Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2008. – Т.13, вип. 18. – С. 37–44

УДК 517.958

В. М. Євтухов*, П. А. Гілко*, О. М. Яковлєва**
*Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
**Південноукраїнський державний педагогічний університет
імені К. Д. Ушинського

ДОСЛІДЖЕННЯ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З ЕКСТРЕМАЛЬНОЮ УМОВОЮ

Євтухов В. М., Гілко П. А., Яковлєва О. М. Дослідження початково-крайової задачі для рівняння теплопровідності з екстремальною умовою. У роботі досліджується початково-крайова задача для рівняння теплопровідності з екстремальною умовою в середині області.
Ключові слова: крайова задача, рівняння теплопровідності, екстремальна умова, загальний розв'язок.

Евтухов В. М., Гилко П. А., Яковлева О. М. Исследование начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности с экстремальным условием. В работе исследуется начально-краевая задача для уравнения теплопроводности с экстремальным условием в середине области.
Ключевые слова: краевая задача, уравнение теплопроводности, экстремальное условие, общее решение.

Evtukhov V. M., Gilko P. A., Yakovleva O. N. Research of initial-boundary value problem for the heat conductivity equation with an extreme condition. In work the initial-boundary value problem is investigated for the equation of heat conductivity with an extreme condition in the middle areas.
Key words: initial-boundary value problem, the heat conductivity equation, extreme condition, the common decision.

Вступ. Робота присвячена дослідженню початково-крайової задачі для рівняння теплопровідності з екстремальною умовою в середині області, а саме задачі: *знайти в області $D = \{t > 0, x \in R\}$ обмежену функцію $u(x,t)$, яка задовольняє рівнянню*

$$u'_t(x,t) = u''_{tt}(x,t) + f(x,t) \tag{1}$$

та умовам

$$u(a,t_1) \to inf, \tag{2}$$

$$u'_x(b,t_2) = \sigma, \tag{3}$$

$$u(x,0) \geqslant 0, \tag{4}$$

де $\sigma > 0$ — відома стала; a і b — відомі точки дійсної осі R; t_1 та t_2 — відомі моменти часу; $f(x,t)$ — відома функція, яка обмежена майже скрізь на R по змінній x та інтегрована по змінній t.

Основні результати. Задача (1)–(4) відноситься до класу граничних задач для лінійних рівнянь математичної фізики з екстремальною умовою, початок дослідженню яких покладено в роботах Ю. Й. Черського [1–3]. Потім ці дослідження були продовжені в роботах С. Б. Рухліної [4–6], Малішенко В. П. та Тихоненко М. Я. [7]. При цьому в роботах [4–6] розглядалися крайові задачі для рівнянь математичної фізики з екстремальною умовою на частині границі області, а в роботі [7] — крайові задачі для рівняння Лапласа та бігармонічного рівняння у напівплощині з екстремальною умовою в середині області.

Нижче викладемо метод розв'язання задачі (1)–(4), на підставі якого проведемо повне її дослідження. Застосувавши до рівняння (1) перетворення Фур'є по змінній x та використовуючи його властивості [8], одержимо звичайне диференціальне рівняння по змінній t (k — параметр)

$$U_t^{'}(k,t) + k^2 U(k,t) = F(k,t),\ t > 0,\ k \in R, \tag{5}$$

де $U(k,t)$, $F(k,t)$ — перетворення Фур'є по змінній x відповідно функцій $u(x,t)$, $f(x,t)$. Наприклад

$$U(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_R u(x,t) e^{ikx} dx,\ t > 0,\ k \in R.$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння (5) має вигляд

$$U(k,t) = c(k) e^{-k^2 t}, \tag{6}$$

де $c(k)$ — невідома функція змінної k. Щоб її визначити, використаємо умову (4). Застосувавши до неї перетворення Фур'є і поклавши в (6) $t = 0$, одержимо

$$U(k;0) = c(k),$$

де $U(k;0)$ — перетворення Фур'є функції $u(x;0)$. Тоді загальний розв'язок однорідного рівняння (5) буде таким:

$$U(k;t) = U(k;0) e^{-k^2 t},\ t > 0,\ k \in R. \tag{7}$$

В (7) функція $U(k;0)$ взагалі невідома, оскільки вона являється перетворенням Фур'є функції $u(x,0)$, про яку відомо лише те, що вона приймає невід'ємні значення.

