ISSN 2304–1579.Вiсник Од. нац. ун-ту. Мат. i мех.–2012 .–Т. 17, вип. 4 (16).–С. 15–24

М А Т Е М А Т И К А

УДК 517.925

М. А. Белозерова, О. В. Мещерякова
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ОБЩЕГО ВИДА, В НЕКОТОРОМ СМЫСЛЕ БЛИЗКИХ К УРАВНЕНИЯМ СО СТЕПЕННЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Бiлозерова М. О., Мещерякова О. В. Асимптотичнi зображення розв'язкiв диференцiальних рiвнянь другого порядку загального виду, в деякому сенсi близьких до рiвнянь iз степеневими нелiнiйностями. Для диференцiальних рiвнянь другого порядку загального виду, що є у деякому сенсi близькими до рiвнянь з правильно мiнливими в околах особливих точок нелiнiйностями, отримано асимптотичнi зображення, необхiднi та достатнi умови iснування достатньо широких класiв розв'язкiв.
Ключовi слова: асимптотичнi зображення рiшень, правильно мiнливi нелiнiйностi.

Белозерова М. А., Мещерякова О. В. Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений второго порядка общего вида, в некотором смысле близких к уравнениям со степенными нелинейностями. Для дифференциальных уравнений второго порядка общего вида, в некотором смысле близких к уравнениям с правильно меняющимися в окрестностях особых точек нелинейностями, получены асимптотические представления, необходимые и достаточные условия существования достаточно широких классов решений.
Ключевые слова: асимптотические представления решений, правильно меняющиеся нелинейности.

Bilozerova M. A., Meshcheriakova O. V. Asymptotic representations of the solutions of second order differential equations of general form, which are in some sense related to the equations with power nonlinearities. The asymptotic representations, necessary and sufficient conditions of the existence of sufficient broad classes of the solutions are found for differential equations of the second order of general type that are in some sense similar to equations with nonlinearities, that are regularly varying at the singular points.
Key words: asymptotic representation of solutions, regularly varying nonlinearities.

Введение. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = \alpha_0 f(t, y, y'), \tag{1}$$

в котором $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $f : [a, \omega[$[1] $\times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \to \mathbb{R}^+$— непрерывная функция, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, $\Delta_{Y_i} = \begin{cases} \text{либо } [y_i^0; Y_i[, \\ \text{либо }]Y_i, y_i^0]^2 \end{cases} \quad (i = 0, 1).$

Кроме того, предполагается, что функция f удовлетворяет следующим услови-

[1] $-\infty < a < \omega \le +\infty$
[2] При $Y_i = +\infty (Y_i = -\infty)$ считаем $y_i^0 > 0$ ($y_i^0 < 0$) соответственно.

ям:

1. для любого отрезка $[c;d]$ $(0 < c \le d < +\infty)$ и для любых $i, j \in \{0,1\}, \quad i \ne j$
$$\lim_{\substack{z_i \to Y_i \\ z_i \in \Delta_{Y_i}}} \frac{f(t, \lambda z_i, z_j)}{f(t, z_i, z_j)\lambda^{\sigma_i}} = 1 \tag{2}$$
равномерно по $\lambda \in [c,d]$, $t \in [a,\omega[$, $z_j \in \Delta_{Y_j}$;

2. для любой функции $L(z)$ $(L: \ \Delta_{Y_1} \to]0;+\infty[)$, медленно меняющейся при $z \to Y_1$ $(z \in \Delta_{Y_1})$
$$\lim_{\substack{z_1 \to Y_1 \\ z_1 \in \Delta_{Y_1}}} \frac{f(t, z_0, z_1 L(z_1))}{f(t, z_0, z_1)|L(z_1)|^{\sigma_1}} = 1 \tag{3}$$
равномерно по $t \in [a,\omega[$, $z_0 \in \Delta_{Y_0}$.

Также предполагается, что $\sigma_0 + \sigma_1 \ne 1$.

