

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра математичного та комп'ютерного моделювання

Дипломна робота

бакалавра

на тему: **«Розв'язання задачі теплопровідності з
використанням методу прогонки»**

«Solving the problem of heat conduction using the Tridiagonal matrix algorithm»

Виконала: студентка денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика
Федина Наталя Василівна

Керівник:

канд. фіз.-мат. наук, доц. Таїрова М.С.

Рецензент:

канд. фіз.-мат. наук, доц. Вербіцький В.В.

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ ____ від «____» _____ р.

Завідувач кафедри

Захищено на засіданні ЕК № _____

Протокол № ____ від «____» ____ р.

Оцінка _____ / _____ / _____

Голова ЕК

Одеса — 2022 р.

ЗМІСТ

Вступ	3
1 Постановка задачі	4
2 Розв’язання задачі теплопровідності з використанням методу прогонки	5
2.1 Явна схема	5
2.2 Чисто неявна схема	8
2.3 Метод прогонки для систем з трьохдіагональною матрицею	9
2.4 Варіанти методу прогонки	11
2.4.1 Поточковий варіант методу прогонки	11
2.4.2 Циклічний варіант методу прогонки	14
3 Розв’язання початково - крайової задачі теплопровідності за допомогою мови програмування	18
3.1 Обчислювальний експеримент	18
Висновки	22
Список літератури	23
Додатки	24

ВСТУП

На сьогоднішній день люди все більше стикаються у своїй діяльності з задачами математичної фізики, тому усі питання, що пов'язані із цими задачами, є корисними для дослідження. З появою комп'ютерної техніки значно розширився клас математичних моделей, що допускають багатокроковий аналіз. З'явилася можливість проводити реальні обчислювальні експерименти з величезною кількістю ітерацій. Тому значно збільшилася область застосування чисельних методів для розв'язання задач математичної фізики, що призвело до нових досліджень, а згодом - більш точних та більш простих методів у реалізації [3, 10].

Темою роботи є розв'язання задачі теплопровідності з використанням методу прогонки.

Структура методу прогонки є окремим випадком методу Гауса для розв'язання СЛАУ. Метод слід застосовувати до систем із тридіагональною та п'ятидіагональною матрицями. Даний підхід є найбільш прийнятим – сприяє побудові компактних програм та суттєво полегшує програмування. При чисельному моделюванні деяких інженерних завдань та розв'язанні крайових задач для диференціальних рівнянь другого порядку доводиться зіштовхуватися із зазначеними видами матриць. Одним з прикладів таких задач є задача теплопровідності [6].

Розглянемо початково-крайову задачу теплопровідності. Розв'язок знайдемо за допомогою методу прогонки та модифікацій методу прогонки: потокового та циклічного варіантів. Розглянемо питання стійкості та збіжності методу. Знайдемо похибку методу для чисельного розв'язку початково – крайової задачі теплопровідності.

Предметом дослідження є адаптивні схеми методу прогонки рішення крайових задач параболічного типу.

Мета роботи: використання отриманих знань та отримання практичного досвіду для розв'язання початково - крайових задач параболічного типу модифікаціями методу прогонки - потоковим та циклічним варіантами.

РОЗДІЛ 1

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо можливі варіанти різницевої апроксимації лінійного одновимірного по простору рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (1.1)$$

з початковими умовами:

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (1.2)$$

та граничними:

$$\begin{cases} u(0, t) = \mu_1(t) \\ u(l, t) = \mu_2(t) \end{cases} \quad (1.3)$$

де $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$, $T > 0$ - деяка константа, $u_0(x)$ - початкова функція, неперервна та обмежена на всьому просторі, a - додатня константа (число a^2 є коефіцієнтом температуропровідності), $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ - оператор Лапласа, $f(x, t)$ - функція джерел тепла. Шукана функція $u = u(x, t)$ задає температуру в точці з координатами x в момент часу t [8].

Треба знайти роз'язок задачі (1.1)-(1.3) з використанням методу прогонки: потокового та циклічного варіантів.

РОЗДІЛ 2

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДУ ПРОГОНКИ

В області $\bar{D} = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ введемо рівномірну сітку з кроком τ по часові і кроком h по координаті:

$$x_n = nh, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad hN = l; \quad t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, J, \quad \tau J = T. \quad (2.1)$$

Для побудови різницевої апроксимації рівняння теплопровідності доведеться використовувати вузли сітки, які відповідають як мінімум двом різним j . Це пояснюється тим, що наше рівняння теплопровідності містить в собі похідні по часові t і по просторовій змінній x . В залежності від того на якому шарі j за часом апроксимується вираз $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, відповідно змінюються і властивості різницевих схем [1].

Явна схема

Щоб апроксимувати оператор $L = \frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, скористаємося шаблоном, представленим на (2.1).

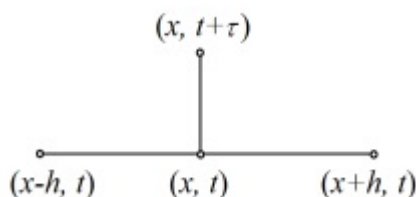


Рис. 2.1. Шаблон явної схеми рівняння теплопровідності.

Відповідний різницевий оператор $L_h^{(0)} \tau$ має вигляд:

$$L_h^{(0)} \tau u = \frac{(u(x, t+\tau) - u(x, t))}{\tau} - a^2 \frac{(u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)))}{h^2}.$$

Скористаємося наступними позначеннями (2.1) для зручності:

$$u = u(x, t); \hat{u} = u(x, t + \tau).$$

Тоді

$$u_t = \frac{\hat{u} - u}{\tau}, L_{h\tau}^{(0)} u = u_t - a^2 u_{\bar{x}x}$$

Знайдемо похибку апроксимації різницеvim оператором $L_h^{(0)}\tau$ диференціального оператора L в точці (x, t) . Для достатньо гладкої функції $u(x, t)$ при досить малих кроках h, τ маємо:

$$u_t = \frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \tau + O(\tau). \quad (2.2)$$

$$u_{\bar{x}x} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + O(h^2). \quad (2.3)$$

Різницевий оператор $L_h^{(0)}\tau$ апроксимує диференціальний оператор з похибкою $O(\tau) + O(h^2)$ у точці (x, t) :

$$L_{h\tau}^{(0)} u = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + O(h^2)$$