Використовуючи метод варіації сталої, частинний розв'язок неоднорідного рівняння (5) можна записати у вигляді

$$U(k;t) = e^{-k^2 t} \int\limits_0^t F(k;\tau) e^{k^2 \tau} d\tau,$$

де $F(k,t)$ — перетворення Фур'є функції $f(x,t)$ по змінній x. Таким чином, загальний розв'язок неоднорідного рівняння (5) має вигляд

$$U(k;t) = U(k;0) e^{-k^2 t} + \int\limits_0^t F(k;\tau) e^{-k^2 (t-\tau)} d\tau,\ t > 0,\ k \in R. \tag{8}$$

Застосуємо тепер до (8) обернене перетворення Фур'є. Тоді на підставі його властивостей і властивостей згортки, а також значень інтеграла № 2.3.16.11 [7, с. 334], розв'язок задачі (1)–(4) можна записати у вигляді

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_R u(s,0) e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}} ds + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \int\limits_R \frac{f(s,\tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(x-s)^2}{4(t-\tau)}} ds d\tau, \quad t>0,\ x \in R. \tag{9}$$

Із представлення (9) випливає висновок: якщо буде указано метод визначення функції

$$u(x) = u(x,0), \tag{10}$$

то по формулі (9) можна буде побудувати розв'язок задачі (1)–(4). Для цього використаємо умови (2) і (3). Із умови (2) на підставі (9) і (10) одержимо

$$u(a,t_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t_1}} \int\limits_R u(s) e^{-\frac{(a-s)^2}{4t_1}} ds + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \int\limits_R \frac{f(s,\tau)}{\sqrt{t_1-\tau}} e^{-\frac{(a-s)^2}{4(t_1-\tau)}} ds d\tau \to \inf .$$

Оскільки другий доданок в цьому виразі не залежить від функції $u(x)$ (10), а $\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t_1}}$ — додатній множник, то умова (2) буде еквівалентна умові

$$\int\limits_R u(x)\varphi(x)dx \to \inf, \tag{11}$$

де функція $\varphi(x)$ має вигляд

$$\varphi(x) = exp\left\{-\frac{(a-x)^2}{4t_1}\right\}. \tag{12}$$

Нескладними перетвореннями на підставі (9) умова (3) приводиться до умови

$$\frac{1}{4\sqrt{\pi t_2^3}} \int\limits_R u(s)(s-b) e^{-\frac{(b-s)^2}{4t_2}} ds +$$

$$+ \int\limits_0^{t^2} \frac{1}{4\sqrt{\pi (t_2-\tau)^3}} \int\limits_R f(s,\tau)(s-b) e^{-\frac{(b-s)^2}{4t_2-\tau}} ds d\tau = \sigma,$$

яка приводиться до вигляду

$$\int\limits_R u(x)\psi(x)dx = \widetilde{\sigma}, \tag{13}$$

де

$$\psi(x) = (x-b) exp\left\{-\frac{(b-x)^2}{4t^2}\right\}, \tag{14}$$

а

$$\widetilde{\sigma} = 4\sigma\sqrt{\pi t_2^3} - \int\limits_0^{t^2} \left(\frac{t_2}{t_2-\tau}\right)^{\frac{3}{2}} \int\limits_R f(s,\tau)(s-b)e^{-\frac{(b-s)^2}{4(t_2-\tau)}}dsd\tau. \tag{15}$$

Позначимо Γ — множину точок дійсної осі, на якій визначені формулами (12) та (14) відповідно функції $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ приймають одночасно позитивні значення. Із (12) та (14) випливає, що $\Gamma = (b:+\infty)$. Тоді згідно з роботою [2] на підставі (4), (10), (11), (13) розв'язок задачі про знаходження функції $u(x)$ приводиться до розв'язку "задачі про сингулярне рішення"

$$\begin{cases} \int\limits_\Gamma u(x)\varphi(x)dx \to \inf, \\ \int\limits_\Gamma u(x)\psi(x)dx = \widetilde{\sigma}, \\ u(x) \geqslant 0, \end{cases} \tag{16}$$

яка на підставі роботи [2, с. 11] має розв'язок

$$u(x) = c\delta(x-x_0), \tag{17}$$

де c — невідома стала; $\delta(x)$ — дельта-функція Дірака, а $x_0 \in \Gamma$ — невідома точка.