В силу вышеуказанных условий уравнение (1) является в некотором смысле близким к уравнению
$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y'), \tag{4}$$
где функции φ_0 и φ_1 являются правильно меняющимися функциями при стремлении аргументов к особым точкам порядков σ_0, σ_1 соответственно. Для степенных φ_0 и φ_1 уравнения (4) было детально исследовано в работах В. М. Евтухова [1]. Уравнения такого вида применялись в ядерной физике, в газовой динамике, механике жидкости, релятивистской механике и других областях естествознания. Случай произвольных правильно меняющихся φ_0 и φ_1 также исследовался ранее (см., например [2], [3]). Однако, при современном уровне развития вычислительной техники для построения точных математических моделей физических явлений оказывается недостаточно не только степенных, но даже и правильно меняющихся функций. Поэтому ставится задача рассмотрения общего случая уравнения (1).

Целью настоящей работы является распространение на уравнение (1) некоторых из полученных для уравнения (4) результатов. В работе используются некоторые методы исследования, предложенные в [4].

Определение 1. *Решение y уравнения (1) будем называть $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решением, если*

$$y^{(i)} : [t,\omega[\to \Delta_{Y_i}, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t) = Y_i, \quad (i = 0,1), \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)\,y(t)} = \lambda_0. \tag{5}$$

$P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$- решения являются правильно меняющимися функциями при $t \uparrow \omega$, если $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. В данной работе получены необходимые и достаточные условия существования $P_\omega(\lambda_0)$- решений уравнения (1) в неособых случаях $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Также установлены асимптотические представления при $t \uparrow \omega$ для таких решений и их производных.

Основные результаты.

1. Формулировка основных результатов. Введем дополнительные обозначения, полагая

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t & \text{при } \omega = +\infty, \\ t-\omega & \text{при } \omega < +\infty, \end{cases} \qquad C = \left|\lambda_0 \left|\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}\right|^{\sigma_1 - 2}\right|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}},$$

$$K(t, z_0, z_1) = f(t, z_0, z_1)|z_0|^{-\sigma_0}|z_1|^{-\sigma_1}|\pi_\omega(t)|^{\frac{\sigma_1+\lambda_0+\sigma_0\lambda_0-2}{\lambda_0-1}}.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Пусть функция $K(t, z_0, z_1)$ монотонна по переменной z_0 и для любой правильно меняющейся при $t \uparrow \omega$ функции $g \in C([a,\omega))$ такой, что*

$$g\ \mathrm{sign} y_0^0 : [a, \omega[\to \Delta_{Y_0}$$

функция $K\left(t, g(t), |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{(\lambda_0-1)}}\mathrm{sign} y_1^0\right)$ является медленно меняющейся при $t \uparrow \uparrow \omega$. Тогда для существования у уравнения (1) *$P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решений, где $\lambda_0 \in \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, необходимо, а если*

$$\lambda_0 \neq \sigma_1 - 1 \text{ *либо* } (\sigma_1 - 1)(\sigma_0 + \sigma_1 - 1) > 0,$$

$$\forall z_0 \in \Delta_{Y_0} \exists\ \frac{\partial f(t,z_0,z_1)}{\partial z_0}, \qquad \lim_{\substack{z_0 \to Y_0 \\ z_0 \in \Delta_{Y_0}}} \frac{z_0 \dfrac{\partial f(t,z_0,z_1)}{\partial z_0}}{f(t,z_0,z_1)} = \sigma_0, \tag{6}$$

то и достаточно выполнение условий

$$\pi_\omega(t) y_1^0 y_0^0 \lambda_0(\lambda_0 - 1) > 0, \quad \pi_\omega(t)\alpha_0 y_1^0(\lambda_0 - 1) > 0 \quad \text{при } t \in [a, \omega[, \tag{7}$$

$$\lim_{t\to\omega} y_0^0 |\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}} = Y_0, \ \ \lim_{t\to\omega} y_1^0 |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}} = Y_1. \tag{8}$$

Более того, для каждого такого решения имеют место следующие асимптотические представления при $t \uparrow \omega$:

$$\begin{aligned} &\frac{y(t)}{\left|K\left(t, y(t), |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{(\lambda_0-1)}}\mathrm{sign} y_1^0\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}} = C|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}}[1+o(1)], \\ &\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\lambda_0}{\pi_\omega(t)(\lambda_0-1)}[1+o(1)]. \end{aligned} \tag{9}$$

Замечание 1. *Для существования у уравнения (1) $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решений, где $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ необходимо наличие хотя бы одной правильно меняющейся при $t \uparrow \omega$ порядка $\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}$ функции $g \in C([a,\omega))$ такой, что*

$$g\ \mathrm{sign} y_0^0 : [a, \omega[\to \Delta_{Y_0}$$

и функция $K\left(t, g(t), |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{(\lambda_0-1)}}\mathrm{sign} y_1^0\right)$ является медленно меняющейся при $t \uparrow \uparrow \omega$.