Різницева апроксимація рівняння теплопровідності буде мати найменшу похибку, відповідно з обраним шаблоном, у тому випадку, коли праву частину $f(x; t)$ рівняння апроксимувати у вузлах $(x_i; t_j)$, так як при оцінюванні похибки апроксимації всі вирази розкладаються за формулою Тейлора з центром у цій точці. Отже, різницева апроксимація рівняння у явній схемі для рівняння теплопровідності матиме вигляд

$$\frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} = a^2 \frac{y_{n+1}^j - 2y_n^j + y_{n-1}^j}{h^2} + f_n^j, n = 1, 2, \dots, N-1; j = 0, 1, \dots, J-1. \quad (2.4)$$

Різницеве рівняння (2.4) апроксимує вихідне диференціальне рівняння на досить гладкому розв'язку $u(x; t)$ з першим порядком похибки τ і другим порядком похибки по h [7].

Дослідимо схему на стійкість за початковими даними, скориставшись методом гармонік. Для цього візьмемо до розгляду однорідне рівняння

$$\frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} = a^2 \frac{y_{n+1}^j - 2y_n^j + y_{n-1}^j}{h^2} \quad (2.5)$$

враховуючи початкову умову

$$y_n^0 = e^{iqx_n} = e^{i\alpha x_n}, \alpha_q = qh.$$

В результаті отримаємо $y_n^j = \lambda_q^j e^{i\alpha_q n}$, де λ_q - множники зростання. Підставивши y_n^j в рівняння (2.5) та скоротивши на $\lambda_q^j e^{i\alpha_q n}$, отримаємо:

$$\frac{\lambda_q - 1}{\tau} - a^2 \frac{e^{i\alpha_q} - 2 + e^{-i\alpha_q}}{h^2} = 0.$$

Оскільки

$$\frac{e^{i\alpha_q} - 2 + e^{-i\alpha_q}}{h^2} = -\left(\frac{e^{i(\alpha_q)/2} - e^{-i(\alpha_q)/2}}{2i}\right)^2 = \sin^2(\alpha_q)/2,$$

то

$$\lambda_q(\alpha_q) = 1 - 4ra^2 \sin^2(\alpha_q)/2, r = r/h^2.$$

При зміні α_q (з врахуванням того, що число q пробігає всі значення від мінус до плюс нескінченності) число $\lambda_q(\alpha_q)$ пробігає весь спектр оператора переходу з шару на шар. В даному випадку спектр розташований на відрізку $[1 - 4ra^2; 1]$ (2.2).

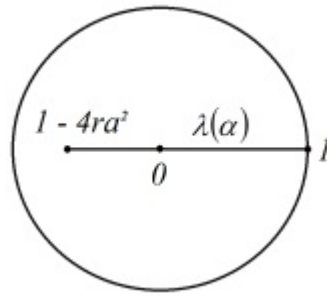


Рис. 2.2. Спектр оператора переходу з шару на шар явної схеми рівняння теплопровідності. Окружність — це межа області, у межах якої має залишатися λ , щоб була виконана спектральна умова стійкості.

Спектр оператора переходу з шару на шар явної схеми рівняння теплопровідності. Окружність - це межа області, в межах якої має залишатися λ , щоб виконувалася спектральна умова стійкості.

Необхідну умову стійкості явної схеми виконано в тому випадку, коли

$$1 - 4ra^2 \geq -1 \implies r \leq \frac{1}{2a^2} \iff \tau \leq \frac{h^2}{2a^2}.$$

Можемо продемонструвати, що ця сама умова є достатньою для стійкості схеми. З цього робимо висновок, що явна схема рівняння теплопровідності - умовно стійка. Її можна використовувати лише у випадку, коли кроки сітки задовольняють нерівність $\tau \leq \frac{h^2}{2a^2}$ [2].

Чисто неявна схема

Для апроксимації оператора $L = \frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ скористаємося шаблоном (2.3).

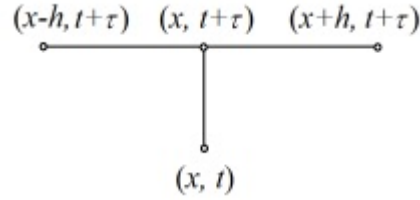


Рис. 2.3. Шаблон неявної схеми рівняння теплопровідності

В такому разі, різницева апроксимація оператора L рівняння теплопровідності має вигляд:

$$L_{h\tau}^{(1)} u = \frac{u(x, t+\tau) - u(x, t)}{\tau} - a^2 \frac{u(x+h, t+\tau) - 2u(x, t+\tau) + u(x-h, t+\tau)}{h^2} = u_t - a^2 u_{\bar{x}x}.$$

Розглянемо похибку апроксимації різницеvim оператором $L_{h\tau}^{(1)}$ вихідного диференціального оператора L в точці $(x; t+\tau)$. Оскільки для досить гладкої функції $u(x; t)$ справедливо

$$u_t = \frac{\partial u(x, t+\tau)}{\partial t} + O(\tau), \quad (2.6)$$

$$\tilde{u}_{\bar{x}x} = \frac{\partial^2 u(x, t+\tau)}{\partial x^2} + O(h^2). \quad (2.7)$$

то оператор $L_{h\tau}^{(1)} u = \frac{\partial u(x, t+\tau)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u(x, t+\tau)}{\partial x^2} + O(\tau) + O(\tau^2)$. Апроксимуючи рівняння відповідно до вибраного шаблону зручно взяти праву частину рівняння в точці $(x_n, t_j + 1)$, щоб зменшити похибку. Отже, різницева

апроксимація рівняння теплопровідності з використанням чисто неявної схеми виглядає наступним чином

$$\frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} = a^2 \frac{y_{n+1}^{j+1} - 2y_n^{j+1} + y_{n-1}^{j+1}}{h^2} + f_n^{j+1}, n = 1, 2, \dots, N-1; j = 0, 1, \dots, J-1. \quad (2.8)$$

Дослідимо неявну схему на стійкість, використовуючи початкові дані, методом гармонік. Для цього візьмемо до розгляду однорідне рівняння

$$\frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} = a^2 \frac{y_{n+1}^{j+1} - 2y_n^{j+1} + y_{n-1}^{j+1}}{h^2}. \quad (2.9)$$