На підставі роботи [2] "задача про сингулярне рішення" (16) може мати розв'язки, якщо $\widetilde{\sigma} > 0$. Тоді із (15) випливає умова

$$\sigma > \frac{1}{4\sqrt{\pi t_2^3}} \int\limits_0^{t_2} \left(\frac{t_2}{t_2-\tau}\right)^{\frac{3}{2}} \int\limits_R f(s,\tau)(s-b)e^{-\frac{(b-s)^2}{4(t_2-\tau)}}dsd\tau, \tag{18}$$

із якої випливає висновок: якщо задана функція $f(x,t)$ не задовольняє умові (18), то крайова задача (1)–(4) розв'язків не має.

Припустивши, що функція $f(x,t)$ задовольняє умові (18), визначимо тепер невідому сталу c та невідому точку $x_0 \in \Gamma$ з (17). Для цього використаємо умови (11) та (13). Підставивши (17) в (13), одержимо

$$c\psi(x_0) = \widetilde{\sigma},$$

звідкіля

$$c = \frac{\widetilde{\sigma}}{\psi(x_0)}. \tag{19}$$

Із умови (11) з урахуванням (17) одержимо

$$c\varphi_0(x_0) \to \inf.$$

Із цього випливає, що пошук точки $x_0 \in \Gamma$ приводиться до реалізації умови

$$\widetilde{\sigma}\frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)} \to \inf.$$

Оскільки $\widetilde{\sigma} > 0$ — відома стала, то останню умову з урахуванням (12), (14) можна записати у вигляді

$$\frac{1}{x_0 - b}\exp\left\{\frac{(b-x_0)^2}{4t_2} - \frac{(a-x_0)^2}{4t_1}\right\} \to \inf .$$

Таким чином, побудова розв'язків задачі (1)-(4) приводиться до розв'язку задачі про мінімізацію функції

$$G(x) = \frac{1}{x-b}\exp\left\{\frac{(b-x)^2}{4t_2} - \frac{(a-x)^2}{4t_1}\right\} \tag{20}$$

на множині $\Gamma = (b; +\infty)$.

Легко бачити, що $\lim\limits_{x\to b+0} G(x) = +\infty$. При $b < x < +\infty$ функція $G(x)$ неперервна і значення її ліміту при $x \to +\infty$ залежить від значень a, b, t_1, t_2. Розглянемо випадки.

Випадок I. $t_1 < t_2$. В цьому випадку у формулі (20) в показнику експоненти стоїть квадратичний трьохчлен з від'ємним старшим коефіцієнтом. Значить, $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 0$. Так як функція $G(x)$ приймає позитивні значення на множині Γ, то з цього випливає, що в скінчених точках множини Γ функція $G(x)$ інфімума не досягає. Це означає, що в цьому випадку крайова задача (1)–(4) розв'язків не має.

Випадок II. $t_1 = t_2$, $a < b$. В цьому випадку в показнику експоненти (20) стоїть поліном першого порядку з від'ємним коефіцієнтом при старшому степіню x. Значить, $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 0$. Із цього слідує, що в скінчених точках множини Γ функція $G(x)$ не досягає інфімума, а значить, в цьому випадку крайова задача (1)–(4) розв'язків не має.

Випадок III. $t_1 = t_2$, $a = b$. В цьому випадку функція $G(x)$ має вигляд $G(x) = (x-b)^{-1}$. Очевидно, що ця функція в скінчених точках множини Γ інфімума не досягає, що означає, що в цьому випадку крайова задача (1)–(4) розв'язків не має.

