0(t),u^0(t),t)=\max_{u\in U}H\left(x^0(t),\psi^0(t),u,t\right)\quad t\in T;$$

2) умова трансверсальності

$$\psi^0(t_1)=-\mu_0\frac{\partial\varphi(x^0(t_1))}{\partial x}-\sum_{i=1}^m\mu_i\frac{\partial g_i(x^0(t_1))}{\partial x}-\sum_{k=1}^l v_k\frac{\partial h_k(x^0(t_1))}{\partial x}.$$

Розглянемо задачу оптимального керування з рухомим лівим кінцем, у якій замість умови $x(t_0)=x_0$ розглядаються наступні умови

$$g_i(x(t_0))\le 0,\quad i=\overline{1,m},$$

$$h_k(x(t_0))=0,\quad k=\overline{1,l}.$$

Т е о р е м а 11.3.3 Нехай $u^0(t)$, $x^0(t)$, $t\in T$– оптимальне керування і оптимальна траєкторія в задачі

$$J(u)=\varphi(x(t_1))\to\min,$$

$$\dot x=f(x,u,t),\quad t\in T=[t_0,t_1],\quad u(t)\in U,$$
$$g_i(x(t_0))\le 0,\quad i=\overline{1,m},$$
$$h_k(x(t_0))=0,\quad k=\overline{1,l}.$$

Тоді знайдуться числа $\mu_i\ge 0$, $i=\overline{1,m}$, v_k, $k=\overline{1,l}$, не усі рівні нулеві, такі, що вздовж $u^0(t)$, $x^0(t)$ і траєкторії $\psi^0(t)$, $t\in T$, спряженої системи

$$\dot\psi^0=-\frac{\partial H(x^0(t),\psi^0(t),u^0(t),t)}{\partial x},\qquad \psi^0(t_1)=-\frac{\partial\varphi(x(t_1))}{\partial x}$$

виконуются:

1) умова максимуму

$$H(x^0(t),\psi^0(t),u^0(t),t)=\max_{u\in U}H(x^0(t),\psi^0(t),u,t),\quad t\in T;$$

2) умова трансверсальності

$$\psi^0(t_0)=\sum_{i=1}^m\mu_i\frac{\partial g_i(x^0(t_0))}{\partial x}+\sum_{k=1}^l v_k\frac{\partial h_k(x^0(t_0))}{\partial x}.$$

Розглянемо випадок, коли момент t_1 нефіксований.

Теорема 11.3.4 Нехай t_1^0, $u^0(t)$, $x^0(t)$, $t \in [t_0, t_1^0]$, є оптимальними відповідно моментом часу, керуванням і траєкторією в задачі

$$J(u, t_1) = \varphi(x(t_1), t_1) \to \min_{u, t_1},$$

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0,$$

$$g(x(t_1), t_1) \leq 0, \quad u \in U.$$

Тоді знайдуться числа $\mu_0 \geq 0$, $\mu \geq 0$, не всі рівні нулеві, такі, що вздовж $u^0(t)$, $x^0(t)$ і траєкторії $\psi^0(t)$, $t \in [t_0, t_1^0]$, спряженого рівняння

$$\dot{\psi}^0 = -\frac{\partial H(x^0, \psi^0, u^0, t)}{\partial x}$$

виконуються:

1) умова максимуму

$$H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) = \max_{u \in U} H(x^0(t), \psi^0(t), u, t);$$

2) умова трансверсальності

$$\psi^0(t_1^0) = -\mu_0 \frac{\partial \varphi(x^0(t_1^0), t_1^0)}{\partial x} - \mu \frac{\partial g(x^0(t_1^0), t_1^0)}{\partial x};$$

3) у оптимальний момент часу t_1^0 співвідношення

$$H\left(x^0(t_1^0), \psi^0(t_1^0), u^0(t_1^0), t_1^0\right) = -\mu_0 \frac{\partial \varphi(x^0(t_1^0), t_1^0)}{\partial t} - \mu \frac{\partial g(x^0(t_1^0), t_1^0)}{\partial t}.$$

11.4 Задачі оптимального керування типу Лагранжа і Больца

11.4.1 Задача оптимальної швидкодії із закріпленими кінцями

Розглянемо дуже поширену задачу на швидкодію.

Теорема 11.4.1 Для того, щоб приспустиме керування $u^0(t)$, $t \geq t_0$ було розв'язком задачі на швидкодію

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x^0, \quad x(t_1) = x^1,$$

$$u \in U, \quad t_1 - t_0 \to \min$$

необхідно, щоб виконувались:

1) умова максимуму

$$H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) = \max_{u \in U} H(x^0(t), \psi^0(t), u, t), \quad t \in [t_0, t_1^0]$$

для деякого нетривіального розв'язку $\psi^0(t)$ системи

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H(x^0, \psi, u^0, t)}{\partial x};$$

2) умова для оптимального моменту часу

$$H\left(x^0(t_1^0), \psi^0(t_1^0), u^0(t_1^0 - 0), t_1^0\right) \geq 0.$$

11.4.2 Задача Лагранжа

Нехай рух об'єкта описується рівнянням

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in T = [t_0, t_1].$$

Серед припустимих керувань знайдемо оптимальне $u^0(t), t \in T$, яке дає мінімум критерію якості

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} L(x, u, t)\, dt.$$

Теорема 11.4.2 Для оптимальності керування $u^0(t), t \in T$, у задачі Лагранжа необхідно, щоб вздовж розв'язків $x^0(t), \psi^0(t)$ систем

$$\dot{x} = \frac{\partial H(x, \psi, u^0, t)}{\partial \psi}, \quad x(t_0) = x_0,$$

$$\dot{\psi} = \frac{\partial H(x^0, \psi, u^0, t)}{\partial x}, \quad \psi(t_1) = 0,$$

де $H(x, \psi, u, t) = \psi f(x, u, t) - L(x, u, t)$, виконувалась умова максимуму

$$H\left(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t\right) = \max_{u \in U} H\left(x^0(t), \psi^0(t), u, t\right), \quad t \in T.$$

11.4.3 Задача Больца

Рух об'єкта описується рівнянням

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in T = [t_0, t_1].$$

Серед припустимих керувань знайти оптимальне $u^0(t), t \in T$, яке дає мінімум критерію якості

$$J(u) = \varphi(x(t_1)) + \int\limits_{t_0}^{t_1} L(x,u,t)\,dt.$$

Теорема 11.4.3 Нехай $u^0(t), t \in T$ – розв'язок задачі типу Больца з рухомим правим кінцем

$$\dot{x} = f(x,u,t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in T = [t_0, t_1],$$

$$u \in U, \quad g(x(t_1)) \leq 0,$$

$$J(u) = \varphi(x(t_1)) + \int\limits_{t_0}^{t_1} L(x,u,t)\,dt \to \min.$$

Тоді знайдуться числа $\mu_0 \geq 0$, $\mu_1 \geq 0$, що одночасно не дорівнюють нулеві, такі, що виконується:

1) умова максимуму

$$H\left(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t\right) = \max_{u \in U} H\left(x^0(t), \psi^0(t), u, t\right), \quad t \in T;$$

2) умова трансверсальності

$$\psi^0(t_1) = -\mu_0 \frac{\partial \varphi(x^0(t_1))}{\partial x} - \mu_1 \frac{\partial g(x^0(t_1))}{\partial x},$$

де $x^0(t), t \in T$ – оптимальна траєкторія, $\psi^0(t), t \in T$ – розв'язок спряженої системи рівнянь

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H(x^0, \psi, u^0, t)}{\partial x},$$

де $H(x,\psi,u,t) = \psi^T f(x,u,t) + \mu_0 L(x,u,t)$.

Розглянемо ще одну теорему для випадку з нефіксованим часом.

Теорема 11.4.4 Нехай t_1^0, $u^0(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ – розв'язок задачі

$$\dot{x} = f(x,u,t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0,$$

$$u(t) \in U, \quad g(x(t_1), t_1) = 0,$$

$$J(u,t_1) = \varphi(x(t_1),t_1) + \int\limits_{t_0}^{t_1} L(x,u,t)dt \to \min .$$

Тоді знайдуться числа $\mu_0 \geq 0$, μ_1, не рівні одночасно нулеві, такі, що виконуються:

1) умова максимуму

$$H\left(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t\right) = \max_{u \in U} H\left(x^0(t), \psi^0(t), u, t\right), \quad t \in [t_0, t_1^0];$$

2) умова трансверсальності

$$\psi^0(t_1^0) = -\mu_0 \frac{\partial\varphi(x^0(t_1^0),t_1^0)}{\partial x} - \mu_1 \frac{\partial g(x^0(t_1^0),t_1^0)}{\partial x};$$

3) умова на кінцевий момент часу t_1^0

$$H\left(x^0(t_1^0), \psi^0(t_1^0), u^0(t_1^0 - 0), t_1^0\right) = \mu_0 \frac{\partial\varphi(x^0(t_1^0),t_1^0)}{\partial t} + \mu_1 \frac{\partial g(x^0(t_1^0),t_1^0)}{\partial t},$$

де $H(x,\psi,u,t) = \psi^T f(x,u,t) + \mu_0 L(x,u,t)$.

11.5 Таблиця різних постановок задач

Усі розглянуті необхідні умови мінімуму у різних задачах оптимального керування і деякі додаткові випадки зібрані у таблиці нижче. Зробимо деякі пояснення. Будемо вважати, що функціонал $J(u)$ має вигляд

$$J(u) = \varphi(x(t_1),t_1) + \int\limits_{t_0}^{t_1} L(x(t),u(t),t)\, dt.$$

Вважається, що t_0 і $x_0 = x(t_0)$ – початковий час і стан відповідно, явні посилання на ці величини у таблиці опущені. Зірочка $*$ використовується для позначення оптимальних величин. Також у таблиці використані наступні поняття і позначення:

1) аргумент t часто опускається, наприклад, замість $x^*(t)$ пишимо x^*, замість $\psi^*(t)$ – ψ^*;
2) функціонал $J(u)$ для конкретних задач виражається через конкретні φ і L;
3) знаком $|_*$ позначено величини, які повинні розраховуватись вздовж оптимальних траекторій. Наприклад, $\left.\dfrac{\partial H}{\partial x}\right|_*$ – це градієнт гамільтоніана H, розрахований при $[x^*(t), p^*(t), u^*(t), t]$.

4) знаком $|_{*t_1}$ позначені величини, які повинні обчислюватися у кінцевий момент часу для оптимальних значень змінних. Наприклад, $\left.\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_{*t_1}$ – градієнт φ по x при $[x^*(t_1), t_1]$.
5) H^* – гамільтоніан, розрахований вздовж оптимальної траєкторії. Позначення $H^*(t)$ використовується з метою підкреслити, що нас цікавить поведінка гамільтоніана вздовж оптимальної траєкторії в залежності від часу.