Підставивши $y_n^j = \lambda_q^j e^{iqx_n}$, $\alpha_q = qh$ і, скоротивши на $\lambda_q^j e^{iqx_n}$, отримаємо:

$$\lambda_q - 1 - \frac{a^2 \tau}{h^2} \lambda_q (e^{i\alpha_q} - 2 + e^{-i\alpha_q}) = 0 \Rightarrow \quad (2.10)$$

$$\lambda_q(\alpha_q) = \frac{1}{1 + 4ra^2 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2}}, r = \frac{\tau}{h^2}. \quad (2.11)$$

Спектр $\lambda_q(\alpha_q)$ заповнює відрізок дійсної осі:

$$\frac{1}{1 + 4ra^2} \leq \lambda_q(\alpha_q) \leq 1, \quad (2.12)$$

тобто, незалежно від обраного r , необхідна умова стійкості $|\lambda_q| \leq 1$ все одно виконується. Можна показати, що неявна схема для рівняння теплопровідності справді є безумовно стійкою, тобто стійкою при будь-якому співвідношенні кроків τ і h сітки [4].

Метод прогонки для систем з трьохдіагональною матрицею

Основним прямим методом, використовуваним для розв'язання СЛАУ, що виникають в різницевих схемах для початково-краєвих задач математичної фізики, є метод прогонки і можливі його варіанти. Класичний варіант методу прогонки, також відомий як монотонна права прогонка, являє собою метод Гауса без вибору головного елемента для систем з трьохдіагональною

матрицею. Візьмемо до розгляду систему:

$$\begin{cases} -c_0y_0 + b_0y_1 = -f_0, (i = 0) \\ a_iy_{i-1} - c_iy_i + b_iy_{i+1} = -f_i, (i = 1, 2, \dots, N-1), \\ a_Ny_{N-1} - c_Ny_N = -f_N, (i = N). \end{cases} \quad (2.13)$$

Будемо формально виключати елементи нижче головної діагоналі, а потім сформуємо достатні умови для застосування відповідного алгоритму. Нехай $c_0 \neq 0$. Тоді перше рівняння системи перепишемо так:

$$y_0 = \frac{b_0}{c_0}y_1 + \frac{f_0}{c_0} = \alpha_0y_1 + \beta_0 \quad (2.14)$$

Виключимо з другого рівняння y_0 :

$$\begin{aligned} a_1y_0 - c_1y_1 + b_1y_2 &= -f_1 \Rightarrow a_1(\alpha_0y_1 + \beta_0) - c_1y_1 + b_1y_2 = -f_1 \Rightarrow \\ y_1 &= \frac{b_1}{c_1 - a_1\alpha_0}y_2 + \frac{f_1 + a_1\beta_0}{c_1 - a_1\alpha_0} = \alpha_1y_2 + \beta_1, \\ \alpha_1 &= \frac{b_1}{c_1 - a_1\alpha_0}, \beta_1 = \frac{f_1 + a_1\beta_0}{c_1 - a_1\alpha_0}, c_1 - a_1\alpha_0 \neq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y_i = \alpha_iy_{i+1} + \beta_i, i = 0, 1, \dots, N-1 \\ y_N = \beta_N, \end{cases} \quad (2.15)$$

$\alpha_0 = \frac{b_0}{c_0}, \beta_0 = \frac{f_0}{c_0}, \alpha_i = \frac{b_i}{c_i - a_i\alpha_{i-1}}, \beta_i = \frac{f_i + a_i\beta_{i-1}}{c_i - a_i\alpha_{i-1}}$. Обчислення коефіцієнтів α і β за цими формулами називається прямим ходом прогонки. Після їх знаходження, розв'язок вихідної системи може бути знайдений в результаті зворотнього ходу прогонки:

$$\begin{cases} -c_0y_0 + b_0y_1 = -f_0, (i = 0) \\ a_iy_{i-1} - c_iy_i + b_iy_{i+1} = -f_i, (i = 1, 2, \dots, N-1), \\ a_Ny_{N-1} - c_Ny_N = -f_N, (i = N) \end{cases} \quad (2.16)$$

Задаємо початкову умову для розв'язання системи

$$\begin{cases} \frac{r}{h^2}y_{n-1}^{j+1} - (1 + \frac{2r}{h^2})y_n^{j+1} + \frac{r}{h^2}y_{n+1}^{j+1} = -(y_n^j + rx_n), \\ y_N = \beta_N, \\ y_{N-1}^{j+1} - y_N^{j+1} = -ht_{j+1} \\ n = 1, 2, \dots, N-1. \end{cases} \quad (2.17)$$

для $n = 0, 1, \dots, N$ та в циклі по $j = 0, 1, \dots, J-1$ розв'язуємо систему методом прогонки [5].

Варіанти методу прогонки

Потоковий варіант методу прогонки

Розглянемо один з варіантів методу прогонки, який знайшов своє застосування в розв'язанні різницьових задач з коефіцієнтами, які сильно змінюються. Яскравим прикладом є задачі гідродинаміки з теплопровідністю і магнітної гідродинаміки, де коефіцієнти теплопровідності, електропровідності залежать від термодинамічних параметрів середовища [9].

Часто в таких задачах, окрім самого розв'язання, необхідним є знаходження потоку тепла (теплова задача). При розв'язанні різницьових рівнянь другого порядку, до яких зводяться різницьові схеми для цих задач, за формулами звичайної прогонки часто відбувається незначна втрата точності. Використання числового диференціювання для обчислення потоку призводить до незадовільного результату. Позбутися від цього недоліку вдається шляхом переходу до так званого потокового варіанту методу прогонки, формули для якого можна отримати в результаті перетворення формул звичайної прогонки [9].

