МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені І. І. МЕЧНИКОВА
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФІЗИКИ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
КАФЕДРА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ І ЕКОНОМІЧНОЇ КІБЕРНЕТИКИ

ТЕОРІЯ КЕРУВАННЯ

Частина 1

Методичні вказівки до практичних занять
та самостійної роботи
здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
спеціальності 113 Прикладна математика

ОДЕСА
Олді+
2023

УДК 517.977(072)

Т338

Укладачі:

О. Д. Кічмаренко, доктор фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри оптимального керування і економічної кібернетики;

Н. В. Скрипник, доктор фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри оптимального керування і економічної кібернетики;

А. О. Стехун, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри оптимального керування і економічної кібернетики.

Рецензенти:

В. В. Вербіцький, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математичного та комп’ютерного моделювання Одеського національного університету імені І. І. Мечникова;

А. Т. Яровий, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри оптимального керування і економічної кібернетики Одеського національного університету імені І. І. Мечникова.

Рекомендовано вченою радою
факультету математики, фізики та інформаційних технологій
ОНУ імені І. І. Мечникова.
Протокол № 6 від 14 червня 2022 р.

Т338 **Теорія** керування. Частина І : методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи здобувачів першого (бакалавр.) рівня вищої освіти спеціальності 113 Прикладна математика / уклад.: О. Д. Кічмаренко, Н. В. Скрипник, А. О. Стехун. – Одеса : Олді+, 2023. – 67 с.

У методичних вказівках викладається перша частина змісту дисципліни «Теорія керування», зокрема основні поняття та положення теорії оптимального керування та її центральний результат - принцип максимуму Понтрягіна. Наведено прикладні проблеми, математичними моделями яких є задачі оптимального керування. В алгоритмічній формі подано порядок розв’язання задачі оптимального керування за допомогою принципу максимуму. Розглядається низка прикладів застосування принципу максимуму для перевірки керувань на оптимальність та побудови оптимальних розв’язків задачі.

Методичні вказівки розроблені для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 113 Прикладна математика та допомагають при підготовці до лекцій, практичних занять, при виконанні індивідуальних завдань під час самостійної роботи, можуть бути корисними для тих, хто цікавиться застосуванням теорії оптимального керування до розв’язання прикладних задач.

УДК 517.977(072)

ЗМІСТ

Вступ

«Теорія керування» є невід'ємною навчальною компонентою фахового спрямування в програмі підготовки бакалаврів за спеціальністю 113- «Прикладна математика», вона базується на знаннях з теорії диференціальних рівнянь, математичного аналізу, числових методів, методів оптимізації. Дисципліна є базовою для вибіркового курсу фахового спрямування «Прикладні задачі керування» бакалаврського рівня підготовки за спеціальністю 113- «Прикладна математика» та для обов'язкових фахових дисциплін «Асимптотичні методи в задачах керування» і «Множиннозначний аналіз» програми підготовки магістрів за цією ж спеціальністю.

Вивчення дисципліни «Теорія керування» забезпечує набуття таких фахових компетентностей: ФК02 - Здатність виконувати завдання, сформульовані у математичній формі; ФК03 - Здатність обирати та застосовувати математичні методи для розв’язання прикладних задач, моделювання, аналізу, проектування, керування, прогнозування, прийняття рішень; ФК14 - Здатність сформулювати математичну постановку задачі, спираючись на постановку мовою предметної галузі, та обирати метод її розв’язання, що забезпечує потрібні точність і надійність результату, а також забезпечує досягнення таких результатів навчання: РН03 - Формалізувати задачі, сформульовані мовою певної предметної галузі; формулювати їх математичну постановку та обирати раціональний метод вирішення; розв’язувати отримані задачі аналітичними та чисельними методами, оцінювати точність та достовірність отриманих результатів; РН10 - Володіти методиками вибору раціональних методів та алгоритмів розв’язання математичних задач оптимізації, дослідження операцій, оптимального керування і прийняття рішень, аналізу даних, які передбачені Стандартом вищої освіти за спеціальністю 113- «Прикладна математика» для першого (бакалаврського) рівня вищої освіти.

Оптимальне керування є розділом теорії екстремальних задач (теорії оптимізації), який присвячено дослідженню та вирішенню задач максимізації та мінімізації функціоналів на множині функцій спеціального виду. Це задачі вибору найвигідніших (оптимальних) режимів керування складними об'єктами, еволюція яких описуються за допомогою систем звичайних диференціальних рівнянь.

У методичних вказівках викладається перша частина змісту дисципліни «Теорія керування», зокрема основні поняття та положення теорії оптимального керування та її центральний результат - принцип максимуму Понтрягіна. Наведено прикладні проблеми, математичними моделями яких є задачі оптимального керування. В алгоритмічній формі подано порядок розв'язання задачі оптимального керування за допомогою принципу максимуму. Розглядається низка прикладів застосування принципу максимуму для перевірки керувань на оптимальність та побудови оптимальних розв'язків задачі. В кінці методичних вказівок наведено варіанти завдань для самостійної роботи студентів.

Мета методичних вказівок – допомогти студентам зрозуміти специфіку задач оптимального керування як розділу теорії екстремальних задач; навчити орієнтуватися в різних постановках задач оптимального керування; набути навички вирішення типових задач оптимального керування.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

1.1. Задача оптимального керування

Керований об'єкт (керована система) - це деяка машина, модель, прилад, процес, конструкція тощо, забезпечена «кермом». Маніпулюючи «кермом» (в допустимих межах, тобто з урахуванням наявних ресурсів керування), ми тим самим визначаємо поведінку, рух об'єкта, керуємо ним. Таке «кермо» може мати кілька регуляторів з певним діапазоном регулювання, що змінюють налаштування роботи системи.

Слово "кермо" взято в лапки, оскільки під "кермом" розуміється не обов'язково пристрій, відповідний загальноприйнятому значенню цього слова, а будь-який фактор (фактори), що дає можливість впливати на рух об'єкта. Так керувати автомобілем можна, повертаючи кермо вліво або вправо, на натискаючи на педаль акселератора або на педаль тормозу, при цьому ресурси керування характеризуються максимально можливим кутом повороту коліс і потужністю двигуна. Якщо в якості керованого об'єкта розглядати технологічний процес протікання хімічної реакції, то роль "керма" можуть відігравати склад інгредієнтів, кількість каталізатора, підтримувана температура та інші фактори, від яких залежить перебіг реакції.

Будемо вважати, що нам даний керований об'єкт, тобто відомі ресурси керування і закон руху, який встановлює еволюцію стану об'єкта для обраного правила маніпулювання "кермами" (регуляторами). Йдеться лише про об'єкти, рух яких (при заданих початкових умовах) цілком точно і однозначно визначається вибором положень регуляторів в кожен момент часу. Такі об'єкти називають детермінованими. При їх вивченні ніякі "випадковості" до уваги не беруться.

Слід враховувати, що часто наші можливості керувати об'єктом обмежені не лише ресурсами керування, а й тим, що в процесі руху об'єкт не повинен потрапляти в стан, фізично недоступний або недопустимий з точки зору конкретних умов експлуатації об'єкта. Наприклад, при роботі електричної системи не можна допускати надмірну напругу (або обсяги навантаження); здійснюючи маневр судна, необхідно враховувати ширину фарватеру і т.д. Підкреслимо, що такого роду обмеження на стан об'єкта абсолютно не залежать від властивостей самого об'єкта і є додатковими, диктуються умовами конкретної задачі.

Маючи справу з керованим об'єктом, ми завжди прагнемо так маніпулювати регуляторами, щоб, виходячи з певного початкового стану, досягти деякого бажаного стану, тобто реалізувати мету керування, що стоїть перед нами. Якщо, скажімо, мова йде про запуск супутника, то потрібно розрахувати режим роботи двигунів ракети-носія, який забезпечить доставку супутника на бажану орбіту. Як початковий стан об'єкта, так і мета керування залежать від природи прикладної задачі.

Як правило, існує нескінчене число способів керувати об'єктом так, щоб досягти бажаного результату. У зв'язку з цим і виникає завдання не лише якось реалізувати мету керування, а знайти той спосіб керування, який в певному сенсі є найкращим, оптимальним. Звичайно, для цього необхідно визначити критерій оцінки керувань, що дозволяє судити про те, який спосіб керування кращий. Цей критерій буде свій у кожній конкретній задачі. Так, при керуванні електроприводом природньо намагатися забезпечити відпрацювання шуканих величин за мінімальний час, розрахунок графіка польоту літака з одного пункту в інший переслідує досягнення найменшої собівартості і т.п.

Такою є задача оптимального керування в загальних рисах. Перейдемо до її математичного опису.

1.2. Математичний опис задачі оптимального керування

1.2.1. ***Керований процес.*** Розглянемо об'єкт, стан якого в фіксований момент часу описується набором з n чисел $x_1, \dots, x_n$ − фазових координат (або фазових змінних). Ці числа зручно вважати компонентами фазового вектору (фазового стану) $x = (x_1, \dots, x_n)^T$. Таким чином, стан об'єкта в кожний момент часу можна зобразити точкою (елементом) n-вимірного простору $\mathbb{R}^n$, який називемо фазовим простором об'єкта. Наприклад, у випадку механічного об'єкта із скінченим числом ступенів свободи фазовий вектор x складається з узагальнених координат $q_1, \dots, q_k$ та узагальнених імпульсів $p_1, \dots, p_k$.

Рух об'єкта проявляється у тому, що фазові координати змінюються з часом t, тобто фазовий вектор є вектор-функцією незалежної змінної t. Під час руху об'єкта фазова точка $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ описує у фазовому просторі криву - фазову траєкторію (фазову криву). Звичайно, фазові координати об'єкта є "інерційними" змінними. Це означає, що вони неперервно залежать від часу.

Нехай, далі, у фазовому просторі $\mathbb{R}^n$ задана деяка множина S, що представляє собою сукупність усіх фазових станів, у яких керований об'єкт може знаходитись. Тоді при русі об'єкта його стан $x(t)$ в кожний момент часу t повинен задовольняти умові

$$x(t) \in S \subset \mathbb{R}^n, \qquad (1.1)$$

яку називають обмеженням на фазові координати (фазовим обмеженням). В деяких задачах інтерес викликає випадок, коли множина S замкнена, а фазова траєкторія може проходити по її межі.

Припустимо, що положення регуляторів керованого об'єкта, описуються в кожний момент часу набором з m чисел $u_1, \dots, u_m -$ керуючих параметрів, що складають вектор керування $u = (u_1, \dots, u_m)^T$. Положення регуляторів в кожний момент часу можна зобразити точкою m–вимірного простору $\mathbb{R}^m$. Маніпулювання регуляторами означає вибір вектор-функції $u(t)$, яка називемо керуванням (керуючим впливом).

Суттєвим моментом, що характеризує керовану систему, є опис множини допустимих керувань, тобто сукупності таких функцій, які, виходячи з реальних обставин даної задачі, дозволено обирати в якості керувань і серед яких ми будемо надалі шукати, наприклад, оптимальне керування. Цю множину задають, як правило, за допомогою "геометричних" умов, що накладаються на можливі значення функції $u(t)$, і вимог до її функціональних властивостей.

У будь-якому реальному об'єкті регулятори не можуть займати абсолютно довільні положення або через конструктивні особливості об'єкта і обмеженість ресурсів, або через умови експлуатації об'єкта, небезпеку порушення його нормальної роботи. Це означає, що в просторі керуючих параметрів $\mathbb{R}^m$ виділено деяку множину U, яка називається області керування. У будь-який момент часу точка повинна належати цій множині. Інакше кажучи, для довільного моменту часу t справедливе співвідношення

$$u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m, \tag{1.2}$$

яке назвемо обмеженням на керування. Самим типовим є випадок, коли область керування U – обмежена замкнена множина (останнє означає, що регулятори можуть займати і свої "крайні" положення).

Крім обмеження на значення керуючого вектору в кожен момент часу необхідно також з'ясувати допустимий характер зміни цього вектору з плином часу. Зазвичай в якості керувань розглядають кусково-неперервні вектор-функції, тобто вектор-функції, у яких кожна координатна функція має на будь-якому скінченому проміжку скінчене число точок розриву, причому всі точки розриву першого роду.

Значення керування в точці розриву не відіграє скільки-небудь істотної ролі в задачах керування. Але для визначеності зручно вважати, що воно збігається з правосторонньою границею вектор-функції в точці розриву:

$$u(\tau) = u(\tau + 0) = \lim_{t \to \tau + 0} u(t).$$

Також, не обмежуючи загальності, можна вважати, що функція керування $u(t)$ є неперервною на кінцях відрізка $[t_0, t_1]$.

Якщо обмеження (1.2) на область значень керування виглядає достатньо природньо, то вибір в якості керувань кусково-неперервних функцій потребує пояснень.

Найбільш реалістично виглядає вимога, щоб керування $u(t)$ було неперервною функцією. Вона відповідає уявленню про те, що керуючий вплив, маючи певну інерційність, не може змінюватися стрибком. Але така вимога виявляється досить незручною. Як свідчать навіть найпростіші приклади лінійних задач, в класі неперервних функцій розв'язок задачі оптимального керування може не існувати.

Крім того, більш уважний аналіз реальних керованих об'єктів показує, що в більшості випадків в якості керуючих можна обрати такі параметри, які в межах розумної точності можна вважати безінерційними. Тому клас кусково-неперервних функцій виявляється вигідним з теоретичної точки зору і прийнятним з точки зору практичних застосувань.

Кусково-неперервні керування зі значеннями, що обираються з області керування U, назвемо допустимими. Надалі, кажучи про керування, матимемо на увазі допустимі керування, не обговорюючи це кожного разу.

Щоб вказати, як саме за обраним керуванням визначається фазова траєкторія об'єкта, потрібно мати закон руху об'єкта, що описує динамічні властивості керованої системи. Припустимо, що закон руху являє собою співвідношення

$$\dot{x} = f(t, x, u), \tag{1.3}$$

де $f(t,x,u) = (f_1(t,x,u), \ldots, f_n(t,x,u))^T -$ відома вектор-функція, конкретний вигляд якої визначається конструктивними особливостями об'єкта або умовами даної задачі, функції $f_i(t,x,u),\ i = \overline{1,n}$ задовольняють умови теорем існування, єдиності та продовження розв'язків (наприклад, неперервні за сукупністю змінних та неперервно-диференційовані за x).

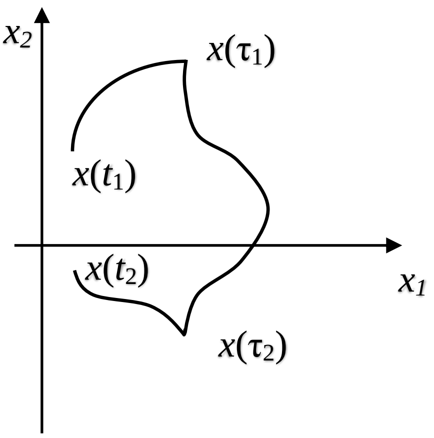
Об'єкт, математична модель якого задається системою рівнянь (1.1) $-$ (1.3), є керованим, якщо підстановка обраного (допустимого) керування у (1.3) приводить до нормальної системи звичайних диференціальних рівнянь, записаної в векторній формі:

$$\dot{x} = f(t, x, u(t)). \tag{1.4}$$

При зроблених припущеннях щодо вектор-функції f ця система при початковій умові $x(t_0) = x_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)^T$ має розв'язок, і до того ж єдиний, в околі точки t_0. Іншими словами, при обраному керуючому впливі $u(t)$ на відрізку $[t_0, t_1]$ рух об'єкта описується вектор-функцією, яка представляє собою розв'язок задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь (1.4). Очевидно, що рух об'єкта буде змінюватися в залежності від керуючого впливу. Розв'язок системи (1.4) при заданому керуванні $u(t)$ як і криву в фазовому просторі, що визначається цим розв'язком, називають фазовою траєкторією, що відповідає цьому керуванню. Початкову умову в задачах оптимального керування часто називають початковим станом.

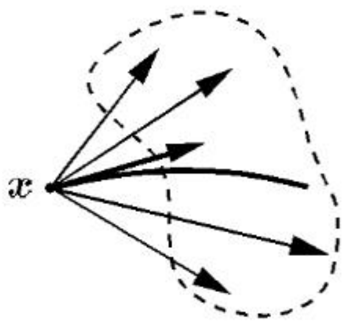
Зауважимо, що саме до виду (1.3) зазвичай зводяться рівняння руху для механічних керованих об'єктів зі скінченим числом ступенів свободи. Надалі під керованим об'єктом будемо розуміти систему звичайних диференціальних рівнянь вигляду (1.3).

