

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра методів математичної фізики

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

«Антиплоска задача теорії пружності для складеної
півнескінченної смуги»

«The antiplane problem of the elasticity theory for a
composed semi-infinite strip»

Виконав: здобувач денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика
Освітня програма «Прикладна математика»
Мельник Олександр Олексійович

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доц. Процеров Ю.С. _____

Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доц. Фесенко Г.О.

Рекомендовано до захисту:

Захищено на засіданні ЕК № _____

Протокол засідання кафедри

Протокол № ____ від _____ 2024 р.

№ ____ від _____ 2024 р.

Оцінка _____ / _____ / _____

Завідувач кафедри

Голова ЕК

Одеса — 2024 р.

ЗМІСТ

Вступ	3
1 Основна частина	5
1.1 Постановка задачі	5
1.2 Розв'язання	7
1.3 Розрахункові формули	18
1.4 Результати чисельних розрахунків	20
Висновки	24
Список літератури	25

ВСТУП

Антиплоска задача є одним із важливих розділів механіки деформівних тіл. Вона відрізняється від традиційних плоских задач тим, що деформації у ній відбуваються переважно у напрямку, перпендикулярному до площини, в якій розглядається тіло. Це означає, що переміщення уздовж осі, нормальної до площини задачі, є основними, тоді як переміщення у самій площині є другорядними. Такі задачі важливі для розуміння поведінки матеріалів під дією навантажень, що спричиняють значні зсувні деформації.

Існує кілька видів антиплоских задач, серед яких можна виділити задачі про пружні хвилі, задачі про поширення тріщин, а також задачі про контактні взаємодії. У кожному з цих випадків важливо враховувати специфіку навантажень і властивостей матеріалів. Наприклад, при дослідженні тріщин важливо враховувати зосереджені напруження навколо вершини тріщини, а при розгляді контактних задач необхідно враховувати умови зчеплення поверхонь, що контактують.

У даній роботі ми розглядатимемо антиплоску задачу для півнескінченної смуги. Така задача є типовою для вивчення поведінки матеріалів з різними механічними характеристиками, розділених площиною симетрії. У випадку півнескінченної смуги розв'язок задачі може бути значно спрощений завдяки використанню аналітичних методів, таких як перетворення Фур'є. Цей підхід дозволяє звести двовимірну задачу до одновимірної, що спрощує її розв'язання та аналіз.

Антиплоскі задачі півнескінченної смуги мають широке застосування у різних галузях техніки та науки. Зокрема, вони використовуються у теорії пружності для моделювання поведінки матеріалів під дією різних видів навантажень. Крім того, ці задачі є важливими для розуміння процесів, що відбуваються в геології та гірничій справі, де розглядаються питання стабільності масивів гірських порід. Також вони застосовуються у матеріалознавстві для дослідження властивостей композиційних матеріалів, що складаються з декількох компонентів з різними механічними характеристиками.

Важливим аспектом у розв'язанні антиплоскої задачі півнескінченної

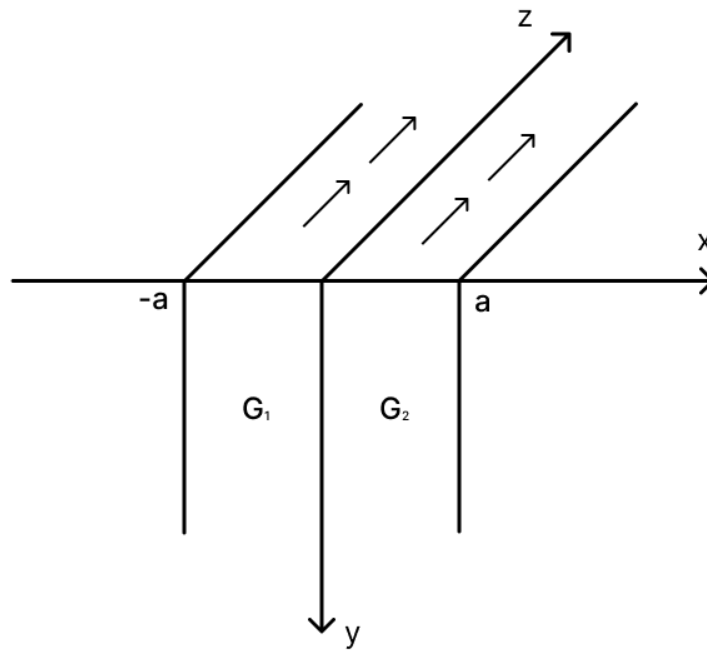
смуги є врахування умов ідеального механічного контакту між різними частинами матеріалу. Це дозволяє забезпечити неперервність переміщень та напружень при переході з однієї частини смуги до іншої. Умови на нескінченності також відіграють ключову роль, оскільки вони забезпечують коректність розв'язку на великих відстанях від області навантаження.

У цій роботі ми детально розглянемо антиплоску задачу для півнескінченної смуги, що складається з двох частин з різними модулями зсуву. Основну увагу буде приділено аналітичному розв'язанню цієї задачі за допомогою перетворення Фур'є, а також аналізу отриманих результатів та їх застосуванню у практичних задачах механіки деформівних тіл.

РОЗДІЛ 1

ОСНОВНА ЧАСТИНА

1.1 Постановка задачі



Розглянемо в декартовій системі координат пружне тіло у вигляді півнескінченної смуги: $|x| < a$, $0 < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$. Припустимо, що ця смуга складається з двох частин з різними механічними характеристиками. Перша частина $-a < x < 0$, $0 < y < \infty$, $|z| < \infty$ має модуль зсуву G_1 , а друга частина $0 < x < a$, $0 < y < \infty$, $|z| < \infty$ має модуль зсуву G_2 . Між цими частинами виконуються умови ідеального механічного контакту, тобто неперервність переміщень та напружень при переході з одної частини до другої.