Отже, беремо до розгляду різницьову краєву задачу

$$-a_i y_{i-1} + c_i y_i - a_{i+1} y_{i+1} = f_i, \quad (2.18)$$

$$y_0 - x_1 y_1 = \mu_1, y_N - x_2 y_{N-1} = \mu_2,$$

де

$$c_i = a_i + a_{i+1} + d_i, 0 < a_i < \infty, \quad (2.19)$$

$$d_i > 0, i = 1, 2, \dots, N-1, |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1. \quad (2.20)$$

Формули правої прогонки з врахуванням (2.19) для задачі (2.18) набувають вигляду

$$y_i = \bar{\alpha}_{i+1}y_{i+1} + \bar{\beta}_{i+1}, i = N-1, N-2, \dots, 0, y_N = \frac{\mu_2 + x_2\bar{\beta}_N}{1 - x_2\bar{\alpha}_N}, \quad (2.21)$$

$$\bar{\alpha}_{i+1} = \frac{a_{i+1}}{a_{i+1} + d_i + a_i(1 - \bar{\alpha}_i)}, i = 1, 2, \dots, N-1, \bar{\alpha}_1 = x_1, \quad (2.22)$$

$$\bar{\beta}_{i+1} = (f_i + a_i\bar{\beta}_i)\frac{\bar{\alpha}_{i+1}}{a_{i+1}}, i = 1, 2, \dots, N-1, \bar{\beta}_1 = \mu_1. \quad (2.23)$$

Введемо нову невідому сіткову функцію (потік) за формулою

$$\omega_i = -a_i(y_i - y_{i-1}), i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.24)$$

і перепишемо (2.18) у вигляді

$$\omega_{i+1} - \omega_i + d_i y_i = f_i, 1 \leq i \leq N-1, \quad (2.25)$$

$$y_0 - x_1 y_1 = \mu_1, i = 0,$$

$$-x_2 \omega_N + a_N(1 - x_2)y_N = a_N \mu_2, i = N.$$

$$y_0 - x_1 y_1 = \mu_1, i = 0, (2.24)$$

$$y_i = y_{i+1} + \frac{1}{a_{i+1}}\omega_{i+1}, i = 0, 1, \dots, N-1,$$

підставимо в (2.21). В результаті знайдемо співвідношення, яке зв'язує y_{i+1} і ω_{i+1} :

$$\omega_{i+1} + a_{i+1}(1 - \bar{\alpha}_{i+1})y_{i+1} = a_{i+1}\bar{\beta}_{i+1}, i = 0, 1, \dots, N-1. \text{ Введемо позначення}$$

$$\alpha_i = a_i(1 - \bar{\alpha}_i), \beta_i = \alpha_i\bar{\beta}_i, i = 1, 2, \dots, N,$$

перепишемо це співвідношення у вигляді

$$\omega_i + \alpha_i y_i = \beta_i \quad (2.26)$$

$$i = 1, 2, \dots, N.$$

Звернемо увагу на той факт, що рівняння (2.25), (2.26) представляють собою алгебраїчну систему, яка містить $2N + 1$ рівняння відносно $2N + 1$ невідомих $y_0, y_1, \dots, y_N$ і $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$. Структура цієї системи така, що вона розкладається на дві незалежні системи для невідомих $y_0, y_1, \dots, y_N$ і $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$. Побудуємо ці системи [9].

З (2.26) виразимо y_i : $y_i = (\beta_i - \omega_i)/\alpha_i, i = 1, 2, \dots, N$ і підставимо в рівняння системи (2.25) для $i = 1, 2, \dots, N$. В результаті отримаємо рівняння

$$\omega_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_i + d_i} \omega_{i+1} + \frac{d_i \beta_i - \alpha_i f_i}{\alpha_i + d_i}, \quad (2.27)$$

$$i = N - 1, N - 2, \dots, 1,$$

$$\omega_N = \frac{a_N[(1 - x_2)\beta_N - \alpha_N \mu_2]}{(1 - x_2)\alpha_N + \alpha_N x_2},$$

розв'язуючи які послідовно знайдемо всі ω_i .

Отримаємо тепер рівняння для y_i . Для цього виразимо ω_i з (2.26): $\omega_i = -\alpha_i y_i + \beta_i, i = 1, 2, \dots, N$ і підставимо в (2.25) для $i = 1, 2, \dots, N$. В результаті отримаємо рівняння

$$y_i = \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i + d_i} y_{i+1} + \frac{f_i - \beta_{i+1} + \beta_i}{\alpha_i + d_i}, \quad (2.28)$$

$$i = N - 1, N - 2, \dots, 1, y_0 = x_1 y_1 + \mu_1, y_N = \frac{x_2 \beta_N + a_N \mu_2}{(1 - x_2) a_N + \alpha_N x_2}$$

для послідовного обчислення y_i .

Вкажемо рекурентні формули для обчислення α_i і β_i . Використовуючи (2.22) і (2.23), знайдемо

$$\alpha_{i+1} = a_{i+1}(1 - \bar{\alpha}_{i+1}) = \frac{a_{i+1}[a_i(1 - \bar{\alpha}_i) + d_i]}{a_{i+1} + d_i + a_i(1 - \bar{\alpha}_i)} = \frac{a_{i+1}(\alpha_i + d_i)}{a_{i+1} + \alpha_i + d_i}, \quad (2.29)$$

$$i = 1, 2, \dots, N - 1, \alpha_1 = a_1(1 - x_1),$$

$$\beta_{i+1} = a_{i+1}\bar{\beta}_{i+1} = \frac{a_{i+1}(f_i + \beta_i)}{a_{i+1} + \alpha_i + d_i}, \quad (2.30)$$

$$i = 1, 2, \dots, N - 1, \beta_1 = a_1\mu_1.$$

З умов (2.19), (2.20) і формул (2.29) витікає, що $\alpha_i \geq 0$. Тоді коефіцієнт $\alpha_i/(\alpha_i + d_i)$ в формулі (2.27) не перебільшує одиницю, що забезпечує стійкість алгоритму при обчисленні ω_i . Далі, так як з умов $\alpha_i \geq 0$ і $d_i > 0$ витікає, що $a_{i+1} < a_{i+1} + \alpha_i + d_i$, тоді в силу (2.29) справедлива нерівність $\alpha_{i+1} < \alpha_i + d_i$. Тому коефіцієнт $\alpha_{i+1}/(\alpha_i + d_i)$ в формулі (2.28) завжди менше від одиниці, що забезпечує стійкість при знаходженні y_i . Відмітимо, що знаменник у виразах для ω_N і y_N завжди більше від нуля [9].

