Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра методів математичної фізики

Дипломна робота

бакалавра

на тему: **«Антиплоська задача теорії пружності для кільця з тріщиною»**

«Antiplane problem of the theory of elasticity for a ring with a crack»

Виконала: студентка денної форми навчання спеціальності 113 Прикладна математика
Недєлєва Ганна Дмитрівна

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доц. Журавльова З. Ю.
Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доц. Фесенко. Г.О.

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ ___ від «_____» ________ р.
Завідувач кафедри
____________ ________________

Захищено на засіданні ЕК № _______
Протокол № _____ від «_____» _____ р.
Оцінка ________ / ________ / ________
Голова ЕК
____________ ____________________

Одеса — 2022 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Дипломна робота присвячена розв'язанню антиплоскої задачі теорії пружності для кільця, на зовнішню грань якого діє механічне навантаження, а всередині розташована поперечна тріщина. Дана задача є типовою модельною задачею, так як кільце використовується у різноманітних інженерних конструкціях.

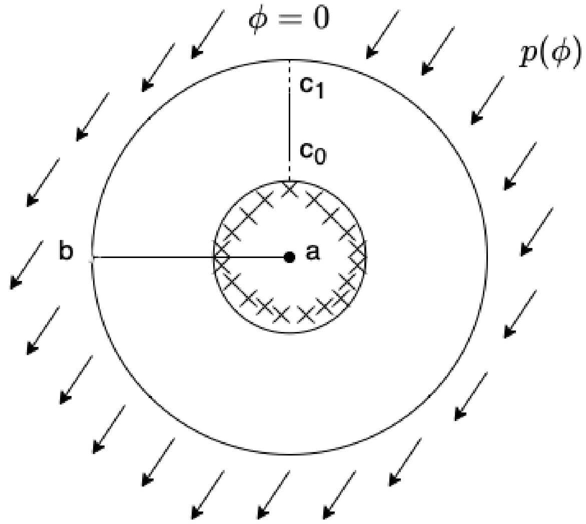
Вихідна задача зводиться до одновимірної крайової задачі за допомогою інтегрального перетворення, що застосовано за узагальненою схемою. Для знаходження розв'язку побудовано функцію Гріна. Отримано вирази для функцій переміщення та напружень, що містять невідому функцію стрибка переміщень на тріщині. Сформульовано сингулярне інтегральне рівняння відносно цієї функції та обрано метод його розв'язання.

Графічні результати побудовані під час дослідження поведінки функції переміщення(Розділ 3), за умови відсутності тріщини.

РОЗДІЛ 1

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо антиплоську задачу для кільця з тріщиною



$$r\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial w}{\partial r}) + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = 0, \tag{1.1}$$

$$w\Big|_{\varphi=-\pi} = w\Big|_{\varphi=\pi}, \quad \tau_{\varphi z}\Big|_{\varphi=-\pi} = \tau_{\varphi z}\Big|_{\varphi=\pi}, \quad a < r < b \tag{1.2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\partial w}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=-\pi} = \frac{\partial w}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=\pi}, \quad -\pi < \varphi < \pi$$

Внутрішня межа кільца закріплена:

$$w\Big|_{r=a} = 0 \tag{1.3}$$

До зовнішньої межі прикладено навантаження:

$$\tau_{rz}\Big|_{r=b} = p(\varphi) \tag{1.4}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\partial w}{\partial r}\Big|_{r=b} = \frac{p(\varphi)}{G}$$

На лінії $\varphi = 0$ від c_0 до c_1 розташована тріщина [1]
Умови на тріщині:

$$\begin{cases} < w(r{,}o) >= w(r, -0) - w(r, +0) = X(r), \quad c_o < r < c_1 \\ < \tau_{\varphi z}(r{,}0) >= \tau_{\varphi z}(r, -0) - \tau_{\varphi z}(r, +0) = 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

Останню умову можна переписати таким чином:

$$< \frac{\partial w}{\partial \varphi}(r{,}0) >= \frac{\partial w}{\partial \varphi}(r, -0) - \frac{\partial w}{\partial \varphi}(r, +0) = 0$$

Потрібно знайти переміщення та напруження у середині кільця, що задовільняют рівнянню рівноваги (1.1), крайовим умовам (1.2) – (1.4) та умовам на тріщині (1.5).