№ з/п	ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ					НЕОБХІДНІ УМОВИ			
	Система	**Функціонал**	**Час**	**Область кінцевих положень**	**Гамільтоніан**	**1**	**2**	**3**	**4**
1	$x' = f(x,u)$	$L = L(x,u)$ $\varphi = 0$	t_1 не задано	x_1	$H = H(x,\psi,u) = -L(x,u) + (\psi, f(x,u))$	$\dot{x}^* = \left.\frac{\partial H}{\partial \psi}\right\|_{*}$, $\dot{\psi}^* = -\left.\frac{\partial H}{\partial x}\right\|_{*}$	$H(x^*,\psi^*,u^*) = \max\limits_{u\in U} H(x^*,\psi^*,u)$	$H^*(t) = H^*(t_1) = 0$	$\psi^*(t_1)$ умов немає
2				$S: g_i(t) = 0$ $i = \overline{1, n-k}$					$\psi^*(t_1) = -\sum\limits_{i=1}^{n-k} \alpha_i \left.\frac{\partial g_i}{\partial x}\right\|_{x^*(t_1)}$
3		$L = L(x,u)$ $\varphi = \varphi(x)$		$\mathbb{R}^n$					$\psi^*(t_1) = -\left.\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right\|_{x^*(t_1)}$
4		$L = L(x,u)$ $\varphi = 0$	t_1 фіксовано	x_1				$H^*(t) = H^*(t_1) = C$	$\psi^*(t_1)$ умов немає
5		$L = L(x,u)$ $\varphi = \varphi(x)$		$S: g_i(t) = 0$ $i = \overline{1, n-k}$					$\psi^*(t_1) = -\sum\limits_{i=1}^{n-k} \alpha_i \left.\frac{\partial g_i}{\partial x}\right\|_{x^*(t_1)} - \left.\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right\|_{x^*(t_1)}$

№ з/п	ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ					НЕОБХІДНІ УМОВИ			
	Система	Функціонал	Час	Область кінцевих положень	Гамільтоніан	1	2	3	4
6	$x' = f(x,u,t)$	$L = L(x,u,t)$ $\varphi = 0$	t_1 не задано	x_1	$H = H(x,\psi,u,t) = -L(x,u,t) + (\psi, f(x,u,t))$	$\dot{x}^* = \frac{\partial H}{\partial \psi}\Big\vert_*$, $\dot{\psi}^* = -\frac{\partial H}{\partial x}\Big\vert_*$	$H(x^*,\psi^*,u^*,t) = \max_{u\in U} H(x^*,\psi^*,u,t)$	$H^*(t) = -\int_t^{t_1} \frac{\partial H}{\partial t}\Big\vert_* d\tau$	$\psi^*(t_1)$ умов не має
7				$g(t)$				$H^*(t) = \left(\psi^*(t_1), -\frac{d\psi}{dt}\Big\vert_{*t_1}\right) - \int_t^{t_1} \frac{\partial H}{\partial t}\Big\vert_* d\tau$ $H^*(t_1) = -\left(\psi^*(t_1), -\frac{dg}{dt}\Big\vert_{*t_1}\right)$	
8		$L = L(x,u,t)$ $\varphi = \varphi(x,t)$		$S: g_i(x,t) = 0$ $i = \overline{1, n-k}$				$H^*(t) = H^*(t_1) - \int_t^{t_1} \left[\frac{\partial H}{\partial t}\Big\vert_* + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\Big\vert_*\right] d\tau$ $H^*(t_1) = \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i \frac{\partial g_i}{\partial x}\Big\vert_{*t_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial t}\Big\vert_{*t_1}$	$\psi^*(t_1) = -\sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i \frac{\partial g_i}{\partial x}\Big\vert_{*t_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big\vert_{*t_1}$
9	$x' = f(x,u,t)$	$L = L(x,u,t)$ $\varphi = \varphi(x,t)$	t_1 не задано	$\mathbb{R}^n$	$H = H(x,\psi,u,t) = -L(x,u,t) + (\psi, f(x,u,t))$	$\dot{x}^* = \frac{\partial H}{\partial \psi}\Big\vert_*$, $\dot{\psi}^* = -\frac{\partial H}{\partial x}\Big\vert_*$	$H(x^*,\psi^*,u^*,t) = \max_{u\in U} H(x^*,\psi^*,u,t)$	$H^*(t) = H^*(t_1) - \int_t^{t_1} \left[\frac{\partial H}{\partial t}\Big\vert_* + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\Big\vert_*\right] d\tau$ $H^*(t_1) = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}\Big\vert_{*t_1}$	$\psi^*(t_1) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big\vert_{*t_1}$
10		$L = L(x,u,t)$ $\varphi = 0$	t_1 фіксоване	x _1				$H^*(t) = H^*(t_1) = -\int_t^{t_1} \frac{\partial H}{\partial t}\Big\vert_* d\tau$	$\psi^*(t_1)$ умови відсутні
11				$S: g_i(t) = 0$ $i = \overline{1, n-k}$					$\psi^*(t_1) = \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i \frac{\partial g_i}{\partial x}\Big\vert_{x^*(t_1)}$ тобто $\psi^*\vert_{t_1}$ нормальний до S при $x^*(t_1)$
12		$L = L(x,u,t)$ $\varphi = \varphi(x)$		$\mathbb{R}^n$					$\psi^*(t_1) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big\vert_{x^*(t_1)}$

11.6 Питання для самопідготовки

1. Написати диференціальне рівняння для функції $\psi(t)$.
2. Дати визначення голкової варіації керування.
3. Сформулювати умову максимуму.
4. Написати алгоритм знаходження екстремального керування і екстремальної траєкторії.
5. Сформулювати принцип максимуму Понтрягіна для задачі Майєра для фіксовоного і нефіксовоного часів.
6. Уміти користуватися таблицею необхідних умов оптимальності для різних постановок задач оптимального керування.

11.7 Завдання для самостійної роботи

Написати крайову задачу принципа максимуму для задачі Майєра

$$\min\left[ix_1^2(4) - 7x_2^3(4)\right], \quad t \in [0,4]$$

$$\dot{x}_1 = 2i\sin x_1 - 4jx_2^3 + 4u_1,$$
$$\dot{x}_2 = -ix_1 + 7jx_2u_2,$$
$$x_1(0) = 4i, \quad x_2(0) = i + j,$$
$$|u_1| \leq 3i + j, \quad |u_2| \leq i.$$

В кожному завданні: i–номер ПІБ студента у списку групи, j– номер групи.

12 Оптимізація лінійних систем

12.1 Теорема про достатність принципу максимуму

Розглянемо лінійну автономну систему

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

де матриці A і B вважаються заданими числовими матрицями.

Означення 12.1.1 Автономний лінійний процес керування

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

називається ***керованим***, якщо для довільної пари точок x^0 і $x^1 \in \mathbb{R}^n$ існує припустиме крування $u(t)$ на деякому скінченому інтервалі $0 \leq t \leq t_1$ таке, що відповідна траєкторія $x(t)$ переводить систему з точки $x(0) = x^0$ у точку $x(t_1) = x^1$ за скінчений час.

Зазначимо, що якщо розглядати проміжок часу $[t_0, t_1]$, $t_0 \neq 0$, то для нашої системи завжди можна зробити заміну часу так, що t_0 перейде у нуль.
Розглянемо критерій керованості для лінійних автономних систем.

Теорема 12.1.1 Лінійний автономний процес

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

де A - матриця виміру $n \times n$, B - матриця виміру $n \times r$, є керованим тоді і тільки тоді, коли ранг $n \times nr$ матриці

$$\left[B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B\right]_{n \times nr}$$

дорівнює n.

ПРИКЛАД 12.1 Визначити, чи є лінійний автономний процес

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = u$$

керованим.

Розв'язання. У даній системі

$$A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{2\times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді матриця $[B, AB]_{2\times 2}$ матиме наступний вигляд

$$[B, AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг цієї матриці дорівнює 2 і $n = 2$. Отже, процес керований. ■

ПРИКЛАД 12.2 Визначити чи є керованою система

$$\dot{x} = 2x_1 + 4x_2 + 8u_1,$$

$$\dot{x_2} = -x_1 + 4u_2.$$

Розв'язання. Маємо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Утворюємо матрицю

$$[B, AB] = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 16 & 16 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг цієї матриці дорівнює 2, а це означає, що система керована. ■

Випишемо цікаву властивість керованих систем:

$$\psi^T(t)B \not\equiv 0 \text{ при } t \geq 0 \quad \text{якщо} \quad \psi(t) \not\equiv 0.$$

Далі розглянемо питання про достатню умову оптимальності для задачі на швидкодію з лінійною автономною системою. Отже, розглянемо задачу на швидкодію для лінійної автономної системи

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

$$x(0) = x^0, \quad x(t_1) = 0, \tag{12.1.1}$$

$$u(t) \in U, \quad t_1 \longrightarrow \min,$$

де A – матриця виміру $n \times n$, B – матриця виміру $n \times r$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in U \subset \mathbb{R}^r$, $0 \in \text{int}\, U$.

Складемо функцію Гамільтона

$$H(x,\psi,u,t)=\psi^T Ax+\psi^T Bu.$$

Будуємо спряжену систему

$$\dot{\psi}=-A^T\psi. \tag{12.1.2}$$

Згідно з принципом максимуму Понтрягіна знайдеться такий ненулевий розв'язок $\psi^0(t)$ системи (12.1.2), що

$$\psi_0^T Bu^0(t)=\max_{u\in U}\left(\psi^0\right)^T Bu.$$

Доведемо, що принцип максимуму для лінійних автономних керованих систем є не лише необхідною, але й достатньою умовою оптимальності. Отже має місце наступна теорема.

Теорема 12.1.2 Нехай $u(t),t\in T$ – припустиме керування, вздовж якого виконується умова максимуму

$$\psi^T(t)Bu(t)=\max_{u\in U}\psi(t)Bu,\quad t\in T,$$

де $x(t),t\in[0,t_1]$ – розв'язок системи (12.1.1), що відповідає керуванню $u(t)$ і задовольняє умові $x(t_1)=0,$ $\psi(t),t\in[0,t_1]$ – деякий ненульовий розв'язок системи (12.1.2).
Тоді $u(t),t\in T$ – оптимальне керування, що переводить траєкторію $x(t)$ з точки x^0 у початок координат за мінімальний час.

Доведення. Розглянемо тотожність

$$\frac{d}{dt}\left[\psi^T(t)x(t)\right]=\dot{\psi}^T(t)x(t)+\psi^T(t)\dot{x}(t)=$$

$$=-\psi^T(t)Ax(t)+\psi^T(t)Ax(t)+\psi^T(t)Bu=\psi^T(t)Bu,$$

що виконується у всіх точках неперервності керування $u(t),t\in T$. Зрозуміло, що

$$\psi^T(t)x(t)-\psi^T(s)x(s)=\int\limits_s^t\psi^T(\tau)Bu(\tau)\,d\tau \tag{12.1.3}$$

для всіх $t\geq s\geq 0$.
Приймемо супротивне, тобто, керування $u(t),t\in[0,t_1]$ не є оптимальним, тобто існує припустиме керування $\bar{u}(t),\ t\in[0,\theta]$, яке переводить траєкторію $\bar{x}(t)$

системи (12.1.1) з точки x^0 в початок координат за час θ, що менший за t_1, $\theta < t_1$.
Використовуючи (12.1.3) отримаємо

$$\psi^T(\theta)x(\theta) = \left[\psi^T(\theta)x(\theta) - \psi^T(0)x(0)\right] - \left[\psi^T(\theta)\,\overline{x}(\theta) - \psi^T(0)\,\overline{x}(0)\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{пам'ятаємо, що} \\ \overline{x}(\theta) = 0, \\ x(0) = \overline{x}(0) = x^0 \end{bmatrix} = \int\limits_0^\theta \left[\psi^T(\tau)Bu(\tau) - \psi^T(\tau)B\,\overline{u}(\tau)\right]\,d\tau. \qquad (12.1.4)$$

А так як $u(t), t \in [0, t_1]$ задовольняє принципу максимуму, то підінтегральний вираз у (12.1.4) невід'ємний, і тоді

$$\psi^T(\theta)x(\theta) \geq 0. \qquad (12.1.5)$$

Керування $u(t)$ дає максимум виразові $\psi^T(t)Bu(t)$ з (12.1.4) цей максимум не може дорівнювати нулеві. Якби він дорівнював нулеві, то нульове значення досягалося б і у точці $u(t) = 0$. А так як $0 \in intU$, тобто внутрішня точка множини U, то необхідна умова максимуму стверджує, що

$$\frac{\partial(\psi^T(t)Bu(t))}{\partial u} = 0.$$

Але

$$\frac{\partial(\psi^T(t)Bu(t))}{\partial u} = \psi^T(t)B,$$

а $\psi^T(t)B$ не може дорівнювати нулеві, тому що система керована, а за властивістю керованих систем $\psi^T(t)B \neq 0$. Тоді $\max \psi^T(t)Bu(t)$ не дорівнює нулеві, а є більше нуля, отже $\max \psi^T(t)Bu(t) > 0$. Отримаємо

$$\psi^T(\theta)x(\theta) = \psi^T(\theta)x(\theta) - \psi^T(t_1)x(t_1) = -\int\limits_\theta^{t_1} \psi^T(\tau)Bu(\tau)\,d\tau < 0.$$

Отримана нерівність суперечить нерівності (12.1.5). А це означає, що припущення про те, що керування $u(t)$ не оптимальне є хибним. Теорему доведено. ☑

12.2 Синтез лінійних систем, оптимальних по швидкодії

Доведена вище теорема доволяє здійснити синтез оптимальних систем, тобто побудувати оптимальне керування як функцію фазових координат, тобто $u = u(x)$. Зазначимо, що раніше вважали, що функція u залежить від t. На простому прикладі покажемо, як будується синтез.