Отже, алгоритм потокової прогонки описується формулами (2.27)-(3.1). Варто відмітити, що вказаними рекурентними формулами для α_i і β_i , а також виразами для y_N і ω_N доцільно скористатися у випадку, якщо $a_{i+1} < 1$. Якщо $a_{i+1} \geq 1$, то рекомендують використовувати наступні формули, отримувані з (2.27)-(3.1) діленням чисельника і знаменника дробів на a_{i+1} :

$$\alpha_{i+1} = \frac{\alpha_i + d_i}{1 + (\alpha_i + d_i)/a_{i+1}}, \beta_{i+1} = \frac{f_i + \beta_i}{1 + (\alpha_i + d_i)/a_{i+1}},$$

$$y_N = \frac{x_2\beta_N/a_N + \mu_2}{1 - x_2 + x_2\alpha_N/a_N}, \omega_N = \frac{(1 - x_2)\beta_N - \alpha_N\mu_2}{1 - x_2 + x_2\alpha_N/a_N}.$$

Циклічний варіант методу прогонки

Розглянемо наступну систему

$$-a_i y_{i-1} + c_i y_i - b_i y_{i+1} = f_i, i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.31)$$

коефіцієнти та права частина, якої періодична з періодом N :

$$a_i = a_{i+N}, b_i = b_{i+N}, c_i = c_{i+N}, f_i = f_{i+N} \quad (2.32)$$

При виконанні умови (2.32) розв'язок системи (3.2), якщо він існує, теж буде періодичним з періодом N , тобто:

$$y_i = y_{i+N}. \quad (2.33)$$

Тому достатньо знайти розв'язок y_i , наприклад, при $i = 0, 1, \dots, N - 1$. В цьому випадку (3.2)-(2.33) можна записати так:

$$-a_0 y_{N-1} + c_0 y_0 - b_0 y_1 = f_0, i = 0, \quad (2.34)$$

$$-a_i y_{i-1} + c_i y_i - b_i y_{i+1} = f_i, 1 \leq i \leq N - 1,$$

$$y_N = y_0. \quad (2.35)$$

Умову (2.35) ми додали до системи (2.34), щоб з рівняння системи для $i = N - 1$ не виключати y_N , замінюючи його на y_0 . Це дозволяє зберегти один вигляд для рівняння (2.34) при $i = 1, 2, \dots, N - 1$ [9].

Якщо ввести вектори невідомих $Y = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$ та праву частину $F = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$, то (2.34), (2.35) можна записати у векторному вигляді $AY = F$, де

$$A = \begin{bmatrix} c_0 & -b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_0 \\ -a_i & c_1 & -b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & c_2 & -b_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{N-3} & -b_{N-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{N-2} & c_{N-2} & -b_{N-2} \\ -b_{N-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{N-1} & c_{N-1} \end{bmatrix}$$

- матриця системи (2.34), (2.35). Для знаходження розв'язку системи (2.34), (1.35) побудуємо варіант методу прогонки, який називається методом циклічної прогонки.

Розв'язок задачі (2.34), (2.35) знайдемо у вигляді лінійної комбінації

сіткових функцій u_i, v_i :

$$y_i = u_i + y_0 v_i, 0 \leq i \leq N, \quad (2.36)$$

де u_i є розв'язком неоднорідної триточнової крайової задачі

$$-a_i u_{i-1} + c_i u_i - b_i u_{i+1} = f_i, 1 \leq i \leq N-1, u_0 = 0, u_N = 0. \quad (2.37)$$

з однорідними крайовими умовами, а v_i - розв'язок однорідної триточнової крайової задачі

$$-a_i v_{i-1} + c_i v_i - b_i v_{i+1} = 0, 1 \leq i \leq N-1, v_0 = 1, v_N = 1. \quad (2.38)$$

з неоднорідними крайовими умовами.

Знайдемо, за якої умови y_i (2.36) шуканий розв'язок існує. Помноживши (2.38) на y_0 , додаючи до (2.37) та враховуючи (2.36), отримаємо, що рівняння (2.35) для $i = 1, 2, \dots, N-1$ будуть виконані. З крайових умов для u_i, v_i бачимо, що буде виконано співвідношення (2.35). Таким чином, якщо y_i , що визначається за формулою (2.36), буде задовільняти рівнянню системи (2.34), яке залишилось невикористаним, для $i = 0$, то задача буде розв'язана. Підставляючи (2.36) в це рівняння, отримаємо

$$-a_0 u_{N-1} + a_0 y_0 v_{N-1} + c_0 y_0 - b_0 u_1 - b_0 y_0 v_1 = f_0. \quad (2.39)$$

Таким чином, якщо обрати y_0 за формулою

$$y_0 = \frac{f_0 + a_0 u_{N-1} + b_0 u_1}{c_0 - a_0 v_{N-1} - b_0 v_1}, \quad (2.40)$$

то рівність (2.39) буде виконана та розв'язок задачі (2.34) та (2.35) можна знайти за формулою (2.36) [9].

Зупинимось тепер на розв'язанні систем (2.37) та (2.38). Вони є окремими випадками триточкових систем рівняння. Для (2.37) та (2.38) формули прогонки приймають наступний вигляд:

$$u_i = \alpha_{i+1} u_{i+1} + \beta_{i+1}, i = N-1, N-2, \dots, 1, u_N = 0, \quad (2.41)$$

$$v_i = \alpha_{i+1}v_{i+1} + \gamma_{i+1}, i = N-1, N-2, \dots, 1, v_N = 1,$$

де прогоночні коефіцієнти $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ знаходяться за наступними формулами:

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i\alpha_i}, i = 1, 2, \dots, N, \alpha_1 = 0, \quad (2.42)$$

$$\beta_{i+1} = \frac{f_i + a_i\beta_i}{c_i - a_i\alpha_i}, i = 1, 2, \dots, N, \beta_1 = 0, \quad (2.43)$$

$$\gamma_{i+1} = \frac{a_i\gamma_i}{c_i - a_i\alpha_i}, i = 1, 2, \dots, N, \gamma_1 = 1, \quad (2.44)$$