РОЗДІЛ 2

ОСНОВНА ЧАСТИНА

Зведення задачі до одновимірної

Зведемо задачі до одновимірної шляхом застосування повного скінченного перетворення Фур'є по куту [4]:

$$w_\alpha(r) = \int_{-\pi}^{-0} w(r,\varphi)e^{i\alpha\varphi}d\varphi + \int_{+0}^{\pi} w(r,\varphi)e^{i\alpha\varphi}d\varphi \tag{2.1}$$

$$(r\frac{\partial w}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2})\int_{-\pi}^{-0} w(r,\varphi)e^{i\alpha\varphi}d\varphi + \int_{+0}^{\pi} w(r,\varphi)e^{i\alpha\varphi}d\varphi$$

$$r^2 w''_\alpha(r) + rw'_\alpha(r) + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}(\int_{-\pi}^{-0} w(r,\varphi)e^{i\alpha\varphi}d\varphi + \int_{+0}^{\pi} w(r,\varphi)e^{i\alpha\varphi}d\varphi)$$

Отримана одновимірна задача у просторі трансформант:

$$\begin{cases} r^2 w''_\alpha(r) + rw'_\alpha(r) - \alpha^2 w_\alpha = i\alpha X(r) \\ w_\alpha(a) = 0 \\ w'_\alpha(b) = \frac{p_\alpha}{G} \end{cases} \tag{2.2}$$

$\mathrm{p}_\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} p(\varphi)e^{i\alpha\varphi}d\varphi$

Для розв'язання одновимірної задачі скористаємося підстановкою Ейлера:

$$r = e^t, t = \ln(r), u(t) = w_\alpha(e^t)$$

$$w'_\alpha(e^t) = e^{-t}\frac{du}{dt}$$

$$w''_\alpha(e^t) = e^{-2t}(\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{du}{dt})$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{du}{dt} + \frac{du}{dt} - \alpha^2 u = i\alpha X(e^t)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dt^2} - \alpha^2 u = i\alpha X(e^t) \\ \\ u\Big|_{t=\ln(a)} = 0, \quad \frac{du}{dt}\Big|_{t=\ln(b)} = \frac{p_\alpha e^{\ln(b)}}{G} \end{cases} \tag{2.3}$$

Побудова функції Гріна

Скористаємось другим спосібом побудови функції Грина [2], яку будемо шукати у вигляді:

$$G(t,\xi) = \varphi(t-\xi) - \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k(t) U_k[\varphi(t-\xi)] \tag{2.4}$$

Фундаментальна функція має вигляд:

$$\varphi(t-\xi) = -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|t-\xi|}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{1}{2} sign(t-\xi) e^{-\alpha|t-\xi|}$$

$$U_0[\varphi] = \varphi\Big|_{t=\ln(a)} = -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|\ln(a)-\xi|}$$

$$U_1[\varphi] = \frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{t=\ln(b)} = \frac{1}{2} e^{-\alpha|\ln(b)-\xi|}$$

Запишемо функцію Грина:

$$G(t,\xi) = -\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha|t-\xi|} + \psi_0\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha(\xi-\ln(a))} - \psi_1\frac{1}{2}e^{-\alpha(\xi-\ln(b))}, \tag{2.5}$$

де фундаментальна базисна система розв'язків має вигляд:

$$\psi_0 = \frac{\mathrm{ch}(\alpha(\ln(b)-t))}{\mathrm{ch}(\alpha(\ln(a)-\ln(b))}$$

$$\psi_1 = \frac{\mathrm{sh}(\alpha(\ln(a)-t))}{\alpha\,\mathrm{ch}(\alpha(\ln(a)-\ln(b))}$$

Знайдемо функцію Гріна для випадку, коли $\alpha = 0$:

$$\varphi_0(t,\xi) = \frac{1}{2}|t-\xi|$$

$$G_0(t,\xi) = \frac{1}{2}|t-\xi| + \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}t \tag{2.6}$$

Розв'язання одновимірної крайової задачі

Розв'язок одновимірної крайової задачі у просторі трансформант з неоднорідними граничними умовами має вигляд:

$$u = \int_{\ln(a)}^{\ln(b)} f(\xi)G(t,\xi)d\xi + \sum_{j=0}^{n-1} B_j\psi_j, \tag{2.7}$$