2. Доказательство теоремы *Необходимость.* Пусть $y(t) : [t_0, \omega[\to \Delta_{Y_0}$ — $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ решение уравнения (1), где $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Тогда в силу (5) имеют место асимптотические представления при $t \uparrow \omega$

$$\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}[1 + o(1)], \quad \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = \frac{1}{\lambda_0 - 1}[1 + o(1)]. \tag{10}$$

Из (10) следует второе из соотношений (9), выполнение условий (7) и (8).

Докажем теперь, что существует медленно меняющаяся при $t \uparrow \omega$ функция $\Theta(t)[t_0, \omega[\to]0; +\infty[$ такая, что

$$y'(t) = |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{(\lambda_0 - 1)}} \Theta(t) \mathrm{sign}\, y_1^0. \tag{11}$$

Возьмем $\Theta(t) = |y'(t)||\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{1-\lambda_0}}$. Так как

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)\Theta'(t)}{\Theta(t)} = \lim_{t\uparrow\omega} \left[\frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} - \frac{1}{\lambda_0 - 1}\right] = 0,$$

то функция Θ является медленно меняющейся при $t \uparrow \omega$. Тогда в силу свойств медленно меняющихся функций функция

$$L(z) = \Theta\left(\pi_\omega^{-1}\left(|z|^{\lambda_0 - 1} \mathrm{sign}\left(\alpha_0 y_1^0 (\lambda_0 - 1)\right)\right)\right)$$

является медленно меняющейся при $z \to Y_1$ $(z \in \Delta_{Y_1})$.

Используя (11) перепишем (1) в виде

$$\begin{gathered} y''(t) = \alpha_0 K\left(t, y(t), |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{(\lambda_0-1)}} L\left(|\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{(\lambda_0-1)}} \mathrm{sign} y_1^0\right) \mathrm{sign} y_1^0\right) \times \\ \times |y(t)|^{\sigma_0} |y'(t)|^{\sigma_1} |\pi_\omega(t)|^{\frac{\sigma_1 + \lambda_0 + \sigma_0\lambda_0 - 2}{1 - \lambda_0}}. \end{gathered} \tag{12}$$

С учетом условия (3) имеем

$$\lim_{\substack{z_1 \to Y_1 \\ z_1 \in \Delta_{Y_1}}} \frac{K(t, z_0, z_1 L(z_1))}{K(t, z_0, z_1)} = \lim_{\substack{z_1 \to Y_1 \\ z_1 \in \Delta_{Y_1}}} \frac{f(t, z_0, z_1 L(z_1))}{f(t, z_0, z_1) L^{\sigma_1}(z_1)} = 1$$

равномерно по $t \in [a, \omega[, z_0 \in \Delta_{Y_0}$.

Поэтому с учетом (10) соотношение (12) принимает вид

$$\begin{gathered} \frac{y'(t)}{|y(t)|^{\sigma_0 + \sigma_1}} = \lambda_0 \left|\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}\right|^{\sigma_1 - 1} K\left(t, y(t), |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{(\lambda_0-1)}} \mathrm{sign} y_1^0\right) \times \\ \times |\pi_\omega(t)|^{\frac{(\sigma_1+\sigma_0)\lambda_0 - 1}{1-\lambda_0}} \mathrm{sign} y_1^0 [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \end{gathered}$$

Отсюда в силу первого из соотношений (10) имеем при $t \uparrow \omega$

$$\begin{gathered} \frac{y(t)}{|y(t)|^{\sigma_0 + \sigma_1}} = |C|^{1 - \sigma_0 - \sigma_1} |\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0(1 - \sigma_0 - \sigma_1)}{\lambda_0 - 1}} \times \\ \times K\left(t, y(t), |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{(\lambda_0-1)}} \mathrm{sign} y_1^0\right) \mathrm{sign} y_0^0 [1 + o(1)], \end{gathered}$$

Из данного представления следует первое из соотношений (9).

