Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2011. – Т. 16, вип. 16. – С. 62–75

УДК 511.33

З. Ю. Дадаян
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ОБОБЩЕННАЯ ФУНКЦИЯ ПИЛЛАИ

Дадаян З. Ю. Узагальнена функція Піллаі. Вивчається розподіл значень функції S. S. Pillai над кільцем цілих гаусових чисел $\mathbb{Z}[i]$. Знайдені асимптотичні формули для суматорних функцій $\sum\limits_{N(\alpha)\le x}\dfrac{g(\alpha)}{N^a(\alpha)}$, де $a\in\mathbb{R}$.

Ключові слова: асимптотична формула, цілі гаусові числа, мультиплікативна функція.

Дадаян З. Ю. Обобщенная функция Пиллаи. Изучается распределение значений функции S. S. Pillai над кольцом целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}[i]$. Найдены асимптотические формулы для сумматорных функций $\sum\limits_{N(\alpha)\le x}\dfrac{g(\alpha)}{N^a(\alpha)}$, где $a\in\mathbb{R}$.

Ключевые слова: асимптотическая формула, целые гауссовы числа, мультипликативная функция.

Dadayan Z. Yu. Generalized Pillai's function. We study the value distribution of S. S. Pillai function defined over Gaussian integers $\mathbb{Z}[i]$. Some asymptotic formulae for summator functions $\sum\limits_{N(\alpha)\le x}\dfrac{g(\alpha)}{N^a(\alpha)}$, where $a\in\mathbb{R}$, are established.

Key words: asymptotic formula, gaussian integers, multiplicative function.

Введение. В 30-х годах прошлого века индийский математик S. S. Pillai (1901–1950) подробно изучал арифметическую функцию натурального аргумента

$$P(n)=\sum_{k=1}^{n}(k,\ n), \tag{1}$$

позже названную его именем.

Он доказал мультипликативность (1), получил формулы для ее вычисления, показал разложимость ее в произведение Дирихле. Кроме того, обнаружил ряд других нетривиальных свойств.

За последние 10 лет K. A. Broughan и O. Bordelles опубликовали ряд статей со своими результатами, где существенно продвинулись в изучении функции (1). В частности, ими были получены асимптотические формулы для сумматорной функции $\sum\limits_{n\le x}\dfrac{P(n)}{n^a}$, где a — фиксированный вещественный параметр, а $x\to\infty$.

В данной статье исследуется обобщение функции S. S. Pillai над кольцом целых гауссовых чисел.

Обозначения:

$\mathbb{Z}[i]$ – кольцо целых гауссовых чисел;

$N(\alpha)=|\alpha|^2$ – норма целого гауссового α;

$(\alpha,\ \beta)$ – наибольший общий делитель $\alpha,\ \beta\in\mathbb{Z}[i]$;

$\wp$ – простое гауссовое;

$\bar{\varphi}$ – функция Эйлера над $\mathbb{Z}[i]$:

$$\bar{\varphi}(\alpha) = N(\alpha) \prod_{\wp|\alpha}{}' \left(1 - \frac{1}{N(\wp)}\right),$$

где знак «$'$», который иногда будем опускать, означает, что произведение берется по неассоциированным простым делителям α;

Id – тождественная функция: $Id(\alpha) = N(\alpha)$;

$f * h$ – произведение Дирихле функций f и h над $\mathbb{Z}[i]$: $f * h(\alpha) = \sum_{\delta|\alpha}' f(\delta) \cdot h\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)$;

$(f)^{-1} = \frac{1}{f}$ для любой мультипликативной функции f над $\mathbb{Z}[i]$;

символ O_ε означает, что постоянная в символе Ландау $''O''$ может зависеть от параметра ε.

Основные результаты.

1. Функция $g(\alpha)$.

Пусть $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$. Введем в рассмотрение следующую функцию:

$$g(\alpha) = \sum_{\beta\,(mod\,\alpha)}{}' N((\beta,\, \alpha)). \tag{2}$$

Покажем, что функция g мультипликативна, используя определение мультипликативности. Пусть $\alpha = \alpha_1 \cdot \alpha_2,\ (\alpha_1,\, \alpha_2) = 1,\ \alpha_1 \in \mathbb{Z}[i],\ \alpha_2 \in \mathbb{Z}[i]$. Требуется показать, что

$$g(\alpha_1 \cdot \alpha_2) = g(\alpha_1) \cdot g(\alpha_2).$$

Имеем:

$$g(\alpha) = \sum_{\beta\,(mod\,\alpha)}{}' N((\beta, \alpha)) = \sum_{\beta\,(mod\,\alpha_1\cdot\alpha_2)}{}' N((\beta, \alpha_1 \cdot \alpha_2)) =$$