де $f(\xi) = i\alpha X(e^{\xi})$

$$u = \int_{\ln(a)}^{\ln(b)} i\alpha X(e^{\xi})G(t,\xi)d\xi + \frac{p_\alpha e^{\ln(b)}}{G}$$

Повернемось до змінної r:

$$w_\alpha(r) = \int_a^b i\alpha X(\xi) G(\ln(r), \ln(\xi)) d\xi + \frac{p_\alpha b}{G} \tag{2.8}$$

Знайдемо розв'язок при $\alpha = 0$:

$$w_0(r) = \frac{p_0 b}{G} \tag{2.9}$$

Обернення розв'язку

Отримаємо розв'язок у просторі оригіналів за допомогою формули обернення [4]:

$$w = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_\alpha e^{-i\alpha\varphi} \tag{2.10}$$

$$w = \frac{1}{\pi}(\sum_{k=-\infty}^{-1} w_\alpha e^{-i\alpha\varphi} + w_o + \sum_{k=1} w_\alpha e^{-i\alpha\varphi}),$$

Отриманий розв'язок:

$$w = \frac{1}{\pi}(\sum_{k=-\infty}^{-1} e^{-i\alpha\varphi} \int_a^b i\alpha X(\xi) G(\ln(r), \ln(\xi)) d\xi + \frac{b}{G} \int_{-\pi}^{\pi} p(\varphi) e^{i\alpha\varphi} d\varphi +$$

$$+\frac{b}{G} \int_{-\pi}^{\pi} p(\varphi) d\varphi +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} e^{-i\alpha\varphi} \int_a^b i\alpha X(\xi) G(\ln(r), \ln(\xi)) d\xi + \frac{b}{G} \int_{-\pi}^{\pi} p(\varphi) e^{i\alpha\varphi} d\varphi)$$

Знайдений вираз для функції переміщення містить невідому функцію $X(\xi)$ і цю функцію може бути знайдено з умови, що тріщина вільна від прикладенного навантаження:

$$\tau_{\varphi z}\Big|_{\varphi=-0} = 0$$

Зведення до сингулярного інтегрального рівняння

Знайдемо похідну розв'язку та змінемо межі інтегрування на проміжок, в якому $X(\xi) \neq 0$

$$\frac{\partial w}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\pi}\sum_{-\infty}^{-1} i\alpha e^{-i\alpha\varphi} w_\alpha - \frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty} i\alpha e^{-i\alpha\varphi} w_\alpha$$

$$\frac{\partial w}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\pi}\sum_{-\infty}^{-1} i\alpha e^{-i\alpha\varphi}\int_{c_0}^{c_1} i\alpha X(\xi) G(\ln(r),\ln(\xi))d\xi + \frac{b}{G}\int_{-\pi}^{\pi} p(\varphi)e^{i\alpha\varphi}d\varphi -$$
$$-\frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty} i\alpha e^{-i\alpha\varphi}\int_{c_0}^{c_1} i\alpha X(\xi) G(\ln(r),\ln(\xi))d\xi + \frac{b}{G}\int_{-\pi}^{\pi} p(\varphi)e^{i\alpha\varphi}d\varphi$$

За умовою $\tau_{\varphi z}\Big|_{\varphi=-0} = 0$ отримаємо сингулярне інтегральне рівняння:

$$\int_{c_0}^{c_1} X(\xi)(\sum_{-\infty}^{-1}\alpha^2 G(\ln(r),\ln(\xi)) + \sum_{1}^{\infty}\alpha^2 G(\ln(r),\ln(\xi)))d\xi = \int_{-\pi}^{\pi} p(\varphi)e^{i\alpha\varphi}d\varphi$$

Виконується заміна змінних для переходу до проміжку $(-1{,}1)$, далі невідома функція розвивається в ряд за поліномами Чебишева II роду, згідно за методом ортогональних поліномів [3]:

$$X(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n U_n(\xi)\sqrt{1-\xi^2}$$

РОЗДІЛ 3

РОЗВ'ЯЗАННЯ ОДНОВИМІРНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ БЕЗ ДЕФЕКТУ

Для побудови графічних результатів розв'яжемо вихідну задачу без дефекту. Одновимірна задача залишається попередньою, окрім появи однорідності в правії частині рівняння.