Достаточность. Пусть $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, а также имеют место условия (6)–(8). Покажем, что в этом случае дифференциальное уравнение (1) имеет хотя бы одно $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решение, допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (9). Сначала убедимся в том, что соотношение

$$y = C|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}} \left|K\left(t, y, |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{(\lambda_0-1)}} \mathrm{sign} y_1^0\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} (1+v) \tag{13}$$

однозначно определяет заданную на множестве $D = [t_1, \omega[\times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, где $t_1 \in$ $\in [a, \omega[$, непрерывную неявную функцию $y = Y(t, v)$ вида

$$Y(t,v) = C|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}+z(t,v)},$$

где функция z такова, что $|z(t,v)| \le \frac{1}{2}\left|\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}\right|$ при $(t,v) \in D$ и

$$\lim_{t\uparrow\omega} z(t,v) = 0 \quad \text{равномерно по } v: \ |v| \le \frac{1}{2}.$$

Полагая в (13) $y = C|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}+z(t,v)}$ получим

$$|\pi_\omega(t)|^{z(t,v)} = \left|K\left(t, C|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}+z(t,v)}, |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{(\lambda_0-1)}} \mathrm{sign} y_1^0\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} (1+v),$$

откуда следует, что

$$z(t,v) = b(t,v) + Z(t,v), \tag{14}$$

где

$$b(t,v) = \frac{\ln(1+v)}{\ln|\pi_\omega(t)|}, \ Z(t,v) = \frac{\ln K\left(t, C|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}+z(t,v)}, |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{(\lambda_0-1)}} \mathrm{sign} y_1^0\right)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)\ln|\pi_\omega(t)|}.$$

В силу условий теоремы на функцию K с учетом свойств медленно меняющихся функций получим, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} Z(t,z) = 0 \quad \text{равномерно по } z: \ |z| \le \frac{1}{2}.$$

Кроме того в силу второго из условий (6) имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\partial Z(t,z)}{\partial z} = 0 \quad \text{равномерно по } z: \ |z| \le \frac{1}{2}.$$

В силу приведенных выше предельных соотношений существует число $t_2 \in [t_1, \omega[$ такое, что на множестве $[t_1, \omega[\times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ соблюдается неравенство

$$|b(t,v) + Z(t,z)| \le \frac{1}{2}\left|\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}\right| \tag{15}$$

и условие Липшица

$$|Z(t, z_1) - Z(t, z_2)| \le \frac{1}{2}|z_1 - z_2| \tag{16}$$

при $t \in [t_2, \omega[$ и любых $z_1, z_2 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Выбрав таким образом число t_2 обозначим через $\mathbf{B}$ банахово пространство непрерывных и ограниченных на множестве $\Omega = [t_2, \omega[\times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ функций $z : \Omega \to \mathbb{R}$ с нормой

$$||z|| = \sup_{(t,v)\in\Omega} |z(t, v)|.$$

Выделим из него подпространство $\mathbf{B}_0$ тех функций из $\mathbf{B}$, для которых $||z|| \le \le \frac{1}{2}\left|\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}\right|$ и рассмотрим на $\mathbf{B}_0$ оператор Φ, определенный соотношением

$$\Phi(z)(t, v) = b(t, v) + Z(t, z). \tag{17}$$

В силу (15) и (16)

$$\forall z, \widetilde{z} \in \mathbf{B}_0 : \quad ||\Phi(z)|| \le \frac{1}{2}\left|\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}\right|, \quad ||\Phi(z) - \Phi(\widetilde{z})|| \le \frac{1}{2}||z - \widetilde{z}||.$$

Тогда оператор Φ отображает пространство $\mathbf{B}_0$ в себя и является на нем оператором сжатия. Тогда согласно принципу сжатых отображений существует единственная функция $z \in \mathbf{B}_0$ такая, что $z = \Phi(z)$. В силу (17) эта непрерывная на множестве Ω функция является единственным решением уравнения (13), удовлетворяющим условию $||z|| \le \frac{1}{2}\left|\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}\right|$. С учетом этого условия из (14) –(16) следует, что компоненты данного решения стремятся к нулю при $t \uparrow \omega$ равномерно по v : $|v| \le \frac{1}{2}$. Таким образом показано, что искомая функция $Y(t, v)$ существует.