Будемо вважати, що края смуги $x = \pm a$, $0 < y < \infty$, $|z| < \infty$ вільні від напружень, а до краю $|x| < a$, $y = 0$, $|z| < \infty$ прикладено дотичне напруження, величина якого не залежить від змінної z . В цьому випадку це тіло буде знаходитися в умовах антиплоскої деформації, при якій будь-який переріз тіла, нормальний до осі Oz , знаходиться в однаковому стані. Тоді

ми можемо розглядати переріз, що проходить через початок координат.

В умовах антиплоської деформації відмінними від нуля будуть тільки переміщення $w = w(x, y)$ вздовж осі Oz , а також два дотичних напруження:

$$\tau_{xz} = G \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{та} \quad \tau_{yz} = G \frac{\partial w}{\partial y},$$

де G - модуль зсуву матеріалу тіла.

Таким чином сформульована задача зводиться до розв'язання рівняння:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad |x| < a, \quad x \neq 0, \quad 0 < y < \infty \quad (1)$$

при крайових умовах:

$$\tau_{xz} \Big|_{x=-a} = G_1 \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=-a} = 0, \quad \tau_{xz} \Big|_{x=a} = G_2 \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$$

Тобто

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=\pm a} = 0 \quad (2)$$

та

$$\tau_{yz} \Big|_{y=0} = p(x) = \begin{cases} p_1(x), & -a < x < 0; \\ p_2(x), & 0 < x < a \end{cases} \quad (3)$$

де $p(x)$ - інтенсивність прикладеного навантаження.

в умовах на нескінченності:

$$w, \frac{\partial w}{\partial y} \rightarrow 0 \quad \text{коли} \quad y \rightarrow +\infty$$

а також умовах сполучення частин смуги:

$$w \Big|_{x=0^-} - w \Big|_{x=0^+} = 0, \quad 0 < y < \infty$$

$$\tau_{xz}|_{x=0^-} - \tau_{xz}|_{x=0^+} = G_1 \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0^-} - G_2 \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0^+} = 0, \quad 0 < y < \infty$$

1.2 Розв'язання

Для зведення цієї крайової задачі до одновимірної використаємо пів-нескінченне перетворення Фур'є за змінною y :

$$w_\alpha(x) = \int_0^\infty w(x, y) \cos \alpha y \, dy$$

з формулою обернення:

$$w(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty w_\alpha(x) \cos \alpha y \, d\alpha$$

Застосуємо його до рівняння (1):

$$\int_0^\infty \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cos \alpha y \, dy = 0$$

Обчислимо кожний доданок:

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos \alpha y \, dy = \frac{d^2}{dx^2} \int_0^\infty w(x, y) \cos \alpha y \, dy = \frac{d^2}{dx^2} w_\alpha(x) = w_\alpha''(x)$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos \alpha y \, dy = \left[u = \cos \alpha y, \, du = -\alpha \sin \alpha y \, dy; \, dv = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \, dy, \, v = \frac{\partial w}{\partial y} \right]$$

$$= \cos \alpha y \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_0^\infty + \alpha \int_0^\infty \frac{\partial w}{\partial y} \sin \alpha y \, dy$$

$$= \left[u = \sin \alpha y, \, du = \alpha \cos \alpha y \, dy; \, dv = \frac{\partial w}{\partial y} \, dy, \, v = w \right]$$

$$= \cos \alpha y \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_0^\infty + \alpha \sin \alpha y \cdot w \Big|_0^\infty - \alpha^2 \int_0^\infty w \cos \alpha y dy$$

Таким чином, ми отримуємо:

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos \alpha y dy = -\alpha^2 w_\alpha(x)$$

Враховуючи умови на нескінченності (4) та крайову умову (3), яку можна записати у вигляді:

$$\frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} = G^{-1}p(x) = \begin{cases} G_1^{-1}p_1(x), & -a < x < 0; \\ G_2^{-1}p_2(x), & 0 < x < a \end{cases}$$

Отримуємо:

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos \alpha y dy = -G^{-1}p(x) - \alpha^2 w_\alpha(x)$$

Отже, рівняння у трансформаті набуде вигляду:

$$w''_\alpha(x) - \alpha^2 w_\alpha(x) = G^{-1}p(x), \quad |x| < a, \quad x \neq 0$$

Застосуємо тепер перетворення Фур'є до крайових умов (2):

$$\int_0^\infty \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=\pm a} \cos \alpha y dy = 0,$$

звідки

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty w(x, y) \cos \alpha y dy \Big|_{x=\pm a} = 0,$$

тобто

$$w'_\alpha(\pm a) = 0$$

та умов сполучення (5):

$$\langle w_\alpha(0) \rangle = w_\alpha(0^-) - w_\alpha(0^+) = 0$$

$$G_1 w'_\alpha(0^-) - G_2 w'_\alpha(0^+) = 0$$

Останню з цих умов перетворимо так:

$$G_1 w'_\alpha(0^-) - G_1 w'_\alpha(0^+) = G_2 w'_\alpha(0^+) - G_1 w'_\alpha(0^+)$$

$$G_1 \langle w'_\alpha(0) \rangle = (G_2 - G_1) w'_\alpha(0^+)$$

де $\langle w'_\alpha(0) \rangle = w'_\alpha(0^-) - w'_\alpha(0^+)$ є стрибком похідної.