$$= \sum\nolimits_{\beta_1\cdot\,\alpha_2+\beta_2\cdot\,\alpha_1\,(mod\,\alpha_1\cdot\alpha_2)}' N((\beta_1 \cdot \alpha_2 + \beta_2 \cdot \alpha_1, \alpha_1 \cdot \alpha_2)) =$$
$$= \sum\nolimits_{\beta_1\,(mod\,\alpha_1)}' \sum\nolimits_{\beta_2\,(mod\,\alpha_2)}' N((\beta_1 \cdot \alpha_2 + \beta_2 \cdot \alpha_1, \alpha_1 \cdot \alpha_2)) =$$
$$= \sum\nolimits_{\beta_1\,(mod\,\alpha_1)}' \sum\nolimits_{\beta_2\,(mod\,\alpha_2)}' N((\beta_1 \cdot \alpha_2 + \beta_2 \cdot \alpha_1, \alpha_1) \cdot (\beta_1 \cdot \alpha_2 + \beta_2 \cdot \alpha_1, \alpha_2)) =$$
$$= \sum\nolimits_{\beta_1\,(mod\,\alpha_1)}' \sum\nolimits_{\beta_2\,(mod\,\alpha_2)}' N((\beta_1 \cdot \alpha_2 + \beta_2 \cdot \alpha_1, \alpha_1)) \cdot N((\beta_1 \cdot \alpha_2 + \beta_2 \cdot \alpha_1, \alpha_2)) =$$
$$= \sum\nolimits_{\beta_1\,(mod\,\alpha_1)}' \sum\nolimits_{\beta_2\,(mod\,\alpha_2)}' N((\beta_1 \cdot \alpha_2, \alpha_1)) \cdot N((\beta_2 \cdot \alpha_1, \alpha_2)) =$$

$$= \sum\nolimits_{\beta_1\,(mod\,\alpha_1)}' \sum\nolimits_{\beta_2\,(mod\,\alpha_2)}' N((\beta_1, \alpha_1)) \cdot N((\beta_2, \alpha_2)) =$$
$$= \left(\sum\nolimits_{\beta_1\,(mod\,\alpha_1)}' N((\beta_1, \alpha_1))\right) \cdot \left(\sum\nolimits_{\beta_2\,(mod\,\alpha_2)}' N((\beta_2, \alpha_2))\right) = g(\alpha_1) \cdot g(\alpha_2).$$

Лемма 1. *Пусть $\wp$ — простое гауссово, $m \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$g(\wp^m) = (m+1) \cdot N\left(\wp^m\right) - m \cdot N\left(\wp^{m-1}\right). \tag{3}$$

Доказательство. Нетрудно заметить, что

$$\begin{gathered} g(\wp^m) = \bar\varphi(\wp^m)\cdot 1 + \bar\varphi(\wp^{m-1})\cdot N(\wp) + \bar\varphi(\wp^{m-2})\cdot N(\wp^2) + ... + \\ + ... + \bar\varphi(\wp)\cdot N(\wp^{m-1}) + 1\cdot N(\wp^m) = \\ = N(\wp^m) - N(\wp^{m-1}) + \left(N(\wp^{m-1}) - N(\wp^{m-2})\right)\cdot N(\wp) + \\ + \left(N(\wp^{m-2}) - N(\wp^{m-3})\right)\cdot N(\wp^2) + ... + \\ +(N(\wp)-1)\cdot N(\wp^{m-1}) + N(\wp^m) = (m+1)\cdot N(\wp^m) - m\cdot N(\wp^{m-1}). \end{gathered}$$

Следствие 1. *Пусть* $\alpha = \wp_1^{m_1}\cdot\wp_2^{m_2}\cdot ... \cdot\wp_k^{m_k} \in \mathbb{Z}[i]$. *Тогда*

$$g(\alpha) = \prod_{j=1}^{k}\left\{(m_j+1)\cdot N\left(\wp_j^{m_j}\right) - m_j\cdot N\left(\wp_j^{m_j-1}\right)\right\}. \qquad (4)$$

Следствие 2. *Пусть* $\alpha\in\mathbb{Z}[i]$. *Тогда*

$$g(\alpha) = \bar\varphi * Id(\alpha).$$

Следствие 3. *Пусть* $\alpha\in\mathbb{Z}[i]$. *Тогда* $g(\alpha) = (\mu * Id\cdot\tau)(\alpha)$.

Доказательство. Это утверждение следует из предыдущего в силу ассоциативности произведения Дирихле.

Лемма 2. *Имеет место следующая оценка:*

$$\max\left\{2 - \frac{1}{N(\alpha)}, \left(\frac{3}{2}\right)^{\omega(\alpha)}\right\} \le \frac{g(\alpha)}{N(\alpha)} \le 12\cdot\left(\frac{\log N(\alpha)}{\omega(\alpha)}\right)^{\omega(\alpha)}, \qquad (5)$$

где $\omega(\alpha)$ *– количество различных неассоциированных простых делителей* $\alpha\in$ $\in\mathbb{Z}[i]$.