В силу условий теоремы на функцию K функция $Y(t, 0)$ является правильно меняющейся функцией при $t \uparrow \omega$ порядка $\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} \neq 0$. Тогда используя теорему 2.1 из [6] имеем при $t \uparrow \omega$

$$F(t) = \frac{\lambda_0 - 1}{\lambda_0} Y(t, 0)[1 + o(1)], \tag{18}$$

где

$$F(t) = \int\limits_{B_\omega}^{t} \frac{Y(\tau, 0)}{\pi_\omega(\tau)} d\tau, \quad B_\omega = \begin{cases} a, & \text{если } \int_{t_2}^{\omega} \frac{Y(\tau,0)}{\pi_\omega(\tau)}\, d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{если } \int_{t_2}^{\omega} \frac{Y(\tau,0)}{\pi_\omega(\tau)}\, d\tau < +\infty. \end{cases}$$

С помощью замены

$$\begin{cases} y(t) = M_1(t(x))(1 + z_1(x)), \\ y'(t) = M_0(t(x))(1 + z_2(x)), \end{cases}$$

$$x = \beta \ln|\pi_\omega(t)|, \quad \beta = \begin{cases} 1 & \text{если } \omega = +\infty, \\ -1 & \text{если } \omega < +\infty, \end{cases} \tag{19}$$

где $M_0(t)=\frac{\lambda_0^2}{(\lambda_0-1)^2}\frac{F(t)}{\pi_\omega(t)}$, $\quad M_1(t)=\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}F(t)$,
сведем уравнение (1) к системе

$$\begin{cases} z_1'=\frac{\beta\lambda_0}{\lambda_0-1}[z_2-z_1],\\ z_2'=G_0(x)\beta(1+z_2)\dfrac{f(t(x),M_1(t(x))(1+z_1),M_0(t(x))(1+z_2))}{\alpha_0 M_0'(t(x))}-\\ -G_0(x)\beta(1+z_2),\end{cases} \tag{20}$$

где $G_0(x)=\dfrac{\pi_\omega(t(x))M_0'(t(x))}{M_0(t(x))}$.

Из вида функций M_0, M_1 с учетом условий (7)вытекает, что существует $t_0\in$ $\in[t_2,\omega[$ такое, что

$$M_1(t)(1+z_1)\in\Delta_{Y_0},\quad M_0(t)(1+z_2)\in\Delta_{Y_1}\text{ при }|z_1|<\frac{1}{2},\ |z_2|<\frac{1}{2},\ t\in[t_0,\omega[.$$

Рассмотрим систему (20) на множестве

$$\Omega=[x_0,+\infty[\times D,\quad \text{где } x_0=\beta\ln|\pi_\omega(t_1)|,\quad D=\{(z_0,z_1):|z_i|\le\frac{1}{2},i=1,2\}.$$

Перепишем (20) в виде

$$\begin{cases} z_1'=A_{11}z_1+A_{12}z_2,\\ z_2'=A_{21}z_1+A_{22}z_2+R_1(x,z_1,z_2)+R_2(x,z_1,z_2),\end{cases} \tag{21}$$

где

$$A_{11}=\beta\frac{\lambda_0}{1-\lambda_0},\quad A_{12}=\beta\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1},$$

$$A_{21}=\beta\frac{1}{\lambda_0-1}\sigma_0,\quad A_{22}=\beta\frac{\sigma_1-1}{\lambda_0-1},$$

$$R_1(x,z_1,z_2)=\beta\left(G_1(x)G_0(x)-\frac{1}{\lambda_0-1}\right)[F_1(x,z_1,z_2)\cdot F_2(x,z_2)\cdot F_3(x)\cdot|1+z_1|^{\sigma_0}\times$$

$$\times|1+z_2|^{\sigma_1}]-(1+z_2)\beta\left(G_0(x)-\frac{1}{\lambda_0-1}\right)+$$

$$+\frac{\beta}{\lambda_0-1}[(F_1(x,z_1,z_2)\cdot F_2(x,z_2)\cdot F_3(x)-1)\cdot|1+z_1|^{\sigma_0}\times$$