Одновимірна задача у просторі трансформант:

$$\begin{cases} r^2 w''_\alpha(r) + r w'_\alpha(r) - \alpha^2 w_\alpha = 0 \\ w_\alpha(a) = 0 \\ w'_\alpha(b) = \frac{p_\alpha}{G} \end{cases} \tag{3.1}$$

$\mathrm{p}_\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} p(\varphi) e^{i\alpha\varphi} d\varphi$

Для розв'язання одновимірної задачі скористаємося підстановкою Ейлера:

$$r = e^t, t = \ln(r), u(t) = w_\alpha(e^t)$$

$$w'_\alpha(e^t) = e^{-t}\frac{du}{dt}$$

$$w''_\alpha(e^t) = e^{-2t}(\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{du}{dt})$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{du}{dt} + \frac{du}{dt} - \alpha^2 u = 0$$

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dt^2} - \alpha^2 u = 0 \\ \\ u\Big|_{t=\ln(a)} = 0, \quad \frac{du}{dt}\Big|_{t=\ln(b)} = \frac{p_\alpha e^{\ln(b)}}{G} \end{cases} \tag{3.2}$$

Знайдемо загальний розв'язок при $\alpha \neq 0$:

$$u(t) = c_0 e^{\alpha t} + c_1 e^{-\alpha t}$$

$$u'(t) = \alpha c_0 e^{\alpha t} - \alpha c_1 e^{-\alpha t}$$

Знайдемо коефіцієнти c_0 і c_1, підставивши загальний розв'язок у крайові умови:

$$u\Big|_{t=\ln(a)} = c_0 e^{\alpha \ln(a)} + c_1 e^{-\alpha \ln(a)}$$

$$c_0 a^{\alpha} + c_1 a^{-\alpha} = 0$$

$$c_1 = -c_0 a^{2\alpha}$$

$$\frac{du}{dt}\Big|_{t=\ln(b)} = \alpha c_0 e^{\alpha \ln(b)} - \alpha c_0 a^{2\alpha} e^{-\alpha \ln(b)} = \frac{p_\alpha e^{\ln(b)}}{G}$$

$$\alpha c_0 b^{\alpha} - \alpha c_0 a^{2\alpha} b^{-\alpha} = \frac{p_\alpha b}{G}$$

$$\alpha c_0 b^{-\alpha}(b^{2\alpha} - a^{2\alpha}) = \frac{p_\alpha b}{G}$$

$$c_0 = \frac{p_\alpha b^{\alpha+1}}{G\alpha\left(b^{2\alpha} - a^{2\alpha}\right)}, \qquad c_1 = \frac{p_\alpha b^{\alpha+1} a^{2\alpha}}{G\alpha\left(b^{2\alpha} - a^{2\alpha}\right)}$$

Знайдемо розв'язок при $\alpha = 0$:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = 0$$

$$u_0(t) = c_0 t + c_1$$

$$c_0 = \frac{p_0 b}{G}, \qquad c_1 = -\frac{p_0 b \ln(a)}{G}$$

$$u_0(t) = \frac{p_0 b(t - \ln(a))}{G}$$

Повернемось до змінної r:

$$w_\alpha(r) = \frac{p_\alpha b^{\alpha+1} r^\alpha + p_\alpha b^{\alpha+1} a^{2\alpha} r^{-\alpha}}{G\alpha\left(b^{2\alpha} - a^{2\alpha}\right)}$$

$$w_0(r) = \frac{p_0 b(\ln(r) - \ln(a))}{G}$$

Отримаємо розв'язок у просторі оригіналів за допомогою формули обернення:

$$w = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_\alpha e^{-i\alpha\varphi} \tag{3.3}$$