Доказательство. Пусть $\alpha = \prod_{j=1}^{k}\wp_j^{m_j}$, $g(\alpha) = \sum'_{\beta\,(mod\,\alpha)} N((\beta,\alpha))$. Здесь β по модулю α будет принимать ровно $N(\alpha)$ значений, одним из которых будет являться само α. Значит, $g(\alpha)\ge (N(\alpha)-1)\cdot 1 + 1\cdot N(\alpha) = 2\cdot N(\alpha) - 1$, откуда

$$\frac{g(\alpha)}{N(\alpha)} \ge 2 - \frac{1}{N(\alpha)}.$$

С другой стороны, с учетом мультипликативности нормы, следствия 1, а также с учетом того, что для всех $j=\overline{1,k}$ $m_j\ge 1$, $N(\wp_j)\ge 2$, имеем:
$\frac{g(\alpha)}{N(\alpha)} = \prod_{j=1}^{k}\left\{(m_j+1) - \frac{m_j}{N(\wp_j)}\right\} \ge \prod_{j=1}^{k}\left\{(1+1) - \frac{1}{N(\wp_j)}\right\} \ge \left(\frac{3}{2}\right)^k$, где $k =$ $=\omega(\alpha)$.

Итак, $\frac{g(\alpha)}{N(\alpha)} \ge 2 - \frac{1}{N(\alpha)}$ и $\frac{g(\alpha)}{N(\alpha)} \ge \left(\frac{3}{2}\right)^k$. Следовательно,

$$\max\left\{2 - \frac{1}{N(\alpha)}, \left(\frac{3}{2}\right)^{\omega(\alpha)}\right\} \le \frac{g(\alpha)}{N(\alpha)}.$$

Докажем теперь вторую часть неравенства. Для некоторого простого $\wp\in\mathbb{Z}[i]$ и натурального m имеем

$$\frac{g(\wp^m)}{N(\wp^m)} = m + 1 - \frac{m}{N(\wp)} = m\cdot\left(1 - \frac{1}{N(\wp)}\right) + 1 \le w\cdot m\cdot\log N(\wp), \qquad (6)$$

где $w = \begin{cases} 3, \ if \ N(\wp) = 2 \\ 2, \ if \ N(\wp) = 5 \\ 1, \ if \ N(\wp) \geq 9 \end{cases}$.

Последнее неравенство проверяется непосредственно. Хотя обосновать его можно легко, если проанализировать вещественную функцию

$f(x; m, c) = c \cdot m \cdot \log x - m \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right) - 1$, где $m \in \mathbb{N}$ — параметр, $c \in \mathbb{R}$ — константа.

Рассмотрим теперь следующую задачу Лагранжа:

$$f = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k \ \to \max_{x_i,\, i=1,\ldots,k}$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = s, \tag{7}$$

$$x_i \geq 1 \ \forall\, i = \overline{1, k.}$$

Нетрудно показать, что решениями (7) будут $x_i^* = \frac{s}{k}$ $(i = 1, \ldots, k)$, при этом $f^* = \left(\frac{s}{k}\right)^k$.

Вернемся к доказательству неравенства. Пусть в разложении α все $N(\wp_j) \geq$ ≥ 9. Тогда с учетом (6) имеем:

$$\frac{g(\alpha)}{N(\alpha)} \leq \prod_{j=1}^{k} m_j \cdot \log N(\wp_j) = \prod_{j=1}^{k} \log N(\wp_j^{m_j}),$$

но с учетом (7) $\prod_{j=1}^{k} \log N(\wp_j^{m_j}) \leq \left(\frac{\log N(\alpha)}{k}\right)^k$, поэтому $\frac{g(\alpha)}{N(\alpha)} \leq \left(\frac{\log N(\alpha)}{\omega(\alpha)}\right)^{\omega(\alpha)}$. Пусть теперь в разложение α входит $\wp_1 = 1 + i$ в степени m_1, $\wp_2 = 1 + 2i$ в степени m_2, $\wp_3 = 1 - 2i$ в степени m_3. Тогда в этом случае с учетом (6) и (7)

$$\frac{g(\alpha)}{N(\alpha)} \leq (3 \cdot m_1 \cdot \log N(\wp_1)) \cdot (2 \cdot m_2 \cdot \log N(\wp_2)) \cdot (2 \cdot m_3 \cdot \log N(\wp_3)) \cdot$$

$$\cdot \prod_{N(\wp_j) \geq 9} m_j \cdot \log N(\wp_j) = 12 \cdot \prod_{j=1}^{k} m_j \cdot \log N(\wp_j) \leq 12 \cdot \left(\frac{\log N(\alpha)}{\omega(\alpha)}\right)^{\omega(\alpha)}.$$