Отже, ми отримали одновимірну розривну крайову задачу:

$$w''_\alpha(x) - \alpha^2 w_\alpha(x) = G^{-1} p(x), \quad |x| < a, \quad x \neq 0 \quad (5)$$

$$w'_\alpha(\pm a) = 0$$

$$\langle w_\alpha(0) \rangle = 0, \quad \langle w'_\alpha(0) \rangle = G_* w'_\alpha(0^+),$$

де $G_* = (G_2 - G_1) G_1^{-1}$

Розв'язок будемо шукати у вигляді суми:

$$w_\alpha(x) = u_\alpha(x) + v_\alpha(x)$$

де $u_\alpha(x)$ - розв'язок неперервної крайової задачі

$$u''_\alpha(x) - \alpha^2 u_\alpha(x) = G^{-1} p(x), \quad |x| < a$$

$$u'_\alpha(\pm a) = 0$$

який має вигляд:

$$u_\alpha(x) = G^{-1} \int_{-a}^a G_\alpha(x, \xi) p(\xi) d\xi$$

Тут $G_\alpha(x, \xi)$ - функція Гріна крайової задачі

$$u_\alpha''(x) - \alpha^2 u_\alpha(x) = 0, \quad -a < x < a$$

$$u_\alpha(\pm a) = 0$$

$v_\alpha(x)$ - розв'язок розривної крайової задачі:

$$v_\alpha''(x) - \alpha^2 v_\alpha(x) = 0, \quad |x| < a, \quad x \neq 0$$

$$v_\alpha(x) = 0$$

$$\langle v_\alpha(0) \rangle = 0, \quad \langle v_\alpha'(0) \rangle = G_* v_\alpha'(0^+)$$

Він знаходиться за допомогою розривних властивостей побудованої функції Гріна $G_\alpha(x, \xi)$:

$$v_\alpha(x) = - \langle v_\alpha'(0) \rangle G_\alpha(x, \xi) \Big|_{\xi=0} = -G_* v_\alpha'(0^+) G_\alpha(x, \xi) \Big|_{\xi=0}$$

Таким чином:

$$w_\alpha(x) = G^{-1} \int_{-a}^a G_\alpha(x, \xi) p(\xi) d\xi - G_* w_\alpha'(0^+) G_\alpha(x, \xi) \Big|_{\xi=0}$$

Побудуємо функцію Гріна крайової задачі:

$$u''_{\alpha}(x) - \alpha^2 u_{\alpha}(x) = G^{-1}p(x), \quad |x| < a$$

$$u'_{\alpha}(\pm a) = 0$$

1) Знайдемо загальний розв'язок однорідного рівняння

$$u''_{\alpha}(x) - \alpha^2 u_{\alpha}(x) = 0:$$

$$\varphi_0(x) = \sinh(\alpha(x - a)), \quad \varphi_1(x) = \cosh(\alpha(x + a))$$

$$W = \begin{vmatrix} \sinh(\alpha(x - a)) & \cosh(\alpha(x + a)) \\ \alpha \cosh(\alpha(x - a)) & \alpha \sinh(\alpha(x + a)) \end{vmatrix} = \alpha \cosh^2(\alpha a) \neq 0$$

2) Перевірка на неособливість крайових умов:

$$\varphi'_0(a) = \alpha, \quad \varphi'_1(a) = \alpha \sinh(2\alpha a), \quad \varphi'_0(-a) = \alpha \cosh(2\alpha a), \quad \varphi'_1(-a) = 0$$

$$\begin{aligned} \det V_j[\varphi_k] \Big|_0^{n-1} &= \\ &= \begin{vmatrix} \varphi'_0(a) & \varphi'_1(a) \\ \varphi'_0(-a) & \varphi'_1(-a) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \alpha & \alpha \sinh(2\alpha a) \\ \alpha \cosh(2\alpha a) & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -\alpha^2 \sinh(2\alpha a) \cosh(2\alpha a) = \\ &= -\frac{\alpha^2}{2} \sinh(4\alpha a) \end{aligned}$$

Крайові умови не особливі.

Будемо шукати функцію Гріна у вигляді:

$$G_\alpha(x, \xi) = \begin{cases} A_0(\xi) \sinh(\alpha(x - a)) + A_1(\xi) \cosh(\alpha(x + a)), & -a \leq x \leq \xi; \\ B_0(\xi) \sinh(\alpha(x - a)) + B_1(\xi) \cosh(\alpha(x + a)), & \xi < x \leq a \end{cases}$$

Відносно $C_j = B_j - A_j$ (для $j = 0, 1$) отримуємо систему:

$$\begin{cases} C_0 \sinh(\alpha(\xi - a)) + C_1 \cosh(\alpha(\xi + a)) = 0; \\ \alpha C_0 \cosh(\alpha(\xi - a)) + \alpha C_1 \sinh(\alpha(\xi + a)) = 1 \end{cases}$$

За формулою Крамера знаходимо рішення:

$$C_0 = \frac{\cosh(\alpha(\xi + a))}{\alpha \cosh(2\alpha a)}, \quad C_1 = -\frac{\sinh(\alpha(\xi - a))}{\alpha \cosh(2\alpha a)}$$

Враховуючи, що $A_0 = B_0 - C_0$ та задовольняючи крайовим умовам, отримуємо систему відносно B_0 і B_1 :

$$\alpha A_0(\xi) \cosh(2\alpha a) = 0, \quad A_0 = 0 \Rightarrow B_0 = C_0$$

$$\alpha B_0(\xi) + \alpha B_1(\xi) \sinh(2\alpha a) = 0$$

$$\left(\frac{\alpha \cosh(\alpha(\xi + a))}{\alpha \cosh(2\alpha a)} \right) + \alpha B_1(\xi) \sinh(2\alpha a) = 0$$

$$B_1(\xi) = -\frac{2 \cosh(\alpha(\xi + a))}{\alpha \sinh(4\alpha a)}$$

$$\begin{aligned} A_1(\xi) &= -\frac{2 \cosh(\alpha(\xi + a))}{\alpha \sinh(4\alpha a)} + \frac{\sinh(\alpha(\xi - a))}{\alpha \cosh(2\alpha a)} \\ &= -\frac{\cosh^2(\alpha a)(\cosh(\alpha \xi) \cosh(\alpha a) - \sinh(\alpha \xi) \sinh(\alpha a))}{\alpha \sinh^2(\alpha a)} \end{aligned}$$

$$B_0(\xi) = \frac{\cosh(\alpha(\xi + a))}{\alpha \cosh(2\alpha a)}$$

Отримуємо функцію Гріна:

$$G_\alpha(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{\cosh(\alpha(\xi-a))}{\alpha \sinh(2\alpha a)} \cosh(\alpha(x+a)), & -a \leq x \leq \xi; \\ -\frac{\cosh(\alpha(\xi+a))}{\alpha \sinh(2\alpha a)} \cosh(\alpha(x-a)), & \xi < x \leq a \end{cases}$$