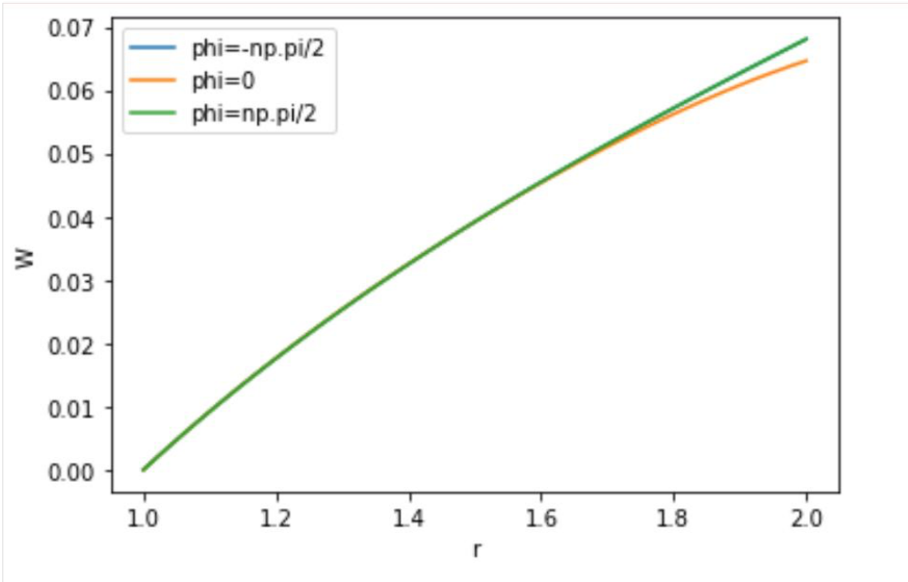
$$w = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{e^{-i\alpha\varphi} \int_{-\pi}^{\pi} p(\varphi) e^{i\alpha\varphi} d\varphi (b^{\alpha+1} r^\alpha + b^{\alpha+1} a^{2\alpha} r^{-\alpha})}{G\alpha\left(b^{2\alpha} - a^{2\alpha}\right)} +$$

$$+ \frac{b \int_{-\pi}^{\pi} p(\varphi) d\varphi (\ln(r) - \ln(a))}{G} +$$

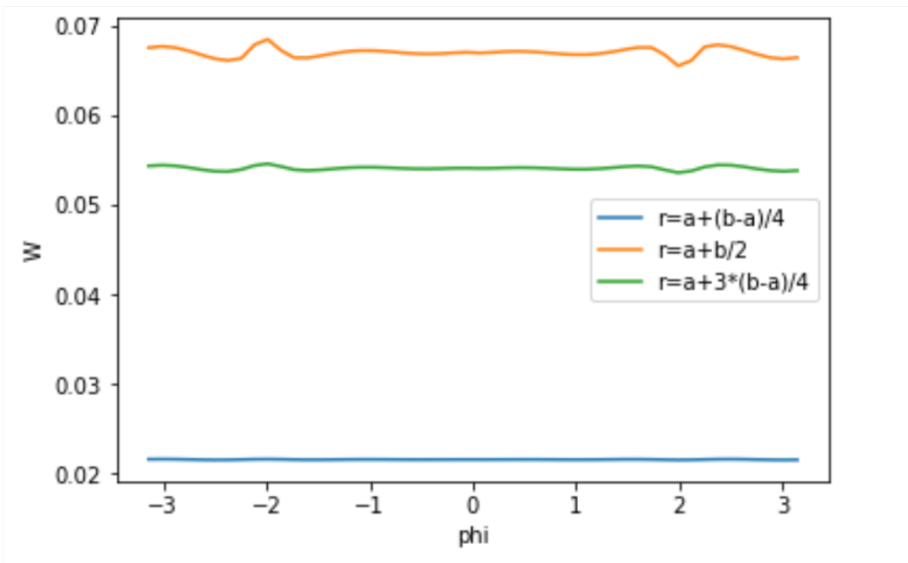
$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha\varphi} \int_{-\pi}^{\pi} p(\varphi) e^{i\alpha\varphi} d\varphi (b^{\alpha+1} r^\alpha + b^{\alpha+1} a^{2\alpha} r^{-\alpha})}{G\alpha\left(b^{2\alpha} - a^{2\alpha}\right)}$$