Заметим, что $\frac{g(\alpha)}{N(\alpha)} \leq c \cdot \left(\frac{\log N(\alpha)}{\omega(\alpha)}\right)^{\omega(\alpha)}$, где константа $c = c(\alpha)$ принимает значение из множества $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

Лемма 3. *Функция $g(\alpha)$ для любого $\alpha \neq 0 \in \mathbb{Z}[i]$ удовлетворяет соотношению*

$$\sum_{\delta | \alpha} g(\delta) = N(\alpha) \cdot \tau(\alpha).$$

Доказательство. Пусть $\alpha = \wp_1^{m_1} \cdot \wp_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot \wp_k^{m_k} \in \mathbb{Z}[i]$. Тогда

$$\sum_{\delta|\alpha} g(\delta) = \sum_{\delta|\wp_1^{m_1}\cdot\wp_2^{m_2}\cdot\ldots\cdot\wp_k^{m_k}} g(\delta) = \prod_{j=1}^{k}\left(\sum_{\delta|\wp_j^{m_j}} g(\delta)\right) =$$

$$= \prod_{j=1}^{k}\left(1 + \sum_{l=1}^{m_j}\left((l+1)\cdot N(\wp_j^l) - l\cdot N(\wp_j^{l-1})\right)\right) =$$

$$= \prod_{j=1}^{k}\left(1 + 2\cdot N(\wp_j) - 1 + 3\cdot N(\wp_j^2) - 2\cdot N(\wp_j) + 4\cdot N(\wp_j^3) - 3\cdot N(\wp_j^2) + \ldots\right.$$

$$\left. + (m_j+1)\cdot N(\wp_j^{m_j}) - m_j\cdot N(\wp_j^{m_j-1})\right) = \prod_{j=1}^{k}(m_j+1)\cdot N(\wp_j^{m_j}) = N(\alpha)\cdot\tau(\alpha).$$

Заметим, что из $Id * Id(\alpha) = N(\alpha)\cdot\tau(\alpha)$ и леммы 3 следует, что

$$Id * Id(\alpha) = \sum_{\delta|\alpha} g(\delta).$$

2. Среднее значение $g(\alpha)$.

В этой секции мы строим асимптотическую формулу для $\sum_{N(\alpha)\le x} g(\alpha)$.

Заметим, что

$$g(\alpha) = {\sum_{\delta|\alpha}}' \bar{\varphi}(\delta)\cdot N\left(\frac{\alpha}{\delta}\right) \le {\sum_{\delta|\alpha}}' N(\delta)\cdot N\left(\frac{\alpha}{\delta}\right) =$$
$$= {\sum_{\delta|\alpha}}' N(\alpha) = N(\alpha)\cdot\tau(\alpha) = N(\alpha)\cdot O_\varepsilon\left(N^\varepsilon(\alpha)\right) = O_\varepsilon\left(N^{1+\varepsilon}(\alpha)\right),$$

где $\varepsilon > 0$ – произвольное малое число.

Рассмотрим функцию $Z(s) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}[i]} \frac{1}{N^s(\alpha)}$, где $s \in \mathbb{C},\ Res > 1$. Она называется дзета-функцией Дедекинда поля гауссовых чисел $\mathbb{Q}(i)$.

Ее квадрат является производящим рядом для функции делителей $\tau(\alpha)$:

$$Z^2(s) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}[i]} \frac{\tau(\alpha)}{N^s(\alpha)}. \qquad (8)$$

Лай Дык Тхинь в [4] показал, что

$$\sum_{N(\alpha)\le x} \tau(\alpha) = \pi^2\cdot x\cdot\log x + c\cdot x + O\left(x^{\theta+\varepsilon}\right), \qquad (9)$$

где $\theta \le \frac{1}{3},\ c = 2\cdot\pi^2\cdot C - \pi^2 + 8\cdot\pi\cdot L'(1,\ \chi_4),\ C$ – постоянная Эйлера.

Лемма 4. *Для всех действительных $x > 1$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\sum_{N(\alpha)\le x} N(\alpha)\cdot\tau(\alpha) = -\frac{\pi^2\cdot x^2\cdot\log x}{2} + \frac{3\cdot\pi^2\cdot x^2}{4} + c\cdot x^2 + O_\varepsilon\left(x^{1+\theta+\varepsilon}\right).$$

Доказательство. Поскольку $Z^2(s) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}[i]} \frac{\tau(\alpha)}{N^s(\alpha)} = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}[i]} \frac{N(\alpha)\cdot\tau(\alpha)}{N^{s+1}(\alpha)}$, то по формуле Перрона выводим для $d > 2$

$$\sum_{N(\alpha)\le x} N(\alpha)\cdot\tau(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{d-i\infty}^{d+i\infty} Z^2(s-1)\cdot\frac{x^s}{s}ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{d-iT}^{d+iT} Z^2(s-1)\cdot\frac{x^s}{s}ds + O\left(\frac{x^d}{T\cdot(d-1)^2}\right) =$$

$$= \frac{x}{2\pi i}\cdot\int_{d-1-iT}^{d-1+iT} Z^2(s)\cdot\frac{x^s}{s}ds - \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{d-1-iT}^{d-1+iT} Z^2(s)\cdot\frac{x^{s+1}}{s\cdot(s+1)}ds +$$

$$+O\left(\frac{x^d}{T\cdot(d-2)^2}\right).$$

Первый интеграл оценен в работе Лай Дык Тхиня [4] как $O\left(x^{1-\varepsilon}\cdot T^{2+\varepsilon}\right)$.