ПРИКЛАД 12.3 Розглянемо задачу переводу системи

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned} \tag{12.2.1}$$

з довільної точки x^0 у точку $x^1 = (2,3)^T$ за мінімальний час при умові, що керування задовольняє умові $|u(t)| \leq 1$.
Розв'язання. Система керована (дивись приклад 12.1), тому принцип максимуму не тільки необхідна умова, але і достатня умова оптимальності.
Складаємо фунцію Гамільтона

$$H(x, \psi, u, t) = \psi_1 x_2 + \psi_2 u.$$

Функції Гамільтона максимум дає припустиме керування

$$u = \operatorname{sign} \psi_2.$$

Функції $\psi_1(t)$ і $\psi_2(t)$ є розв'язками системи

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1(t) = 0, \\ \dot{\psi}_2(t) = \psi_1(t). \end{cases}$$

Отримаємо наступний розв'язок системи

$$\psi_1(t) = c_1, \quad \psi_2(t) = -c_1 t + c_2.$$

Тоді оптимальне керування має вигляд

$$u = \operatorname{sign} \psi_2 = \operatorname{sign}(-c_1 t + c_2).$$

Оптимальне керування приймає два значення

$$u^0(t) = +1 \quad \text{або} \quad u^0(t) = -1.$$

Якщо $u^0(t) = +1$, то з системи рівнянь (12.2.1) отримаємо таке рівняння

$$\frac{dx_1}{dx_2} = x_2.$$

Інтегрування його дає

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + \alpha_1.$$

При керуванні $u^0(t) = +1$ рух точок системи проходить по параболі знизу вгору оскільки $\dot{x}_2 = 1 > 0$.
Тепер інтегруємо систему при $u^0(t) = -1$ і отримаємо наступну сукупність траєкторій

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2 + \alpha_2.$$

По отриманій сукупностей парабол рух проходить вже зверху вниз оскільки $\dot{x}_2 = -1 < 0$.

У кожній із сукупностей траєкторій є лише одна траєкторія, що проходить через точку $x^1 = (2, 3)^T$. Нас буде цікавити тількі та частина траєкторій, що входить у точку $(2, 3)^T$. Ці частини траєкторії позначимо через l_1 і l_{-1} (див. рис. 12.2.1 (a)).

Якщо початкова точка x^0 знаходиться на l_1 або l_{-1}, то, обираючи керування $+1$ або -1 будемо рухатись у точку $x^1 = (2, 3)^T$ за мінімальний час. Крива $l_1 x^1 l_{-1}$ називається ***лінією перемикання***. Якщо початкова точка x^0 знаходиться справа від лінії $l_{-1} x^1 l_1$, то обираємо керування (-1) і рухаємося до лінії l_1. На ній керування перемикаємо на $(+1)$ і рухаємося по ній до точки x^1 (див. рис. 12.2.1 (b)).

А якщо початкова точка x^0 знаходиться зліва від лінії перемикання, то

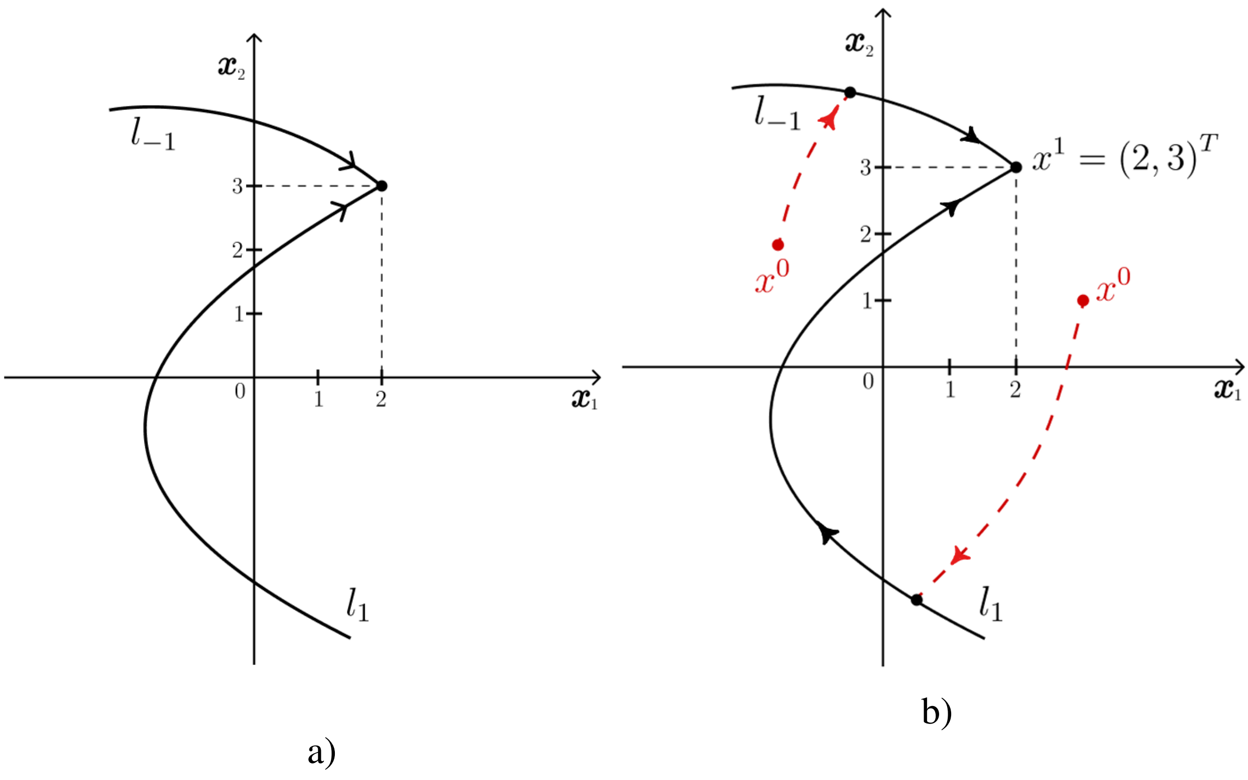


Рис. 12.2.1

обираємо керування $(+1)$ і рухаємося до лінії перемикання l_{-1}, перемикаємо керування на (-1) і по ній рухаємося до точки x^1.

Зрозуміло, що керування обирається у залежності від положення системи, тобто $u^0 = u^0(x)$. ■

12.3 Приклади

ПРИКЛАД 12.4 Нехай задано систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \quad x_1(0) = \alpha_1; \\ \dot{x}_2(t) &= u(t), \quad x_2(0) = \alpha_2. \end{aligned} \tag{12.3.1}$$

Вважаємо, що величина керування $u(t)$ необмежена. Необхідно знайти керування $u(t)$, яке, по перше, переводить систему (12.3.1) з точки (α_1, α_2) у точку $(0, 0)$ за час T, тобто $x_1(T) = 0$, $x_2(T) = 0$, і по друге, мінімізує функціонал

$$E = E(u) = \frac{1}{2} \int\limits_0^T u^2(t) dt, \tag{12.3.2}$$

де T - задано.
Розв'язання. Складаємо функцію Гамільтона

$$H = x_2(t)\psi_1(t) + u(t)\psi_2(t) - \frac{1}{2}u^2(t).$$

Екстремальне керування повинно максимізувати функцію Гамільтона. Для цього знаходимо градієнт функції Гамільтона і прирівнюємо його до нуля. Отже, маємо

$$\frac{\partial H}{\partial u(t)} = \psi_2(t) - u(t).$$

$$\frac{\partial H}{\partial u(t)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_2(t) - u(t) = 0.$$

Звідси керування дорівнює $u(t) = \psi_2(t)$. З'ясуємо знак $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2(t)}$. Знаходимо

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2(t)} = \frac{\partial}{\partial u}(\psi_2(t) - u(t)) = -1 < 0.$$

Це означає, що при $u(t) = \psi_2(t)$ досягається максимум функції Гамільтона. Отже, екстремальним керуванням є керування $u(t) = \psi_2(t), \ t \in [0, T]$.
Спряжені функції $\psi_1(t)$ і $\psi_2(t)$ повинні задовольняти диференціальним рівнянням

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \\ \dot{\psi}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1. \end{aligned} \tag{12.3.3}$$

Нехай $\psi_1(0) = \beta_1$, $\psi_2(0) = \beta_2$. Далі невідомі β_1 і β_2 визначимо через задані значення α_1 і α_2.
Розв'яжемо рівняння (12.3.3) і отримаємо

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= \beta_1, \\ \psi_2(t) &= \beta_2 - \beta_1 t. \end{aligned} \tag{12.3.4}$$

Таким чином, екстремальне керування має вигляд

$$u(t) = -\beta_2 + \beta_1 t, \quad t \in [0, T]. \tag{12.3.5}$$

Отже, оптимальне керування (якщо воно існує) повинно бути лінійною функцією часу. Далі необхідно визначити невідомі параметри β_1 і β_2 через α_1, α_2 і T.
Підкладемо керування (12.3.5) у рівняння системи (12.3.1) і проінтегруємо їх, отримаємо

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \alpha_1 + \alpha_2 t - \frac{1}{2}\beta_2 t^2 + \frac{1}{6}\beta_1 t^3, \\ x_2(t) &= \alpha_2 - \beta_2 t + \frac{1}{2}\beta_1 t^2. \end{aligned} \tag{12.3.6}$$

З системи (12.3.6) і умов $x_1(T) = x_2(T) = 0$ однозначно знаходяться значення β_1 і β_2

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{6}{T^3}(2\alpha_1 + \alpha_2 T), \\ \beta_2 &= \frac{2}{T^2}(3\alpha_1 + 2\alpha_2 T). \end{aligned} \tag{12.3.7}$$

Екстремальне керування виражається формулою

$$u(t) = -\frac{2}{T^2}(3\alpha_1 + 2\alpha_2 T) + \frac{6}{T^3}(2\alpha_1 + \alpha_2 T)t. \tag{12.3.8}$$

Керування (12.3.8) задовольняє необхідним умовам і тому є єдиною функцією від α_1, α_2, T і t. Ми впевнились, що для нашої задачі оптимальне керування існує. Таким чином, оптимальтне керування едине і виражається формулою (12.3.8).
Знайдемо тепер мінімальну енергію E^*, для переводу системи з точки (α_1, α_2) у точку $(0, 0)$. Для цього вираз (12.3.8) для оптимального керування підкладемо у вираз (12.3.2), проінтегруємо і отримаємо

$$E^* = E^*(\alpha_1, \alpha_2, T) = \frac{2}{T^3}\left(3\alpha_1^2 + 3\alpha_1\alpha_2 T + \alpha_2^2 T^2\right). \tag{12.3.9}$$

Для ілюстріції того, що вибір кінцевого часу T є досить критичним, розглянемо різні варіанти. Для прикладу оберемо $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$ і розглянемо графік залежності $E^*(1, -1, T)$ від T (дивись рис.12.3.1).

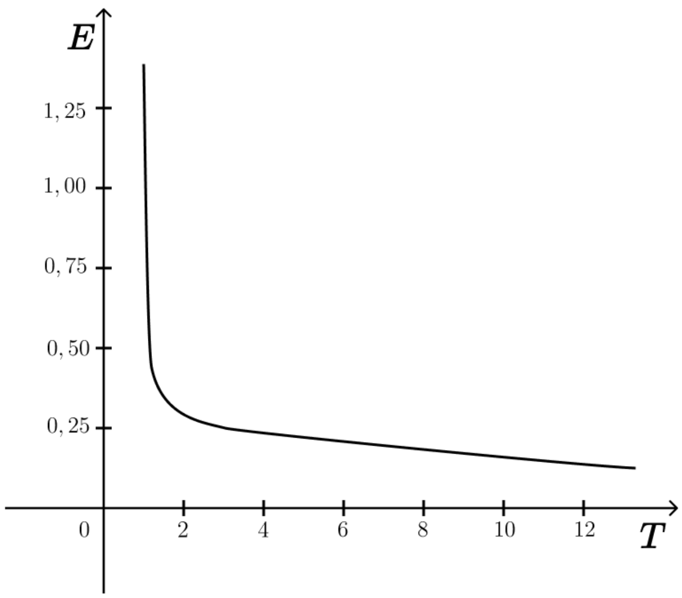


Рис. 12.3.1

При значеннях $T < 2$ енергія досить велика, а потім енергія досягає точки перегину при $T = 3$ і для $T > 3$ мінімальна енергія поступово зменшується. Для T досить великих $E^* \approx 2\alpha_2^2/T$. На рис. 12.3.2 зображені оптимальні траєкторії з початкового стану $(1, -1)^T$ у $(0, 0)^T$. Зі збільшенням T відбуваються значні зміни. На рис. 12.3.2 видно, що приріст енергії між $T = 3$ і $T = 10$ дуже малий, але траєкторії відрізняються дуже суттєво. Це вказує на чутливість оптимальних задач до змін параметрів.