$$\times|1+z_2|^{\sigma_1}],$$

$$R_2(z_1,z_2)=\frac{\beta}{\lambda_0-1}[((|1+z_1|^{\sigma_0}-1-\sigma_0z_1)|1+z_2|^{\sigma_1}+(1+\sigma_0z_1)(|1+z_2|^{\sigma_1}-1-\sigma_1z_2)+$$

$$+\sigma_0\sigma_1z_1z_2],$$

где

$$F_1(x,z_1,z_2)=\frac{K(t(x),M_1(t(x))(1+z_1),M_0(t(x))(1+z_2))}{K(t(x),M_1(t(x)),M_0(t(x))(1+z_2))},$$

$$F_2(x, z_2) = \frac{K(t(x), M_1(t(x)), M_0(t(x))(1+z_2))}{K(t(x), M_1(t(x)), M_0(t(x)))},$$

$$F_3(x) = \frac{K(t(x), M_1(t(x)), M_0(t(x)))}{K\Big(t(x), Y(t(x), 0), |\pi_\omega(t(x))|^{\frac{1}{\lambda_0 - 1}} \operatorname{sign} y_1^0\Big)},$$

$$G_1(x) = \alpha_0 \left|\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}\right|^{\sigma_0 + 2\sigma_1} \left|\frac{F(t)}{Y(t,0)}\right|^{\sigma_0+\sigma_1-1} \frac{1}{\frac{Y(t,0)}{F(t)} - 1} \left|\frac{Y(t,0)}{|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}}}\right|^{\sigma_0+\sigma_1-1}.$$

Покажем, что

$$\lim_{x\to+\infty} F_1(x, z_1, z_2) = 1 \text{ равномерно по } |z_1| < \frac{1}{2}, |z_2| < \frac{1}{2}. \tag{22}$$

В силу условий (2) для любого отрезка $[c, d] \quad (0 < c \le d)$

$$\lim_{\substack{u_0 \to Y_0 \\ u_0 \in \Delta_{Y_0}}} \frac{K(t, \lambda u_0, u_1)}{K(t, u_0, u_1)} = 1 \quad \text{равномерно по } \lambda \in [a, b], \quad t \in [a, \omega[, \quad u_1 \in \Delta_{Y_1}.$$

В качестве $[c, d]$ возьмем $[0,5; 1,5]$. Тогда в силу вида функций K и F_1 получим (22). Аналогично

$$\lim_{x\to+\infty} F_2(x, z_2) = 1 \text{ равномерно по } |z_2| < \frac{1}{2}. \tag{23}$$

В силу вида функции M_0

$$\lim_{x\to+\infty} G_0(x) = \frac{1}{\lambda_0 - 1}. \tag{24}$$

Тогда функция M_0 является правильно меняющейся функцией порядка $\frac{1}{\lambda_0 - 1}$. Поэтому по аналогии с тем как было доказано (11) ясно, что

$$M_0(t) = |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}} H(t),$$

где H — медленно меняющаяся функция при $t \uparrow \omega$. Отсюда с учетом (3), (13) и условий теоремы на функцию K следует, что

$$\lim_{x\to+\infty} F_3(x) = 1. \tag{25}$$

Из (13) и (18) вытекает, что

$$\lim_{x\to+\infty} G_1(x) = 1. \tag{26}$$

С учетом (22)–(26) имеем

$$\lim_{x\to+\infty} R_1(x, z_1, z_2) = 0 \quad \text{равномерно по } |z_1| < \frac{1}{2}, \quad |z_1| < \frac{1}{2}. \tag{27}$$

Кроме того, очевидно, что

$$\lim_{|z_1|+|z_2|\to 0} \frac{R_2(z_1,z_2)}{|z_1|+|z_2|} = 0. \tag{28}$$

Рассмотрим предельную матрицу коэффициентов системы (21)

$$A = \lim_{x\to+\infty} \begin{pmatrix} A_{11}(x) & A_{12}(x) \\ A_{21}(x) & A_{22}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\beta\lambda_0}{\lambda_0-1} & \frac{\beta\lambda_0}{\lambda_0-1} \\ \frac{\beta\sigma_0}{\lambda_0-1} & \frac{\beta(\sigma_1-1)}{\lambda_0-1} \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение матрицы A $|A-\mu E| = 0$, где E-единичная матрица второго порядка, имеет вид

$$\mu^2 + \mu\beta[\frac{\lambda_0-\sigma_1+1}{\lambda_0-1}] - \frac{\lambda_0}{(\lambda_0-1)^2}[\sigma_1-1+\sigma_0] = 0. \tag{29}$$