Второй интеграл (после перенесения контура интегрирования на прямую $Res = -\varepsilon$) имеет оценку

$$x\cdot\underset{s=1}{res}\left(Z^2(s)\cdot\frac{x^s}{s\cdot(s+1)}\right) + x\cdot\underset{s=0}{res}\left(Z^2(s)\cdot\frac{x^s}{s\cdot(s+1)}\right) + O\left(T^{1+\varepsilon}\right) =$$

$$= Z^2(0)\cdot x + O\left(T^{1+\varepsilon}\right) + \frac{\pi^2\cdot x^2\cdot\log x}{2} - \frac{3\cdot\pi^2\cdot x^2}{4} + c\cdot x^2.$$

Поэтому при $T = x^{\frac{2}{3}}$ окончательно получаем утверждение леммы.

Лемма 5. *Для любого вещественного $x > 1$ имеет место формула*

$$\sum_{N(\alpha)\le x} g(\alpha) = \sum_{N(\beta)\le x}\mu(\beta)\cdot\sum_{N(\gamma)\le\frac{x}{N(\beta)}} Id(\gamma)\cdot\tau(\gamma).$$

Доказательство. По следствию 3

$$g(\alpha) = \sum_{\beta|\alpha}\mu(\beta)\cdot Id\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\cdot\tau\left(\frac{\alpha}{\beta}\right).$$

Тогда

$$\sum_{N(\alpha)\le x} g(\alpha) = \sum_{N(\alpha)\le x}\sum_{\beta|\alpha}\mu(\beta)\cdot Id\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\cdot\tau\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) =$$

$$= \sum_{N(\beta\cdot\gamma)\le x}\mu(\beta)\cdot Id(\gamma)\cdot\tau(\gamma) =$$

$$= \sum_{N(\beta)\cdot N(\gamma)\le x}\mu(\beta)\cdot Id(\gamma)\cdot\tau(\gamma) = \sum_{N(\beta)\le x}\mu(\beta)\cdot\sum_{N(\gamma)\le\frac{x}{N(\beta)}} Id(\gamma)\cdot\tau(\gamma).$$

Теорема 1. *При $x \to \infty$ имеет место оценка*

$$\sum_{N(\alpha)\le x}{}' g(\alpha) = x^2 \cdot \left\{ \left(-\frac{\pi^2}{2} \cdot \log x + c + \frac{3\pi^2}{4} \right) \cdot \frac{1}{Z(2)} + \frac{\pi^2 \cdot Z'(2)}{2 \cdot Z^2(2)} \right\} + O_\varepsilon \left(x^{1+\theta+\varepsilon} \right),$$

где θ определено в лемме 4, $\varepsilon > 0$ – произвольное малое.

Доказательство. Применение леммы 5 дает

$$\sum_{N(\alpha)\le x} g(\alpha) = \sum_{N(\beta)\le x} \mu(\beta) \cdot \sum_{N(\gamma)\le \frac{x}{N(\beta)}} Id(\gamma) \cdot \tau(\gamma) =$$

$$= \sum_{N(\beta)\le x} \mu(\beta) \cdot \sum_{N(\gamma)\le \frac{x}{N(\beta)}} N(\gamma) \cdot \tau(\gamma) =$$

$$= \pi^2 \cdot x^2 \cdot \sum_{N(\beta)\le x} \frac{\mu(\beta)}{N^2(\beta)} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \log x + \frac{1}{2} \cdot \log N(\beta) \right) +$$

$$+ x^2 \cdot \left(c + \frac{3\pi^2}{4} \right) \cdot \sum_{N(\beta)\le x} \frac{\mu(\beta)}{N^2(\beta)} + \sum_{N(\beta)\le x} \mu(\beta) \cdot O_\varepsilon \left(\frac{x^{1+\theta+\varepsilon}}{(N(\beta))^{1+\theta+\varepsilon}} \right) =$$

$$= \left(-\frac{\pi^2 \cdot x^2 \cdot \log x}{2} + x^2 \cdot \left(c + \frac{3\pi^2}{4} \right) \right) \cdot \sum_{N(\beta)\le x} \frac{\mu(\beta)}{N^2(\beta)} +$$