Перевіримо, що мінімальна енергія додатня для усіх $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq 0$. Вираз (12.3.9) можна записати у вигляді склярного добудку

$$E^*(\alpha_1, \alpha_2, T) = \left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad \frac{2}{T^3} \begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{2}T \\ -\frac{3}{2}T & T^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \right).$$

Матриця, що входить у скалярний добудок, додатньо визначена для довільних значень T. Таким чином $E^* \geqslant 0$.
Якщо можливі великі значення T, то керування можна здійснювати за домогою малої кількості енергії. Зрозуміло, що

$$\lim_{T\to\infty} E(\alpha_1, \alpha_2, T) = 0, \tag{12.3.10}$$

$$\lim_{T\to\infty} u(t) = 0, \quad t \in [0, T]. \tag{12.3.11}$$

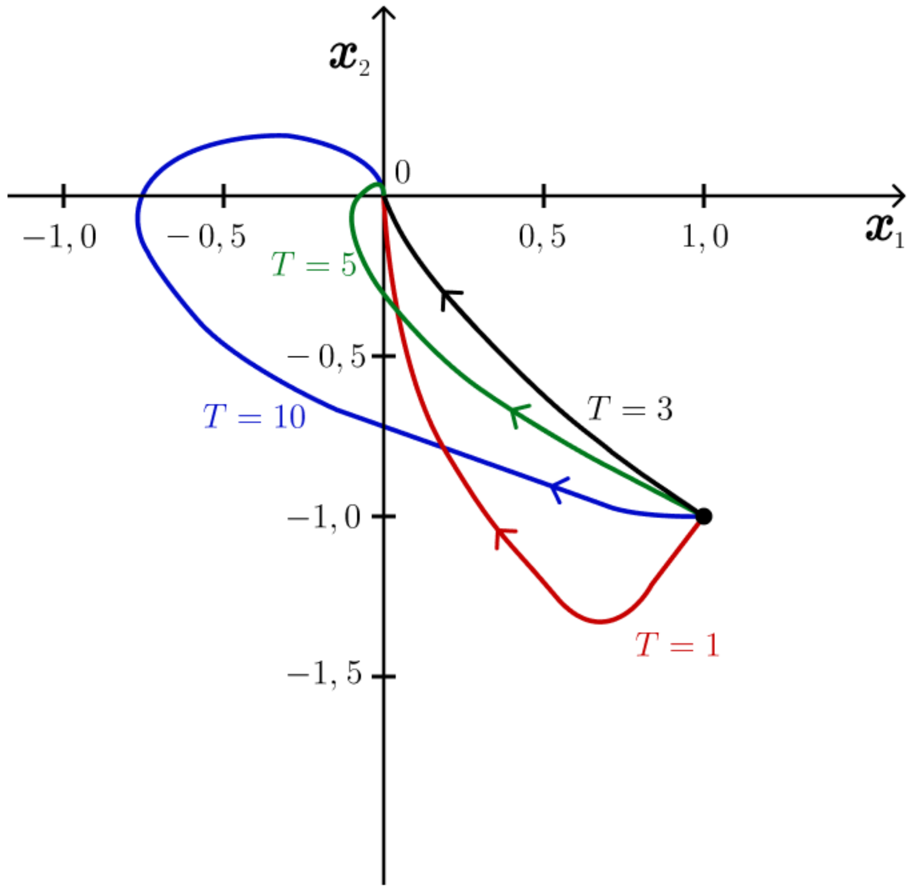


Рис. 12.3.2

На рис. 12.3.1 видно, що крива E^* у залежності від T має точку перегину. Точку перегину знайдемо з умови

$$\frac{\partial E^*(\alpha_1, \alpha_2, T)}{\partial t} = 0.$$

Отримаємо

$$T = -\frac{3\alpha_1}{\alpha_2}. \tag{12.3.12}$$

Якщо сформулювати задачу про мінімум енергії як задачу з незаданим кінцевим часом, то покажемо, що необхідна умова рівності нулеві гамільтоніана у кінцевий момент визначає цю точку перегину.
Функція Гамільтона дорівнює

$$H(x, \psi, u, t) = x_2(t)\psi_1(t) + u(t)\psi_2(t) - \frac{1}{2}u^2(t).$$

Якщо час T незаданий, то

$$H(T) \equiv x_2(T)\psi_1(T) + u(T)\psi_2(T) - \frac{1}{2}u^2(T) = 0.$$

Враховуючи, що $x_2(T) = 0$ і $u(t) = \psi_2(t)$ для $t \in [0, T]$ отримаємо, що

$$u(T) = \psi_2(T) \quad \text{і} \quad \frac{1}{2}u^2(T) = 0.$$

Звідси $u(T) = 0$.
З $u(T) = 0$ і (12.3.5) отримаємо

$$-\beta_2 + \beta_1 T = 0. \tag{12.3.13}$$

З виразів (12.3.13) і (12.3.7) знайдемо, що початкові значення α_1 і α_2 і кінцевий час T повинні задовольняти рівнянню

$$\frac{1}{T^2}(6\alpha_1 + 2\alpha_2 T) = 0. \tag{12.3.14}$$

Рівняння (12.3.13) має два розв'язки

$$T = \infty \tag{12.3.15}$$

та

$$T = -\frac{3\alpha_1}{\alpha_2} \tag{12.3.16}$$

Таким чином, необхідні умови для задачі з незаданим кінцевим часом привели до рівнянь (12.3.15) і (12.3.16). Коли $T = \infty$, то $E^* = 0$. Зазначимо, що (12.3.16) співпадає з (12.3.12) і тому (12.3.16) дає точку перегину, а не мінімуму.
Необхідна умова $H = 0$ відповідає екстремальним точкам, які можуть бути точками мінімуму, максимуму, перегину або сідловими.
Відзначимо, що задача про мінімум енергії з незаданим часом не має оптимального розв'язку.
Причина у тому, що при $T = \infty$ керування $u(t) = 0$ для усіх t і нулеве керування ніколи не переведе систему з точки $(\alpha_1, \alpha_2)^T$ у початок координат.
Система стоїть на місті не витрачаючи енергії.
Задачу можна розв'язати для як завгодно великих T (скінчених) і зробити витрат енергії малим. ■

ПРИКЛАД 12.5 Розглянемо систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \quad x_1(0) = \alpha_1, \\ \dot{x}_2(t) &= u(t), \quad x_2(0) = \alpha_2 \end{aligned} \tag{12.3.17}$$

і функціонал

$$J(u) = kT + \frac{1}{2}\int_0^T u^2(t)dt = \int_0^T \left[k + \frac{1}{2}u^2(t)\right]dt, \tag{12.3.18}$$

де T не задано і $k > 0$. Знайти керування, що переводить систему (12.3.17) з початкового стану $(\alpha_1, \alpha_2)^T$ в початок координат $(0,0)^T$ і мінімізує функціонал (12.3.18).

Розв'язання. Маємо задачу з закріпленим кінцем і незаданим часом. Функціонал $J(u)$ є лінійною комбінацією часу і використаної енергії.

Цю задачу можна розв'язати двома способами. Один спосіб – це використати необхідні умови. Другий метод полягає в тому, щоб вважати час закріпленим і побудувати графік залежності $J(u)$ від кінцевого часу T, а потім знайти скінчений час, для якого $J(u)$ приймає мінімальне значення.

Якщо вважати час T заданим, то член kT у функціоналі $J(u)$ є постійною величиною і тому мінімізація функціонала з фіксованим часом еквівалентна мінімізації ерегії $\frac{1}{2}\int_0^T u^2(t)dt$. Тому керування, що визначається формулою (12.3.2) залишиться оптимальним і мінімальне значення функціонала дорівнює

$$J(\alpha_1, \alpha_2, T) = kT + \frac{2}{T^3}(3\alpha_1^2 + 3\alpha_1\alpha_2 T + \alpha_2^2 T^2). \tag{12.3.19}$$

Очевидно, що $J(u)$ є функцією кінцевого часу T. Знайдемо T, для якого функціонал приймає мінімальне значення. Знайдемо екстремальні точки $J(\alpha_1, \alpha_2, T)$ з умови

$$\frac{\partial J(\alpha_1, \alpha_2, T)}{\partial T} = 0. \tag{12.3.20}$$

Отримаємо

$$\frac{2}{\beta^2} - \frac{18\alpha_1^2}{T^4} - \frac{12\alpha_1\alpha_2}{T^3} - \frac{2\alpha_2^2}{T^2} = 0 \tag{12.3.21}$$

або

$$T^4 - \beta^2\left(\alpha_2^2 T^2 + 6\alpha_1\alpha_2 T + 9\alpha_1^2\right) = 0. \tag{12.3.22}$$

Враховуючи те, що у дужках повний квадрат, знайдемо чотири корні цього рівняння

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{2}\left(\beta\alpha_2 + \sqrt{\beta^2\alpha_2^2 + 12\beta\alpha_1}\right),\\
T_2 &= \frac{1}{2}\left(\beta\alpha_2 - \sqrt{\beta^2\alpha_2^2 + 12\beta\alpha_1}\right),\\
T_3 &= \frac{1}{2}\left(-\beta\alpha_2 + \sqrt{\beta^2\alpha_2^2 - 12\beta\alpha_1}\right),\\
T_4 &= \frac{1}{2}\left(-\beta\alpha_2 - \sqrt{\beta^2\alpha_2^2 - 12\beta\alpha_1}\right).
\end{aligned} \tag{12.3.23}$$

Виділимо тепер додатні скінчені часи, що відповідають локальним мінімумам $J(\alpha_1, \alpha_2, T)$. Умови

$$\frac{\partial^2 J(\alpha_1, \alpha_2, T)}{\partial T^2} \geq 0$$

і

$$T > 0$$

можна використовувати для доведення, що скінчений час $T_i (i = \overline{1, 4})$ відповідає локальному мінімуму тільки у тому випадку, якщо

$$0 < T_i < -\frac{3\alpha_1}{\alpha_2}$$

або

$$T_i > -\frac{6\alpha_1}{\alpha_2}.$$

Якщо T_i задовольняють нерівності

$$0 < -\frac{3\alpha_1}{\alpha_2} < T_i < -\frac{6\alpha_1}{\alpha_2},$$

то цей час відповідає локальному максимуму.
Тепер використаємо другий підхід, тобто, скористаємося необхідними умовами і отримаємо результат (12.3.23). Гамільтоніан для даної задачі дорівнює

$$H = -\frac{2}{\beta^2} - \frac{1}{2}u^2(t) + x_2(t)\psi_1(t) + u(t)\psi_2(t),$$

керування, що мінімізує гамільтоніан, дорівнює

$$u(t) = \psi_2(t).$$

Рівняння (12.3.3)–(12.3.8) залишаються тими ж самими. Дана задача з незаданим часом, то необхідна умова $H(T) = 0$ приймає вигляд

$$-\frac{2}{\beta^2} - \frac{1}{2}u^2(T) + x_2(T)\psi_1(T) + u(T)\psi_2(T) = 0,$$