Детермінованість керованого об'єкта означає, що вибір керування $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, повинен однозначно визначати (при заданій початковій умові) траєкторію $x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$. Щоб це було так, досить вважати, що вектор-функція $f(t, x, u)$ задовольняє раніше визначеним умовам (наприклад, неперервна за сукупністю змінних (t, x, u), неперервно-диференційована за сукупністю змінних x). Тоді на кожному проміжку неперервності керування $u(t)$ система



(1.4) задовольняє умовам теореми існування і єдиності для задачі Коші. У точках розриву будь-якої з координатних функцій керування треба проводити стиковку розв'язків системи (1.4), що забезпечує неперервність фазової траєкторії. На малюнку показаний приклад фазової траєкторії на площині, яка відповідає керуванню, що має розриви першого роду в моменти часу τ_1 і τ_2. Таким чином, траєкторія $x(t)$ при кусково-неперервному керуванні є неперервною кривою, а її похідна $\dot{x}(t)$ кусково-неперервна на даному відрізку часу (такі криві називають кусково-гладкими). Якщо $u(t) -$ допустиме керування, а $x(t) -$ відповідна фазова траєкторія, що задовольняє обмеженню (1.1), то пару функцій $(x(t), u(t))$ будемо називати допустимим керованим процесом.

Корисно мати на увазі наступну геометричну інтерпретацію системи рівнянь (1.3). Нехай в деякий момент часу t керований об'єкт знаходиться в фазовому стані $x(t)$. Вектор $\dot{x}(t)$ є <u>вектором фазової швидкості</u> і є дотичним вектором до кривої $x = x(t)$ у відповідній точці. Якщо в фазовому просторі $\mathbb{R}^n$ побудувати при фіксованому x всілякі вектори $f(t, x, u)$ для всіляких допустимих керуючих впливів u (момент часу t фіксований), то отримаємо, згідно з (1.3), множину допустимих (можливих) фазових швидкостей в точці x (на малюнку пунктиром зображено множину кінців усіх таких векторів). Іншими словами, вибір керуючого впливу $u(t) \in U$ в момент часу t, коли зображуюча точка знаходиться в стані x, рівнозначний вибору допустимої фазової швидкості, з якою зображуюча точка виходить з цього стану.



1.2.2. ***Мета керування.*** При дослідженні реальних керованих об'єктів, перш за все, виникає <u>задача керування</u> рухом. Для її формулювання потрібно задати в фазовому просторі деяку множину M (<u>мета керування</u>) тих станів, які є бажаними. При цьому повинно бути виконане включення $M \subset S$.

Кажуть, що керування $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ переводить об'єкт (1.3) з стану x_0 в стан x_1, якщо відповідна цьому допустимому керуванню фазова траєкторія $x(t)$ (розв'язок задачі Коші для системи (1.4) з початковою умовою $x(t_0) = x_0$) означена на тому ж відрізку часу $[t_0, t_1]$, задовольняє обмеженню (1.1) та в момент часу t_1 потрапляє у фазовий стан x_1 (тобто $x(t_1) = x_1$). Звернемо увагу на те, що відрізок $[t_0, t_1]$ - це скінчений проміжок числової прямої. Якщо керування $u(t)$ переводить об'єкт (1.3) з початкового стану x_0 в деякий стан $x_1 \in M$, то будемо говорити, що керування $u(t)$ реалізує мету керування *M*.

Задача керування рухом полягає в тому, щоб знайти якесь допустиме керування, що реалізує мету. Іншими словами, для об'єкта (1.3) потрібно відшукати таку кусково-неперервну функцію $u(t)$ зі значеннями в U, означену на відрізку $[t_0, t_1]$ (t_1, взагалі кажучи, заздалегідь невідоме), щоб система (1.4) мала розв'язок $x(t)$, який задовольняє початкову умову $x(t_0) = x_0$, обмеження (1.1) і кінцеву умову $x(t_1) \in M$. Отже, задача керування зводиться до розв'язання крайової задачі для системи n-го порядку (1.3) при обмеженнях (1.1) і (1.2). Однак, доведення можливості розв'язання цієї задачі і фактичне відшукання керування, що реалізує мету, наштовхуються на серйозні труднощі.

Ми не будемо з'ясовувати можливість розв'язання задачі керування, тож припустимо, що мета керування досліджуваним об'єктом може бути реалізована. Відзначимо, що в багатьох прикладних задачах розв'язність задачі керування випливає "з фізичних міркувань".

У задачах керування рухом виникають різні за кількістю і характером крайові умови. Якщо множина M, що характеризує мету керування, збігається з усім фазовим простором $\mathbb{R}^n$, то таку задачу називають задачею з вільним (правим) кінцем траєкторії. У цьому випадку роль крайових умов грають початкові умови $x(t_0) = x_0$.

Більш складні задачі - задачі з фіксованими (закріпленими) кінцями. Ці задачі в якості крайових умов мають як початкову умову $x(t_0) = x_0$, так і кінцеву $x(t_1) = x_1$. При цьому інтервал часу керування $t_1 - t_0$ може бути як заданим, так і таким, що потрібно визначити. У цьому випадку множина M мети керування складається з єдиної точки x_1.

В класі задач з рухомими (ковзаючими) кінцями потрібно знайти керування, що переводить об'єкт з деякого (заздалегідь невідомого) стану x_0, що належить відомій множині M_0, в якийсь стан x_1 з відомої множини M_1. Часто ці множини є гіперповерхнями в просторі $\mathbb{R}^n$. Якщо M_0 і M_1 вироджуються в точки, то приходимо до задачі з закріпленими кінцями.

1.2.3. ***Критерій якості.*** Припустимо, що задачу керування можна розв'язати. Найбільш типовою є ситуація, коли задача керування має нескінченно багато розв'язків, тобто існує нескінченно багато керувань, що реалізують мету, і всі вони з цієї точки зору абсолютно рівноправні. У такому випадку може бути поставлена задача оптимального вибору: серед допустимих керувань обрати таке, при якому керований процес буде найкращим в якомусь певному сенсі. Іншими словами, якщо якість процесу оцінюється деякою числовою характеристикою, то задача полягає в тому, щоб вибором керування забезпечити її максимальне або мінімальне значення. Цю числову характеристику називають критерієм якості.

Значення критерію якості визначається керуванням, динамікою керованого процесу (часом керування, фазовою траєкторією). Тому критерій якості являє собою функціонал того чи іншого вигляду, і задача оптимального керування полягає в знаходженні керувань, які забезпечують мінімум або максимум цього функціоналу. Випадок, коли потрібно максимізувати функціонал, зводиться до задачі мінімізації заміною вихідного функціоналу *J* функціоналом (- *J*). Тому цей випадок окремо розглядати не будемо.

Таким чином, задача оптимального керування полягає в тому, щоб знайти таке керування $u(t)$, що реалізує мету, для якого функціонал приймає найменше можливе значення. При цьому керування $u(t)$ називають оптимальним керуванням, відповідну фазову траєкторію $x(t)$ - оптимальною траєкторією, а процес $(x(t), u(t))$ - оптимальним процесом. Отже, розв'язати задачу оптимального керування означає знайти оптимальне значення критерія якості та оптимальний процес.

Для керованих процесів з законом руху (1.3) найбільш широко використовують так звані інтегральні критерії якості – функціонали вигляду

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), u(t))dt. \quad (1.5)$$

До цього класу критеріїв відносяться:

а) критерій оптимальної швидкодії з підінтегральною функцією $F(t, x, u) = 1$, що зводиться до вигляду $J = t_1 - t_0$. Такий критерій використовується в теорії автоматичного керування (в системах спостереження) для вибору параметрів, що забезпечують найменший за тривалістю процес при відпрацюванні вхідного сигналу. Оптимальне керування в задачах з критерієм оптимальної швидкодії називають керуванням, оптимальним за швидкодією.

б) інтегральний квадратичний критерій з підінтегральною функцією $F(t,x,u) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$, де серед коефіцієнтів a_i є хоча б один ненульовий. У поданні (1.5) можуть розглядатися як скінчений ($t_1 < +\infty$), так і нескінченний ($t_1 = +\infty$) інтервали часу. Такий критерій дає непряме уявлення про точність роботи системи, що розглядається в фазовому просторі. Його також використовують в теорії автоматичного керування.

в) енергетичні критерії якості з підінтегральною функцією

$$F(t,x,u) = \sum_{i=1}^{m} \delta_i u_i^2 \quad \text{або} \quad F(t,x,u) = \sum_{i=1}^{m} \delta_i |u_i|,$$

де $u = (u_1, \ldots, u_m)^T$, а серед коефіцієнтів δ_i є хоча б один ненульовий. Ці критерії характеризують витрати енергії, наприклад, в задачах орієнтації супутника за допомогою газореактивних двигунів.

г) змішаний інтегральний критерій з підінтегральною функцією

$$F(t,x,u) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{m} \delta_i u_i^2,$$

що характеризує відхилення за фазовими координатами "в середньому" і загальні енергетичні витрати.

Разом з інтегральними критеріями якості в теорії оптимального керування часто зустрічаються термінальні функціонали, тобто функціонали вигляду $J = \Phi(x(t_0), x(t_1), t_0, t_1)$. До цього класу критеріїв відноситься, наприклад, критерій кінцевого стану

$$J = \Phi(x(t_1)).$$

Його зазвичай використовують в тих випадках, коли систему необхідно привести в заданий кінцевий стан $a = (a_1, \ldots, a_n)^T$ в момент часу t_1 з найменшою помилкою. У такій постановці критерій має вигляд

$$\Phi(x(t_1)) = \sum_{i=1}^{n} (x_i(t_1) - a_i)^2 = ||x(t_1) - a||^2.$$

Задача з інтегральним критерієм якості (задача Лагранжа) може бути зведена до задачі з термінальним критерієм (задачі Майєра) шляхом підвищення розмірності системи. Дійсно, введемо нову змінну x_{n+1}, що задовольняє диференціальному рівнянню $\dot{x}_{n+1} = F(t,x,u)$ і початковій умові $x_{n+1}(t_0) = 0$. Тоді критерій якості (1.5) може бути записаний у вигляді

$$J = x_{n+1}(t_1).$$

Якщо лівий кінець фазової траєкторії фіксований, то задача Майєра може бути зведена до задачі Лагранжа з функціоналом

$$\tilde{J} = \Phi(t_1, x(t_1)) - \Phi(t_0, x(t_0)) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\Phi(t, x(t))}{dt} dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial \Phi(t, x(t))}{\partial x} f(t, x(t), u) + \frac{\partial \Phi(t, x(t))}{\partial t} \right] dt.$$

Розглядаються також задачі оптимального керування зі змішаним інтегрально-термінальним критерієм – <u>задачі Больца</u>:

$$J[u] = \Phi(t_0, t_1, x(t_0), x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), u(t)) dt.$$

2. ПРИКЛАДИ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

2.1 Задача про м'яку посадку на Місяці космічного корабля

Теорія оптимального керування знайшла широке застосування в ракетодинаміці. Виведення космічних апаратів на орбіту, маневри в космосі, посадка вимагають вирішення низки оптимізаційних задач, пов'язаних з мінімізацією витрат палива, мінімізацією часу виходу в задану точку траєкторії і т.п. Саме процеси руху керованих літальних апаратів описуються досить простими і, разом з тим, точними математичними моделями. Наявність добре розробленої раніше теорії руху ракет дозволила швидко і ефективно застосувати методи оптимального керування до вирішення ряду проблем в цій актуальній області техніки.

Припустимо, що космічний апарат, який можна розглядати як матеріальну точку, здійснює м'яку посадку на Місяць. Посадка проводиться по вертикальній прямій, нормальній до поверхні Місяця. Нехай початок координат збігається з цією поверхнею, координатна вісь спрямована вертикально вгору. У початковий момент часу $t_0 = 0$ космічний корабель, що знаходиться на відомій висоті h, має швидкість ω_0 і масу m_0. У кожен момент часу t на апарат діє сила тяжіння Місяця, спрямована вертикально вниз, що дорівнює за абсолютною величиною $m(t)g_M$. Тут $m(t) -$ маса апарату, $g_M -$прискорення вільного падіння на Місяці, яке ми будемо вважати сталим. При включених двигунах діє сила тяги, спрямована вгору, що дорівнює $\beta u(t)$, де $u(t) -$ миттєва витрата палива, $0 \le u(t) \le u_{max}$, $\beta -$ відомий сталий коефіцієнт.

Зміна маси пов'язана з витратою пального формулою $\dot{m}(t) = -u(t)$. Потрібно знайти режим витрати палива, який забезпечує нульову швидкість апарату в точці посадки і мінімальні сумарні витрати палива. Час посадки заздалегідь не обговорюється.

Перейдемо до формалізації поставленої задачі як задачі оптимального керування. Роль керуючого впливу відіграє скалярна функція $u = u(t)$, на яку накладено обмеження типу (1.2):

$$0 \le u(t) \le u_{max}, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Нехай стан процесу описується вектор-функцією $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$. Тут $x_1(t) -$ висота апарата в момент часу t, $x_2(t) -$ швидкість, $x_3(t) -$ маса апарата. Тоді

$$\dot{x}_1 = x_2.$$

Згідно з другим законом Ньютона

$$m(t)\dot{x}_2 = \beta u(t) - m(t) g_M,$$

Звідки маємо

$$\dot{x}_2 = \frac{\beta u(t)}{x_3} - g_M.$$

За означенням витрат палива

$$\dot{x}_3 = -u(t).$$

Наведені три диференціальні рівняння утворюють систему (1.3), що визначає диференціальний зв'язок між станом і керуванням. Обмеженнями (1.1) є початкові умови

$$x_1(0) = h,\ x_2(0) = \omega_0,\ x_3(0) = m_0$$

й умови, що забезпечують м'яку посадку:

$$x_1(t_1) = 0,\ x_2(t_1) = 0.$$

Потрібно мінімізувати сумарні витрати палива, тобто

$$J[u, t_1] = m_0 - x_3(t_1) \to min.$$

Цей функціонал можна записати і в інтегральному вигляді:

$$J[u, t_1] = \int_0^{t_1} u(t) dt.$$

Розглянутий приклад являє собою задачу Майєра або Лагранжа (в залежності від вигляду функціоналу) з фіксованим початковим моментом $t_0 = 0$, нефіксованим кінцевим моментом t_1, закріпленим лівим кінцем траєкторії і рухомим правим кінцем.

Цікавою є структура розв'язку. Програма оптимального керування складається з двох ділянок: спочатку вільне падіння до моменту $\tilde{t} > 0$ при $u(t) \equiv 0$, потім повне гальмування на відрізку $[\tilde{t}, t_1]$ при $u(t) = u_{max}$.

2.2. Задача про розширене виробництво

Підприємство виробляє деяку продукцію. Нехай $x(t) -$ грошова сума, одержувана за реалізацію продукції в момент t, $u(t) -$ частка цієї суми, що використовується для розширення виробництва (тобто йде на закупівлю нового обладнання тощо). Збільшення виробництва, а отже, збільшення доходу від реалізації $x(t)$, пропорційне витратам:

$$\dot{x} = \alpha u x, \quad \alpha > 0,$$

$$x(t_0) = a > 0 \text{ – задане.}$$

Витрати на виробництво пропорційні обсягу виробленої продукції і складають $\beta x(t)$. Податок на прибуток зі ставкою $p \in (0,1)$ виплачується в розмірі $p\big(x(t) - u(t)x(t) - \beta x(t)\big) = px(t)(1 - u(t) - \beta)$. Тому чистий прибуток за період $[t_0, t_1]$ визначається виразом

$$J[u] = \int_{t_0}^{t_1} (1-p)x(t)(1-u(t)-\beta)dt.$$

Значення $u(t)$ не довільні: $u(t) \geq 0$ та $x(t)(1-u(t)-\beta) \geq 0$. Так як $x(t) \geq 0$, то $u(t)$ задовольняє нерівності

$$0 \leq u(t) \leq 1 - \beta.$$

В даному випадку $u(t)$ є керуванням. Таким чином, треба знайти таке керування $u(t)$, щоб функціонал $J[u]$ був максимальним. Записана задача є задачею Лагранжа з фіксованою тривалістю, закріпленим лівим і вільним правим кінцями траєкторії. Її можна звести і до задачі Майєра введенням нової змінної

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} (1-p)x(s)(1-u(s)-\beta)ds.$$

Отримаємо:

$$\dot{x} = \alpha u x, \dot{y} = (1-p)x(1-u(s)-\beta),$$

$$x(t_0) = a, y(t_0) = 0,$$

$$\tilde{J}[u] = -y(t_1) \to min.$$

2.3. Оптимальне планування поставки продукції

Розглянемо процес неперервного виробництва та поставки продукції протягом проміжку часу $[t_0, t_1]$. Попит на продукцію визначається відомою функцією $r = r(t), t \in [t_0, t_1]$.