Графічні результати

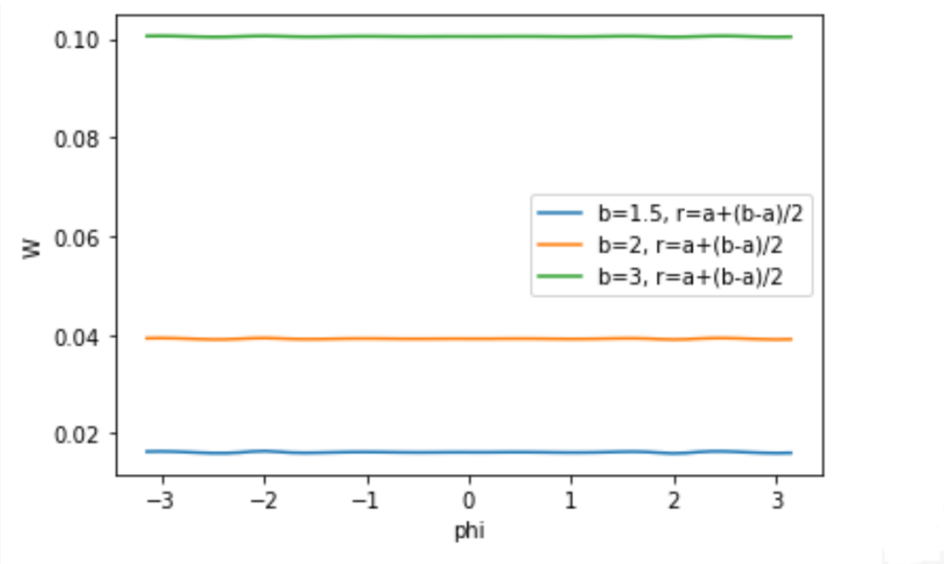
Розглянемо зміну переміщень та напружень у середині кільця.



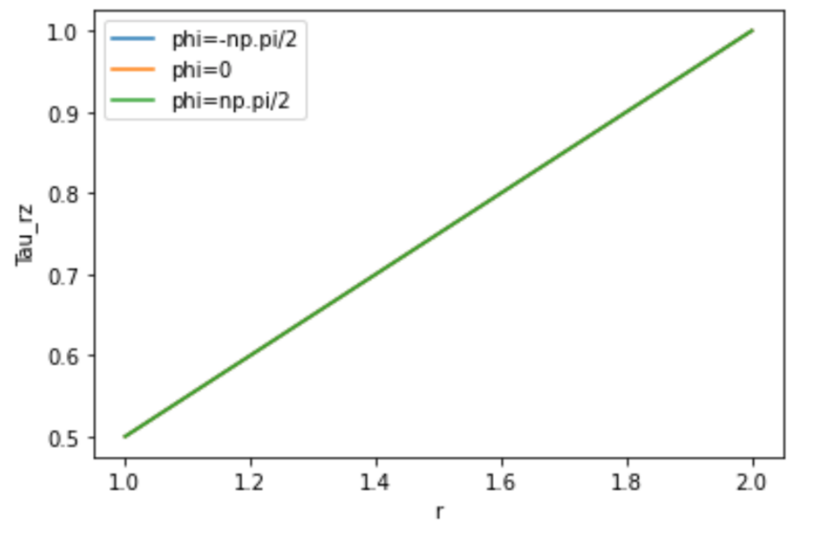
При $p(\varphi)$=1, a = 1, b = 2, G = 41.4