Випадок IV. $t_1 = t_2$, $a > b$. Очевидно, що в цьому випадку $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$. Не важко перевірити, що в цьому випадку функція $G(x)$ досягає інфімума в точці

$$x_0 = b + \frac{2t_2}{b-a}.$$

Тоді в цьому випадку розв'язок "задачі про сингулярне рішення" (16) має вигляд

$$u(x) = c\delta\left(x - b - \frac{2t_2}{a-b}\right),$$

де

$$c = \frac{\widetilde{\sigma}(a-b)}{2t_2}e^{\frac{t_2}{(a-b)^2}}.$$

В зв'язку з цим на підставі (9) в цьому випадку розв'язок крайової задачі буде таким:

$$u(x,t) = \frac{\widetilde{\sigma}(a-b)}{4t_2\sqrt{\pi t}}e^{\frac{4tt_2 - [(x-b)(a-b)-2t_2]^2}{4t(a-b)^2}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\int\limits_R \frac{f(s,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}e^{\frac{(x-s)^2}{4(\tau-t)}}dsd\tau,$$

$$x \in R,\ t > 0.$$

Випадок V. $t_1 > t_2$, $a = b$. Використовуючи похідну функції $G(x)$, в цьому випадку точку x_0 визначаємо із рівняння

$$\frac{1}{(x-b)^2} = \frac{t_1 - t_2}{2t_1t_2},$$

звідкіля

$$x_0 = b + \sqrt{\frac{2t_1t_2}{t_1 - t_2}}.$$

Тоді розв'язок "задачі про сингулярне рішення" (16) буде наступним:

$$u(x) = c\delta\left(x - b - \sqrt{\frac{2t_1t_2}{t_1 - t_2}}\right),$$

де

$$c = \widetilde{\sigma}\sqrt{\frac{t_1 - t_2}{2t_1t_2}}e^{\frac{t_1}{2(t_1-t_2)}}.$$

Тепер на підставі (9) неважко буде побудувати в цьому випадку розв'язок крайової задачі (1)–(4).

Випадок VI. $t_1 > t_2$, $a \neq b$. В цьому випадку точка x_0 визначається із рівняння

$$(t_1 - t_2)(x-b)^2 + t_2(a-b)(x-b) - 2t_1t_2 = 0,$$

звідкіля

$$x_0 = b + \frac{-t_2(a-b) + \sqrt{t_2^2(a-b)^2 + 8t_1t_2(t_1 - t_2)}}{2(t_1 - t_2)}.$$

Тепер неважко буде побудувати у цьому випадку розв'язок "задачі про сингулярне рішення" (16) і загальний розв'язок крайової задачі (1)–(4).

Задачу (1)–(4) можна розглядати як екстремальну задачу теплопровідності, а функцію $f(x,t)$ — як функцію розподілу джерел тепла. Розглянемо деякі випадки розподілення джерел тепла.

Джерела розподілені по всій осі. Прикладом такої функції розподілу джерел тепла може бути функція $f(x,t) = \dfrac{1}{t^2+1}$. Побудуємо тепер розв'язки крайової задачі (1)–(4) з цією функцією розподілу джерел тепла. Спочатку знайдемо $\widetilde{\sigma}$. Оскільки

$$\int_0^{t_2}\left(\frac{t_2}{t_2 - \tau}\right)^{\frac{3}{2}}\int_R \frac{1}{\tau^2+1}(s-b)e^{-\frac{(s-b)^2}{4(t_2-\tau)}}d\tau ds = 0,$$

то згідно з (15)

$$\widetilde{\sigma} = 4\sigma\sqrt{\pi t_2^3} > 0.$$

Визначімо тепер частковий розв'язок неоднорідного рівняння (1) з заданою функцією джерел. Оскільки

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_R \frac{1}{\sqrt{t-\tau}(1+\tau^2)}e^{-\frac{(s-x)^2}{4(t-\tau)}}dsd\tau = \operatorname{arctg} t,$$

то частковим розв'язком неоднорідного рівняння (1) з функцією джерел $f(x,t) = = \dfrac{1}{t^2+1}$ буде функція $\operatorname{arctg} t$. Тепер, знаючи $\widetilde{\sigma}$ та частковий розв'язок неоднорідного рівняння (1), можна побудувати у випадках IV–VI розв'язки задачі (1)–(4).