Розбіжність обсягу поставки $x(t)$ та попиту $r(t)$ призводить до збитків. Якщо $\gamma(t) = x(t) - r(t) < 0$ (має місце дефіцит), то збитки обумовлені незадоволеністю попиту і відносяться до розряду упущеної вигоди (прибутку, який можна було б отримати при іншому плануванні поставок). У разі перевищення обсягу поставок над попитом $(\gamma(t) > 0)$ збитки викликані псуванням продукції, додатковими витратами на зберігання, на пошук інших споживачів і т.п. Передбачається, що функція витрат $f_1(\gamma)$ - відома залежність: $f_1(\gamma) = 0$, якщо $\gamma = 0$; $f_1(\gamma) > 0$, якщо $\gamma \neq 0$.

Додаткові витрати виробників продукції пов'язані з витратами на перебудову виробництва при зміні обсягів поставки продукції. Ці витрати дорівнюють нулю при сталій інтенсивності виробництва ($\dot{x}(t) = 0$). Функція збитків виробника $f_2(\dot{x})$ являє собою відому залежність: $f_2(\dot{x}) = 0$, якщо $\dot{x} = 0$; $f_2(\dot{x}) > 0$, якщо $\dot{x} \neq 0$. Швидкість зміни поставок не може бути довільною, а знаходиться в заданих межах:

$$A \leq \dot{x}(t) \leq B,\ t \in [t_0, t_1]. \tag{2.1}$$

Потрібно визначити функцію $x(t)$, що характеризує поставки продукції, для якої зводяться до мінімуму сумарні витрати, пов'язані з можливою розбіжністю обсягу поставок і попиту, а також з можливими перебудовами виробництва протягом періоду часу $[t_0, t_1]$. Вважаємо, що відомо початковий стан: $x(t_0) = x_0$. Цільовий функціонал, що визначає сумарні витрати, має вигляд

$$J = \int_{t_0}^{t_1} [f_1(x(t) - r(t)) + f_2(\dot{x}(t))] dt.$$

Задачу мінімізації даного функціоналу можна розглядати як задачу варіаційного числення в класі кусково-гладких на відрізку $[t_0, t_1]$ функцій із закріпленим лівим і вільним правим кінцями при наявності у всіх точках відрізка нестандартного (для варіаційного числення) обмеження (2.1).

Досліджувану задачу можна інтерпретувати як задачу оптимального керування, якщо ввести скалярну функцію керування $u = u(t)$, що визначає динаміку зміни обсягу поставки продукції:

$$\dot{x} = u,\ x(t_0) = x_0,\ A \leq u \leq B,\quad t \in [t_0, t_1],$$

$$J[u] = \int_{t_0}^{t_1} [f_1(x(t) - r(t)) + f_2(u)]dt \rightarrow min.$$

Згідно з наведеною вище класифікацією, ми прийшли до задачі Лагранжа з фіксованою тривалістю, закріпленим лівим і вільним правим кінцями траєкторії. Відзначимо, що в прикладі нас цікавить не стільки вигляд оптимального керування, скільки відповідний цьому керуванню стан.

3. НАЙПРОСТІША ЗАДАЧА ТЕРМІНАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

3.1. Принцип максимуму Понтрягіна

У 1956 р. Л.С.Понтрягін, В.Г.Болтянський, В.В.Гамкрелідзе і Є.Ф.Міщенко запропонували метод [5], який узагальнив методи класичного варіаційного числення у випадку задач, в яких керуючий вплив описується кусково-неперервними функціями, а множина значень цих функцій належить замкнутій обмеженій множині. В основу цього методу покладено так званий принцип максимуму.

Принцип максимуму дає необхідні умови оптимальності, які дозволяють виділити з множини допустимих процесів деяку підмножину процесів, "підозрілих" на оптимальність. У цьому сенсі метод розв'язання задач оптимального керування на основі принципу максимуму аналогічний методам дослідження функцій однієї або декількох змінних, при яких відбираються точки, що задовольняють необхідним умовам, а кожна з відібраних точок аналізується, наприклад, за допомогою достатніх умов. В рамках теорії оптимального керування необхідні умови зручні тоді, коли з їх допомогою вдається виділити невелику кількість процесів, які можуть бути оптимальними. Принцип максимуму для широкого кола задач дає можливість визначити єдину траєкторію, яка може бути оптимальною. Якщо в конкретній задачі з будь-яких міркувань (наприклад, із змістовного сенсу цієї задачі) відомо, що оптимальне керування існує, то виділення єдиної траєкторії, "підозрілої" на оптимальність, дає розв'язок задачі.

Перше доведення принципу максимуму дав В.В. Гамкрелідзе для лінійних задач оптимального керування. Він побудував повну теорію лінійних систем керування і довів достатність принципу максимуму для таких систем. Таким чином, для лінійних задач оптимального керування принцип максимуму - це необхідна і достатня умова оптимальності.

У загальному нелінійному випадку принцип максимуму довів В.Г. Болтянський, який і побудував основи нелінійної теорії оптимального керування.

Нехай поведінка керованого об'єкта описується системою звичайних диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = f(t, x, u), \tag{3.1}$$

де

1) $t \in I = [t_0, t_1]$ - час, моменти t_0 та t_1 фіксовані;

2) $x \in \mathbb{R}^n$ - вектор стану системи, $x(t_0) = x_0$, тобто лівий кінець траєкторії закріплено;

3) при керуванні використовується інформація лише про час, тобто розглядається програмне керування $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m$; U - компакт;

4) множину допустимих керувань складають кусково–неперервні функції зі значеннями з множини U;

5) відносно функції f будемо припускати, що вона задовольняє умови теорем існування, єдиності та продовження розв'язків.

Треба знайти таке керування $u(t)$ та відповідну йому траєкторію $x(t)$, що критерій якості набуває найменшого значення:

$$J[u] = \Phi(x(t_1)) \to min. \tag{3.2}$$

Означення 3.1. Допустиме керування $u(t)$ та відповідна йому траєкторія $x(t)$ задовольняють <u>принципу максимуму Понтрягіна</u>, якщо відносно $u(t)$, $x(t)$ та розв'язку <u>спряженої системи</u>

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H(t,x,\psi,u)}{\partial x}, \tag{3.3}$$

$$\psi(t_1) = -\frac{\partial \Phi(x(t_1))}{\partial x}, \tag{3.4}$$

де $H(t, x, \psi, u) = \psi^T f(t, x, u) -$ <u>функція Гамільтона</u>, в кожній точці t виконується умова максимуму

$$H(t, x(t), \psi(t), u(t)) = \max_{u \in U} H(t, x(t), \psi(t), u). \tag{3.5}$$

Теорема 3.1 (принцип максимуму Понтрягіна). Нехай в області $Q = \{t \in I = [t_0, t_1], x \in \mathbb{R}^n, u \in U\}$ виконуються умови:

1) функція $f(t, x, u)$ неперервна разом зі своєю похідною $\frac{\partial f}{\partial x}$, задовольняє умову Ліпшиця по x зі сталою λ;

2) функція $\Phi(x)$ неперервна разом зі своєю похідною $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$.

Тоді, якщо $u(t)$ – оптимальне керування, а $x(t)$ - відповідна йому траєкторія, то пара $u(t)$, $x(t)$ задовольняє принцип максимуму Понтрягіна.

Доведення складається з трьох етапів:

I. Побудова голчатої варіації. Розглянемо керування

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t) \quad \text{при} \quad t \in I \backslash [\theta, \theta + \varepsilon), \\ v \quad \text{при} \quad t \in [\theta, \theta + \varepsilon), \end{cases}$$

де $\theta \in [t_0, t_1)$, $\varepsilon > 0$ таке, що $\theta + \varepsilon \leq t_1$, $v \in U$.

Таким чином, керування $\tilde{u}(t)$ всюди на I, за виключенням множини $[\theta, \theta + \varepsilon)$, співпадає з керуванням $u(t)$, а на множині $[\theta, \theta + \varepsilon)$ приймає стале значення v з множини U. При довільних θ, ε, v, що задовольняють перерахованим вище вимогам, керування $\tilde{u}(t)$ є кусково–неперервним та приймає значення з U, тому воно допустиме.

Варіація $\delta u(t) = \tilde{u}(t) - u(t)$ називається голчатою.

II. Приріст траєкторії на голчатій варіації. Позначимо траєкторію, що відповідає керуванню $\tilde{u}(t)$, через $\tilde{x}(t)$. Тоді $\delta x(t) = \tilde{x}(t) - x(t)$ - приріст траєкторії на голчатій варіації. Оцінимо $\delta x(t)$.

Так як $x(t)$ та $\tilde{x}(t)$ - траєкторії системи (3.1), то

$$\delta \dot{x}(t) = \dot{\tilde{x}}(t) - \dot{x}(t) = f(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) - f(t, x(t), u(t)) =$$
$$= f(t, x(t) + \delta x(t), \tilde{u}(t)) - f(t, x(t), u(t))$$

при $t \in I$ та $\delta x(t_0) = \tilde{x}(t_0) - x(t_0) = x_0 - x_0 = 0$, так як лівий кінець траєкторії закріплено.

Таким чином, $\delta x(t)$ є розв’язком диференціального рівняння

$$\delta \dot{x}(t) = f(t, x(t) + \delta x(t), \tilde{u}(t)) - f(t, x(t), u(t)) \tag{3.6}$$

з початковою умовою

$$\delta x(t_0) = 0. \tag{3.7}$$

Розіб'ємо відрізок I на три проміжки точками θ та $\theta+\varepsilon$ й оцінимо $\delta x(t)$ на кожному з них:

а) $t \in [t_0, \theta)$. В цьому випадку $\tilde{u}(t) \equiv u(t)$ та $\delta x(t)$ є розв'язком диференціального рівняння

$$\delta\dot{x}(t) = f(t, x(t) + \delta x(t), u(t)) - f(t, x(t), u(t)) \tag{3.8}$$

з початковою умовою $\delta x(t_0) = 0$.

Права частина (3.8) задовольняє умови теореми Пікара-Коші (на кожному з проміжків неперервності керування $u(t)$). Безпосередньою перевіркою переконуємося, що $\delta x(t) \equiv 0$ задовольняє дану задачу Коші. Отже, $\delta x(t) \equiv 0$ – єдиний розв'язок задачі Коші (3.8).

Таким чином, $\delta x(t) \equiv 0$ на $[t_0, \theta)$.

б) $t \in [\theta, \theta+\varepsilon)$. В цьому випадку $\tilde{u}(t) \equiv v$ та $\delta x(t)$ є розв'язком диференціального рівняння

$$\delta\dot{x}(t) = f(t, x(t) + \delta x(t), v) - f(t, x(t), u(t)). \tag{3.9}$$

За неперервністю довизначимо $\delta x(t)$ в точці θ значенням

$$\delta x(\theta) = 0.$$

Диференціальне рівняння (3.9) еквівалентне інтегральному рівнянню:

$$\delta x(t) = \int_\theta^t [f(s, x(s) + \delta x(s), v) - f(s, x(s), u(s))]ds.$$

Під знаком інтеграла додамо та віднімемо $f(s, x(s), v)$:

$$\delta x(t) = \int_\theta^t [f(s, x(s) + \delta x(s), v) - f(s, x(s), v)]ds +$$

$$+ \int_\theta^t [f(s, x(s), v) - f(s, x(s), u(s))]ds.$$

Оцінимо за нормою, використовуючи умову Ліпшиця:

$$\|\delta x(t)\| \le \int_\theta^t \|f(s, x(s) + \delta x(s), v) - f(s, x(s), v)\|ds +$$

$$+ \int_\theta^t \|f(s, x(s), v) - f(s, x(s), u(s))\|ds \le$$

$$\le \lambda \int_\theta^t \|\delta x(s)\|ds + \int_\theta^t \|f(s, x(s), v) - f(s, x(s), u(s))\|ds.$$

Так як $s \in [\theta, \theta + \varepsilon) \subset I$, v змінюється на компактній множині U, підінтегральна функція кусково-неперервна по (s, v), то за теоремою Вейєрштрасса існує стала $K > 0$ така, що

$$\|f(s, x(s), v) - f(s, x(s), u(s))\| \le K.$$

Тоді

$$\|\delta x(t)\| \le \lambda \int_\theta^t \|\delta x(s)\| ds + K(t - \theta) \le \lambda \int_\theta^t \|\delta x(s)\| ds + K\varepsilon.$$

В силу леми Гронуолла-Беллмана при $\varepsilon \le \varepsilon_0$ маємо

$$\|\delta x(t)\| \le K\varepsilon e^{\lambda(t-\theta)} \le K\varepsilon e^{\lambda\varepsilon} \le K_1\varepsilon, \text{ де } K_1 = Ke^{\lambda\varepsilon_0}. \tag{3.10}$$

в) $t \in [\theta + \varepsilon, t_1]$. В цьому випадку $\tilde{u}(t) \equiv u(t)$. Функція $\delta x(t)$ задовольняє диференціальному рівнянню

$$\delta\dot{x}(t) = f(t, x(t) + \delta x(t), u(t)) - f(t, x(t), u(t))$$

з початковою умовою $\|\delta x(\theta + \varepsilon)\| \le K_1\varepsilon$.

Перейдемо до інтегрального рівняння:

$$\delta x(t) = \delta x(\theta + \varepsilon) + \int_{\theta+\varepsilon}^t [f(s, x(s) + \delta x(s), u(s)) - f(s, x(s), u(s))] ds.$$

Оцінимо $\delta x(t)$ за нормою, використовуючи умову Ліпшиця:

$$\|\delta x(t)\| \le$$

$$\le \|\delta x(\theta + \varepsilon)\| + \int_{\theta+\varepsilon}^t \|f(s, x(s) + \delta x(s), u(s)) - f(s, x(s), u(s))\| ds \le$$

$$\le K_1\varepsilon + \lambda \int_{\theta+\varepsilon}^t \|\delta x(s)\| ds.$$

В силу леми Гронуолла-Беллмана

$$\|\delta x(t)\| \le K_1\varepsilon e^{\lambda(t-\theta-\varepsilon)} \le K_1\varepsilon e^{\lambda(t_1-t_0)} \le K_2\varepsilon, \text{ де } K_2 = K_1 e^{\lambda(t_1-t_0)}.$$

Таким чином, при $t \in I$ маємо

$$\|\delta x(t)\| \le \bar{K}\varepsilon, \text{ де } \bar{K} = max\{K_1, K_2\} = K_2. \tag{3.11}$$

Зауваження 3.1. Якщо $\delta x(t_0) = O(\varepsilon)$, то аналогічно до зробленого вище можна довести, що $\delta x(t) = O(\varepsilon)$ для всіх $t \in I$.