Перетворимо (2.40). З (2.41) отримаємо $u_{N-1} = \alpha_N u_N + \beta_N = \beta_N, v_{N-1} = \gamma_N + \alpha_N$. Підставимо ці вирази в (2.40) та врахуємо умови (2.32), (2.42)-(2.44):

$$y_0 = \frac{f_N + a_N\beta_N + \beta_N u_1}{c_N - a_N\alpha_N - a_N\gamma_N - b_N v_1} = \frac{\beta_{N+1} + \alpha_{N+1}u_1}{1 - \gamma_{N+1} - \alpha_{N+1}v_1}.$$

Побудовано алгоритм розв'язання задачі (2.34), (2.35), який має назву - метод циклічної прогонки:

$$\alpha_2 = b_1/c_1, \beta_2 = f_1/c_1, \gamma_2 = a_1/c_1,$$

$$\begin{aligned} \alpha_{i+1} &= \frac{b_i}{c_i - a_i\alpha_i}, \beta_{i+1} = \frac{f_i + a_i\beta_i}{c_i - a_i\alpha_i}, \gamma_{i+1} = \frac{a_i\gamma_i}{c_i - a_i\alpha_i}, i = 2, 3, \dots, N; u_{N-1} = \beta_N, v_{N-1} = \\ &\alpha_N + \gamma_N, u_i = \alpha_{i+1}u_{i+1} + \beta_{i+1}, v_i = \alpha_{i+1}v_{i+1} + \gamma_{i+1}, i = N-2, N-3, \dots, 1; \\ y_0 &= \frac{\beta_{N+1} + \alpha_{N+1}u_1}{1 - \gamma_{N+1} - \alpha_{N+1}v_1}, y_i = u_i + y_0v_i, i = 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (2.45)$$

РОЗДІЛ 3

РОЗ’ЯЗАННЯ ПОЧАТКОВО - КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ЗА ДОПОМОГОЮ МОВИ ПРОГРАМУВАННЯ

Обчислювальний експеримент

Для прикладу розглянемо початково-крайову задачу на відріжку $x \in [0,1]$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x, 0 < x < 1, 0 < t \leq 1 \\ u(x,0) = \sin(\frac{3\pi x}{2}), \\ u(0,t) = 0, \frac{\partial u}{\partial x} = t, x = 1. \end{cases} \quad (3.1)$$

Спочатку знайдемо аналітичний розв’язок задачі (4.1). З огляду на її лінійність розв’язок можна шукати як $u(x;t) = v(x;t) + xt$, де функція $v(x;t)$ задовольняє задачі з однорідними граничними умовами:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, 0 < x < 1, 0 < t \leq 1, \\ v(x,0) = \sin(\frac{3\pi x}{2}), \\ v(0,t) = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0, x = 1. \end{cases} \quad (3.2)$$

Використовуючи метод розділення змінних, отримаємо: $v = e^{(\frac{-3\pi}{2})^2 t} \sin(\frac{3\pi x}{2})$. Отже, аналітичний розв’язок задачі (2.1) має вигляд (рис.2.1):

$$u(x,t) = xt + e^{(\frac{-3\pi}{2})^2 t} \sin(\frac{3\pi x}{2})$$

Для отримання чисельного розв’язку проведемо обчислювальний експеримент, використовуючи пакет для інженерних та математичних розрахунків. Побудуємо програму. Знайдемо розв’язки задачі за допомогою потокового та циклічного варіантів методу прогонки. Результати експерименту представлені нижче на рисунках (3.1—3.5).

Підрахуємо число арифметичних дій, які необхідні для реалізації (2.27)-(3.1). При розумному обчисленні, коли загальні для декількох формул

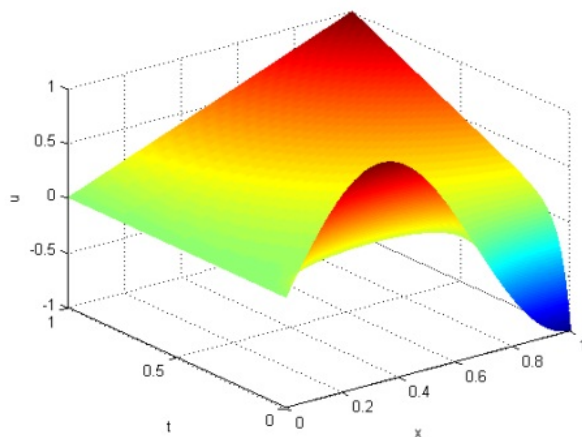


Рис. 3.1. Аналітичний розв'язок задачі (3.1)—(3.2).

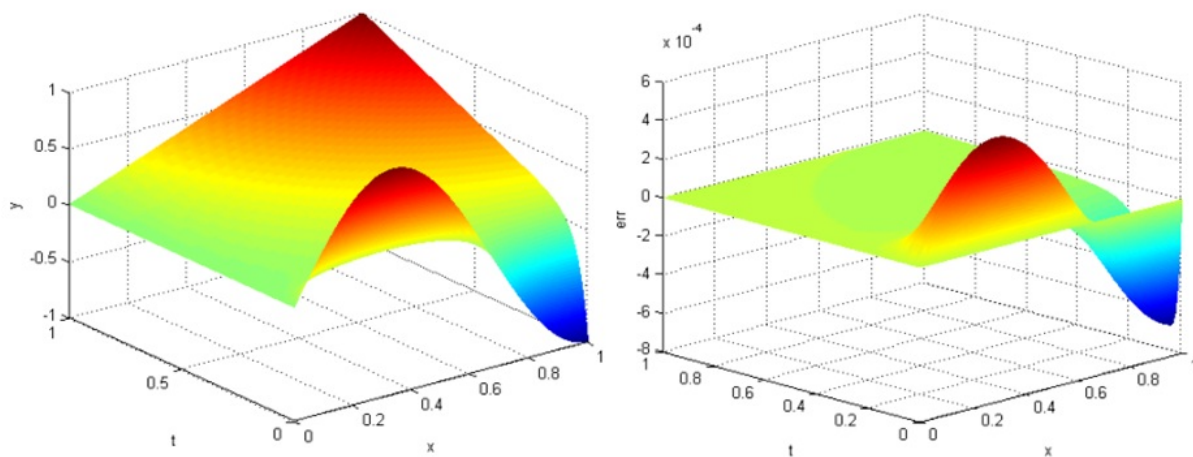


Рис. 3.2. Чисельний розв'язок задачі (3.1)—(3.2) за допомогою явної схеми та похибка чисельного рішення за допомогою явної схеми.