Джерела тепла зосереджені в точці $c \in R$. Тоді функція джерел тепла буде такою: $f(x,t) = \delta(x-c)$. Оскільки

$$\int\limits_0^{t_2} \left(\frac{t_2}{t_2-\tau}\right)^{\frac{3}{2}} \int\limits_R \delta(x-c)(s-b)e^{-\frac{(s-b)^2}{4(t_2-\tau)}} d\tau ds = 4\sqrt{\pi t_2^3}\left[\frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{|c-b|}{\sqrt{2t_2}}\right)\right],$$

де

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{s^2}{2}} ds$$

— функція Лапласа [10, с. 109], то у відповідності з (15)

$$\widetilde{\sigma} = 4\sqrt{\pi t_2^3}\left[\sigma - \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{|c-b|}{\sqrt{2t_2}}\right)\right].$$

Так як стала $\widetilde{\sigma}$ повинна задовольняти умові $\widetilde{\sigma} > 0$, то точка $c \in R$ — точка джерел тепла — повинна бути такою, щоб виконувалась умова

$$\sigma - \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{|c-b|}{\sqrt{2t_2}}\right) > 0.$$

Якщо ця умова не буде виконаною, то крайова задача (1)–(4) не має розв'язків. Будемо припускати, що ця умова виконується. Знайдемо тепер частковий розв'язок неоднорідного рівняння (1). Оскільки

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \int\limits_R \frac{\delta(x-c)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(s-x)^2}{4(t-\tau)}} d\tau ds = \frac{x-c}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{x-c}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} s^{-2} e^{-s^2} ds,$$

то частковий розв'язок неоднорідного рівняння (1) у цьому випадку має вигляд

$$u_0(x,t) = \frac{x-c}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{x-c}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} s^{-2} e^{-s^2} ds.$$

Тепер, знаючи $\widetilde{\sigma}$ та функцію $u_0(x,t)$, можна побудувати у випадках IV–VI розв'язки крайової задачі (1)–(4).

Висновки. Таким чином, обгрунтовано метод розв'язування початково-крайової задачі для рівняння теплопровідності з екстремальною умовою, на базі якого проведено повне дослідження. Побудовані розв'язки екстремальної задачі теплопровідності для різних випадків розподілу джерел тепла.

1. **Черский Ю. И.** Ляпуновские экстремальные задачи и их приложения [текст] / Ю. И. Черский // Препринт № 19-90. – Львів: ІППММ АН УРСР, 1990. – 55 с.
2. **Черский Ю. И.** Аналитическое решение экстремальных задач [текст] / Ю. И. Черский. – Одесса: ОИИМФ. – 1990. – 54 с.
3. **Черский Ю. И.** Экстремальная задача для уравнения Лапласа в полупространстве [текст] / Ю. И. Черский // Сб. "Динамические системы". – Киев: Вища школа. – 1987. – Вып. 6. – С. 101–103.
4. **Рухлина С. Б.** О нетеровости экстремальной задачи для уравнения теплопроводности [текст] / С. Б. Рухлина // Матеріали Міжнар. конф. "Сучасні проблеми математики". – Чернівці–Київ: Ін-т матем. НАН України. 1998. – Ч. 2. – С. 269–272.
5. **Рухлина С. Б.** Об экстремальных задачах для бигармонического уравнения [текст] / С. Б. Рухлина // Сб. "Крайові задачі для диференціальних рівнянь". – Київ: Ін-т матем. НАН України. – 1998. – Вип. 2. – С. 240–249.
6. **Рухлина С. Б.** Исследование одного класса экстремальных задач для уравнений с частными производными [текст] / С. Б. Рухлина // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38, № 1. – С. 102–110.
7. **Малишенко В. П.** Исследование математических моделей экстремальных задач для бигармонического уравнения в полуплоскости [текст] / В. П. Малишенко, Н. Я. Тихоненко // Вісник Кременчуцького державного університету. – 2003. – Вип. 3. – С. 39–43.
8. **Князев П. П.** Интегральные преобразования [текст] / П. П. Князев. – Минск: Вышейшая школа. – 1969. – 197 с.
9. **Прудников А. П.** Интегралы и ряды. Элементарные функции [текст] / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. – М.: Наука, 1981. – 794 с.
10. **Гмурман В. Е.** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [текст] / В. Е. Гмурман. – М.: Наука, 1979. – 400 с.