III. Приріст функціонала. Так як $u(t)$ є оптимальним керуванням, то $\Delta J = J[\tilde{u}] - J[u] \ge 0$.

Розпишемо ΔJ детальніше:

$$\Delta J = \Phi(\tilde{x}(t_1)) - \Phi(x(t_1)) = \Phi(x(t_1) + \delta x(t_1)) - \Phi(x(t_1)).$$

Функція Φ неперервно-диференційована, тому отримаємо

$$\Delta J = \frac{\partial \Phi^T(x(t_1))}{\partial x}\delta x(t_1) + o(\|\delta x(t_1)\|) = -\psi^T(t_1)\delta x(t_1) + o(\|\delta x(t_1)\|). \qquad (3.12)$$

Так як

$$\psi^T(t_1)\delta x(t_1) - \psi^T(t_0)\delta x(t_0) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} (\psi^T(t)\delta x(t))' dt = \int_{t_0}^{t_1} \dot{\psi}^T(t)\delta x(t)dt + \int_{t_0}^{t_1} \psi^T(t)\delta \dot{x}(t)dt$$

та $\delta x(t_0) = 0$, то в силу (3.12) маємо

$$\Delta J = -\psi^T(t_0)\delta x(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} \dot{\psi}^T(t)\delta x(t)dt -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} \psi^T(t)\delta \dot{x}(t)dt + o(\|\delta x(t_1)\|) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H^T\big(t, x(t), \psi(t), u(t)\big)}{\partial x}\delta x(t)dt -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} \psi^T(t)\big[f\big(t, x(t) + \delta x(t), \tilde{u}(t)\big) - f\big(t, x(t), u(t)\big)\big]dt + o(\|\delta x(t_1)\|) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H^T\big(t, x(t), \psi(t), u(t)\big)}{\partial x}\delta x(t)dt -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} \big[H\big(t, x(t) + \delta x(t), \psi(t), \tilde{u}(t)\big) - H\big(t, x(t), \psi(t), u(t)\big)\big]dt +$$

$$+o(\|\delta x(t_1)\|).$$

У другому інтегралі до підінтегральної функції додамо та віднімемо $H(t, x(t), \psi(t), \tilde{u}(t))$:

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H^T(t, x(t), \psi(t), u(t))}{\partial x}\delta x(t)dt -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} [H(t, x(t) + \delta x(t), \psi(t), \tilde{u}(t)) - H(t, x(t), \psi(t), \tilde{u}(t))]dt -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} [H(t, x(t), \psi(t), \tilde{u}(t)) - H(t, x(t), \psi(t), u(t))]dt + o(\|\delta x(t_1)\|) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial H^T\big(t, x(t), \psi(t), u(t)\big)}{\partial x} - \frac{\partial H^T\big(t, x(t), \psi(t), \tilde{u}(t)\big)}{\partial x}\right]\delta x(t)dt +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} o(\|\delta x(t)\|)dt - \int_{t_0}^{t_1} [H(t, x(t), \psi(t), \tilde{u}(t)) - H(t, x(t), \psi(t), u(t))]dt +$$

$$+o(\|\delta x(t_1)\|).$$

Так як $\tilde{u}(t)$ співпадає з $u(t)$ при $t \in I \backslash [\theta, \theta+\varepsilon)$, то маємо

$$\Delta J = \int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} \left[\frac{\partial H^T\big(t, x(t), \psi(t), u(t)\big)}{\partial x} - \frac{\partial H^T(t, x(t), \psi(t), v)}{\partial x}\right] \delta x(t) dt +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} o(\|\delta x(t)\|)dt + o(\|\delta x(t_1)\|) -$$

$$-\int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} [H(t, x(t), \psi(t), v) - H(t, x(t), \psi(t), u(t))]dt.$$

У підсумку маємо

$$\Delta J = -\int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} [H(t, x(t), \psi(t), v) - H(t, x(t), \psi(t), u(t))]dt + \eta, \qquad (3.13)$$

де

$$\eta = \int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} \left[\frac{\partial H^T(t, x(t), \psi(t), u(t))}{\partial x} - \frac{\partial H^T(t, x(t), \psi(t), v)}{\partial x}\right] \delta x(t) dt +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} o(\|\delta x(t)\|)dt + o(\|\delta x(t_1)\|).$$

Так як

1) $o(\|\delta x(t_1)\|) = o(\varepsilon)$;

2) $o(\|\delta x(t)\|) = o(\varepsilon)$, тобто $\int_{t_0}^{t_1} o(\|\delta x(t)\|)dt = o(\varepsilon)$;

3) $t \in [\theta, \theta+\varepsilon) \subset I$, v змінюється на компактній множині U, функція $\left[\frac{\partial H^T(t,x(t),\psi(t),u(t))}{\partial x} - \frac{\partial H^T(t,x(t),\psi(t),v)}{\partial x}\right]$ кусково-неперервна по (s, v), тому за теоремою Вейєрштрасса існує стала $M > 0$ така, що при $t \in [\theta, \theta+\varepsilon]$ $\left\|\frac{\partial H^T(t,x(t),\psi(t),u(t))}{\partial x} - \frac{\partial H^T(t,x(t),\psi(t),v)}{\partial x}\right\| \leq M$

Тоді, враховуючи, що $\delta x(t) = O(\varepsilon)$, отримаємо

$$\int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} \left[\frac{\partial H^T(t, x(t), \psi(t), u(t))}{\partial x} - \frac{\partial H^T(t, x(t), \psi(t), v)}{\partial x}\right] \delta x(t) dt = \int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} O(\varepsilon) dt$$

$$= o(\varepsilon),$$

то $\eta = o(\varepsilon)$.

Таким чином, застосовуючи формулу прямокутників, маємо

$$\Delta J = -[H(\theta, x(\theta), \psi(\theta), v) - H(\theta, x(\theta), \psi(\theta), u(\theta))]\varepsilon + o(\varepsilon). \qquad (3.14)$$

Позначимо вираз, що стоїть у квадратних дужках, через α, тоді

$$\Delta J = -\alpha\varepsilon + o(\varepsilon) = \varepsilon\left[-\alpha + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}\right] \geq 0. \qquad (3.15)$$

Покажемо, що $\alpha \leq 0$. Припустимо супротивне: $\alpha > 0$. При достатньо малих ε знак виразу $-\alpha + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}$ визначається першим доданком, так як $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$. Але тоді $\Delta J = \varepsilon\left[-\alpha + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}\right] < 0$, що суперечить (3.15). Таким чином, $\alpha \leq 0$.

У наслідок довільності θ та v на керуванні $u(t)$ досягається максимум функції Гамільтона H й теорему доведено.

Зауваження 3.2. Під час доведення отримано формулу для приросту:

$$\Delta J = -\psi^T(t_0)\delta x(t_0) - \int_{t_0}^{t_1}[H(t, x(t), \psi(t), \tilde{u}(t)) -$$

$$-H(t, x(t), \psi(t), u(t))]dt + \eta,$$

де $\eta = o(\varepsilon)$.

Зауваження 3.3. Результат теореми залишиться вірним, якщо припустити, що функція $f(t, x, u)$ кусково-неперервна по першому аргументу $t \in [t_0, t_1]$. Тому в подальшому, якщо не вказано інше, будемо вважати, що в умовах теореми 3.1 функція $f(t, x, u)$ кусково-неперервна по t.

Наслідок 3.1. Розглянемо систему керування, що описується системою диференціальних рівнянь (3.1), але з критерієм якості у формі Больца:

$$J[u] = \Phi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, u)dt \to min, \qquad (3.16)$$

де $F(t, x, u)$ - неперервна разом зі своєю частинною похідною $\frac{\partial F}{\partial x}$, задовольняє умову Ліпшиця по x зі сталою λ.

Зведемо задачу до задачі Майєра введенням додаткової змінної x_{n+1}:

$$\dot{x}_{n+1} = F(t, x, u), x_{n+1}(t_0) = 0.$$

Тоді критерій якості може бути записано у вигляді:

$$J[u] = \Phi(x(t_1)) + x_{n+1}(t_1).$$

Дана задача є задачею термінального керування з новим вектором стану $\begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$. Функція Гамільтона має вигляд

$$H = \psi^T f(t, x, u) + \psi_{n+1} F(t, x, u),$$

спряжена система:

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \psi_i(t_1) = -\frac{\partial \Phi(x(t_1))}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{3.17}$$

$$\dot{\psi}_{n+1} = 0, \psi_{n+1}(t_1) = -1.$$

Тоді $\psi_{n+1}(t) \equiv -1$ та

$$H = \psi^T f(t, x, u) - F(t, x, u), \tag{3.18}$$

а від спряженої системи залишаються лише рівняння (3.17).

Теорема 3.2. Для лінійно-опуклого варіанта задачі (3.1), (3.16), тобто для випадку, коли

$$f(t, x, u) = A(t)x + f_1(t, u),$$
$$F(t, x, u) = F_1(t, x) + F_2(t, u),$$

при цьому Φ та $F_1 -$ опуклі по x функції, виконання (3.5), де H визначається співвідношенням (3.18), є необхідною та достатньою умовою оптимальності процесу $(u(t), x(t))$.

3.2. Використання принципу максимуму для перевірки керувань на оптимальність

Припустимо, що в задачі оптимального керування (3.1), (3.16) деяке допустиме керування $u = u(t)$ треба перевірити на оптимальність за допомогою принципу максимуму. Рекомендована схема виглядає наступним чином:

1) Знаходимо функції $x = x(t)$ та $\psi = \psi(t)$ - відповідні керуванню, що перевіряється, розв’язки задач Коші (3.1) та (3.17).

2) Складемо функцію

$$W(v, t) = H(t, x(t), \psi(t), v) - H(t, x(t), \psi(t), u(t)), \ v \in U, \ t \in [t_0, t_1],$$

де H визначається співвідношенням (3.18).

3) Для кожного моменту $t \in [t_0, t_1)$ розв'яжемо задачу максимізації функції $W(v, t)$ по $v \in U$:

$$\overline{W}(t) = \max_{v \in U} W(v, t).$$

Припустимо, що для кожного фіксованого $t \in [t_0, t_1)$ дана задача математичного програмування може бути розв'язана.

4) Оцінимо знак функції $\overline{W}(t)$. За побудовою завжди $\overline{W}(t) \geq 0$ для всіх $t \in [t_0, t_1)$. Рівність нулю функції $\overline{W}(t)$ для деякого t говорить про виконання принципу максимуму в цій точці, бо

$$\max_{v \in U} W(v, t) = \max_{v \in U} H(t, x(t), \psi(t), v) - H(t, x(t), \psi(t), u(t)).$$

Таким чином, якщо знайдуться точки $t \in [t_0, t_1)$, в яких $\overline{W}(t) > 0$, то керування $u = u(t)$ не задовольняє принцип максимуму й відповідно завідомо не є оптимальним.

У випадку $\overline{W}(t) \equiv 0, t \in [t_0, t_1)$, керування, що перевіряється, задовольняє принцип максимуму, тобто є підозрілим на оптимальність.

Приклад 3.1. В задачі

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 1$$

з обмеженням на керування $|u| \leq 2$ й критерієм якості

$$J[u] = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2(t) dt \to min$$

перевірити на оптимальність функцію

$$u(t) = \begin{cases} -2, \ t \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right), \\ 0, \ t \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

1) Розв'яжемо задачу при заданому керуванні. При $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ маємо

$$x(t) = x(0) + \int_0^t u(s) ds = 1 + \int_0^t (-2) \cdot ds = 1 - 2t;$$

при $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$:

$$x(t) = x\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{\frac{1}{2}}^{t} u(s)ds = (1-2t)\big|_{t=\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^{t} 0 \cdot ds = 0.$$

Як і випливає з теорії, розв'язок вихідної системи - неперервна функція

$$x(t) = \begin{cases} 1-2t, & \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ 0, & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases}$$

кусково-диференційована на відрізку $[0,1]$. Точка, в якій похідна не існує (ліва похідна не дорівнює правій), є точка розриву керування.

Складемо функцію Гамільтона $H = \psi u - \frac{1}{2}x^2$.

Спряжена задача має вигляд

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} = x, \quad \psi(1) = 0.$$

Розв'яжемо це рівняння справа наліво: при $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ маємо

$$\dot{\psi} = 0, \quad \psi(1) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \psi(t) \equiv 0.$$

При $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$

$$\dot{\psi} = 1-2t, \quad \psi\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \psi(t) = t - t^2 - \frac{1}{4} = -\left(t-\frac{1}{2}\right)^2.$$

2) Складемо функцію

$W(v,t) = H(t, x(t), \psi(t), v) - H(t, x(t), \psi(t), u(t)) = \psi(t)(v - u(t)) =$

$$= \begin{cases} -\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 (v+2), & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ 0, & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

3) Знайдемо максимум по v функції $W(v,t)$ при кожному фіксованому $t \in [0,1)$. Так як функція $-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2$ є від'ємною на проміжку $\left[0, \frac{1}{2}\right)$, то максимум на цьому проміжку досягається при $v = -2$. Отже, маємо

$$\overline{W}(t) \equiv 0, \;\; t \in [0,1).$$

4) Таким чином, керування, що перевіряється, задовольняє принцип максимуму, отже є підозрілим на оптимальність. Так як задача є лінійно-опуклою, то це керування є оптимальним.

Приклад 3.2. В задачі

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \quad x_1(0) = 1, \\ \dot{x}_2 = u, \quad x_2(0) = 2 \end{cases}$$

з обмеженням на керування $|u| \le 1$ й критерієм якості

$$J[u] = x_1^2(5) + x_2^2(5) \to min$$

перевірити на оптимальність функцію

$$u(t) = \begin{cases} 1, \ t \in [0,1), \\ 0, \ t \in [1,2), \\ -1, \ t \in [2,5] \end{cases}$$

й визначити значення цільового функціоналу, що відповідає даному керуванню.

Реалізуємо викладену вище схему:

1) При обчисленні розв'язку вихідної системи звичайних диференціальних рівнянь, що відповідає керуванню, яке перевіряється, доцільно почати з другого рівняння системи.

При $t \in [0,1)$

$$x_2(t) = x_2(0) + \int_0^t u(s)ds = 2 + \int_0^t 1 \cdot ds = 2 + t;$$

при $t \in [1,2)$

$$x_2(t) = x_2(1) + \int_1^t u(s)ds = (2 + t)|_{t=1} + \int_1^t 0 \cdot ds = 3;$$

при $t \in [2,5]$

$$x_2(t) = x_2(2) + \int_2^t u(s)ds = 3 + \int_2^t (-1) \cdot ds = 3 - (t - 2) = 5 - t.$$

Знайдені значення функції $x_2(t)$ підставляємо в праву частину першого рівняння системи.

При $t \in [0,1)$

$$x_1(t) = x_1(0) + \int_0^t x_2(s)ds = 1 + \int_0^t (2 + s) \cdot ds = 1 + 2t + \frac{t^2}{2};$$

при $t \in [1,2)$

$$x_1(t) = x_1(1) + \int_1^t x_2(s)ds = \left(1 + 2t + \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_{t=1} + \int_1^t 3ds =$$

$$= \frac{7}{2} + 3(t-1) = 3t + \frac{1}{2};$$

при $t \in [2,5]$

$$x_1(t) = x_1(2) + \int_2^t x_2(s)ds = \left(3t + \frac{1}{2}\right)\Bigg|_{t=2} + \int_2^t (5-s)ds =$$

$$= \frac{13}{2} + 5(t-2) - \frac{1}{2}(t^2 - 4) = -\frac{t^2}{2} + 5t - \frac{3}{2}.$$

Отже,

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 + 2t + \dfrac{t^2}{2}, & t \in [0,1), \\ 3t + \dfrac{1}{2}, & t \in [1,2), \\ -\dfrac{t^2}{2} + 5t - \dfrac{3}{2}, & t \in [2,5], \end{cases} \qquad x_2(t) = \begin{cases} t + 2, & t \in [0,1), \\ 3, & t \in [1,2), \\ 5 - t, & t \in [2,5]. \end{cases}$$

Для більш складних систем диференціальних рівнянь, в яких розв’язок не може бути отримано відразу в явному вигляді інтегруванням правої частини, потрібно використовувати звичайні методи розв’язання диференціальних рівнянь. Рівняння необхідно розглядати на кожному проміжку неперервності функції керування, не забуваючи перераховувати початкові умови під час просування до кінцевої точки відрізка.

Складемо функцію Гамільтона:

$$H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u.$$

Спряжена задача має вигляд

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \qquad \psi_1(5) = -2x_1(5),$$

$$\dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1, \quad \psi_2(5) = -2x_2(5).$$

Умови Коші для спряженої системи, що відповідають керуванню, яке перевіряється:

$$\psi_1(5) = -22, \quad \psi_2(5) = 0.$$

Відповідний розв'язок спряженої системи

$$\psi_1(t) = -22, \quad \psi_2(t) = 22(t-5), \quad t \in [0,5].$$

2) Складемо функцію

$$W(v,t) = H(t,x(t),\psi(t),v) - H(t,x(t),\psi(t),u(t)) = \psi_2(t)(v - u(t)) =$$

$$= \begin{cases} 22(t-5)(v-1), & t \in [0,1), \\ 22(t-5)v, & t \in [1,2), \\ 22(t-5)(v+1), & t \in [2,5]. \end{cases}$$

3) Задача максимізації по v функції $W(v,t)$ при кожному фіксованому $t \in [0,5)$ являє собою задачу пошуку максимуму лінійної функції однієї змінної на відрізку $[-1,1]$. Розв'язок задачі залежить від знаку коефіцієнту при v. Оскільки при $t \in [0,5)$ цей коефіцієнт $22(t-5)$ від'ємний, то максимум шуканої функції досягається при $v = -1$. Таким чином,

$$\overline{W}(t) = \begin{cases} -44(t-5), & t \in [0,1), \\ -22(t-5), & t \in [1,2), \\ 0, & t \in [2,5). \end{cases}$$

4) Функція $\overline{W}(t)$ додатна на проміжку $[0,2)$. Тому керування, що перевіряється, не задовольняє принцип максимуму. Отже, керування $u(t)$ завідомо не може бути оптимальним.

Значення функціоналу на керуванні $u(t)$ дорівнює 121.