Або

$$G_\alpha(x, \xi) = -\frac{1}{\alpha \sinh(2\alpha a)} \begin{cases} \cosh(\alpha(x+a)) \cosh(\alpha(\xi-a)), & x < \xi; \\ \cosh(\alpha(\xi+a)) \cosh(\alpha(x-a)), & x > \xi \end{cases}$$

Тоді розв'язок задачі матиме вигляд:

$$w_\alpha(x) = G^{-1} \int_{-a}^a G_\alpha(x, \xi) p(\xi) d\xi - G_* w'_\alpha(0^+) G_\alpha(x, 0)$$

Знайдемо

$$\frac{\partial G_\alpha(x, \xi)}{\partial x} = -\frac{1}{\sinh(2\alpha a)} \begin{cases} \sinh(\alpha(x+a)) \cosh(\alpha(\xi-a)), & x < \xi; \\ \cosh(\alpha(\xi+a)) \sinh(\alpha(x-a)), & x > \xi \end{cases}$$

$$w'_\alpha(0^+) = G^{-1} \int_{-a}^a \frac{\partial G_\alpha(x, \xi)}{\partial x} \Big|_{x=0^+} p(\xi) d\xi - G_* w'_\alpha(0^+) \frac{\partial G_\alpha(x, \xi)}{\partial x} \Big|_{x=0^+}$$

$$\frac{\partial G_\alpha(x, 0)}{\partial x} \Big|_{x=0^+} = [\text{тут } x = 0^+ > \xi = 0] = -\frac{1}{\sinh(2\alpha a)} \cdot \cosh(\alpha a) \cdot \sinh(-\alpha a) = \frac{1}{2}$$

$$\left. \frac{\partial G_\alpha(x, \xi)}{\partial x} \right|_{x=0^+} = -\frac{1}{\sinh(2\alpha a)} \cdot \begin{cases} \cosh(\alpha a) \cosh(\alpha(\xi - a)), & \xi > 0; \\ -\cosh(\alpha(\xi + a)), & \xi < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} w'_\alpha(0^+) &= G^{-1} \cdot \frac{1}{\cosh(2\alpha a)} \\ &\times \left(\int_{-a}^0 \cosh(\alpha(\xi + a)) p_1(\xi) d\xi - \int_0^a \cosh(\alpha(\xi - a)) p_2(\xi) d\xi \right) \\ &- \frac{1}{2} G_* w'_\alpha(0^+) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w'_\alpha(0^+) \left(1 + \frac{1}{2} G_* \right) &= \frac{1}{2G_1 \cosh(\alpha a)} \int_{-a}^0 \cosh(\alpha(\xi + a)) p_1(\xi) d\xi \\ &- \frac{1}{2G_2 \cosh(\alpha a)} \int_0^a \cosh(\alpha(\xi - a)) p_2(\xi) d\xi \end{aligned}$$

Права частина - це відома функція $p_1(x)$ та $p_2(x)$, позначимо її як $Q(\alpha)$:

$$\begin{aligned} Q(\alpha) &= \frac{1}{G_1 \cosh(\alpha a)} \int_{-a}^0 \cosh(\alpha(\xi + a)) p_1(\xi) d\xi - \\ &- \frac{1}{G_2 \cosh(\alpha a)} \int_0^a \cosh(\alpha(\xi - a)) p_2(\xi) d\xi \end{aligned}$$

Тоді

$$w'_\alpha(0^+) = \frac{Q(\alpha)}{2 + G_*}$$

І тоді

$$w_\alpha(x) = G^{-1} \int_{-a}^a G_\alpha(x, \xi) p(\xi) d\xi - \frac{G_*}{2 + G_*} Q(\alpha) G_\alpha(x, 0)$$