$$+ \frac{\pi^2 \cdot x^2}{2} \cdot \sum_{N(\beta)\le x} \frac{\mu(\beta) \cdot \log N(\beta)}{N^2(\beta)} + O_\varepsilon \left(x^{1+\theta+\varepsilon} \cdot \sum_{N(\beta)\le x} \frac{|\mu(\beta)|}{(N(\beta))^{1+\theta+\varepsilon}} \right) =$$

$$= x^2 \cdot \left(-\frac{\pi^2 \cdot \log x}{2} + c + \frac{3\pi^2}{4} \right) \cdot \sum_{\beta\in\mathbb{Z}[i]} \frac{\mu(\beta)}{N^2(\beta)} + \frac{\pi^2 \cdot x^2}{2} \cdot \sum_{\beta\in\mathbb{Z}[i]} \frac{\mu(\beta) \cdot \log N(\beta)}{N^2(\beta)} +$$

$$+ O\left(\frac{\log x}{x} \right) + O\left(x^{1+\theta+\varepsilon} \right) =$$

$$= \frac{x^2}{Z(2)} \cdot \left(-\frac{\pi^2 \cdot \log x}{2} + c + \frac{3\pi^2}{4} \right) + \frac{\pi^2 \cdot x^2 \cdot Z'(2)}{2 \cdot Z^2(2)} + O\left(x^{1+\theta+\varepsilon} \right).$$

Замечание 1. *В рациональном случае O. Bordelles получил асимптотическую формулу со значением θ_0, которое соответствует проблеме делителей над $\mathbb{Z}$ (согласно результатам M. N. Huxley [4] $\theta_0 = \frac{131}{416}$).*

3. Среднее значение $G_a(x)$.

Обозначим для $a \in \mathbb{R}$ через

$$G_a(x) = \sum_{N(\alpha)\le x}{}' \frac{g(\alpha)}{N^a(\alpha)}\,. \tag{10}$$

Рассмотрим ряд

$$G(s) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}[i]} \frac{g(\alpha)}{N^s(\alpha)},\ \ (Re(s) > 2). \tag{11}$$

Используя следствие 2 и представление функции $\bar{\varphi}$ как произведение Дирихле тождественной функции и функции Мебиуса, получим для $Res > 2$:

$$G(s) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}[i]} \tfrac{g(\alpha)}{N^s(\alpha)} = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}[i]} \tfrac{\sum_{\delta|\alpha} \bar{\varphi}(\delta)\cdot N\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)}{N^s(\alpha)} = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}[i]} \tfrac{\sum_{\delta\cdot\gamma=\alpha} \bar{\varphi}(\delta)\cdot N(\gamma)}{N^s(\alpha)} =$$
$$= \left(\sum_{\delta\in\mathbb{Z}[i]} \tfrac{\bar{\varphi}(\delta)}{N^s(\delta)}\right)\cdot\left(\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}[i]} \tfrac{N(\gamma)}{N^s(\gamma)}\right) = Z(s-1)\cdot\left(\sum_{\delta\in\mathbb{Z}[i]} \tfrac{\bar{\varphi}(\delta)}{N^s(\delta)}\right) =$$

$$= Z(s-1)\cdot\left(\sum_{\delta\in\mathbb{Z}[i]} \frac{\sum_{\beta|\delta}\mu(\beta)\cdot N\left(\frac{\delta}{\beta}\right)}{N^s(\delta)}\right) = Z^2(s-1)\cdot\sum_{\beta\in\mathbb{Z}[i]} \frac{\mu(\beta)}{N^s(\beta)} = \frac{Z^2(s-1)}{Z(s)}.$$

Очевидно, что $G(s)$ имеет полюсы только в точке $s = 2$ и в тех точках, где $Z(s) = 0$, причем в точке $s = 2$ полюс второго порядка.

Известно, что для достаточно больших x

$$\sum_{N(\alpha)\le x} 1 = \pi\cdot x + O\left(x^{\frac{1}{3}}\right), \tag{12}$$

$$\sum_{N(\alpha)\le x} N(\alpha) = \frac{\pi\cdot x^2}{2} + O\left(x^{\frac{4}{3}}\right). \tag{13}$$

$$\sum_{N(\alpha)\le x} \frac{1}{N(\alpha)} = \pi\log x + C_0 + O\left(x^{-\frac{2}{3}}\right), \tag{14}$$

где C_0 – вычислимая постоянная.

Лемма 6. $\forall\, x > 1\ \sum'_{N(\alpha)\le x} \frac{\bar{\varphi}(\alpha)}{N(\alpha)} = \frac{\pi\cdot x}{4Z(2)} + O\left(x^{\frac{1}{3}}\right)$.