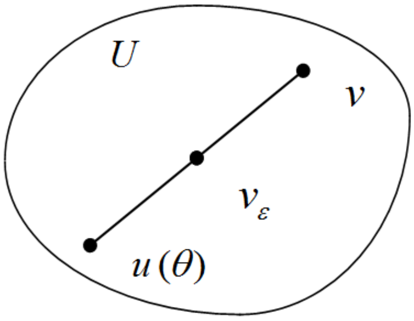
3.3. Диференціальний принцип максимуму

Теорема 3.3. Нехай виконано умови теореми 3.1 (з урахуванням зауваження 3.3) і, крім того, функція $f(t,x,u)$ диференційована по u, а множина U є опуклою. Тоді, якщо $u(t) -$ оптимальне керування, $x(t)$ та $\psi(t)$ - відповідні йому розв'язки вихідної та спряженої систем, то при всіх $t \in [t_0, t_1)$ справедлива рівність

$$\frac{\partial H^T(t,x(t),\psi(t),u(t))}{\partial u} u(t) = \max_{u \in U} \frac{\partial H^T(t,x(t),\psi(t),u(t))}{\partial u} u. \tag{3.19}$$

<u>Доведення.</u> Припустимо супротивне, тобто існують точка $\theta \in [t_0, t_1)$, вектор $v \in U$ та число $\alpha > 0$ такі, що

$$\frac{\partial H^T(\theta,x(\theta),\psi(\theta),u(\theta))}{\partial u}u(\theta) = \frac{\partial H^T(\theta,x(\theta),\psi(\theta),u(\theta))}{\partial u}v - \alpha. \qquad (3.20)$$



Так як множина U є опуклою, то відрізок, що з'єднує точки $u(\theta)$ та v належить множині U. Оберемо на ньому точку v_ε:

$$v_\varepsilon = u(\theta) + \varepsilon(v - u(\theta)), \varepsilon \in [0,1].$$

В силу принципу максимуму

$$0 \geq H(\theta, x(\theta), \psi(\theta), v_\varepsilon) - H(\theta, x(\theta), \psi(\theta), u(\theta)) =$$

$$= \frac{\partial H^T(\theta, x(\theta), \psi(\theta), u(\theta))}{\partial u}(v_\varepsilon - u(\theta)) + o(\|v_\varepsilon - u(\theta)\|) =$$

$$= \varepsilon\frac{\partial H^T(\theta, x(\theta), \psi(\theta), u(\theta))}{\partial u}(v - u(\theta)) + o(\varepsilon\|v - u(\theta)\|) =$$

$$= \varepsilon\alpha + o(\varepsilon) = \varepsilon\left(\alpha + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}\right) > 0$$

при достатньо малих ε, так як $\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ та знак виразу $\alpha + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}$ визнається першим доданком. Отримали протиріччя, отже теорему доведено.

Наслідок 3.2. Нехай виконані умови теореми 3.3 та, крім того, множина U відкрита. Тоді оптимальне керування $u(t)$ в кожний момент $t \in [t_0, t_1)$ доставляє стаціонарне значення гамільтоніану системи, тобто

$$\frac{\partial H(t,x(t),\psi(t),u(t))}{\partial u} = 0. \qquad (3.21)$$

Доведення. Так як множина U відкрита, то оптимальне керування $u(t)$ в кожний момент часу t входить в множину U з деяким δ-околом. Тоді твердження наслідку безпосередньо випливає з (3.19), оскільки якщо $\frac{\partial H(t,x(t),\psi(t),u(t))}{\partial u} \neq 0$, то вираз, що стоїть зліва можна збільшити, поклавши $u = u(t) + v$, де $\frac{\partial H^T(t,x(t),\psi(t),u(t))}{\partial u}v > 0$.

3.4. Властивості функції Гамільтона на екстремальних керуваннях

Іноді відсіяти завідомо неоптимальні керування допомагає знання властивостей функції Гамільтона на керуваннях, що задовольняють принцип максимуму.

Означення 3.2. Допустиме керування $u(t)$ називається екстремальним, якщо вздовж нього та відповідних йому траєкторій $x(t), \psi(t)$ основної та спряженої систем (3.1) та (3.17) виконується умова максимуму (3.5).

Траєкторія $x(t)$, яка відповідає екстремальному керуванню, називається екстремальною.

Теорема 3.4. Нехай функція $f(t,x,u)$ задовольняє всім вимогам теореми принципу максимуму та, крім того, неперервна по t. Тоді функція Гамільтона вздовж екстремальних керувань неперервна по t.

Доведення. Розглянемо довільну точку $t \in [t_0, t_1]$ та Δ настільки мале, що $t + \Delta \in [t_0, t_1]$. Тоді

$$H(t) = H(t, x(t), \psi(t), u(t)) \geq H(t, x(t), \psi(t), u(t+\Delta));$$

$$H(t+\Delta) = H(t+\Delta, x(t+\Delta), \psi(t+\Delta), u(t+\Delta)) \geq$$
$$\geq H(t+\Delta, x(t+\Delta), \psi(t+\Delta), u(t)).$$

Оцінимо $H(t+\Delta) - H(t)$:

$$H\big(t+\Delta, x(t+\Delta), \psi(t+\Delta), u(t)\big) - H\big(t, x(t), \psi(t), u(t)\big) \leq$$
$$\leq H(t+\Delta) - H(t) \leq$$
$$\leq H(t+\Delta, x(t+\Delta), \psi(t+\Delta), u(t+\Delta)) - H(t, x(t), \psi(t), u(t+\Delta)). \quad (3.22)$$

Спрямуємо $\Delta \to 0$. Функція Гамільтона $H(t,x,\psi,u) = \psi^T f(t,x,u)$ неперервна по першим трьом аргументам, отже, по теоремі про границю проміжної функції

$$H(t+\Delta) - H(t) \to 0 \text{ при } \Delta \to 0,$$

так як оцінки знизу та зверху різниці $H(t+\Delta) - H(t)$ прямують до 0 при $\Delta \to 0$.

Зауваження 3.4. Якщо розглядати функцію Гамільтона на довільних траєкторіях, вона буде кусково-неперервною.

Теорема 3.5. Нехай функція $f(t,x,u)$ задовольняє всім умовам теореми 3.1 та, крім того, диференційована по t. Тоді в кожній точці неперервності екстремального керування повна похідна по часу від функції Гамільтона дорівнює її частковій похідній по часу:

$$\frac{dH(t,x(t),\psi(t),u(t))}{dt}=\frac{\partial H(t,x(t),\psi(t),u(t))}{\partial t}. \qquad (3.23)$$

Зауваження 3.5. Ліву частину (3.23) отримаємо підстановкою в H функцій $x(t)$, $\psi(t)$, $u(t)$, а потім проводиться диференціювання по t. Праву частину (3.23) отримаємо диференціюванням по t функції $H(t,x,\psi,u)$, а потім підставляємо функції $x(t)$, $\psi(t)$, $u(t)$.

<u>Доведення.</u> Нехай $t\in(t_0,t_1)$ - точка неперервності екстремального керування $u(t)$ та $\varDelta>0$ настільки мале, що $t+\varDelta\in(t_0,t_1)$. Розділимо ліву частину нерівності (3.22) на $\varDelta>0$:

$$\frac{H\big(t+\varDelta,x(t+\varDelta),\psi(t+\varDelta),u(t)\big)-H\big(t,x(t),\psi(t),u(t)\big)}{\varDelta}\le$$
$$\le\frac{H(t+\varDelta)-H(t)}{\varDelta}\ .$$

Отже,

$$\frac{H(t+\varDelta,x(t+\varDelta),\psi(t+\varDelta),u(t))-H(t,x(t+\varDelta),\psi(t+\varDelta),u(t))}{\varDelta}+$$
$$+\frac{H(t,x(t+\varDelta),\psi(t+\varDelta),u(t))-H(t,x(t),\psi(t+\varDelta),u(t))}{\varDelta}+$$
$$+\frac{H(t,x(t),\psi(t+\varDelta),u(t))-H(t,x(t),\psi(t),u(t))}{\varDelta}\le\frac{H(t+\varDelta)-H(t)}{\varDelta}.$$

Переходячи до границі при $\varDelta\to 0$, отримаємо:

$$\frac{\partial H(t,x(t),\psi(t),u(t))}{\partial t}+\frac{\partial H^T(t,x(t),\psi(t),u(t))}{\partial x}\dot{x}(t)+$$
$$+\frac{\partial H^T(t,x(t),\psi(t),u(t))}{\partial\psi}\dot{\psi}(t)\le\lim_{\varDelta\to+0}\frac{H(t+\varDelta)-H(t)}{\varDelta}$$

або, враховуючи, що

$$\dot{x}(t)=f\big(t,x(t),u(t)\big)=\frac{\partial H\big(t,x(t),\psi(t),u(t)\big)}{\partial\psi},$$

$$\dot{\psi(t)} = -\frac{\partial H(t, x(t), \psi(t), u(t))}{\partial x},$$

маємо

$$\frac{\partial H(t,x(t),\psi(t),u(t))}{\partial t} \le \lim_{\Delta \to +0} \frac{H(t+\Delta)-H(t)}{\Delta}. \qquad (3.24)$$

Аналогічно з правої частини нерівності (3.22) отримаємо

$$\lim_{\Delta \to +0} \frac{H(t+\Delta)-H(t)}{\Delta} \le \frac{\partial H(t,x(t),\psi(t),u(t))}{\partial t}. \qquad (3.25)$$

З (3.24) та (3.25) випливає, що

$$\lim_{\Delta \to +0} \frac{H(t+\Delta)-H(t)}{\Delta} = \frac{\partial H(t,x(t),\psi(t),u(t))}{\partial t}.$$

У випадку $\Delta < 0$ отримаємо $\lim\limits_{\Delta \to -0} \frac{H(t+\Delta)-H(t)}{\Delta} = \frac{\partial H(t,x(t),\psi(t),u(t))}{\partial t}$. Отже, повна похідна по t функції Гамільтона існує та співпадає з її частинною похідною t. Теорему доведено.

Наслідок 3.3. Вздовж екстремального керування стаціонарної системи функція Гамільтона стала.

Доведення. Для стаціонарної системи функція f явно не залежить від t, тобто $f = f(x, u)$. Тоді $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$. Отже, в силу теореми 3.5 $\frac{dH}{dt} = 0$ в усіх точках неперервності керування $u(t)$. Так як керування $u(t)$ кусково-неперервне на проміжку $[t_0, t_1]$, то $\frac{dH}{dt} = 0$ за можливим виключенням скінченого числа точок. Крім того, в силу теореми 3.4 функція $H(t)$ неперервна. Таким чином, $H(t)$ є сталою на екстремальній траєкторії.

Зауваження 3.6. Теореми 3.4 та 3.5 і наслідок до теореми 3.5 можна використовувати для перевірки керування на оптимальність: якщо $H(t)$ розривна або не є сталою (для стаціонарних систем), то керування $u(t)$ не є оптимальним.

До зробленого раніше висновку про неоптимальність керування в прикладі 3.2 можна прийти, використовуючи теорему 3.4. Дійсно, функція Гамільтона, побудовна на керуванні $u(t)$ та відповідних траєкторіях $x(t), \psi(t)$ основної та спряженої систем, має вигляд

$$H(t,x(t),\psi(t),u(t)) = \begin{cases} -22(t+2)+22t-110=-154, & t\in[0,1), \\ -22\cdot 3=-66, & t\in[1,2), \\ -22(5-t)-22t+110=0, & t\in[2,5] \end{cases}$$

та не є неперервною. Крім того, в силу наслідку 3.3 вздовж екстремального керування стаціонарної системи функція Гамільтона має бути сталою, що в даному прикладі не виконується.

3.5. Використання принципу максимуму для розв'язання задач оптимального керування

Приклад 3.3. Розв'язати задачу оптимального керування

$$\dot{x} = x + u, x(0) = 0,$$

де $t \in [0,1], x \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}$ з функціоналом $J[u] = \int_0^1 u^2(t)dt - x(1) \to min.$

Складемо функцію Гамільтона $H = \psi(x+u) - u^2$. Запишемо спряжену систему

$$\dot{\psi} = -\psi, \psi(1) = 1.$$

Знайдемо максимум функції Гамільтона за керуванням. Так як $u \in \mathbb{R}$, то $u(t)$ визначимо з умови

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \psi - 2u = 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -2 < 0 \Rightarrow u(t) = \frac{1}{2}\psi(t).$$

Таким чином, крайова задача принципу максимуму має вигляд:

$$\dot{x} = x + \frac{1}{2}\psi, x(0) = 0,$$

$$\dot{\psi} = -\psi, \psi(1) = 1.$$

З другого рівняння системи отримаємо $\psi(t) = e^{1-t}$. Тому $u(t) = \frac{1}{2}e^{1-t}$.

Розв'яжемо перше рівняння системи:

$$\dot{x} = x + \frac{1}{2}e^{1-t}, \qquad x(0) = 0.$$

Відповідне однорідне рівняння має вигляд $\dot{x} = x$. Його загальний розв'язок $x(t) = Ce^t$. Шукатимемо розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді $x(t) = C(t)e^t$:

$$\dot{C}(t)e^t + C(t)e^t = C(t)e^t + \frac{1}{2}e^{1-t} \Rightarrow \dot{C}(t) = \frac{1}{2}e^{1-2t} \Rightarrow$$

$$C(t) = -\frac{1}{4}e^{1-2t} + C\ .$$

Отже, $x(t) = -\frac{1}{4}e^{1-t} + Ce^t -$ загальний розв'язок неоднорідного рівняння.

З умови $x(0) = 0$ отримаємо $-\frac{1}{4}e + C = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{4}e$ та

$$x(t) = -\frac{1}{4}e^{1-t} + \frac{1}{4}e^{1+t} = \frac{1}{4}e(e^t - e^{-t}) = \frac{1}{2}e\, sht.$$

Дана задача відноситься до класу лінійно-опуклих, тому знайдене керування та відповідний йому стан є оптимальними.

Приклад 3.4. Розв'язати задачу оптимального керування

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u, & x_2(0) = 0, \end{cases}$$

$$t \in [0,2\pi], \quad |u| \leq 1,$$

$$J[u] = x_2(2\pi) \to min.$$

1) Функція Гамільтона має вигляд

$$H = \psi_1 x_2 + \psi_2(-x_1 + u).$$

Спряжена система

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = \psi_2, & \psi_1(2\pi) = 0, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1, & \psi_2(2\pi) = -1. \end{cases}$$

Зведемо систему до диференціального рівняння другого порядку:

$$\ddot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = -\psi_1 \Rightarrow \ddot{\psi}_1 + \psi_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\psi_1(t) = C_1 cost + C_2 sint,$$

$$\psi_2(t) = \dot{\psi}_1(t) = -C_1 sint + C_2 cost.$$

Сталі C_1 та C_2 знайдемо з граничних умов $\psi_1(2\pi) = 0, \psi_2(2\pi) = -1$:

$$C_1 = 0,\ C_2 = -1 \Rightarrow \psi_1(t) = -sint, \qquad \psi_2(t) = -cost.$$

2) Оптимальне керування визначається шляхом розв'язання для кожного фіксованого моменту $t \in [0,2)$ задачі максимізації функції Гамільтона по керуванню:

$$\psi_1 x_2 + \psi_2(-x_1 + u) \to max, |u| \leq 1 \Rightarrow$$

$$\psi_2 u = -cost \cdot u \to max, |u| \le 1 \Rightarrow$$

$$u(t) = \begin{cases} -1, & t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right), \\ 1, & t \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right), \\ -1, & t \in \left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right). \end{cases}$$

Взагалі кажучи, значеннями $u\left(\frac{\pi}{2}\right)$ та $u\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ можуть бути довільні числа з множини $[-1,1]$. Оскільки для визначеності ми припустили, що компоненти допустимого керування неперервні справа, то

$$u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad u\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1.$$

а) При $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ керування $u(t) = -1$, отримаємо систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 1, & x_2(0) = 0. \end{cases}$$

Зведемо систему до диференціального рівняння другого порядку:

$$\ddot{x}_2 = -\dot{x}_1 = -x_2 \Rightarrow \ddot{x}_2 + x_2 = 0 \Rightarrow$$

$$x_2(t) = C_1 cost + C_2 sint,$$

$$x_1(t) = -\dot{x}_2(t) - 1 = C_1 sint - C_2 cost - 1.$$

Сталі C_1 та C_2 знайдемо з початкових умов:

$$-C_2 - 1 = 0, C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0, C_2 = -1 \Rightarrow$$

$$x_1(t) = cost - 1, \qquad x_2(t) = -sint.$$

б) При $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ керування $u(t) = 1$, отримаємо систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 1, & x_2\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1. \end{cases}$$

Зведемо систему до диференціального рівняння другого порядку:

$$\ddot{x}_2 = -\dot{x}_1 = -x_2 \Rightarrow \ddot{x}_2 + x_2 = 0 \Rightarrow$$

$$x_2(t) = C_1 cost + C_2 sint,$$

$$x_1(t) = -\dot{x}_2(t) + 1 = C_1 sint - C_2 cost + 1.$$

Сталі C_1 та C_2 знайдемо з початкових умов:

$$C_1 + 1 = -1, C_2 = -1 \Rightarrow C_1 = -2, C_2 = -1 \Rightarrow$$

$$x_1(t) = -2sint + cost + 1, \qquad x_2(t) = -2cost - sint.$$

в) При $t \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ керування $u(t) = -1$, отримаємо систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 1, & x_2\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1. \end{cases}$$

Зведемо систему до диференціального рівняння другого порядку:

$$\ddot{x}_2 = -\dot{x}_1 = -x_2 \Rightarrow \ddot{x}_2 + x_2 = 0 \Rightarrow$$

$$x_2(t) = C_1 cost + C_2 sint,$$

$$x_1(t) = -\dot{x}_2(t) - 1 = C_1 sint - C_2 cost - 1.$$

Сталі C_1 та C_2 знайдемо з початкових умов:

$$-C_1 - 1 = 3, -C_2 = 1 \Rightarrow C_1 = -4, C_2 = -1 \Rightarrow$$

$$x_1(t) = -4sint + cost - 1, \qquad x_2(t) = -4cost - sint.$$

Отже,

$$x_1(t) = \begin{cases} cost - 1, & t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \\ -2sint + cost + 1, & t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \\ -4sint + cost - 1, & t \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right], \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} -sint, & t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \\ -2cost - sint, & t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \\ -4cost - sint, & t \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]. \end{cases}$$

Дана задача відноситься до класу лінійно-опуклих, тому знайдене керування та відповідний йому стан є оптимальними.