$$\begin{aligned}
w(x,y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty w(x) \cos(\alpha y) d\alpha \\
&= \frac{2}{\pi G} \int_0^\infty \cos(\alpha y) d\alpha \int_{-a}^a G_\alpha(x, \xi) p(\xi) d\xi \\
&\quad - \frac{2G_*}{\pi(2+G_*)} \int_0^\infty Q(\alpha) G_\alpha(x, 0) \cos(\alpha y) d\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^x (\xi + a) \cosh(\alpha(\xi + a)) d\xi &= \frac{(x+a)\alpha \sinh(\alpha(x+a)) - \cosh(\alpha(x+a)) + 1}{\alpha^2} \\
\frac{1}{G_1 \cosh(\alpha a)} \int_{-a}^0 (\xi + a) \cosh(\alpha(\xi + a)) d\xi &= \frac{a\alpha \sinh(\alpha a) - \cosh(\alpha a) + 1}{G_1 \alpha^2 \cosh(\alpha a)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_x^a (\xi - a) \cosh(\alpha(\xi - a)) d\xi &= \frac{-(x-a)\alpha \sinh(\alpha(x-a)) - 1 + \cosh(\alpha(x-a))}{\alpha^2} \\
\frac{1}{G_2 \cosh(\alpha a)} \int_0^a (\xi - a) \cosh(\alpha(\xi - a)) d\xi &= \frac{-a\alpha \sinh(\alpha a) - 1 + \cosh(\alpha a)}{G_2 \alpha^2 \cosh(\alpha a)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w(x,y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos(\alpha y) \frac{1}{\alpha^3 \sinh(2\alpha a)} \\
&\quad \left(\frac{\cosh(\alpha(x-a))}{G_1} (\cosh(\alpha(x+a)) - (x+a)\alpha \sinh(\alpha(x+a)) - 1) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\cosh(\alpha(x+a))}{G_2} (\alpha(x-a) \sinh(\alpha(x-a)) - \cosh(\alpha(x-a)) + 1) \right) d\alpha \\
&\quad + \frac{2G_*}{\pi(2+G_*)} \int_0^\infty \cos(\alpha y) \frac{\cosh(\alpha(x+a))}{\alpha^3 \sinh(2\alpha a)} \\
&\quad \cdot \frac{G_2 + G_1}{G_1 G_2} \cdot 2(a\alpha \sinh(\alpha a) - \cosh(\alpha a) + 1) d\alpha.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial y} = & -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(\alpha y)}{\alpha^2 \sinh(2\alpha a)} \\
& \left(\frac{\cosh(\alpha(x-a))}{G_1} (\cosh(\alpha(x+a)) - (x+a)\alpha \sinh(\alpha(x+a)) - 1) \right. \\
& \left. + \frac{\cosh(\alpha(x+a))}{G_2} (\alpha(x-a) \sinh(\alpha(x-a)) - \cosh(\alpha(x-a)) + 1) \right) d\alpha \\
& - \frac{2G_*}{\pi(2+G_*)} \int_0^\infty \frac{\sin(\alpha y)}{\alpha^2 \sinh(2\alpha a)} \\
& \cdot \frac{\cosh(\alpha(x+a))}{\alpha^2 \sinh(2\alpha a)} \frac{G_2 + G_1}{G_1 G_2} \cdot 2(a\alpha \sinh(\alpha a) - \cosh(\alpha a) + 1) d\alpha.
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial w_\alpha}{\partial x}(x) = G^{-1} \int_{-a}^a \frac{\partial G_\alpha(x, \xi)}{\partial x} p(\xi) d\xi - \frac{G_*}{2+G_*} Q(\alpha) \frac{\partial G_\alpha(x, 0)}{\partial x}$$

$$p_1(\xi) = \xi + a \quad \text{та} \quad p_2(\xi) = \xi - a$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x}(x, y) = & \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(\alpha y)}{\alpha^3 \sinh(2\alpha a)} \\
& \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\cosh(2\alpha x) + \cosh(2\alpha a)}{2G_1} \right. \\
& - \frac{\cosh(\alpha(x-a))}{G_1} \\
& - \frac{\alpha(x+a)(\sinh(2\alpha x) + \sinh(2\alpha a))}{2G_1} \\
& + \frac{\alpha(x-a)(\sinh(2\alpha x) - \sinh(2\alpha a))}{2G_2} \\
& - \frac{\cosh(2\alpha x) + \cosh(2\alpha a)}{2G_2} \\
& \left. + \frac{\cosh(\alpha(x+a))}{G_2} \right) d\alpha
\end{aligned}$$

$$+ \frac{2G_*}{\pi(2+G_*)} \int_0^\infty \frac{\cos(\alpha y)}{\alpha^2 \sinh(2\alpha a)} \frac{\cosh(\alpha(x+a))}{\alpha \sinh(2\alpha a)} \frac{G_2 + G_1}{G_1 G_2} 2(a\alpha \sinh(\alpha a) - \cosh(\alpha a) + 1) d\alpha$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x}(x,y) = & \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(\alpha y)}{\alpha^2 \sinh(2\alpha a)} \\ & \left(\frac{\sinh(2\alpha x) - \sinh(\alpha(x-a))}{G_1} \right. \\ & - \frac{\sinh(2\alpha x) + \sinh(2\alpha a) + (x+a)2\alpha \cosh(2\alpha x)}{2G_1} \\ & + \frac{\sinh(2\alpha x) - \sinh(2\alpha a) + (x-a)2\alpha \cosh(2\alpha x)}{2G_2} \\ & \left. + \frac{\sinh(\alpha(x+a)) - \sinh(2\alpha x)}{G_2} \right) d\alpha \\ & + \frac{4G_*}{\pi(2+G_*)} \int_0^\infty \frac{\cos(\alpha y)}{\alpha^2 \sinh(2\alpha a)} \\ & \left(\frac{\sinh(\alpha(x+a))}{\alpha \sinh(2\alpha a)} \frac{G_2 + G_1}{G_1 G_2} (a\alpha \sinh(\alpha a) - \cosh(\alpha a) + 1) \right) d\alpha \end{aligned}$$

1.3 Розрахункові формули

Враховуючи, що $p_1(x) = x + a$, $p_2(x) = x - a$

$$\begin{aligned}
 W(x,y) = & \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(\alpha y)}{\alpha^3 \sinh(2\alpha a)} \\
 & \left(\frac{\cosh(\alpha(x-a))}{G_1} (\cosh(\alpha(x+a)) - (x+a)\alpha \sinh(\alpha(x+a)) - 1) + \right. \\
 & \left. + \frac{\cosh(\alpha(x+a))}{G_2} ((x-a)\alpha \sinh(\alpha(x-a)) - \cosh(\alpha(x-a)) + 1) \right) d\alpha + \\
 & + \frac{4G^*}{\pi(2+G^*)} \int_0^\infty \frac{\cos \alpha y}{\cosh(\alpha(x+a))\alpha^3 \sinh(2\alpha a)} \cdot \\
 & \cdot \frac{G_1 + G_2}{G_1 G_2} (a\alpha \sinh(\alpha a) - \cosh(\alpha a) + 1) d\alpha
 \end{aligned}$$