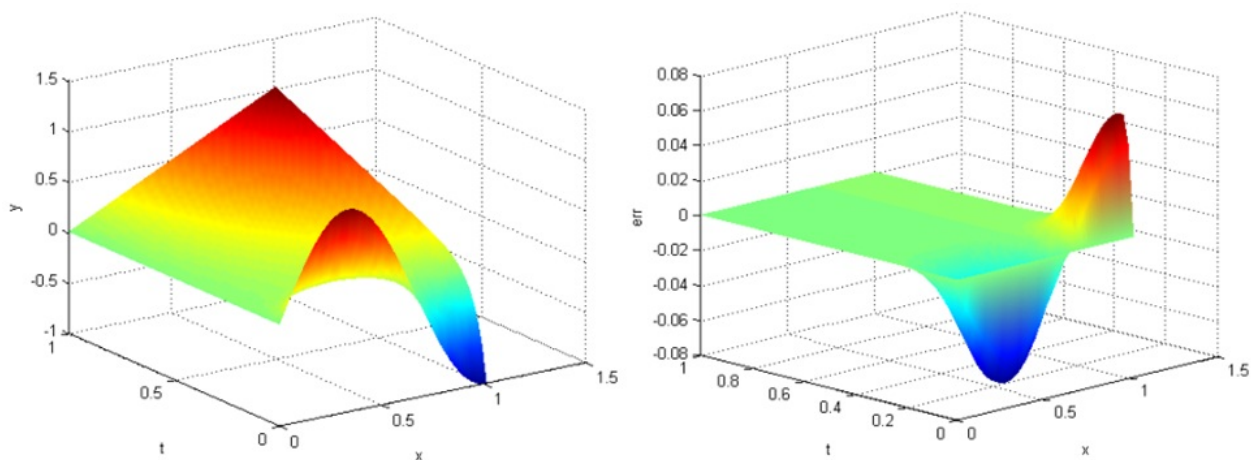


Рис. 3.3. Чисельний розв'язок задачі (3.1)—(3.2) за допомогою неявної схеми та похибка чисельного рішення за допомогою неявної схеми

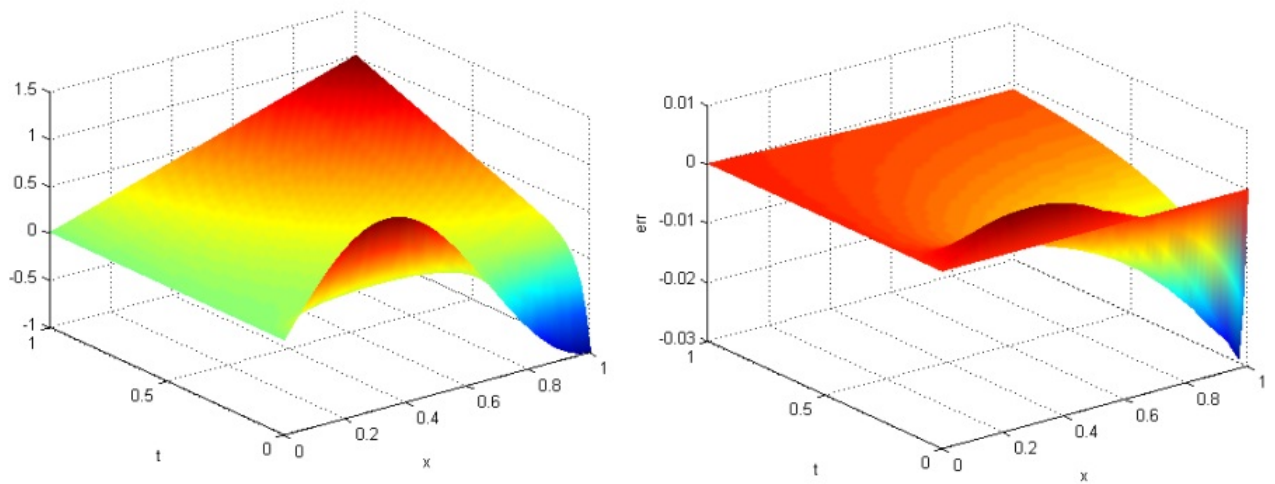


Рис. 3.4. Чисельний розв'язок задачі (3.1)—(3.2) за допомогою потокового варіанту методу прогонки та її похибка на сітці

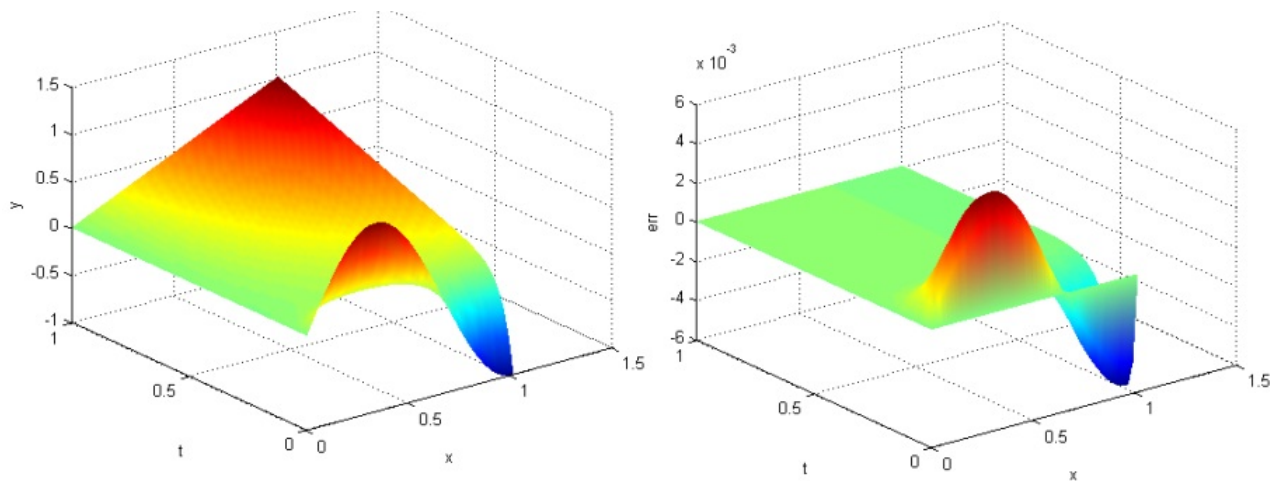


Рис. 3.5. Чисельний розв'язок задачі (3.1)—(3.2) за допомогою циклічного варіанту методу прогонки та її похибка на сітці

вирази обчислюються за один раз, а загальні множники при декількох доданках виносяться за дужку, число дій для (2.27)-(3.1) складає $Q = 21N + 1$ операцій. Це приблизно в 2 рази більше того числа дій, які необхідно було би витратити, щоби за формулами звичайної прогонки знайти розв'язок y_i задачі (2.18), а потім за формулою (2.24) знайти потік ω_i [9].