Доказательство. Ясно, что $\frac{\bar{\varphi}(\alpha)}{N(\alpha)} = \sum'_{\delta|\alpha} \frac{\mu(\delta)}{N(\delta)}$, поэтому

$$\sum{}'_{N(\alpha)\le x} \tfrac{\bar{\varphi}(\alpha)}{N(\alpha)} = \sum{}'_{N(\alpha)\le x}\sum{}'_{\delta|\alpha} \tfrac{\mu(\delta)}{N(\delta)} = \sum{}'_{N(\delta)\le x} \tfrac{\mu(\delta)}{N(\delta)}\cdot\sum{}'_{N(\gamma)\le\frac{x}{N(\delta)}} 1 =$$
$$= \sum{}'_{N(\delta)\le x} \tfrac{\mu(\delta)}{N(\delta)}\cdot\left\{\pi\cdot\tfrac{x}{4N(\delta)} + O\left(\left(\tfrac{x}{N(\delta)}\right)^{\frac{1}{3}}\right)\right\} = \tfrac{\pi\cdot x}{4}\cdot\sum{}'_{N(\delta)\le x} \tfrac{\mu(\delta)}{N^2(\delta)} +$$

$$+O\left(x^{\frac{1}{3}}\cdot\sum_{N(\delta)\le x}{}' \frac{|\mu(\delta)|}{(N(\delta))^{\frac{4}{3}}}\right) = \frac{\pi\cdot x}{4Z(2)} + O\left(\frac{1}{x}\right) + O\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{\pi\cdot x}{4Z(2)} + O\left(x^{\frac{1}{3}}\right).$$

Лемма 7. $\forall\ x>1\ \sum_{N(\alpha)\le x}' \bar{\varphi}(\alpha)=\frac{\pi x^2}{8\cdot Z(2)}+O\left(x^{\frac{4}{3}}\right).$

Доказательство. Имеем

$$\sum_{N(\alpha)\le x}' \bar{\varphi}(\alpha)=\sum_{N(\alpha)\le x}'\sum_{\delta|\alpha}'\mu(\delta)\cdot N\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)=\sum_{N(\delta)\le x}'\mu(\delta)\cdot\sum_{N(\gamma)\le\frac{x}{N(\delta)}}' N(\gamma)=$$

$$=\sum_{N(\delta)\le x}'\mu(\delta)\cdot\left\{\frac{\pi x^2}{8\cdot N^2(\delta)}+O\left(\left(\frac{x}{N(\delta)}\right)^{\frac{4}{3}}\right)\right\}=$$

$$=\frac{\pi x^2}{8}\cdot\sum_{N(\delta)\le x}'\frac{\mu(\delta)}{N^2(\delta)}+O\left(x^{\frac{4}{3}}\cdot\sum_{N(\delta)\le x}'\frac{|\mu(\delta)|}{(N(\delta))^{\frac{4}{3}}}\right)=$$

$$=\frac{\pi x^2}{8\cdot Z(2)}+O\left(x^2\cdot\sum_{N(\delta)>x}'\frac{1}{N^{\frac{4}{3}}(\delta)}\right)=\frac{\pi x^2}{8\cdot Z(2)}+O\left(x^{\frac{4}{3}}\right).$$

Лемма 8. $\forall\ x>1\ \sum_{N(\alpha)\le x} g(\alpha)=\frac{\pi^2\cdot x^2\cdot\log x}{8\cdot Z(2)}+O\left(x^2\right).$

Доказательство. Рассмотрим

$$\sum_{N(\alpha)\le x}' g(\alpha)=\sum_{N(\alpha)\le x}'\sum_{\delta|\alpha}' N(\delta)\cdot\bar{\varphi}\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)=\sum_{N(\delta)\le x}' N(\delta)\cdot\sum_{N(\gamma)\le\frac{x}{N(\delta)}}'\bar{\varphi}(\gamma)=$$

$$=\sum_{N(\delta)\le x}' N(\delta)\cdot\left\{\frac{\pi x^2}{8\cdot Z(2)\cdot N^2(\delta)}+O\left(\left(\frac{x}{N(\delta)}\right)^{\frac{4}{3}}\right)\right\}=\frac{\pi x^2}{8\cdot Z(2)}\cdot\sum_{N(\delta)\le x}'\frac{1}{N(\delta)}+$$
$$+O\left(x^{\frac{4}{3}}\cdot\sum_{N(\delta)\le x}' N^{-\frac{1}{3}}(\delta)\right)=\frac{\pi^2\cdot x^2\cdot\log x}{8\cdot Z(2)}+O(x^{\frac{4}{3}})+O\left(x^2\right)=$$
$$=\frac{\pi^2\cdot x^2\cdot\log x}{8\cdot Z(2)}+O\left(x^2\right).$$

Лемма 9. *Для любых вещественных a и $x>1$ справедлива формула*

$$G_a(x)=\sum_{N(\alpha)\le x}(N(\alpha))^{1-a}\cdot\Phi_a\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right),$$

где $\Phi_a(x)=\sum_{N(\alpha)\le x}\frac{\bar{\varphi}(\alpha)}{N^a(\alpha)}$.