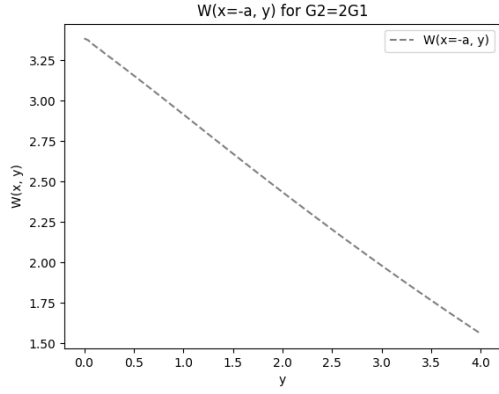
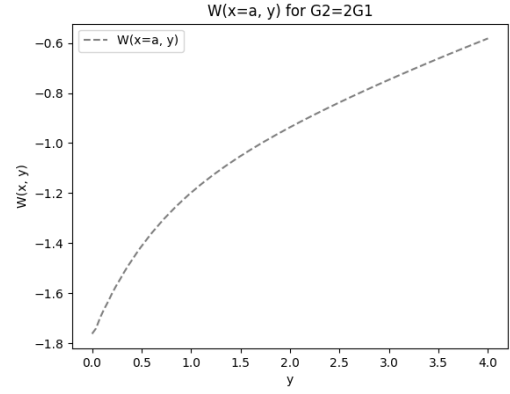
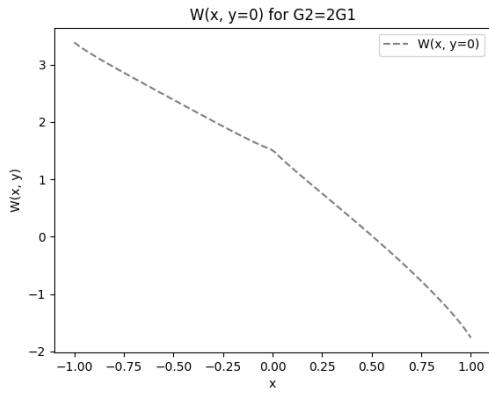
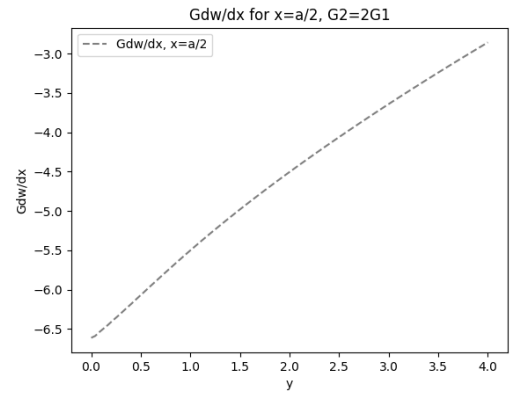
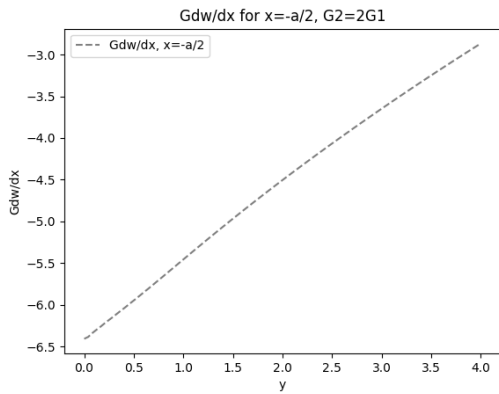
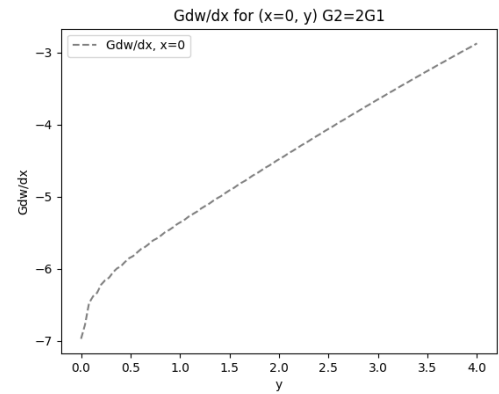
$$\begin{aligned}
 \tau_{yz} = G \frac{\partial W}{\partial y}(x,y) = & -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(\alpha y)}{\alpha^2 \sinh(2\alpha a)} \\
 & (\cosh(\alpha(x-a))(\cosh(\alpha(x+a)) - \\
 & - (x+a)\alpha \sinh(\alpha(x+a)) - 1) + \\
 & + \cosh(\alpha(x+a))((x-a)\alpha \sinh(\alpha(x-a)) - \\
 & - \cosh(\alpha(x-a)) + 1)) d\alpha - \\
 & - \frac{4G^*}{\pi(2+G^*)} \int_0^\infty \sin(\alpha y) \frac{\cosh(\alpha(x+a))}{\alpha^2 \sinh(2\alpha a)} \cdot \\
 & \cdot (a\alpha \sinh(\alpha a) - \cosh(\alpha a) + 1) d\alpha
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xz} = G \frac{\partial W}{\partial x}(x,y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(\alpha y)}{\alpha^2 \sinh(2\alpha a)} \\
& \quad (-\sinh(\alpha(x-a)) - (x+a)\alpha \cosh(2\alpha x) + \\
& \quad +(x-a)\alpha \cosh(2\alpha x) + \sinh(\alpha(x+a))) d\alpha + \\
& \quad + \frac{4G^*}{\pi(2+G^*)} \int_0^\infty \cos \alpha y \frac{\sinh(\alpha(x+a))}{\alpha^2 \sinh(2\alpha a)} \cdot \\
& \quad \cdot (a\alpha \sinh(\alpha a) - \cosh(\alpha a) + 1) d\alpha
\end{aligned}$$

1.4 Результати чисельних розрахунків

Графіки наведені для функцій $W(x,y)$, $G\frac{\partial W}{\partial y}$ та $G\frac{\partial W}{\partial x}$. Всі ці графіки наведені для випадку, коли $G_2 = 2G_1$, $G_1 = 2G_2$ та $a = 1$. Також наведені графіки функції $W(x,y)$ для випадку, коли $G_1 = G_2$.