Приклад 3.5. Розв'язати задачу оптимального керування

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = tu_1 - u_2, & x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2 = x_1 + u_2 - 2u_3^2, & x_2(0) = 0, \end{cases}$$

$$t \in [0,2], \quad u_1 \in [0,2], \quad |u_2| \le 1, \quad u_3 \in \{-4,0,1,3\},$$

$$J[u] = x_2(2) \to min.$$

1) Функція Гамільтона має вигляд

$$H = \psi_1(tu_1 - u_2) + \psi_2(x_1 + u_2 - 2u_3^2).$$

Спряжена система

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\psi_2, & \psi_1(2) = 0, \\ \dot{\psi}_2 = 0, & \psi_2(2) = -1 \end{cases}$$

має своїм розв'язком функції

$$\psi_1(t) = t - 2, \quad \psi_2(t) \equiv -1.$$

2) Оптимальне керування визначається шляхом розв'язання для кожного фіксованого моменту $t \in [0,2)$ задачі математичного програмування

$$H = (t-2)(tu_1 - u_2) - (x_1 + u_2 - 2u_3^2) =$$

$$= (t-2)tu_1 - (t-1)u_2 + 2u_3^2 - x_1 \to max,$$

$$u_1 \in [0,2], \quad |u_2| \le 1, \quad u_3 \in \{-4,1,2,3\}.$$

З причини сепарабельності цільової функції і виду обмежень, що накладаються на компоненти керування, дана задача рівносильна наступним:

а) $(t-2)tu_1 \to max, u_1 \in [0,2]$. Оскільки $(t-2)t < 0$ при $t \in (0,2)$, то $u_1(t) \equiv 0, \quad t \in [0,2)$.

б) $-(t-1)u_2 \to max, \quad |u_2| \le 1$. Так як $-(t-1) > 0$ при $t \in [0,1)$ та $-(t-1) < 0$ при $t \in (1,2)$, то

$$u_2(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1), \\ -1, & t \in [1,2). \end{cases}$$

в) $2u_3^2 \to max, \quad u_3 \in \{-4,0,1,3\}$. Отримаємо $u_3(t) = -4, \quad t \in [0,2)$.

3) Відповідний знайденому керуванню стан процесу визначається після підстановки $u(t)$ в праву частину початкової системи диференціальних рівнянь: при $t \in [0,1)$

$$\dot{x}_1 = -1, \quad x_1(0) = 0.$$

Звідки $x_1(t) = -t$ та

$$\dot{x}_2 = -t - 31, \quad x_2(0) = 0.$$

Маємо $x_2(t) = -\frac{t^2}{2} - 31t$.

При $t \in [1,2)$:

$$\dot{x}_1 = 1, \quad x_1(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1(t) = t - 2;$$

$$\dot{x}_2 = t - 35, \quad x_2(1) = -31.5 \quad \Rightarrow \quad x_2(t) = \frac{t^2}{2} - 35t + 3.$$

Таким чином, компоненти знайденої вектор - функції стану мають вид:

$$x_1(t) = \begin{cases} -t, & t \in [0,1), \\ t - 2, & t \in [1,2], \end{cases} \quad x_2(t) = \begin{cases} -\dfrac{t^2}{2} - 31t, & t \in [0,1), \\ \dfrac{t^2}{2} - 35t + 3, & t \in [1,2]. \end{cases}$$

Дана задача відноситься до класу лінійно-опуклих, тому знайдений вектор керування та відповідний йому стан є оптимальними.

Приклад 3.6. Розглянемо одну з задач оптимального планування інвестицій. Нехай $x(t) -$ обсяг випуску продукції в момент часу t в вартісному вираженні; $y_1(t) -$ частина випуску продукції, яка витрачається на інвестиції в виробництво; $y_2(t) -$ частина випуску, яка витрачається на споживання. Відомий початковий обсяг випуску $x(0) = c > 0$. Припускається, що приріст випуску продукції до деякого моменту часу є пропорційним сумарному обсягу інвестицій, зроблених за всі попередні проміжки часу. Тоді

$$x(t) = y_1(t) + y_2(t), \quad y_1(t) \geq 0, \quad y_2(t) \geq 0,$$

$$x(t) = c + \alpha \int_0^t y_1(s)\, ds,$$

де $\alpha > 0 -$ відомий параметр.

Метою задачі є пошук такого розподілу випуску продукції $(y_1(t), y_2(t))$ за період часу $t \in [0, t_1]$, при якому максимізується загальний обсяг споживання за вказаний період часу:

$$\int_0^{t_1} y_2(s) ds \to max.$$

Перейдемо до формалізації задачі як задачі оптимального керування. Нехай керування $u(t) -$ доля випуску продукції, яку спрямовано в момент t на інвестиції:

$$u(t) = \frac{y_1(t)}{x(t)} \in [0,1], \quad t \in [0, t_1].$$

Тоді

$$y_1(t) = u(t)x(t),$$

$$y_2(t) = x(t) - y_1(t) = x(t)(1 - u(t)),$$

$$x(t) = c + \alpha \int_0^t u(s)x(s)\, ds. \tag{3.26}$$

Диференціюючи (3.26) по t і переходячи до задачі на мінімум, отримаємо

$$\dot{x} = \alpha u x, \quad x(0) = c,$$

$$u \in [0,1], \quad t \in [0, t_1],$$

$$J[u] = \int_0^{t_1} (u(t) - 1)x(t)dt \to min. \tag{3.27}$$

Розв’яжемо задачу за допомогою принципу максимуму. Помітимо, що довільному допустимому керуванню відповідає розв’язок рівняння (3.27) наступного вигляду:

$$x(t) = c \ \ exp\left(\alpha \int_0^t u(s)ds\right) > 0;$$

функція Гамільтона:

$$H = \alpha\psi u x - (u - 1)x;$$

спряжена задача:

$$\dot{\psi} = -\alpha\psi u + u - 1, \quad \psi(t_1) = 0. \tag{3.28}$$

Оптимальне керування $u^*(t)$ задовольняє умову

$$(\alpha\psi(t) - 1)x(t)u(t) = \max_{v \in [0,1]} (\alpha\psi(t) - 1)x(t)v, \quad t \in [0, t_1),$$

де $x(t)$ та $\psi(t)$ - розв’язки початкової та спряженої задач (3.27), (3.28). Структура оптимального керування:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \alpha\psi(t) - 1 > 0, \\ 0, & \alpha\psi(t) - 1 < 0, \\ [0,1], & \alpha\psi(t) - 1 = 0. \end{cases}$$

Таким чином, значення оптимального керування в точці t визначається знаком різниці $\alpha\psi(t) - 1$. Оскільки $\psi(t_1) = 0$, то в околі точки t_1 справедлива нерівність $\alpha\psi(t) - 1 < 0$. Почнемо інтегрування спряженого рівняння (3.28) справа наліво з точки t_1, підставляючи $u(t) = 0$:

$$\dot{\psi} = -1, \quad \psi(t_1) = 0.$$

Маємо

$$\psi(t) = t_1 - t.$$

Знайдемо корінь $\bar{t}$ рівняння $\alpha\psi(t) - 1 = 0$, підставивши знайдене ψ:

$$\alpha(t_1 - t) - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{t} = t_1 - \frac{1}{\alpha}.$$

Можливі два випадки:

1) $\bar{t} \le 0$, тобто всюди на проміжку $(0, t_1]$ справедлива нерівність $\alpha\psi(t) - 1 < 0$. Тоді оптимальним може бути лише керування $u(t) \equiv 0,\ t \in [0, t_1]$. Така ситуація має місце, якщо $t_1 \le \frac{1}{\alpha}$, тобто якщо процес розглядається на невеликому проміжку часу. В цьому випадку не вигідно інвестувати кошти у виробництво, а слід направляти їх всі на споживання.

2) $\bar{t} \in (0, t_1)$, тобто $t_1 > \frac{1}{\alpha}$. Тоді потрібно проаналізувати три можливі ситуації, що можуть мати місце лівіше точки $\bar{t}$:

а) $\alpha\psi(t) - 1 > 0,\ t \in (\tau, \bar{t})$. В цьому випадку $u(t) = 1,\ t \in (\tau, \bar{t})$ та

$$\dot{\psi} = -\alpha\psi, \quad \psi(\bar{t}) = t_1 - \bar{t} = \frac{1}{\alpha}.$$

Тоді $\psi(t) = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha(\bar{t} - t)}$ й умова $\alpha\psi(t) - 1 = e^{\alpha(\bar{t} - t)} - 1 > 0$ виконується для всіх $t \in [0, \bar{t})$.

б) $\alpha\psi(t) - 1 < 0,\ t \in (\tau, \bar{t})$. Тоді $u(t) = 0,\ t \in (\tau, \bar{t})$ та

$$\dot{\psi} = -1, \quad \psi(\bar{t}) = \frac{1}{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \psi(t) = \frac{1}{\alpha} + \bar{t} - t.$$

Але $\alpha\psi(t) - 1 = \alpha(\bar{t} - t) > 0$ при $t \in [0, \bar{t})$, що протирічить припущенню $\alpha\psi(t) - 1 < 0,\ t \in (\tau, \bar{t})$.

в) $\alpha\psi(t) - 1 = 0,\ t \in [\tau, \bar{t}]$. Тоді $\psi(t) = \frac{1}{\alpha}$, що протирічить спряженій системі $-\alpha\frac{1}{\alpha}u + u - 1 = -1 \ne 0$.

Таким чином, оптимальне керування може мати лише наступну структуру:

$$u(t) \equiv 0, \quad t \in [0, t_1], \text{ якщо } \quad t_1 \le \frac{1}{\alpha}$$

або

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left[0, t_1 - \frac{1}{\alpha}\right), \\ 0, & t \in \left[t_1 - \frac{1}{\alpha}, t_1\right] \end{cases} \quad \text{в} \quad \text{випадку} \quad t_1 > \frac{1}{\alpha}.$$

Отже, при достатньо великій тривалості процесу необхідно в першу частину часу витрачати всі кошти на інвестиції у виробництво, а в решту часу направляти всі кошти на споживання.

Приклад 3.7. Розглянемо задачу

$$\dot{x} = tu, \quad x(0) = 0,$$

$$t \in [0,1], \quad |u| \le 1,$$

$$J[u] = x^2(1) + \int_0^1 u^2(s)ds \to min.$$

Функція Гамільтона:

$$H = \psi t u - u^2;$$

спряжена задача:

$$\dot{\psi} = 0, \quad \psi(1) = -2x(1).$$

З умови мінімуму гамільтоніану визначаємо

$$u(t, x, \psi) = \begin{cases} \frac{\psi t}{2}, & |\psi(t) \cdot t| \le 2, \\ -1, & \psi(t) \cdot t < -2, \\ 1, & \psi(t) \cdot t > 2. \end{cases}$$

Розв’язком спряженої задачі є функція $\psi(t) \equiv -2x(1), \quad t \in [0,1]$. Використовуючи те, що $x(1) = \int_0^1 tu(t)dt$ та враховуючи обмеження на керування, отримаємо

$$|x(1)| \le 1, \text{ тобто } |\psi(t) \cdot t| \le 2, \quad t \in [0,1].$$

Остаточно приходимо до крайової задачі

$$\dot{x} = \frac{\psi t^2}{2}, \quad \dot{\psi} = 0, \quad x(0) = 0, \quad \psi(1) = -2x(1).$$

Звідси

$$\dot{x} = -x(1)t^2, \quad x(0) = 0,$$

тобто $x(t) = -x(1)\frac{t^3}{3}$. При $t = 1$ має виконуватися рівність $x(1) = -\frac{x(1)}{2}$, що можливе лише при $x(1) = 0$.

Таким чином,

$$x(t) \equiv 0, \quad u(t) \equiv 0, \quad \psi(t) \equiv 0, \quad t \in [0,1].$$

Оскільки задача, що розглядається, є лінійно-опуклою, то керування $u(t) \equiv 0$ є оптимальним. Глобальний мінімум функціоналу дорівнює 0.

У розібраному прикладі зведення до крайової задачі було здійснене лише для того, щоб проілюструвати цей підхід до розв’язання задач оптимального керування. Ясно, що отриманий результат очевидний і може бути знайдений безпосереднім аналізом виду задачі. У цьому ж прикладі змінимо тепер критерій якості.

Приклад 3.8. Розв’язати зведенням до крайової задачі принципу максимуму

$$\dot{x} = tu, \quad x(0) = 0,$$

$$t \in [0,1], \quad |u| \leq 1,$$

$$J[u] = x^2(1) - \int_0^1 u^2(s)ds \to min.$$

Функція Гамільтона:

$$H = \psi tu + u^2;$$

спряжена задача та ж, що в прикладі 3.4:

$$\dot{\psi} = 0, \quad \psi(1) = -2x(1).$$

З умови максимуму маємо

$$u(t,x,\psi) = \begin{cases} 1, & \psi(t) \cdot t > 0, \\ -1, & \psi(t) \cdot t < 0, \\ \pm 1, & \psi(t) \cdot t = 0. \end{cases}$$

Оскільки $\psi(t) \equiv -2x(1)$ проаналізуємо три варіанти:

1) $x(1) < 0$. Тоді $\psi(t) > 0$, $u(t) \equiv 1$, $t \in [0,1]$, але цьому керуванню відповідає стан $x(t) = \frac{t^2}{2}$, тобто $x(1) > 0$. Отже, цей варіант неможливий;

2) $x(1) > 0$. Аналогічно до попереднього маємо $\psi(t) < 0, u(t) \equiv -1, t \in [0,1]$, $x(t) = -\frac{t^2}{2}, x(1) < 0$, варіант неможливий;

3) $x(1) = 0$. Принцип максимуму задовольняє довільне кусково-неперервне керування, що приймає в кожній точці проміжку $[0,1)$ значення ± 1, для якого відповідне значення стану $x(1) = 0$. Так як задача є лінійно-опуклою, то таке керування оптимальне.

Очевидно, що оптимальних керувань нескінчена множина. Наприклад, глобальний мінімум доставляють критерію якості функції

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ -1, & t \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]; \end{cases} \quad u(t) = \begin{cases} -1, & t \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ 1, & t \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]; \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} -1, & t \in \left[0, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right), \\ 1, & t \in \left[\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ -1, & t \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\right), \\ 1, & t \in \left[\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}, 1\right]; \end{cases}$$

і т.п.

Глобальний мінімум функціоналу:

$$J[u] = x^2(1) - \int_0^1 u^2(s)ds = -\int_0^1 1ds = -1.$$

Приклад 3.9. Розглянемо систему керування, що описується системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, & x_1(0) = 1, \\ \dot{x}_2 = x_1^2, & x_2(0) = 0 \end{cases} \tag{3.29}$$

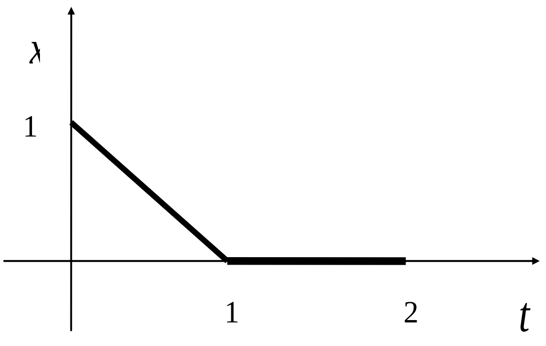
з обмеженням на керування $|u| \le 1$ та критерієм якості $J[u] = x_2(2) \to min$.