Розрахунок показує, що для реалізації методу необхідно $6(N - 1)$ множень, $5N - 3$ додавань та віднімань, $3N + 1$ ділень. Загальне число: $Q = 14N - 8$ [9].

ВИСНОВКИ

В роботі розглянуто початково-крайову задачу теплопровідності. Наведено схему побудови числових розв'язків початково-крайової задачі для рівняння параболічного типу.

Проведено обчислювальний експеримент. Розв'язок знайдено за допомогою методу прогонки та модифікацій методу прогонки: потокового та циклічного варіантів. При розв'язанні рівнянь з коефіцієнтами, які сильно змінюються, застосовується потоковий варіант методу прогонки. В випадку теплових задач можуть мати місце адіабатичні ділянки, де теплопровідність відсутня, а також ізотермічні ділянки, де теплопровідність нескінченно велика. Для знаходження періодичного розв'язку нескінченної послідовності рівнянь з періодичними коефіцієнтами використовується циклічний варіант методу прогонки. Розглянуто питання стійкості та збіжності методу.

Підтверджено, що циклічний та потоковий варіанти методу прогонки являються стійкими, так як в основу розв'язання задачі покладено звичайний метод прогонки, що є стійким при додатніх значеннях коефіцієнтів, а знаменник початкового значення сіткової функції не обертається в нуль. Збіжність методів підтверджено експериментом.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бабенко К.І. Основи чисельного аналізу. — М.: Наука, 1975.
2. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений.—Том 2, 1962.
3. Вербіцький В.В., Реут В.В. Введення в чисельні методи аналізу і диференціальних рівнянь: навчальний посібник — Одеса: Одеський національний університет імені І.І.Мечникова, 2017.
4. Возняк Л.С., Шарин С.В. Чисельні методи: Методичний посібник для студентів природничих спеціальностей. — Івано-Франківськ: „Плай“, 2001.
5. Волков Е.А. Численные методы: Учебное пособие для вузов.— 2-е изд., испр. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат.лит., 1987.
6. Волонтир Л.О., Зелінська О.В., Потапова Н.А., Чіков І.А. Чисельні методи: Навчальний посібник. — Вінниця, Вінницький національний аграрний університет: ВНАУ, 2020.
7. Гончаров О.А., Васильєва Л.В., Юнда А.М. Чисельні методи розв’язання прикладних задач: навч. посіб.— Суми: Сумський державний університет, 2020.
8. Самарський А.А., Гулін А.В. Чисельні методи. — М.: Наука, 1989.
9. Самарський А.А., Ніколаєв Є.С. Чисельні методи сіткових рівнянь. — М.: Наука, 1978.
10. Таїрова М.С., Журавльова З.Ю. Чисельні методи розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь: метод.вказ. та варіанти завд. для контр. і самост. робіт з дисц. «Методи обчислень». — Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 2019.

ДОДАТОК А. КОД ПРОГРАМИ

Код програми для розв'язання початково - крайової задачі теплопровідності з використанням методу прогонки.

```

clc;
b = 1;
h = 0.1;
x = 0:h:b;
N = length(x);
Nx = N;
t_end = 10;
M = 1;
mu = 40.0;
r = 72;
S = 46;
T0 = 120
T1 = 0;
T2 = 0;
bt = mu/(r*S);
hx = M/(Nx-1);
tau = 0.25*(hx^2)/bt;
tau_t(Nx) = 0;
for m = 1:Nx
    if m < ceil(Nx/4)
        r(m) = 72;
    elseif m > ceil(2*Nx/3)
        r(m) = 40;
    else r(m) = 150;
    end;
end;
for m = 1:Nx
    bt(m) = mu/(r(m)*S);
    tau_t(m) = 0.25*(hx^2)/bt(m);
end;

```

```

tau = min(tau_t);
T = ones(Nx,1)*T0;
Rtime = 0;
T(1) = 0;
T(end) = 0;
for m = 1:Nx
    k_x(m)= (mu/(r(m)*S))*tau/hx^2;
end;
plot(x, T, 'Color', 'red', 'LineWidth', 3);
hold on
while Rtime < t_end
    Rtime = Rtime + tau;

    TT=T;
for m = 2:Nx-1
    for n = 2:Ny-1
        for p = 2:Nz-1
            H(m,n,p) = H(m,n,p) +
            tau/hx*((-1)*(T(m,n,p)-T(m-1,n,p)))
            /(hx/2*(1/mu(m-1,n,p)+1/mu(m,n,p))) - ...
            (-1)*(T(m+1,n,p)-T(m,n,p))
            /(hx/2*(1/mu(m,n,p)+1
            /mu(m+1,n,p)))) + ...
            tau/hy*((-1)*(T(m,n,p)-T(m,n-1,p)))
            /(hy/2*(1/mu(m,n-1,p)+1
            /mu(m,n,p))) - ...
            (-1)*(T(m,n+1,p)-T(m,n,p))
            /(hy/2*(1/mu(m,n,p)+1
            /mu(m,n+1,p)))) + ...
            tau/hz*((-1)*(T(m,n,p)-T(m,n,p-1)))
            /(hz/2*(1/mu(m,n,p-1)+1
            /mu(m,n,p))) - ...
            (-1)*(T(m,n,p+1)-T(m,n,p))
            /(hz/2*(1/mu(m,n,p)+1

```

```

                                /mu(m,n,p+1)))));
        end
    end
end
    plot(x,T);
    title(num2str(Rtime));
    hold on
    pause(0.5);
end
plot(x, T, 'Color', 'blue', 'LineWidth', 5);

```