Для побудови графіків, було розроблено програму на мові Python:

Рис. 1.1. $W : x = -a; G_2 = 2G_1$ Рис. 1.2. $W : x = a; G_2 = 2G_1$ Рис. 1.3. $W : y = 0; G_2 = 2G_1$ Рис. 1.4. $G \frac{\partial w}{\partial x} : x = \frac{a}{2}; G_2 = 2G_1$ Рис. 1.5. $G \frac{\partial w}{\partial x} : x = -\frac{a}{2}; G_2 = 2G_1$ Рис. 1.6. $G \frac{\partial w}{\partial x} : x = 0; G_2 = 2G_1$

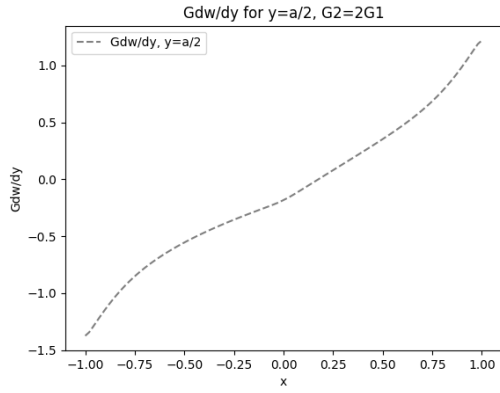


Рис. 1.7. $G \frac{\partial w}{\partial y}$ $y = \frac{a}{2}$; $G_2 = 2G_1$

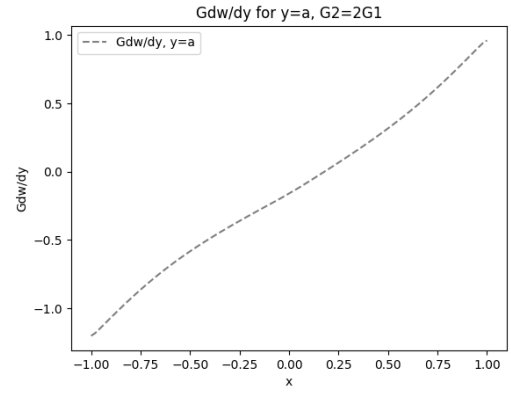


Рис. 1.8. $G \frac{\partial w}{\partial y}$ $y = a$; $G_2 = 2G_1$

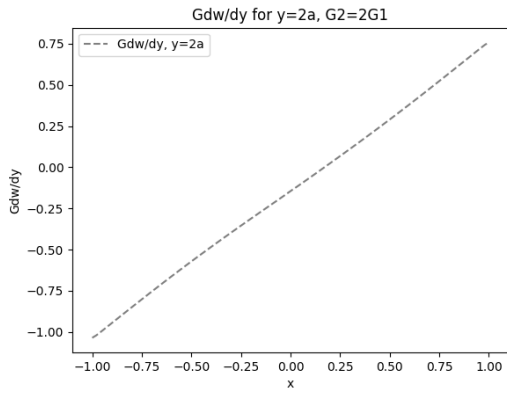


Рис. 1.9. $G \frac{\partial w}{\partial y}$ $y = 2a$; $G_2 = 2G_1$

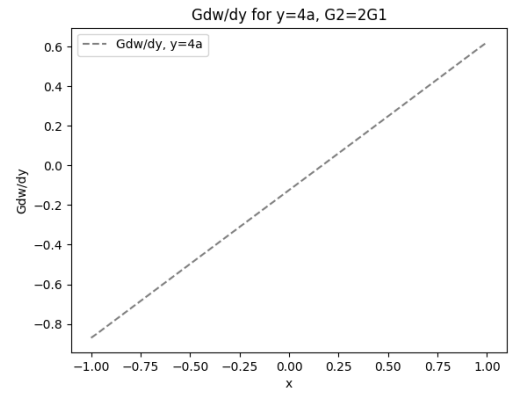


Рис. 1.10. $G \frac{\partial w}{\partial y}$ $y = 4a$; $G_2 = 2G_1$

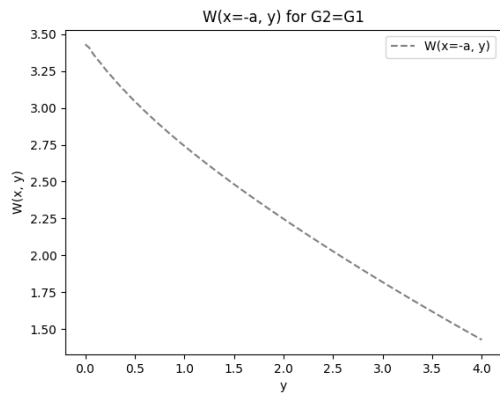


Рис. 1.11. W : $x = -a$; $G_2 = G_1$

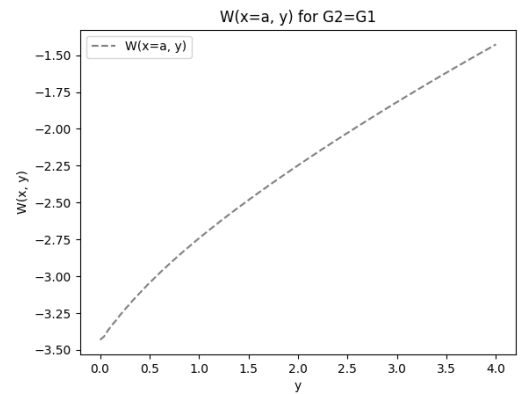


Рис. 1.12. W : $x = a$; $G_2 = G_1$

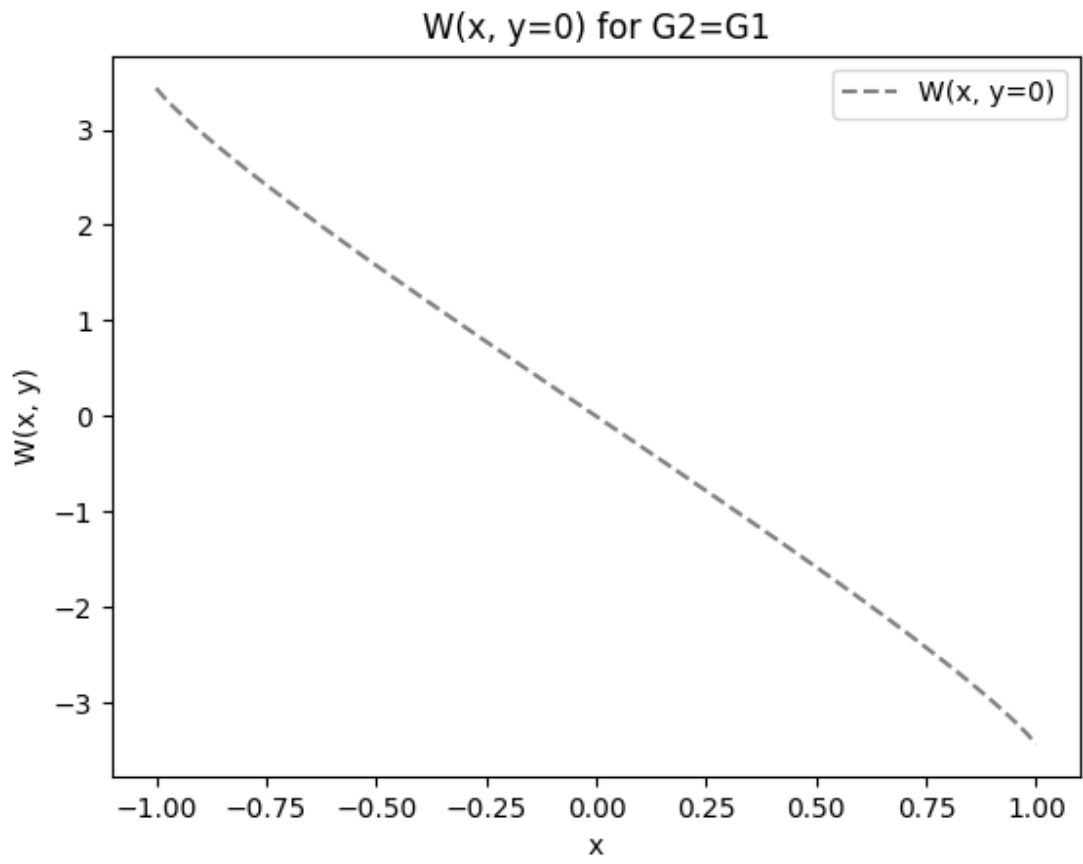


Рис. 1.13. $W : y = 0; G_2 = G_1$

ВИСНОВКИ

У даній роботі було розглянуто антиплоску задачу теорії пружності для півнескінченної смуги, що складається з двох частин з різними модулями зсуву. Основна увага була приділена аналізу цієї задачі за допомогою перетворення Фур'є, а також чисельним методам для підтвердження теоретичних результатів. Використання перетворення Фур'є дозволило спростити двовимірну задачу до одновимірної, що значно полегшило розв'язання. Цей підхід продемонстрував свою ефективність і точність для подібних задач.