так як $x_2(T) = 0$ і $u(T) = \psi_2(T)$, то отримаємо

$$u(T) = \pm\frac{2}{\beta}.$$

Співвідношення (12.3.8) і (12.3.19) дають

$$T^2 = \pm(\beta\alpha_2 T + 3\beta\alpha_1)$$

$$T^2 = \mp\beta\alpha_2 T \mp 3\beta\alpha_1 = 0.$$

Розв'яжемо це рівняння і отримаємо такі корені

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{2}\left(\beta\alpha_2 + \sqrt{\beta^2\alpha_2^2 + 12\beta\alpha_1}\right), \\
T_2 &= \frac{1}{2}\left(\beta\alpha_2 - \sqrt{\beta^2\alpha_2^2 + 12\beta\alpha_1}\right), \\
T_3 &= \frac{1}{2}\left(-\beta\alpha_2 + \sqrt{\beta^2\alpha_2^2 - 12\beta\alpha_1}\right), \\
T_4 &= \frac{1}{2}\left(-\beta\alpha_2 - \sqrt{\beta^2\alpha_2^2 - 12\beta\alpha_1}\right).
\end{aligned} \tag{12.3.24}$$

Корені (12.3.23) співпадають з (12.3.24) .
Далі будемо шукати оптимальний розв'язок, тобто, які з T_1, T_2, T_3, T_4 дійсні, додатні і відповідають локальному мінімуму $J(\alpha_1, \alpha_2, T)$.
Після алгебраічних перетворень можна прийти до таких висновків:
1) якщо

$$\alpha_2 \geq 0 \quad i \quad \alpha_1 \geq 0$$

або

$$\alpha_2 < 0 \quad i \quad \alpha_1 \geq \frac{\beta\alpha_2^2}{12},$$

то мінімуму відповідає тільки час T_1. Отже, оптимальне керування едине і кінцевий час дорівнює T_1;
2) якщо

$$\alpha_2 \leq 0 \quad i \quad \alpha_1 \leq 0$$

або

$$\alpha_2 > 0 \quad i \quad \alpha_1 < -\frac{\beta\alpha_2^2}{12},$$

то мінімуму відповідає тільки час T_3, оптимальне керування едине, а кінцевий час дорівнює T_3;
3) якщо

$$\alpha_2 > 0 \quad i \quad -\frac{\beta\alpha_2^2}{12} < \alpha_1 < 0,$$

то часи T_1 і T_3 відповідають двом локальним мінімумам, тоді як T_2 віповідає локальному максимуму, у цьому випадку існують два екстремальні керування, і тому може бути два оптимальних керування;
4) якщо

$$\alpha_2 < 0 \quad i \quad 0 < \alpha_1 < \frac{\beta\alpha_2^2}{12},$$

то часи T_1 і T_3 відповідають двом локальним мінімумам, тоді як T_4 відповідає локальному максимуму. У цьому випадку існують два екстремальних керування і, можливо, два оптимальних керування.

У двох останніх випадках (в 3-му і в 4-му) можлива неєдиність оптимальних керувань. Існує множина (крива) Γ_β на фазовій площині така, що якщо $(\alpha_1, \alpha_2) \in \Gamma_\beta$, то існує два різних оптимальних керувань. Одне з цих керувань вимагає мало часу переходу і великої затрати енергії, а друге — великого часу переходу і малих витрат енергії (чому?). Область Γ_β визначається наступним співвідношенням

$$\Gamma_\beta = \left\{ (\alpha_1, \alpha_2) : \frac{2}{\beta^2} T_1 + \frac{2}{T_1^3} \left(3\alpha_1^2 + 3\alpha_1 \alpha_2 T_1 + \alpha_2^2 T_1^2 \right) = \right.$$

$$\left. = \frac{2}{\beta^2} T_3 + \frac{2}{T_3^3} \left(3\alpha_1^2 + 3\alpha_1 \alpha_2 T_3 + \alpha_2^2 T_3^2 \right) \right\},$$

де T_1 і T_2 визначаються рівняннями (12.3.23). ■

12.4 Питання для самопідготовки

1. Розкрити поняття лінійної автономної системи.
2. Що таке керований процес?
3. Написати необхідну і достатню умови керованості процесу.
4. Сформулювати задачу на швидкодію.
5. Сформулювати теорему про достатню умову максимуму у задачі на швидкодію.
6. Дати означення синтезу лінійних систем оптимальних по швидкодії.

12.5 Завдання для самостійної роботи

1. Побудувати синтез задачі оптимального керування на швидкодію по переводу системи
$$\dot{x}_1 = (i+j)x_2,$$
$$\dot{x}_2 = (i+3j)u,$$
$$|u| \le i+j,$$
з точки $x(0) = \left(12-i, \dfrac{i+j}{2}\right)^T$, у точку $x(t_1) = (-i+12, -i)^T$.
2. Розглядається система
$$\begin{array}{ll} \dot{x}_1 = ix_2(t), & x_1(0) = i\beta_1, \\ \dot{x}_2 = ju, & x_2(0) = -j\beta_2, \end{array} \tag{12.5.1}$$
керування необмежене. Знайти керування, яке переводить систему (12.5.1) з точки $(i\beta_1, -j\beta_2)^T$ у точку $(0,0)^T$ і мінімізує функціонал
$$E(u) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{jT} u^2(t)\,dt, \quad \text{де} \quad T \quad \text{задано.}$$

В кожному завданні:
i–номер ПІБ студента у списку групи,
j– номер групи.

13 Деякі питання, що пов'язані з принципом максимуму Понтрягіна

13.1 Принцип максимуму Понтрягіна для деяких класів задач

Нехай маємо задачу

$$\min J(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} F(x(t), u(t), t)dt, \tag{13.1.1}$$

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x^0 \tag{13.1.2}$$

$$u \in U \subset \mathbb{R}^r, \quad t \in T = [t_0, t_1], \tag{13.1.3}$$

моменти t_0 і t_1 — фіксовані, лівий кінець траєкторії закріплений.
Вважаємо, що у точках розрива кусково-неперервної функції керування значення $u(t)$ визначаются як границі справа, тобто $u = u(t)$ неперервна справа в усіх точках розрива. Ровз'язок задачі Коші (13.1.2) з обранним керуванням розуміємо у інтегральному значенні

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f(x(\tau), u(\tau), \tau)d\tau. \tag{13.1.4}$$

Теорема 13.1.1 **(принцип максимуму Понтрягіна).** Нехай у задачі оптимального керування (13.1.1)–(13.1.3)

1) вектор-фунція $f(x, u, t)$ має часткові похідні по x і неперервна разом з цими похідними по сукупності своїх аргументів на $\mathbb{R}^4 \times U \times T$;
2) функція $f(x, u, t)$ задовільняє умови Ліпшиця по x з однією максимальною константою на $U \times T$

$$\|f(x + \Delta x, u, t) - f(x, u, t)\| \leq L\|\Delta x\|, \quad L > 0,$$

для кожного $u \in U$, $t \in T$ і довільних x, $x + \Delta x \in \mathbb{R}^n$;
3) скалярні функції $\varphi(x)$ і $F(x, u, t)$ неперервні разом зі своїми частковими похідними за x відповідно на $\mathbb{R}^n \times U \times T$;

4) припустимий процес $\{u^*, x^*\}$ оптимальний.

Тоді виконана умова максимуму

$$H(\psi^*(t), x^*(t), u^*(t), t) = \max_{u \in U} H(\psi^*(t), x^*(t), u, t), \ t_0 \le t < t_1, \tag{13.1.5}$$

де функція Гамільтона H має вигляд

$$H(\psi, x, u, t) = \psi^*(t) f(x, u, t) - F(x, u, t),$$

а вектор - функція $\psi^* = \psi^*(t)$ визначається з системи

$$\begin{gathered} \dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H(\psi, x, u, t)}{\partial x}, \quad t \in [t_0, t_1], \\ \psi(t_1) = -\frac{\partial \varphi(x(t_1))}{\partial x}, \quad \text{при } u = u^*(t),\ x = x^*(t). \end{gathered} \tag{13.1.6}$$

Умови 1)– 2) теореми забезпечують існування та єдиність розв'язку у значенні (13.1.4) задачі Коші (13.1.2) для довільного керування.

Теорема 13.1.2 **(достатність принципу максимуму).** Для лінійно-опуклого варіанта задачі (13.1.1)–(13.1.3)

$$f(x, u, t) = A(t)x + f_1(u, t),$$

$$F(x, u, t) = F_1(x, t) + F_2(u, t),$$

де $\varphi,\ F_1$ опуклі за x функції, використання (13.1.5) є необхідною і достатньою умовою оптимальності процеса $\{u^*, x^*\}$, функція u^* дає глобальний мінімум функціоналу при виконанні (13.1.5).

З необхідної умови максимуму диференційованої функції на опулій множині отримаємо наступну теорему.

Теорема 13.1.3 **(лінеаризований (диференціальний) принцип максимуму).** Нехай у задачі оптимального керування (13.1.1)–(13.1.3) на додаток до умов теореми 13.1.1 функції $f(x, u, t)$ і $F(x, u, t)$ диференційовані по u, а множина U опукла.
Тоді виконується на оптимальному процесі $\{u^*, x^*\}$ лінеаризований (дифе-

ренціальний) принцип максимуму

$$\frac{\partial H^T(\psi^*(t), x^*(t), u^*(t), t)}{\partial u} u^*(t) = \max_{u \in U} \frac{\partial H^T(\psi^*(t), x^*(t), u, t)}{\partial u} u, \quad t_0 \le t < t_1.$$

13.2 Використання принципа максимуму для перевірки керувань на оптимальність

Нехай у задачі оптимального керування

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x^0,$$

$$u \in U \subset \mathbb{R}^r, \quad t \in T = [t_0, t_1],$$

$$J(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} F(x(t), u(t), t) dt \longrightarrow \min$$

деяке припустиме керування $u(t)$ необхідно перевірити на оптимальність за допомогою принципу максимуму.

Схема перевірки на оптимальність:

1. Розраховуються функції $x = x(t)$ і $\psi = \psi(t)$, що відповідають керуванню, що перевіряється.
2. Складається функція

   $$W_u(v, t) = H(\psi(t), x(t), v, t) - H(\psi(t), x(t), u(t), t), \quad v \in U, \quad t_0 \le t \le t_1.$$

3. Для кожного момента $t \in [t_0, t_1]$ розв'язується задача максимізації функції $W_u(v, t)$ по $v \in U$:

   $$\overline{W} = \max_{v \in U} W_u(v, t).$$

   Вважається, що для кожного фіксованого $t \in [t_0, t_1]$ ця задача математичного програмування може бути розв'язана.
4. Оцінюється знак функції $\overline{W}(t)$. За побудовою завжди $\overline{W}(t) \ge 0$ для усіх $t \in [t_0, t]$. Рівність нулеві функції $\overline{W}(t)$ для деякого t свідчить про виконання принципу максимума у цій точці, тому що

   $$\max_{v \in U} W_u(v, t) = \max_{v \in U} H(\psi(t), x(t), v, t) - H(\psi(t), x(t), u(t), t).$$

   Таким чином, якщо знайдуться точки $t \in [t_0, t_1]$, у яких $\overline{W}(t) > 0$, то керування $u(t)$ не задовільняє принципу максимуму і тому не є оптимальним.

У випадку $\overline{W}(t) = 0$, $t \in [t_0, t_1]$, то керування задовільняє принципу максимуму, тобто підозріле на оптимальність. Якщо при цьому задача оптимального керування відноситься до класу лінійно-опуклих, то керування забезпечує глобальний мінімум фукнціоналу.

Інколи відсіяти неоптимальні керування допомагає знання властивостей функції Гамільтона на керуваннях, що задовольняють принципу максимуму Понтрягіна.

Т е о р е м а 13.2.1 **(властивість гамільтоніана).** Нехай припустиме кусково-неперервне керування $u = u(t)$ задовольняє принципу максимуму, функції $x = x(t)$ і $\psi = \psi(t)$ відповідають цьому керуванню.
Тоді:

1) гамільтоніан $H(t) = H(\psi(t), x(t), u(t), t)$ неперервний у всіх точках $t \in [t_0, t_1]$;
2) у кожній точці неперервності керування $u = u(t)$
$$\frac{dH(\psi(t), x(t), u(t), t)}{dt} = \frac{\partial H(\psi, x, u, t)}{\partial t},$$
де у правій частині рівності стоїть часткова похідна по t, явно входячому у функцію Гамільтона до підстановки конкретних значень $\psi(t), x(t), u(t)$;
3) для автономного (стаціонарного) випадку (13.1.1)–(13.1.3), у якому $f = f(x, u)$, $F = F(x, u)$ (тобто вони не залежать від t) справедливе
$$H(\psi(t), x(t), u(t), t) \equiv \text{const}, \quad t_0 \le t \le t_1.$$

Невиконання довільного з перерахованих тверджень є достатньою ознакою непотимальноісти керування.