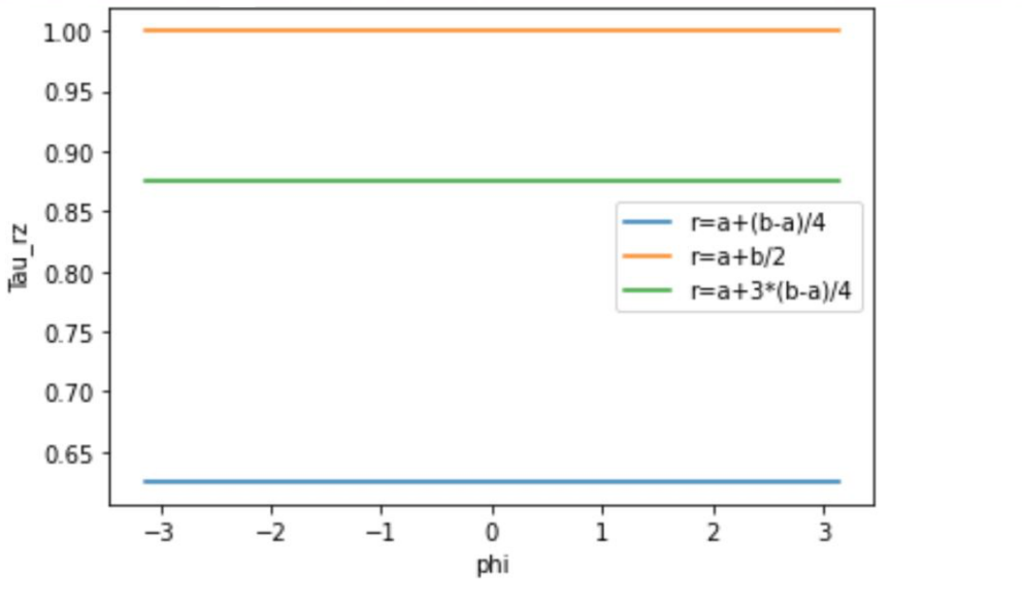
При $p(\varphi)$=1, a = 1, b = 2, G = 41.4



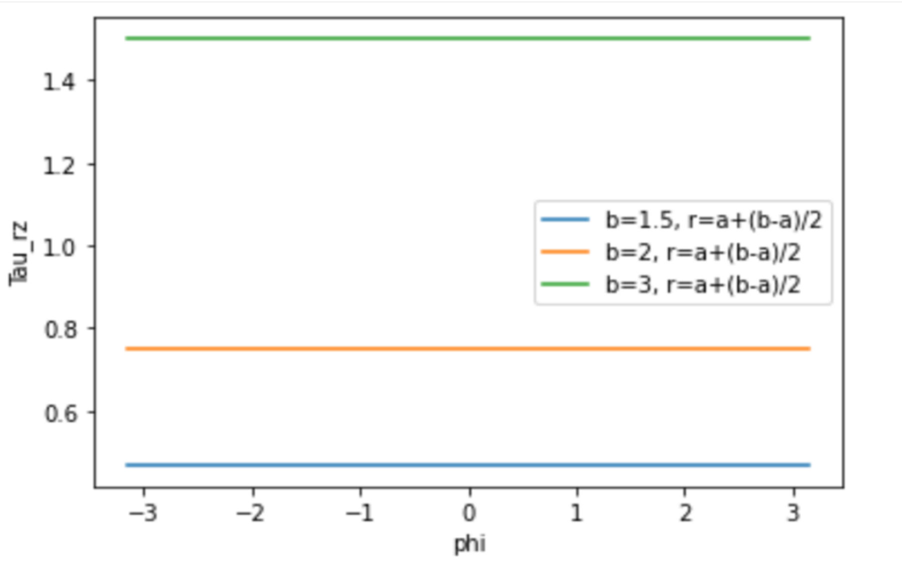
При $p(\varphi)$=1, a = 1, G = 41.4



При $p(\varphi)$=1, a = 1, G = 41.4



При $p(\varphi)$=1, a = 1, G = 41.4



При $p(\varphi)$=1, a = 1, G = 41.4

ВИСНОВКИ

В рамках дипломної роботи було застосовано апарат інтегральних перетворень за узагальненою схемою та побудовано функцію Гріна. Знайдено вирази для переміщення та напружень, що містять невідому функцію стрибка переміщень на тріщині. Для її відшукання отримано сингулярне інтегральне рівняння. Отримано графічні результати для випадку відсутності тріщини у середині кільця.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вайсфельд Н.Д., Журавльова З.Ю., Реут В.В. Плоскі мішані задачі теорії пружності для півнескінченної смуги // Монографія. Одеса, Одес. нац. ун-т ім. І.І. Мечникова, 2019. – 160 с
2. Попов Г. Я., Абдыманов С. А., Ефимов В. В. Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач. Алматы: Изд. Рацах, 1999. 133 с.
3. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов разрезов тонких включений и подкреплений. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. 344 с.
4. Попов Г. Я. Учбовий посібник з курсу "Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень": для студ. техн. спец. ВНЗ / Г. Я. Попов, В. В. Реут, Н. Д. Вайсфельд. – Одеса: Астропринт, 1999 . – 67 с.