В силу первого из условий (6) у этого уравнения при соответствующих значениях λ_0 нет корней с нулевой действительной частью. Таким образом, с учетом (27) и (28), для системы дифференциальных уравнений (21) выполнены все условия теоремы 2.2 из [5]. Согласно этой лемме система (21), а значит, и система (20) имеет хотя бы одно решение $\{z_i\}_{i=1}^2 : [x_1,+\infty[\to \mathbb{R}^2 (x_1 \geq 0)$, стремящееся к нулю при $x\to+\infty$. Ему в силу замены (19), (13) и (18) соответствует решение y уравнения (1), допускающее при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления (9). В силу этих представлений и (1) ясно, что полученное решение y является $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$-решением.

Полученные результаты проиллюстрируем на примере следующего класса уравнений.

Пример 1.

$$y'' = t^\mu e^{\sqrt{\ln|ty|}}|y|^{\sigma_0}|y'|^{\sigma_1}, \tag{30}$$

где $\mu,\sigma_0,\sigma_1 \in \mathbb{R}$, $\sigma_0+\sigma_1 \neq 1$, $t\in[5;+\infty[$.

Для данного уравнения функцией K из теоремы является функция $e^{\sqrt{\ln|ty|}}$. Поскольку функция $e^{\sqrt{\ln|z|}}$ является медленно меняющейся при $z\to+\infty$, то в силу свойств медленно меняющихся функций функция $e^{\sqrt{\ln|tg(t)|}}$ будет медленно меняющейся на бесконечности для любой правильно меняющейся на бесконечности функции g. Условия (2) и (3) очевидно выполняются для уравнений вида (30). В силу теоремы при

$$\frac{\mu+2-\sigma_1}{\mu+\sigma_0+1} \neq \sigma_1 - 1 \text{ либо } (\sigma_1-1)(\sigma_0+\sigma_1-1) > 0$$

уравнение (30) имеет $P_{+\infty}(Y_0,Y_1,\frac{\mu+2-\sigma_1}{\mu+\sigma_0+1})-$ решения. Более того, для каждого такого решения имеет место второе из представлений и следующее асимптотическое представление при $t\to+\infty$

$$y(t)exp\left(\frac{\sqrt{\ln|ty|}}{1-\sigma_0-\sigma_1}\right) \sim \left|\frac{2+\mu-\sigma_1}{\sigma+\mu+1}\left|\frac{2+\mu-\sigma_1}{1-\sigma_1-\sigma_0}\right|^{\sigma_1-2}\right|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} \cdot t^{\frac{\mu+2-\sigma_1}{1-\sigma_1-\sigma_0}}.$$

Заключение. Для $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ установлены асимптотические представления при $t \uparrow \omega$ для $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решений уравнения (1) и их производных первого порядка, а также получены необходимые и достаточные условия существования таких решений.

1. **Евтухов В. М.** Асимптотическое поведение решений одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка типа Эмдена–Фаулера: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 [текст] / Евтухов Вячеслав Михайлович. – Одесса, 1980. – 119 с.
2. **Евтухов В. М.** Асимптотические представления решений существенно нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка [текст] / В. М. Евтухов, М. А. Белозерова // Укр. мат. журнал. – 2008. – Т. 60, № 3. – С. 310–331.
3. **Белозерова М. А.** Асимптотические представления решений неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностями близкими к степенным [текст] / М. А. Белозерова // Нелінійні коливання. – 2009. – Т. 12, № 1. – С. 3–15.
4. **Евтухов В. М.** Асимптотические представления решений существенно нелинейных циклических систем обыкновенных дифференциальных уравнений [текст] / Евтухов В. М., Владова Е. С. // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 5. – С. 622–639.
5. **Евтухов В. М.** Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономних систем квазилинейных дифференциальных уравнений [текст] / В. М. Евтухов, А. М. Самойленко// Укр. мат. ж. – 2010. – Т. 62, № 1. – С. 52–80.
6. **Сенета Е.** Правильно меняющиеся функции [текст] / Е. Сенета. – М.: Наука, 1985. – 141 с.