П Р И К Л А Д 13.1 У задачі

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad x_1(0) = 1,$$

$$\dot{x}_2 = u, \quad x_2(0) = 2,$$

$$|u(t)| \le 1, \quad t \in [0, 5],$$

$$J(u) = x_1^2(5) + x_2^2(5) \longrightarrow \min$$

перевірити на оптимальність функцію

$$u(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1, \\ 0, & 1 \le t < 2, \\ -1, & 2 \le t < 5 \end{cases}$$

і розрахувати значення цільового функціонала, що відповідає наведеному керуванні.

Розв'язання. Скористаємося раніше приведеною схемою.

1. Розрахуємо функції $x = x(t)$ і $\psi = \psi(t)$, що відповідають керуванню, що перевіряється. Почнемо з другого рівняння системи. Згідно з (13.1.4) при $t \in [0, 1)$

$$x_2(t) = x_2(0) + \int\limits_0^t u(\tau)d\tau = 2 + \int\limits_0^t 1d\tau = 2 + t,$$

при $t \in [1; 2)$

$$x_2(t) = x_2(1) + \int\limits_1^t u(\tau)d\tau = (2+t)|_{t=1} + \int\limits_1^t 0d\tau = 3,$$

при $t \in [2; 5)$

$$x_2(t) = 3 + \int_2^t (-1)d\tau = 5 - t.$$

Знайдені значення функції $x_2 = x_2(t)$ підкладаємо у праву частину першого рівняння системи. На проміжку $[0, 1)$ інтегруємо це рівняння з початковою умовою $x_1(0) = 1$, маємо

$$x_1(t) = x_1(0) + \int\limits_0^t x_2(\tau)d\tau = 1 + \int\limits_0^t (2+\tau)d\tau = 1 + 2t + \frac{t^2}{2}, \quad t \in [0; 1).$$

Звідси знаходимо значення $x_1(1) = 3, 5$, яке буде початковою умовою для диференціального рівнння на проміжку $[1; 2)$:

$$x_1(t) = x_1(1) + \int\limits_1^t x_2(\tau)d\tau = 3,5 + \int\limits_1^t 3d\tau = 3t + 0,5, \quad t \in [1; 2).$$

Теперь $t \in [2; 5), x_1(2) = 6, 5$:

$$x_1(t) = x_1(2) + \int\limits_2^t (5-\tau)d\tau = -\frac{t^2}{2} + 5t - 1,5.$$

Отримали

$$x_1(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} + 2t + 1, & t \in [0; 1), \\ 3t + 0,5, & t \in [1; 2), \\ -\frac{t^2}{2} + 5t - 1,5, & t \in [2; 5]; \end{cases} \quad x_2(t) = \begin{cases} t + 2, & t \in [0; 1), \\ 3, & t \in [1; 2), \\ 5 - t, & t \in [2; 5]. \end{cases}$$

Розв'язок початкової системи є неперервна вектор - функція. Точки, у яких похідна може не існувати є точками розриву керування.
Для більш складних систем деференціальних рівнянь, в яких розв'язок не може бути отриманий у явному вигляді інтегруванням правої частини, необхідно використати методи розв'язання диференціальних рівнянь. Рівняння необхідно розглядати на кожному проміжку неперервності функції керування і перераховувати початкові умови по мірі наближення до кінцевої точки відрізка.
Далі складаємо функцію Гамільтона

$$H(\psi, x, u, t) = \psi_1 x_2 + \psi_2 u.$$

Спряжена система має вигляд

$$\dot{\psi}_1 = 0, \quad \psi_1(5) = -2x_1(5),$$
$$\dot{\psi}_2 = -\psi_1, \quad \psi_2(5) = -2x_2(5).$$

Інтегруємо спряжену систему

$$\psi_1(t) = -22, \quad \psi_2(t) = 22t - 110, \quad t \in [0; 5].$$

2. Складаємо функцію $W_u(v, t)$:

$$W_u(v,t) = H(\psi, x, v, t) - H(\psi, x, u(t), t) = \psi_2(v - u(t)) =$$
$$= \begin{cases} (22t - 110)(v - 1), & t \in [0; 1), \\ (22t - 110)v, & t \in [1; 2), \\ (22t - 110)(v + 1), & t \in [2; 5). \end{cases}$$

3. Теперь максимізуємо по v функцію $W_u(v, t)$ при кожному фіксованому $t \in [0; 5)$. А це є задача знаходження максимуму лінійної функції однієї змінної на відрізку $[-1; 1]$. Розв'язок цієї задачі залежить від знаку коефіцієнта при v. Так як цей коефіцієнт дорівнює $(22t - 110)$ і завжди від'ємний при $t \in [0; 5)$, то максимум функції $W_u(v, t)$ досягається при $v = -1$. Отримаємо

$$\overline{W}(t) = \begin{cases} 220 - 44t, & t \in [0; 1), \\ 110 - 22t, & t \in [1; 2), \\ 0, & t \in [2; 5). \end{cases}$$

4. Функція $\overline{W}(t)$ додатня на $[0; 2)$, тому принцип максимуму не виконується і керування не може бути оптимальним.
Розглянута задача оптимального керування відноситься до класу лінійно-опуклих. У позначеннях теореми 20.1.2 (достатність принципу максимуму) маємо

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_1(u,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}, \quad \varphi(x) = x_1^2 + x_2^2, \quad F(x,u,t) \equiv 0.$$

Отримати результат про неоптимальність вибраного керування можна і використовуючи теорему 20.2.1 (властивість гамільтоніана).
Розрахуємо функцію Гамільтона на керуванні $u(t)$ і відповідних йому траєкторіях $x = x(t)$ і $\psi = \psi(t)$

$$H\left(\psi(t), x(t), u(t), t\right) = \begin{cases} -22(t+2) + 22t - 110 = -154, \quad t = 0, \quad t \in [0;1); \\ -22 \cdot 3 = -66, \quad t \in [1;2), \\ -22(5-t) - 22t + 110 = 0, \quad t = 5, \quad t \in [2;5). \end{cases}$$

Отримали, що пункти 1) і 3) теореми не виконуються. А значить керування не може бути оптимальним

■

13.3 Використання принципу максимуму для звуження класу керувань, підозрілих на оптимальність

У ряді задач принцип максимума може вказати, який тип може мати оптимальне керування, або ж навпаки, встановити клас функцій, який не може мати оптимальних керувань. Таке якісне дослідження можна провести для лінійних за керуванням задач виду

$$\begin{aligned} &\dot{x} = g(x,t) + B(x,t)u, \quad x(t_0) = x^0, \\ &u(t) \in U = \{v \in E^u : a_j \le v_j \le \beta_j, \quad j = \overline{1,r}\}, \quad t \in [t_0; t_1], \\ &J(u) = \varphi(x(t_1)) + \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[G(x,t) + (b^T(x,t),\, u)\right] dt \to \min . \end{aligned} \tag{13.3.1}$$

Тут $B(x,t)$ - матрична функція виміру $n \times r$.
Функція Гамільтона має вигляд

$$H(\psi, x, u, t) = (\psi(t), g(x,t)) + \left(B^T(x,\psi)\psi(t)), u(t)\right) - G(x,t) - (b(x,t),\, u(t))$$

є лінійною по керуванні.
Будемо вважати, що у задачі (13.1.6) виконуються усі умови теореми 13.1.1, процес $\{u^*, x^*\}$ оптимальний.
Випишемо умову максимуму

$$\langle B^T(x^*,t)\psi^*(t) - b(x^*,t),\, u^*(t)\rangle = \max_{v\in U}\langle B^T(x^*,t)\psi^*(t) - b(x^*,t),\, v\rangle, \quad t \in [t_0, t_1],$$

де вектор - функція $\psi^* = \psi^*(t)$ визначається з системи (13.1.6) при $u = u^*(t)$, $x = x^*(t)$.

У кожній точці $t \in [t_0; t_1]$ вектор $u^*(t)$ дає максимум лінійної по v функції $(B^T(x^*, t)\psi^* - b(x^*, t),\ v)$ на багатовимірному паралелепіпеді U. Тому екстремальне керування може мати тільки таку структуру

$$u_j^*(t) = \begin{cases} \alpha_j, & \text{якщо} \quad w_j(\psi^*, x^*, t) < 0, \\ \beta_j, & \text{якщо} \quad w_j(\psi^*, x^*, t) > 0, \\ v, & \text{якщо} \quad w_j(\psi^*, x^*, t) = 0, \end{cases}$$

$w_j - j - a$ компонента вектор функції $W(\psi^*, x^*, t) = B^T(x^*, t)\psi^*(t) - b(x^*, t)$. Вектор функція W називається функцією перемикання. Усі керування, структура яких відрізняється від наведеної вище, не можуть бути оптимальними. Якщо функція перемикання дорівнює нулеві, то говорить про те, що довільне припустиме керування задовольняє принципу максимума і свідчить про виродження усієї умови оптимальності.

13.4 Розв'язування лінійних задач оптимального керування

Якщо має місце лінійність по стану і по керуванню, то можна знайти у явному вигляді оптимальне керування, при умові, що множина U має достатньо просту структуру.

П Р И К Л А Д 13.2 Розв'язати задачу оптимального керування

$$\dot{x_1} = tu_1 - u_2,$$

$$\dot{x_2} = x_1 + u_2 - 2u_3^2, \quad 0 \le t \le 2,$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0,$$

$$0 \le u_1(t) \le 2, \quad 0 < |u_2(t)| \le 1, \quad u_3(t) \in \{-4; 0; 1; 3\}$$

$$J(u) = x_2(2) \to \min$$

Розв'язання. Задача є лінійною по стану (по x). Тут

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_1(u, t) = \begin{pmatrix} tu_1 - u_2 \\ u_2 - 2u_3^2 \end{pmatrix},$$

$$c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad q(t) \equiv 0, \quad F_1(u, t) \equiv 0,$$

$$U = [0; 2] \times ([-1; 0) \cup (0, 1]) \times \{-4; 0; 1; 3\} \in \mathbb{R}^3.$$

Функція Гамільтона має вигляд

$$H(\psi, x, u, t) = \psi_1(tu_1 - u_2) + \psi_2(x_1 + u_2 - 2u_3^2).$$

1. Маємо таку спряжену задачу

$$\dot{\psi}_1 = -\psi_2, \quad \psi_1(2) = 0,$$

$$\dot{\psi}_2 = 0, \quad \psi_2(2) = -1,$$

яка має наступний розв'язок

$$\psi_1^* = t - 2, \quad \psi_2^* = -1, \quad t \in [0; 2].$$

2. Оптимальне керування знаходиться з умови

$$(t-2)(tv_1 - v_2) - (v_2 - 2v_3^2) \to \max,$$

$$0 \le v_1 \le 2, \quad 0 < |v_2| \le 1, \quad v_3 \in \{-4; 0; 1; 3\}.$$

Так як цільова функція задачі максимізації є сепаробельною $\left(h(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} h_i(x_i) \right)$, то задача еквівалентна наступним:

а) $(t^2 - 2t)v_1 \to \max, \quad 0 \le v_1 \le 2;$
б) $(1-t)v_2 \to \max, \quad v_2 \in [-1; 0) \cup (0; 1];$
в) $2v_3^2 \to \max, \quad v_3 \in \{-4; 0; 1; 3\}.$

Так як $t^2 - 2t < 0, \quad t \in (0, 2], \quad u_1^* \equiv 0, \quad t \in [0, 2).$
(При $t = 0$ прийнято до уваги припущення про неперервність справа припустимих керувань.)
Розв'язок задачі визначення другої компоненти оптимального керування залежить від знака коефіцієнта при v_2.
Так як $-t + 1 > 0$ для $t \in [0; 1], \quad -t + 1 < 0,\ t \in (1; 2]$, то

$$u_2^*(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0; 1), \\ \\ -1, & t \in [1; 2). \end{cases}$$