Розв’язок цієї задачі легко знайти, враховуючи геометричні міркування, якщо переписати дану задачу як задачу Лагранжа

$$\dot{x}_1 = u, x_1(0) = 1, |u| \le 1,$$

$$J[u] = \int_0^2 x_1^2(t)dt \to min, \tag{3.30}$$

тобто потрібно мінімізувати площу плоскої фігури, обмеженої віссю t, графіком функції $x_1^2(t)$ і прямими $t = 0$, $t = 2$.



Враховуючи початкову умову $x_1(0) = 1$ та обмеження на нахил кривої $\dot{x}_1 = u \in [-1,1]$, шукана функція має вигляд

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 - t, & t \in [0,1), \\ 0, & t \in [1,2], \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0,1), \\ 0, & t \in [1,2]. \end{cases}$$

Розв'яжемо задачу (3.29), використовуючи принцип максимуму Понтрягіна. Функція Гамільтона має вигляд $H = \psi_1 u + \psi_2 x_1^2$, спряжена система:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -2x_1\psi_2, \\ \dot{\psi}_2 = 0 \end{cases} \qquad (3.31)$$

з граничними умовами $\psi_1(2) = 0, \psi_2(2) = -1$.

Звідси випливає, що $\psi_2(t) \equiv -1$ та система (3.31) набуває вигляду

$$\dot{\psi}_1 = 2x_1, \;\; \psi_1(2) = 0.$$

Керування $u(t)$ знайдемо з умови максимуму

$$\psi_1(t)u(t) + \psi_2(t)x_1^2(t) = \max_{|u| \le 1}(\psi_1(t)u + \psi_2(t)x_1^2(t))$$

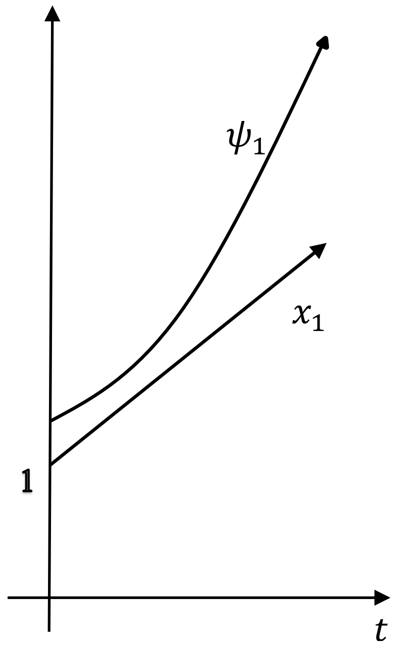
або

$$\psi_1(t)u(t) = \max_{|u| \le 1} \; \psi_1(t)u,$$

звідки

$$u(\psi_1) = \begin{cases} 1, \text{якщо } \psi_1(t) > 0, \\ -1, \text{якщо } \psi_1(t) < 0, \\ [-1,1], \text{якщо } \psi_1(t) = 0. \end{cases}$$

Отримуємо крайову задачу принципу максимуму



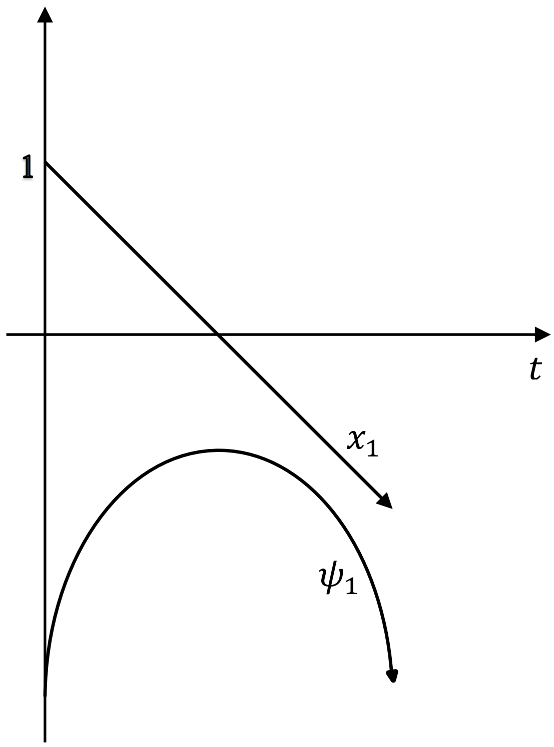
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u(\psi_1),\ x_1(0) = 1, \\ \dot{x}_2 = x_1^2, \quad\ x_2(0) = 0, \\ \dot{\psi}_1 = 2x_1, \quad \psi_1(2) = 0. \end{cases}$$

Перше та третє рівняння можна розв'язувати незалежно від другого. Значення $\psi_1(0) = \psi_{10}$ будемо підбирати так, щоб $\psi_1(2) = 0$:

1) якщо $\psi_{10} > 0$, то $u = 1$ в правому околі точки $t = 0$ та x_1 зростає, отже, й функція ψ_1 зростає й залишається додатньою для усіх $t \in [0,2]$, тобто умова $\psi_1(2) = 0$ не виконується;

2) якщо $\psi_{10} = 0$, то так як $x_1(0) = 1 > 0$, то в правому околі точки $t = 0$ функція ψ_1 зростає, стає додатньою та, аналогічно до випадку 1) умова $\psi_1(2) = 0$ не виконується;

3) якщо $\psi_{10} < -1$, то $u = -1$ при $0 \le t < \tau$. Так як $\dot{x}_1 = -1$ та $x_1(0) = 1$, то $x_1(t) = 1 - t$. При цьому $\dot{\psi}_1 = 2(1 - t)$, отже,



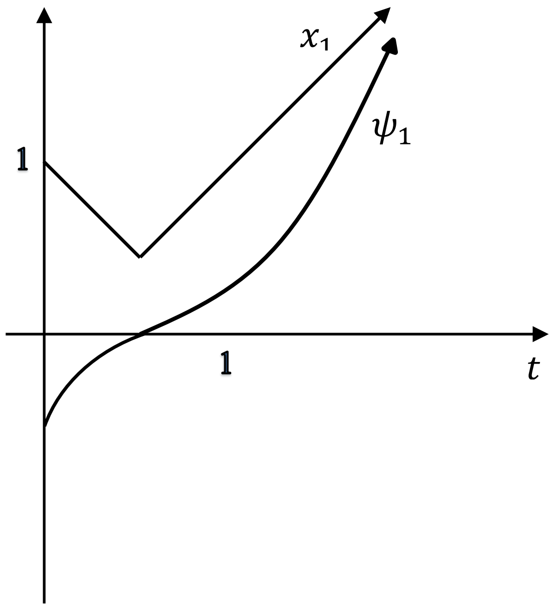
$$\psi_1(t) = \psi_{10} + \int_0^t 2(1 - s)ds =$$
$$= \psi_{10} - (1 - s)^2|_0^t =$$
$$= \psi_{10} - (1 - t)^2 + 1 < 0$$

для всіх t.

Таким чином, ψ_1 залишається від'ємною на всьому відрізку $[0,2]$. При цьому

$$\psi_1(2) = \psi_{10} \neq 0;$$

4) якщо $\psi_{10} \in (-1{,}0)$, то $u = -1$ при $0 \le t < \tau$, де τ визначається з умови

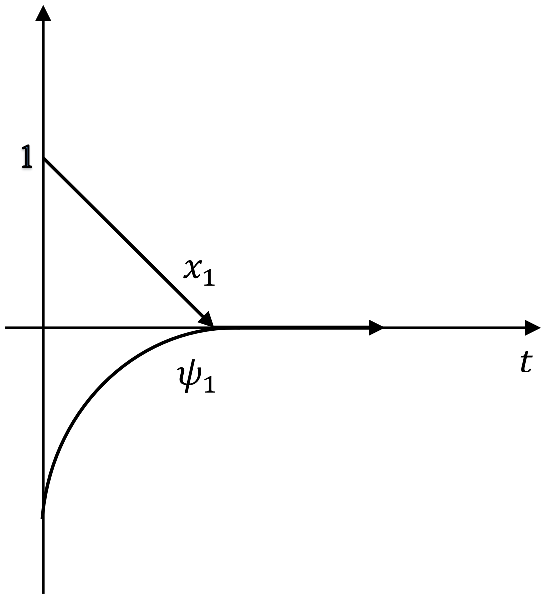


$\psi_1(\tau) = 0$. Так як $\dot{x}_1 = -1$ та $x_1(0) = 1$, то маємо $x_1(t) = 1 - t$. При цьому $\psi_1(t) = \psi_{10} - (1-t)^2 + 1$ й τ таке, що

$$\psi_{10} - (1-\tau)^2 + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\tau = 1 - \sqrt{\psi_{10} + 1}.$$

При $t > \tau$ функція $\psi_1(t)$ стає додатньою, $u = 1$ та $x_1(t)$, не досягнувши нуля, починає зростати й, отже, $\psi_1(t)$ теж зростає та задача не має розв’язку.



5) якщо $\psi_{10} = -1$, то $u = -1$ при $t \in [0, \tau)$, $x_1(t) = 1 - t$, $\psi_1(t) = -(1-t)^2$. Таким чином, $x_1(1) = 0$, $\psi_1(1) = 0$. Оберемо $u(t) \equiv 0$ при $t > 1$, тоді $x_1(t) \equiv 0$ и $\psi_1(t) \equiv 0$. Так як $\psi_1(t) \equiv 0$ на $[1{,}2]$, то u не визначається однозначно з принципу максимуму. Такі керування називаються <u>особливими</u>. Якщо $u(t) \neq 0$ при деякому $t > 1$, то ми з цієї невизначеності виходимо, але задача не має розв’язку ($\psi_1(2) \neq 0$).

Приклад 3.10. Розглянемо систему керування, що описується системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \quad x_1(0) = 1, \\ \dot{x}_2 = x_1^2, \; x_2(0) = 0 \end{cases}$$

з обмеженням на керування $u = \pm 1$.

Критерій якості

$$J[u] = x_2(2) \to min.$$

Цей приклад відрізняється від попереднього лише обмеженнями на керування.

Перепишемо дану задачу як задачу Лагранжа:

$$\dot{x}_1 = u, x_1(0) = 1, u = \pm 1,$$

$$J[u] = \int_0^2 x_1^2(t)dt \to min.$$

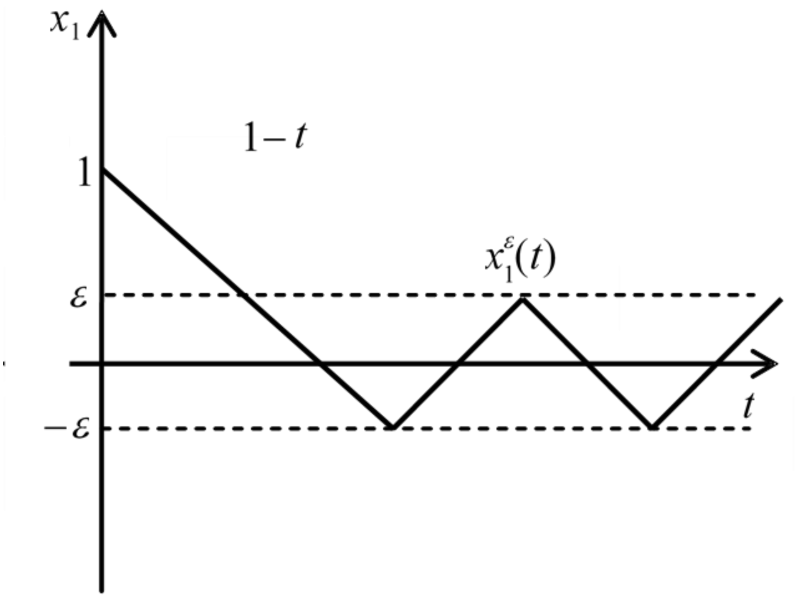
Очевидно, що шукане керування $u \equiv -1$ при $t \in [0,1)$. Далі, якщо брати $x_1(t) \equiv 0, t \in [1,2]$ (тобто утримувати $x_1(t)$ на осі t), то $u(t) \equiv 0 \notin \{-1,1\}$. Таким чином, отримати $J[u] = \int_0^2 (1-t)^2 dt = \frac{1}{3}$ ми не можемо. Однак, ми можемо підібрати керування $u_\varepsilon(t)$ таким чином, що $J[u_\varepsilon] \to \frac{1}{3}$ при $\varepsilon \to 0$.

Нехай $t \in [1,2]$. Розглянемо полосу $|x_1| \leq \varepsilon$ та будемо перемикати керування так, щоб крива $x_1(t)$ залишалась в цій полосі. Отримаємо траєкторію ${x_1}^\varepsilon(t)$, для якої $|{x_1}^\varepsilon(t)| \leq \varepsilon$, а тобто

$$J_1[u_\varepsilon] = \int_1^2 ({x_1}^\varepsilon(t))^2 dt < \varepsilon^2 \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0,$$

$$J[u_\varepsilon] = \frac{1}{3} + J_1[u_\varepsilon] \to \frac{1}{3}.$$

Таким чином, мінімум $J[u]$ в класі кусково-неперервних керувань не досягається (і навіть в класі вимірних керувань). Граничні траєкторії в таких задачах отримали назву ковзних режимів - в нашому випадку



$$x(t) = \begin{cases} 1-t, & t \in [0,1), \\ 0, & t \in [1,2]. \end{cases}$$

Приклад 3.11. Розглянемо систему керування, що описується системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, & x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2 = -x_1^2, & x_2(0) = 0, \end{cases} \tag{3.32}$$

з обмеженням на керування $|u| \le 1$ й критерієм якості $J[u] = x_2(1) \to min$.

Якщо переписати дану задачу як задачу Лагранжа

$$\dot{x}_1 = u, x_1(0) = 0, |u| \le 1,$$

$$J[u] = -\int_0^1 x_1^2(t)dt \to min,$$

то очевидно, що потрібно мінімізувати площу плоскої фігури, обмеженої віссю t, графіком функції $x_1^2(t)$ й прямими $t = 0, t = 1$.

Враховуючи початкову умову $x_1(0) = 0$ й обмеження на нахил кривої $\dot{x}_1 = u \in [-1,1]$, шукана функція має вигляд

$$x_1(t) = \pm t, u(t) = \pm 1 \text{ та } J_{min} = \frac{1}{3}.$$

Покажемо, що керування

1) $u_1(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \frac{1}{3}, \\ -1, & \frac{1}{3} \le t \le 1; \end{cases}$

2) $u_2(t) \equiv 1$;

3) $u^p(t) = sign\,cos\,\frac{2p+1}{2}\pi t, p = 0,1,2, \ldots$

задовольняють принцип максимуму Понтрягіна, однак $u_1(t)$ та $u^p(t)$ не є оптимальними.

Запишемо умови принципу максимуму для даної задачі.

Функція Гамільтона $H = u\psi_1 - x_1^2\psi_2$;

спряжена система

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 2x_1\psi_2, & \psi_1(1) = 0, \\ \dot{\psi}_2 = 0, & \psi_2(1) = -1, \end{cases}$$

звідки $\psi_2(t) \equiv -1$ й система зводиться до наступної:

$$\dot{\psi}_1 = -2x_1,\ \psi_1(0) = 0. \tag{3.33}$$

Умова максимуму

$$u(t)\psi_1(t) - x_1^2(t)\psi_2(t) = \max_{|u|\le 1}(u\psi_1(t) - x_1^2(t)\psi_2(t))$$

або

$$u(t)\psi_1(t) = \max_{|u|\le 1} u\psi_1(t),$$

звідки

$$u(t) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \psi_1(t) > 0, \\ -1, \text{ якщо } \psi_1(t) < 0, \\ [-1, 1], \text{ якщо } \psi_1(t) = 0. \end{cases} \tag{3.34}$$

1) Розглянемо керування $u_1(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \frac{1}{3}, \\ -1, & \frac{1}{3} \le t \le 1. \end{cases}$

Дане керування є допустимим (кусково-неперервне й задовольняє обмеженню $|u| \le 1$). Покажемо, що воно задовольняє принцип максимуму Понтрягіна:

а) $t \in \left[0, \frac{1}{3}\right) \Rightarrow\ u(t) \equiv 1$. Тоді з (3.32) та (3.33) маємо

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1, \quad x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2 = -x_1^2,\ x_2(0) = 0,\ \Rightarrow \\ \dot{\psi}_1 = -2x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = t, \text{ причому } x_1\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}, \\ \dot{x}_2 = -t^2 \ \Rightarrow\ x_2(t) = -\frac{t^3}{3}, \text{ причому } x_2\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{81}, \\ \dot{\psi}_1 = -2t \ \Rightarrow\ \psi_1 = -t^2 + \psi_{10}, \text{ де } \psi_{10} \text{ будемо підбирати} \\ \qquad \text{з умови } \psi_1(1) = 0; \end{cases}$$

б) $t \in \left[\frac{1}{3}, 1\right] \ \Rightarrow\ u(t) \equiv -1$. Тоді з (3.32) та (3.33) маємо

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -1, \quad x_1\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}, \\ \dot{x}_2 = -x_1^2, \quad x_2\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{81}, \\ \dot{\psi}_1 = -2x_1,\ \ \psi_1(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \frac{2}{3} - t, \\ \dot{x}_2 = -\left(t - \frac{2}{3}\right)^2, \quad x_2\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{81}, \ \Rightarrow \\ \dot{\psi}_1 = 2\left(t - \frac{2}{3}\right), \psi_1(1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{2}{3} - t, \\ x_2(t) = -\dfrac{1}{3}\left(t - \dfrac{2}{3}\right)^3 - \dfrac{2}{81}, \\ \psi_1(t) = \left(t - \dfrac{2}{3}\right)^2 - \dfrac{1}{9}. \end{cases}$$

Значення ψ_{10} знаходимо з умови неперервності функції $\psi_1(t)$ в точці $t = \frac{1}{3}$: $-\frac{1}{9} + \psi_{10} = 0$, тобто $\psi_{10} = \frac{1}{9}$. Таким чином, $\psi_1(t) > 0$ при $t \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$; $\psi_1(t) = 0$ при $t = \frac{1}{3}$ і відбувається перемикання керування; $\psi_1(t) < 0$ при $t \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$, тобто умова (3.34) виконується.