Розрахункові формули і результати чисельних розрахунків підтвердили коректність аналітичного розв'язання. Це довело, що методи, використані у роботі, можуть бути успішно застосовані до аналізу інших подібних задач у теорії пружності. Зокрема, розрахункові результати засвідчили, що врахування умов ідеального механічного контакту між різними частинами матеріалу забезпечує неперервність переміщень та напружень при переході з однієї частини смуги до іншої, а також коректність розв'язку на великих відстанях від області навантаження.

Отримані результати мають важливе значення для інженерних задач, зокрема, для моделювання поведінки матеріалів під дією різних видів навантажень. Вони можуть бути корисними у галузях геології та гірничої справи для розуміння процесів стабільності масивів гірських порід, а також у матеріалознавстві для дослідження властивостей композитних матеріалів, що складаються з декількох компонентів з різними механічними характеристиками.

Таким чином, подальші дослідження можуть зосередитися на розширенні даних методів на більш складні геометрії і умови навантаження, що ще більше підвищить їх практичну цінність. Окрім того, можливим напрямком подальших досліджень є врахування нелінійних ефектів та дослідження динамічних задач, що дозволить значно розширити область застосування отриманих результатів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Методичні вказівки до курсу «Математичне моделювання деяких задач механіки та техніки» для студентів 3 курсу спеціальності 6.04030101 «Прикладна математика» (викладачі Процеров Ю.С., Мойсеєнок О.П.). Одеса, 2015, 61 с. (Розміщена на сайті Наукової бібліотеки Одеського національного університету ім. І.І. Мечнікова).
2. Попов Г.Я., Реут В.В., Вайсфельд Н.Д. Навчальний посібник з курсу «Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень». Одеса: Астропринт, 2005, 184 с.
3. Божедарник В.В., Сулім Г.Т. Елементи теорії пружності. Львів: Світ, 1994, 560 с.
4. Можаровський М.С. Теорія пружності, пластичності і повзучості. К: Вища школа, 2002, 312 с.