Взагалі-то значення $u_2^*(1)$ може бути довільне число з множини $[-1; 0) \cup (0; 1]$.
Так як ми зробили припущення, що компоненти припустимого керування неперервні справа, то $u_2^*(1) = -1$.
Розв'язок задачі в) очевидний:

$$u_3^* \equiv -4, \quad t \in [0; 2).$$

Так як задача лінійно-опукла, то знайдена вектор-функція $u^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*)^T$ є оптимальним керуванням.
3. Відповідний оптимальному керуванні стан процеса визначається після підстановки $u^* = u^*(t)$ в праву частину початкової системи диференціальних рівнянь:

$$\dot{x_1} = -1, \quad x_1(0) = 0, \quad t \in [0; 1).$$

Звідси
$$x_1^* = -t, \quad t \in [0;1].$$
Далі розглядаємо наступний інтервал часу $t[1;2)$. Тут маємо
$$\dot{x_1} = 1, \quad x_1(1) = -1, \quad t \in [1;2).$$
Звідси одержимо
$$x_1^* = t - 2, \quad t \in [1;2],$$
Переходимо до розгляду другої координати. На інтервалі $t[0;1)$ виконується
$$\dot{x_2} = -t - 31, \quad x_2(0) = 0, \quad t \in [0;1).$$
Маємо
$$x_2^* = -\frac{t^2}{2} - 31t, \quad t \in [0;1).$$
Далі розглянемо інтервал $t[1;2)$. У цьому випадку маємо
$$\dot{x_2} = t - 35; \quad x_2(1) = -31,5, \quad t \in [1;2).$$
Тому
$$x_2^* = \frac{t^2}{2} - 35t + 3, \quad t \in [1;2].$$
Таким чином, остаточно компоненти оптимальної траєкторії – вектора x набувають вигляду:
$$x_1^*(t) = \begin{cases} -t, & t \in [0;1], \\ \\ t - 2, & t \in [1;2]; \end{cases} \qquad x_2^*(t) = \begin{cases} -\frac{t^2}{2} - 31t, & t \in [0;1], \\ \\ \frac{t^2}{2} - 35t + 3, & t \in [1;2]. \end{cases}$$
Оптимальне значення функціонала, тобто глобальний мінімум, дорівнює:
$$J(u^*) = -65.$$
■

ПРИКЛАД 13.3 Розглянемо задачу оптимального планування інвестицій. Нехай $x(t)$ - об'єм випуску оптимального планування у момент t у вартісному вираженні;
$y_1(t)$ - частина випуску продукції, що витрачалась на інвестиції у виробництво;
$y_2(t)$ - частина випуску, що витрачається на споживання.
Початковий об'єм випуску $x(0) = c > 0$. Вважається, що приріст випуску продукції до деякого моменту часу пропорційний сумарному об'ємові інвестицій, що зробили за усі попередні проміжки часу. Тоді
$$x(t) = y_1(t) + y_2(t), \quad y_1(t) \geq 0, \quad y_2(t) \geq 0,$$

$$x(t) = c + \alpha \int_0^t y_1(\tau)d\tau, \quad \text{де} \quad \alpha > 0 - \text{відомий параметр}$$

Метою задачі є пошук такого розподілу випуску продукції $(y_1(t), y_2(t))$ за період часу $t \in [0; t_1]$, при якому максимізується загальний об’єм споживання за період часу, що розглядається:

$$\int_0^{t_1} y_2(t)dt \to \max.$$

Перейдемо до формалізації задачі як задачі оптимального керування.
Нехай керування $u(t)$ - доля випуску продукції, що направляється в момент часу t на інвестиції:

$$u(t) = \frac{y_1(t)}{x(t)} \in [0; 1], \quad t \in [0, t_1].$$

Тоді

$$y_1(t) = u(t)x(t)$$

$$y_2(t) = x(t) - y_1(t) = x(t)(1 - u(t)),$$

$$x(t) = c + \alpha \int_0^t u(\tau)x(\tau)d\tau. \tag{13.4.1}$$

Диференцюємо (13.4.1) по t і переходимо до задачі на мінімум, отримаємо

$$\dot{x} = \alpha ux, \quad x(0) = c, \tag{13.4.2}$$

$$u(t) \in [0; 1], \quad t \in [0; t_1],$$

$$J(u) \int_0^{t_1} (u(t) - 1)x(t)dt \to \min.$$

Застосуємо принцип максимуму Понтрягіна. Довільному припустимому керуванню відповідає розв’язок рівняння (13.4.2) виду

$$x(t) = c \exp\left(\alpha \int_0^t u(\tau)dt\right).$$

Функція Гамільтона має вигляд

$$H(\psi, x, u, t) = \alpha\psi ux - (u - 1)x,$$

спряжена система така

$$\dot{\psi} = -\alpha\psi u + u - 1, \quad \psi(t_1) = 0 \tag{13.4.3}$$

Оптимальне керування $u^* = u^*(t)$ задовільняє умові

$$(\alpha\psi^* - 1)x^* u^* = \max_{v \in U}(\alpha\psi^* - 1)x^* v, \quad t \in [t_0; t_1],$$

де x^* і ψ^* - розв'язок початкової і спряженої задач (13.4.2), (13.4.3). Структура оптимального керування:

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & \alpha\psi(t) - 1 > 0, \\ 0, & \alpha\psi(t) - 1 < 0. \end{cases}$$

Таким чином, значення оптимального керування у точці t визначається знаком різниці $\alpha\psi(t) - 1$. Інтегруємо спряжене рівняння (13.4.3) з точки t_1, підклавши $u(t) = 0$:

$$\dot{\psi} = -1, \quad \psi(t_1) = 0.$$

Отримаємо

$$\psi(t) = t_1 - t.$$

Знайдемо корінь $\bar{t}$ наступного рівняння

$$\alpha\psi(t) - 1 = 0,$$

підклавши в нього розраховане значення ψ:

$$\alpha(t_1 - t) - 1 = 0,$$

$$\bar{t} = t_1 - \frac{1}{\alpha}.$$

Можливі два випадки.

1) $\bar{t} < 0$, тобто всюди на $[0; t_1]$ $\alpha\psi(t) - 1 < 0$.
   Тоді оптимальним може бути тільки керування $u^*(t) \equiv 0$, $t \in [t_0; t_1]$. Така ситуація можлива, якщо $t_1 < \frac{1}{\alpha}$, тобто якщо процес розглядається на невеликому проміжку часу. У цьому випадку не вигідно інвестувати засоби у виробництво, а перенаправляти їх на споживання.
2) $\bar{t} \in (0, t_1)$, тобто $t_1 > \frac{1}{\alpha}$.
   Тоді можливі дві ситуації, які можуть мати місце
   a) $\alpha\psi(t) - 1 > 0, \quad t \in [0, \bar{t}\,]$.
      У цьому випадку $u^* = 1$,

$$\dot{\psi} = -\alpha\psi,$$

$$\psi(\bar{t}\,) = t_1 - \bar{t} = \frac{1}{\alpha}.$$

Тоді

$$\psi(t) = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha(\bar{t} - t)}$$

і умова

$$\alpha\psi(t) - 1 = e^{\alpha(\bar{t} - t)} - 1 > 0$$

виконується для всіх $t \in [0; \bar{t}\,)$.

b) $\alpha\psi(t) - 1 < 0, \quad t < \bar{t}$

Тоді

$$u^* = 0,$$

$$\dot{\psi} = -1,$$

$$\psi(\bar{t}\,) = \frac{1}{\alpha},$$

$$\psi(t) = \frac{1}{\alpha} + \bar{t} - t.$$

Але $\alpha\psi(t) - 1 = \alpha(\bar{t} - t) > 0$ при $t < \bar{t}$, що суперечить $\alpha\psi(t) - 1 < 0, \quad t < \bar{t}$.

Таким чином, оптимальне керування може мати тільки таку структуру:

$$u^* \equiv 0, \quad t \in [0; t_1], \quad \text{якщо} \quad t_1 < \frac{1}{\alpha}$$

або

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left[0; t_1 - \frac{1}{\alpha}\right], \\ \\ 0, & t \in \left[t_1 - \frac{1}{\alpha}, t_1\right], \quad \text{якщо} \quad t_1 > \frac{1}{\alpha}. \end{cases}$$

Отже, якщо процес дуже протяжний, то необхідно у першу частину часу витрачати усі засоби на інвестиції у виробництво, а у другу частину часу направляти усі засоби на споживання. ■

ПРИКЛАД 13.4 Розв'язати задачу, звівши її до крайової задачі принципа максимуму

$$\dot{x} = tu, \quad x(0) = 0,$$

$$|u(t)| \leq 1, \quad t \in [0; 1],$$

$$J(u) = x^2(1) + \int_0^1 u^2(t)dt \to \min.$$

Розв'язання. Складаємо функцію Гамільтона

$$H(\psi, x, u, t) = \psi tu - u^2;$$

Спряжена задача:

$$\dot{\psi}(t) = 0, \quad \psi(1) = -2x(1).$$

За умови максимума гамільтоніана визначаємо

$$u(\psi, x, t) = \begin{cases} \dfrac{\psi t}{2}, & |\psi(t)t| \leq 2, \\ -1, & \psi(t)t < -2, \\ 1, & \psi(t)t > 2. \end{cases}$$

Розв'язком спряженої задачі є функція

$$\psi(t) = -2x(1), \quad t \in [0; 1].$$

Скориставшись тим, що

$$x(1) = \int\limits_0^1 u(t)dt$$

і враховуючи обмеження на керування, отримаємо $|x(1)| \leq 1$, тобто $|\psi(t)t| \leq 2$, $t \in [0; 1]$.

Приходимо до наступної крайової задачі

$$\dot{x} = \frac{\psi(t)t}{2}, \quad \dot{\psi(t)} = 0,$$

$$x(0) = 0, \quad \psi(1) = -2x(1).$$

Звідси

$$\dot{x} = -x(1)t, \quad x(0) = 0,$$

тобто

$$x(t) = -x(1)\frac{t^2}{2}.$$

При $t = 1$ повинна виконуватись рівність

$$x(1) = -\frac{x(1)}{2},$$

що можливо лише при $x(1) = 0$.

Таким чином

$$x^* \equiv 0, \quad \psi^* \equiv 0, \quad u^* = 0, \quad t \in [0; 1].$$

Так як задача є лінійно-опуклою, то керування $u^* = u^*(t)$ оптимальне.

Глобальний мінімум функціонала дорівнює

$$J(u^*) = 0.$$

■

У розглянутому прикладі зведення до крайової задачі було здійснене лише для того, щоб проілюструвати цей підхід до розв'язання задач оптимального керування. Зрозуміло, що отриманий результат очевидний і може бути отриманий через аналіз виду задачі.
У наступному прикладі змінимо критерій якості.

ПРИКЛАД 13.5

$$\dot{x} = tu, \quad x(0) = 0,$$

$$|u(t)| \le 1, \quad t \in [0;1],$$

$$J(u) = x^2(1) - \int\limits_0^1 u^2(t)dt \to \min.$$

Розв'язання. Складаємо функцію Гамільтона

$$H(\psi, x, u, t) = \psi t u + u^2.$$

Спряжене рівняння таке

$$\dot{\psi} = 0, \quad \psi(1) = -2x(1).$$

З умови максимума маємо:

$$u(\psi, x, t) = \begin{cases} 1, & \psi(t)t > 0, \\ -1, & \psi(t)t < 0, \\ \pm 1, & \psi(t)t = 0. \end{cases}$$

Оскільки $\psi(1) = -2x(1)$, то розглянемо три варіанти:

а) $x(1) < 0$. Тоді $\psi(t) > 0, \quad u(t) = 1, \quad t \in [0;1]$, але цьому керуванню відповідає стан $x(t) = \frac{t^2}{2}$, тобто $x(1) > 0$. Отже, цей варіант неможливий;

б) $x(1) > 0$. Аналогічно попередньому маємо $\psi(t) < 0$, $u(t) = -1$, $t \in [0;1]$, $x(t) = -\frac{t^2}{2}, \quad x(1) < 0, \quad$ варіант неможливий;

в) $x(1) = 0$. Принципу максимуму задовольняє довільне кусково-непрерервне керування, яке приймає у кожній точці $[0;1)$ значення 1, або -1, для якого відповідне значення стану $x(1) = 0$. Так як задача лінійно-опукла, то таке керування оптимальне.