В цьому випадку $J[u_1] = x_2(1) = -\frac{1}{27}$.

2) Розглянемо допустиме керування $u_2(t) \equiv -1$ при $t \in [0, 1]$. Тоді з (3.32) та (3.33) маємо

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -1, & x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2 = -x_1^2, & x_2(0) = 0, \\ \dot{\psi}_1 = -2x_1, & \psi_1(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = -t, \\ \dot{x}_2 = -t^2, \ x_2(0) = 0, \\ \dot{\psi}_1 = 2t, \ \psi_1(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = -t, \\ x_2(t) = -\dfrac{t^3}{3}, \\ \psi_1(t) = t^2 - 1. \end{cases}$$

Очевидно, $\psi_1(t) < 0$ при $t \in [0,1)$, тобто дійсно з умови максимуму випливає, що $u = -1$. Критерій якості на даному керуванні

$$J[u_2] = x_2(1) = -\frac{1}{3}.$$

3) Розглянемо допустиме керування $u^p(t) = sign\, cos\frac{2p+1}{2}\pi t, \ t \in [0, 1]$, $p = 0,1,2,\ldots$

Знайдемо моменти перемикання керування:

$$cos\frac{2p+1}{2}\pi t = 0 \ \Rightarrow \ \frac{2p+1}{2}\pi t = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \ \Rightarrow \ t_n = \frac{2n+1}{2p+1}, n = \overline{0,p}.$$

а) $t \in [0, t_0), u = 1$, тоді з (3.32) та (3.33) маємо

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1, & x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2 = -x_1^2, & x_2(0) = 0, \\ \dot{\psi}_1 = -2x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = t, \\ x_2(t) = -\dfrac{t^3}{3}, \\ \psi_1(t) = -t^2 + \psi_{10}, \end{cases}$$

де ψ_{10} знайдемо з умови $\psi_1(t_0) = 0$ (так як при $t = t_0$ відбувається перемикання керування):

$$-\frac{1}{(2p+1)^2} + \psi_{10} = 0 \;\Rightarrow\; \psi_{10} = \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

б) $t \in [t_{2m}, t_{2m+1}), u = -1$, тоді з (3.32) й (3.33) маємо

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -1, \\ \dot{x}_2 = -x_1^2, \\ \dot{\psi}_1 = -2x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = -t + t_{2m} + x_1(t_{2m}), \\ x_2(t) = -\dfrac{1}{3}(t - t_{2m} - x_1(t_{2m}))^3 + x_2(t_{2m}) - \dfrac{1}{3}x_1^3(t_{2m}), \\ \psi_1(t) = (t - t_{2m} - x_1(t_{2m}))^2 + \psi_1(t_{2m}) - x_1^2(t_{2m}), \end{cases}$$

так як в моменти $t = t_{2m}$ та $t = t_{2m+1}$ відбувається перемикання керування, то $\psi_1(t_{2m}) = 0$ й $\psi_1(t_{2m+1}) = 0$. Знайдемо $x_1(t_{2m})$:

$$(t_{2m+1} - t_{2m} - x_1(t_{2m}))^2 - x_1^2(t_{2m}) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\frac{2}{2p+1} - 2x_1(t_{2m}) = 0 \;\Rightarrow\; x_1(t_{2m}) = \frac{1}{2p+1}.$$

Тоді $x_1(t_{2m+1}) = -\frac{1}{2p+1}$,

$$x_2(t) = -\frac{1}{3}\left(t - \frac{4m+1}{2p+1} - \frac{1}{2p+1}\right)^3 + x_2(t_{2m}) - \frac{1}{3(2p+1)^3},$$

$$x_2(t_{2m+1}) = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2p+1}\right)^3 + x_2(t_{2m}) - \frac{1}{3(2p+1)^3} = x_2(t_{2m}) - \frac{2}{3(2p+1)^3}.$$

в) $t \in [t_{2m+1}, t_{2m+2}), u = 1$, тоді з (3.32) й (3.33) маємо

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1, \\ \dot{x}_2 = -x_1^2, \\ \dot{\psi}_1 = -2x_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1(t) = t - t_{2m+1} - \dfrac{1}{2p+1}, \\ x_2(t) = -\dfrac{1}{3}\left(t - t_{2m+1} - \dfrac{1}{2p+1}\right)^3 + x_2(t_{2m+1}) - \dfrac{1}{3(2p+1)^3}, \\ \psi_1(t) = -\left(t - t_{2m+1} - \dfrac{1}{2p+1}\right)^2 + \dfrac{1}{(2p+1)^2}. \end{cases}$$

Очевидно, $\psi_1(t_{2m+2}) = 0$ та

$$x_2(t_{2m+2}) = -\frac{2}{3(2p+1)^3} + x_2(t_{2m+1}).$$

Так як $x_2(t_0) = -\frac{1}{3}$, то

$$x_2(1) = x_2(t_0) - \frac{2p}{3(2p+1)^3} = -\frac{1}{3(2p+1)^3} - \frac{2p}{3(2p+1)^3} =$$
$$= -\frac{2p+1}{3(2p+1)^3} = -\frac{1}{3(2p+1)^2}.$$

Отже, $J[u^p] = x_2(1) = -\frac{1}{3(2p+1)^2} \to 0$ при $p \to \infty$.

Даний приклад показує, що керування, яке задовольняє принцип максимуму Понтрягіна, не обов'язково є оптимальним.

Варіанти завдань для самостійної роботи

1. Перевірити на оптимальність керування $u = u(t)$:

1. $\dot{x}_1 = tu, \quad \dot{x}_2 = x_1 u, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad |u| \le 1, \quad t \in [0,1],$

$J[u] = -x_2(1) \to min, \ u(t) = t;$

2. $\dot{x}_1 = x_2 u, \quad \dot{x}_2 = tu, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad |u| \le 1, \quad t \in [0,1],$

$J[u] = -x_1(1) \to min, \qquad u(t) \equiv 1;$

3. $\dot{x}_1 = ux_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 1, \quad |u| \le 1, \quad t \in [0,1],$

$J[u] = -2x_1(1) + 3x_2(1) \to min, \ u(t) \equiv 1;$

4. $\dot{x}_1 = ux_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 1, \quad |u| \le 1, \quad t \in [0,1],$

$J[u] = -2x_1(1) + 3x_2(1) \to min, \qquad u(t) \equiv 0;$

5. $\dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = x_1^2, \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0, \quad |u| \le 1, \quad t \in [0,1],$

$J[u] = x_2(1) \to min, \qquad u(t) = t^2;$

6. $\dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = x_1^2, \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0, \quad |u| \le 1, \quad t \in [0,1],$

$J[u] = x_2(1) \to min, \quad u(t) \equiv -1;$

7. $\dot{x}_1 = x_2 + u^2, \ \dot{x}_2 = x_1, x_1(0) = \ x_2(0) = 1, \ |u| \le 1, \ t \in [0,1],$

$$J[u] = x_1(1) + x_2(1) \to min, \ u(t) = \begin{cases} -1, \ t \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right), \\ 1, \ t \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]; \end{cases}$$

8. $\dot{x}_1 = -x_2 u_1, \dot{x}_2 = x_1 + 2u_1, \dot{x}_3 = u_2, \quad x_1(0) = \ x_2(0) = \ x_3(0) = 0,$

$u_1^2 + u_2^2 = 1, \quad t \in [0, \pi],$

$J[u] = x_2(\pi) + x_3(\pi) \to min,$

$u_1(t) \equiv 1, \quad u_2(t) \equiv 0;$

9. $\dot{x}_1 = tu, \quad \dot{x}_2 = x_1 u, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad |u| \le 1, t \in [0,1],$

$J[u] = -x_2(1) \to min, \ \ u(t) \equiv 1;$

10. $\dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = ux_1, \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0, \quad |u| \le 1, t \in [0,1],$

$J[u] = 3x_1(1) - 2x_2(1) \to min, \ u(t) \equiv 0.$

2. Застосувати принцип максимуму для розв'язання наступних задач оптимального керування:

1. $\dot{x} = u, \quad x(1) = 5, \quad -3 \leq u \leq 1, \quad t \in [1,2],$

$J[u] = \int_1^2 (x + u)dt \to min;$

2. $\dot{x} = u, \quad x(0) = 1, \quad |u| \leq 1, \quad t \in [0,2],$

$J[u] = x(2) + \int_0^2 (x + u^2)dt \to min;$

3. $\dot{x} = u, \quad x(0) = 1, \quad |u| \leq 1, \quad t \in [0,1],$

$J[u] = sin\, x\,(1) \to min;$

4. $\dot{x} = u, \quad x(0) = 1, \quad 0 \leq u \leq \pi, \quad t \in [0,1],$

$J[u] = cos\, x\,(1) \to min;$

5. $\dot{x} = u^4, \quad x(0) = 0, \quad u \in -1{,}0{,}2, \quad t \in [0,1],$

$J[u] = \frac{1}{2} x^2(1) \to min;$

6. $\dot{x} = (2u - 1)x, \quad x(0) = 1, \quad 0 \leq u \leq 1, \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right],$

$J[u] = \int_0^{\frac{1}{2}} (u - 1)xdt \to min;$

7. $\dot{x} = u, \quad x(0) = 0, \quad u \in \mathbb{R}, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right],$

$J[u] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (u^2 - x^2 - 6x\, sin\, 2\, t)dt \to min;$

8. $\dot{x} = u, \quad x(0) = 0, \quad |u| \leq 1, \quad t \in [0,1],$

$J[u] = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 + u^2)dt \to min;$

9. $\dot{x} = (2u - 1)x, \quad x(0) = 1, \quad 0 \leq u \leq 1, \quad t \in [0,1],$

$J[u] = \int_0^1 (u - 1)xdt \to min;$

10. $\dot{x} = 2u, \quad x(0) = 1, \quad u \in \mathbb{R}, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$

$$J[u] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-x^2 + u^2)dt \to min;$$

11. $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 + u, \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1, \quad |u| \le 1, \quad t \in [0,1],$

$J[u] = x_1(1) + x_2(1) \to min;$

12. $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 + u^2, \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1, \quad |u| \le 1, \quad t \in [0,1],$

$J[u] = x_1(1) + x_2(1) \to min;$

13. $\dot{x}_1 = -x_2 + u_1^2, \quad \dot{x}_2 = x_1 + 2u_2, \quad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 1,$

$u_1 \in \{-1,0,2\}, \quad -1 \le u_2 \le 2, \quad t \in [0,\pi],$

$$J[u] = x_2(\pi) + \int_0^{\pi} u_2 dt \to min;$$

14. $\dot{x}_1 = -x_2, \dot{x}_2 = x_1 + 2tu, \dot{x}_3 = u, \quad x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0,$

$-1 \le u \le 4, \quad t \in [0,\pi],$

$J[u] = x_2(\pi) + x_3(\pi) \to min;$

15. $\dot{x}_1 = u_1, \quad \dot{x}_2 = x_1 + u_2, \quad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \; u_1^2 + u_2^2 \le 1, \; t \in [0,1],$

$J[u] = x_1(1) - x_2(1) \to min;$

16. $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad |u| \le 1, \quad t \in [0,1],$

$J[u] = x_1^2(1) \to min;$

17. $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad x_1(0) = -1, \quad x_2(0) = -1, \quad |u| \le 1, \quad t \in [0,1],$

$J[u] = x_1^2(1) \to min;$

18. $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 2, \quad |u| \le 1, \quad t \in [0,1],$

$J[u] = x_1^2(1) \to min;$

19. $\dot{x}_1 = u_1 - u_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 + 2u_2 + u_3, \quad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0,$

$u_1^2 + u_3^2 \le 1, \; |u_2| = 1, \quad t \in [0,1],$

$J[u] = x_2(1) \to min;$

20. $\dot{x}_1 = x_2 - u^2, \quad \dot{x}_2 = x_1, \quad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad t \in [0,1],$

$$J[u] = -\int_0^1 (x_2 + u)dt \to min.$$

Список літератури

Основна:

1. Дерев’янко Т., Кирилич В., Мільченко О. Задачі оптимального керування гіперболічними системами. Globe Edit. Chisinau, 2021. 142с.
2. Ладієва Л. Р. Оптимальне керування системами. Київ: КПІ ім.. Ігоря Сікорського, 2019. 162 с.
3. Моклячук М.П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. Підручник. К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2009. 380 с.
4. Моклячук М.П. Збірник задач із варіаційного числення та методів оптимізації: навч. посібник. К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2014. 256 с.
5. Перестюк М.О., Станжицький О.М., Капустян О.В. Екстремальні задачі. Навч. посібник. К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2004. 50 с.
6. Перестюк М.О., Станжицький О.М., Капустян О.В., Ловейкін Ю.В. Варіаційне числення та методи оптимізацій. Навч. посібник. К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2010. 121 с.
7. Яровий А. Т., Страхов Є. М. Методи оптимізації та варіаційне числення. Навчально-методичний посібник. Видавництво «Освіта України», Одеса. 2017. 156 с.
8. Sethi Suresh P. Optimal Control Theory. Applications to Management Science and Economics. Springer Nature Switzerland AG, 2019. 520 p. (https://doi.org/10.1007/978-3-030-91745-6)
9. Lewis P., Draguna L., Vrabie L., Vassilis L., Syrmos L. Optimal Control:
10. Willey&Sons, Inc., 2012. 540 p.

11. Lawrence C. Evans. An Introduction to Mathematical Optimal Control Theory. – University of California, Berkeley, 2017. 300 p.

Додаткова:

1. Кирилич В. М., Терещук О. В., Флюд В. М. Оптимальне керування соціально-економічними системами в середовищі Matlab. Навч. Посібник. Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2021. 412с.
2. Лаврик В. І. Методи математичного моделювання в екології. К, 2002. 203 с.
3. Hritonenko N., Yatsenko Yu. Mathematical Modeling in Economics, Ecology and the Environment: Springer, 2013. 296 p.
4. Lachowicz M.-A. Teoria Sternowania. UW: Warshawa, 2012. 88 p.

ДЛЯ НОТАТОК

ДЛЯ НОТАТОК

Навчальне видання

ТЕОРІЯ КЕРУВАННЯ

Методичні вказівки до практичних занять
та самостійної роботи
здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
спеціальності 113 Прикладна математика

Укладачі:
Кічмаренко Ольга Дмитрівна
Скрипник Наталія Вікторівна
Стехун Анжела Олексіївна

В авторській редакції

Підписано до друку 08.12.2022 р. Формат 60х84/16.
Папір офсетний. Гарнітура Times. Цифровий друк.
Ум. друк. арк. 4,0. Наклад 10. Зам. № 1123-22.
Віддруковано з готового оригінал-макета.

Видавництво та друк: ОЛДІ+
65101, Україна, м. Одеса, вул. Інглезі, 6/1
Свідоцтво ДК № 7642 від 29.07.2022 р.

Тел.: +38 (098) 559-45-45,
+38 (095) 559-45-45, +38 (093) 559-45-45
Для листування: 65101, Україна, м. Одеса, вул. Інглезі, 6/1
E-mail: office@oldiplus.ua