Очевидно, що оптимальних керувань нескінчена множина. Наприклад, глобальний мінімум доставляють критерію якості функціонала

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ 1, & t \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right) \end{cases} \qquad u(t) = \begin{cases} -1, & t \in \left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ 1, & t \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right); \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} -1, & t \in \left[0; \frac{1}{2\sqrt{2}}\right], \\ 1, & t \in \left[\frac{1}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2}\right], \\ -1, & t \in \left[\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\right], \\ 1, & t \in \left[\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}; 1\right] \end{cases} \qquad \text{і.т.п.}$$

Глобальний мінімум функціонала

$$J(u) = x^{*2}(1) - \int_0^1 u^{*2}dt = -\int_0^1 dt = -1.$$

■

13.5 Питання для самопідготовки

1. Сформулювати принцип максимуму Понтрягіна для лінійно-опуклої задачі оптимального керування.
2. Сформулювати лінеарізований (диференціальний принцип) максимуму.
3. Написати алгоритм перевірки керування на оптимальність.

13.6 Завдання для самостійної роботи

1. У задачі оптимального керування перевірити на оптимальність задане керування $u = u(t)$:
   а) для парного номера i:

$$\dot{x} = iju, \quad x(0) = j, \quad |u(t)| \le 2i, \quad t \in [0, i],$$

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^i x^2(t)dt \to \min,$$

$$u(t) = -i, \quad t \in [0, i];$$

   б) для непарного номера i:

$$\dot{x} = iju, \quad x(0) = j, \quad |u(t)| \le 2i, \quad t \in [0; i],$$

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^i x^2(t)dt \to \min$$

$$u(t) = -2i, \quad t \in [0; i];$$

2. Розв'язати задачу оптимального керування

а)

$$\dot{x} = iu, \quad x(0) = 1 + j, \quad |u(t)| \leq i, \quad t \in [0; 2j],$$

$$J(u) = x(2) + \int_0^{2j} \left[ix(t) + ju^2(t)\right] dt \to \min;$$

б)

$$\dot{x_1} = jx_2, \quad x_1(0) = i, \quad \dot{x_2} = x_1 + iu(t), \quad x_2(0) = 1,$$

$$|u(t)| \leq i, \quad t \in [0; 1],$$

$$J(u) = ix_1(1) + jx_2(1) \to \min;$$

в)

$$\dot{x} = itu, \quad x(0) = 0, \quad |u(t)| \leq j, \quad t \in [0; 1],$$

$$J(u) = ix_1^2(1) - j\int_0^1 u^2(t)dt \to \min.$$

В кожному завданні: i–номер ПІБ студента у списку групи, j– номер групи.

14 Зв'язок задач оптимального керування з задачами варіаційного числення

14.1 Зв'язок задач оптимального керування з задачами варіаційного числення

Розглянемо задачу варіаційного числення

$$\min \int_{x^1}^{x^2} F(x, y(x), y'(x))dx, \quad y \in C^1, \tag{14.1.1}$$

$$y(x^1) = c_1, \quad y(x^2) = c_2.$$

Замінимо незалежну змінну x на t, а y на x, та покладемо $\dot{x} = u$. Тоді задача (14.1.1) прийме вигляд

$$\min_u \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, u)dt, \quad t \in [t_0, t_1], \tag{14.1.2}$$

$$\dot{x} = u, \quad x(t_0) = c_1, \quad x(t_1) = c_2,$$

тобто, це є задача оптимального керування типу Лагранжа у класі неперервних припустимих керувань.
У задачі (14.1.2) немає обмежень на область значень припустимих керувань, тому можна вважати, що $u \in U = R_1$. Випишемо результати застосування принципа максимума для задачі (14.1.2). Складемо функцію Гамільтона

$$H\left(x, \psi, u, t\right) = \psi u + \psi_0 F\left(t, x, u\right), \quad \psi_0 < 0.$$

Спряжена система має вигляд

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\psi_0 \frac{\partial F\left(t, x, u\right)}{\partial x}, \tag{14.1.3}$$

а умова максимума така

$$\psi^0(t)u^0(t) + \psi_0 F\left(t, x^0(t), u^0(t)\right) = \max_u \left[\psi^0(t)u + \psi_0 F\left(t, x^0(t), u\right)\right].$$

Так як обмежень на множину припустимих керувань u немає, то скористаємося необхідною умовою мінімуму функції без обмежень

$$\frac{\partial H\left(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t\right)}{\partial u} = \psi^0(t) + \psi_0 \frac{\partial F\left(t, x^0(t), u^0(t)\right)}{\partial u} = 0. \tag{14.1.4}$$

Проінтегруємо рівняння (14.1.3) вздовж $u^0(t), x^0(t)$

$$\psi^0(t) = C - \int\limits_{t_0}^{t} \psi_0 \frac{\partial F\left(s, x^0(s), u^0(s)\right)}{\partial x} ds. \tag{14.1.5}$$

Об'єднуючи (14.1.4), (14.1.5), отримаємо рівняння

$$\left[- \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial F\left(s, x^0(s), u^0(s)\right)}{\partial x} ds + \frac{\partial F\left(t, x^0(t), u^0(t)\right)}{\partial u} \right] \psi_0 = -C. \tag{14.1.6}$$

Згідно з принципом максимума існує нетривіальний розв'язок $\psi^0(t)$ спряженої системи, тому можна вважати, що $\psi_0 \neq 0$ (інакше з (14.1.4) отримуємо, що і $\psi^0(t) = 0$). Значить, рівняння (14.1.6) можна переписати у вигляді

$$- \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial F\left(s, x^0(s), u^0(s)\right)}{\partial x} ds + \frac{\partial F\left(t, x^0(t), u^0(t)\right)}{\partial u} \equiv \mathrm{const},$$

а це, у позначеннях задачі варіаційного числення, співпадає з рівнянням Ейлера в інтегральній формі

$$- \int\limits_{x_0}^{x_2} \frac{\partial F\left(x, y, y'\right)}{\partial y} dx + \frac{\partial F\left(x, y, y'\right)}{\partial y'} \equiv \mathrm{const}\,.$$

Отримали, що рівняння Ейлера у термінах теорії оптимального керування має вигляд

$$\frac{\partial H\left(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t\right)}{\partial u} = 0.$$

Умова Верштраса-Ердмана, згідно з (14.1.4), зводиться до неперервності розв'язку $\psi^0(t)$ спряженої системи (14.1.3).

Умова Гільберта $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \neq 0$ у нових позначеннях зводиться до вимоги

$$\frac{\partial^2 H\left(t, x, u\right)}{\partial u^2} \neq 0.$$

Умова Лежандра $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \geq 0$ зводиться до $\dfrac{\partial^2 H}{\partial u^2} \leq 0$ і є наслідком умови максимуму функції Гамільтона.

14.2 Критерій Вейерштрасса

Означення 14.2.1 Для задачі варіаційного числення

$$J(y)=\int_a^b F(x,y,y')dx, \quad y(a)=c_1, \quad y(b)=c_2$$

функція

$$E(x,y,y',z)=F(x,y,z)-F(x,y,y')-(z-y')\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}$$

називається функцією Вейерштрасса.

Теорема 14.2.1 (критерій Вейєрштрасса сильного мінімуму). Якщо припустима крива $y=y(x)$ дає функціоналу сформульованої задачі варіаційного числення сильний мінімум то для усіх чисел z виконується нерівність

$$E(x,y(x),y'(x),z)\geq 0.$$

Доведення. Для доведення теореми, скористаємося принципом максимума Понтрягіна. Раніше було показано, що задача варіаційного числення еквівалентна задачі

$$J(u)=\int_{t_0}^{t_1} F(t,x,u)dt \quad \to \quad \min,$$

$$\dot{x}=u, \quad x(t_0)=c_1, \quad x(t_1)=c_2, \quad t\in[t_0,t_1].$$

Вздовж оптимального керування

$$u^0(t), \quad t\in[t_0,t_1],$$

згідно з принципом максимуму виконується рівність

$$\frac{\partial H\left(x^0(t),\psi^0(t),u^0(t),t\right)}{\partial u}=\psi^0(t)+\psi_0\frac{\partial F\left(t,x^0(t),u^0(t)\right)}{\partial u}=0 \qquad (14.2.1)$$

і $\psi_0<0$. З визначення функції Вейєрштрасса, гамільтоніана і властивості (14.2.1) оптимального керування маємо

$$E\left(t,x^0(t),u^0(t),v\right)=$$

$$=F\left(t,x^0(t),v\right)-F\left(t,x^0(t),u^0(t)\right)-(v-u^0(t))\frac{\partial F\left(t,x^0(t),u^0(t)\right)}{\partial u}=$$

$$= F\left(t, x^0(t), v\right) - F\left(t, x^0(t), u^0(t)\right) + (v - u^0(t))\frac{1}{\psi_0}\psi^0(t) =$$

$$= \frac{1}{\psi_0}\Delta_\nu H\left(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t\right).$$

Так як $\dfrac{1}{\psi_0} < 0, \quad \Delta_v H\left(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t\right) \leq 0$ для всіх v, то отримаємо нерівність

$$E\left(t, x^0(t), u^0(t), v\right) \geq 0,$$

яка еквівалентна в початкових термінах критерію Верштрасса. Теорему доведено. ☑

14.3 Питання для самопідготовки

1. Який вигляд має рівняння Ейлера у термінах оптимального керування?
2. Сформулювати умову Вейєрштрасса у термінах теорії оптимального керування.
3. Сформулювати умову Гільберта у термінах теорії оптимального керування.
4. Сформулювати умову Лежандра у термінах теорії оптимального керування.

14.4 Завдання для самостійної роботи

Задачу варіаційного числення

$$\min \int\limits_{i}^{i+2j} (iy' + 4jyy' + ixy)\, dx,$$

$$y(i) = 2i, \quad y(i+2j) = 3i + j$$

1) записати у термінах оптимального керування;
2) сформулювати у термінах теорії оптимального керування
   а) рівняння Ейлера;
   в) умову Вейєрштрасса-Ермана;
   г) умову Гільберта;
   д) умову Лежандра.

В кожному завданні: i–номер ПІБ студента у списку групи, j– номер групи.

Перелік літератури

[1] **Кічмаренко О.Д., Скрипник Н.В., Стехун А.О.** *Теорія керування. Частина* 1: *методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності* 113 *Прикладна математика.* Одеса:Олді+, 2023. – 68 с. $https : //dspace.onu.edu.ua/server/api/core/bitstreams/38a7fd8d - 13be - 4859 - bf15 - 7bb6ff44d363/content$

[2] **Моклячук М.П.** *Варіаційне числення. Екстремальні задачі.* Київ: Либідь, 1994. – 328 с.

[3] **Перестюк М.О., Станжицький О.М., Капустян О.В., Ловейкін Ю.В.** *Варіаційне числення та методи оптимізації.* Київ: 2018. [Електронне видання: $http : //www.mechmat.univ.kiev.ua/wp - content/uploads/2018/03/var_chisl.pdf$]

[4] **Перестюк М.О., Станжицький О.М., Капустян О.В.** *Екстремальні задачі: теорія, приклади, методи розв'язання. Навчальний посібник.* Київ, ВПЦ «Київський університет», 2019, 52 с.

[5] **Перестюк М.О., Станжицький О.М., Капустян О.В.** *Задачі оптимального керування. Навчальний посібник для студентів університетів.* Київ, «ТВіМС», 2004, 55 с.

[6] **John A. Burns** *Introduction to the calculus of variations and control with modern applications.* CRC Press Taylor Fransis Group, Boca Raton, 2014. – 544 p.

Навчальне видання

Кічмаренко Ольга Дмитрівна
Стехун Анжела Олексіївна
Яровий Анатолій Трохимович

ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ ТА ТЕОРІЯ КЕРУВАННЯ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
спеціальностей 111 Математика, 113 Прикладна математика

Електронне видання мережевого використовування

В авторській редакції

Затв. авт. 12.12.2025.
Системні вимоги: операційна система сумісна з програмним забезпеченням
для читання файлів формату PDF.
Обсяг 1,9 МБ. Зам. № 3053.

Видавець і виготовлювач
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 4215 від 22.11.2011 р.
вул. Університетська, 12, м. Одеса, 65082, Україна
Тел.: (048) 723 28 39, e-mail: druk@onu.edu.ua