Доказательство.

$$G_a(x)\equiv\sum_{N(\alpha)\le x}\frac{g(\alpha)}{N^a(\alpha)}=\sum_{N(\alpha)\le x}N^{-a}(\alpha)\cdot\sum_{\delta|\alpha}\bar{\varphi}(\delta)\cdot\frac{N(\alpha)}{N(\delta)}=$$

$$= \sum_{N(\alpha)\le x} \sum_{\delta|\alpha} \bar{\varphi}(\delta) \cdot \frac{N^{1-a}(\alpha)}{N(\delta)} = \sum_{N(\alpha)\le x} \sum_{\delta|\alpha} \frac{\bar{\varphi}(\delta)}{N^a(\delta)} \cdot \frac{N^{1-a}(\alpha)}{N^{1-a}(\delta)} =$$

$$= \sum_{N(\alpha)\le x} \sum_{\delta|\alpha} \frac{\bar{\varphi}(\delta)}{N^a(\delta)} \cdot N^{1-a}\left(\frac{\alpha}{\delta}\right) =$$

$$= \sum_{N(\gamma)\le x} N^{1-a}(\gamma) \cdot \sum_{N(\delta)\le \frac{x}{N(\gamma)}} \frac{\bar{\varphi}(\delta)}{N^a(\delta)} = \sum_{N(\gamma)\le x} N^{1-a}(\gamma) \cdot \Phi_a\left(\frac{x}{N(\gamma)}\right).$$

Лемма 10. *Пусть a, b, x — такие положительные вещественные числа, что $a\cdot b = x$. Обозначим через $F(x) = \sum_{N(\alpha)\le x} f(\alpha)$, $R(x) = \sum_{N(\alpha)\le x} r(\alpha)$, $H(x) = \sum_{N(\alpha)\le x} (f * r)(\alpha)$. Тогда справедливо соотношение*

$$H(x) \equiv \sum_{N(\alpha)\le x} \sum_{\delta|\alpha} f(\delta) \cdot r\left(\frac{\alpha}{\delta}\right) =$$

$$= \sum_{N(\alpha)\le a} f(\alpha) \cdot R\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right) + \sum_{N(\alpha)\le b} r(\alpha) \cdot F\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right) - F(a) \cdot R(b).$$

Доказательство. Доказательство станет очевидным, если утверждение леммы записать в таком виде:

$$\sum_{N(\delta)\cdot N(\gamma)\le x} f(\delta) \cdot r(\gamma) = \sum_{N(\alpha)\le a} f(\alpha) \cdot \sum_{N(\delta)\le \frac{a\cdot b}{N(\alpha)}} r(\delta) + \sum_{N(\alpha)\le b} r(\alpha) \cdot \sum_{N(\delta)\le \frac{a\cdot b}{N(\alpha)}} f(\delta) -$$

$$- \sum_{N(\alpha)\le a} \sum_{N(\beta)\le b} f(\alpha) \cdot r(\beta).$$

Действительно, последнее является тождеством, так как в правой и в левой ее частях суммируется одна и та же функция в одних и тех же точках.

Лемма 11. $\forall\ x > 1$ $\sum'_{N(\alpha)\le x} \frac{\bar{\varphi}(\alpha)}{N^2(\alpha)} = \frac{\pi \log x + C_0}{4Z(??)} - \frac{\pi Z'(2)}{4Z^2(2)} + O\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)$.

Доказательство.

$$\sum_{N(\alpha)\le x}{}' \frac{\bar{\varphi}(\alpha)}{N^2(\alpha)} = \sum_{N(\alpha)\le x}{}' \frac{\sum'_{\delta|\alpha} \mu(\delta) \cdot N\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)}{N^2(\alpha)} = \sum_{N(\alpha)\le x}{}' \sum_{\delta|\alpha}{}' \frac{\mu(\delta)}{N(\delta) \cdot N(\alpha)} =$$

$$= \sum_{N(\alpha)\le x}{}' \sum_{\delta|\alpha}{}' \frac{\mu(\delta)}{N^2(\delta) \cdot \frac{N(\alpha)}{N(\delta)}} = \sum_{N(\delta)\le x}{}' \frac{\mu(\delta)}{N^2(\delta)} \cdot \sum_{N(\gamma)\le \frac{x}{N(\delta)}}{}' \frac{1}{N(\gamma)} =$$

$$= \sum_{N(\delta)\le x}{}' \frac{\mu(\delta)}{N^2(\delta)} \cdot \left\{ \frac{\pi}{4} \cdot \log \frac{x}{N(\delta)} + \frac{C_0}{4} + O\left(\left(\frac{N(\delta)}{x} \right)^{\frac{2}{3}} \right) \right\} =$$

$$= \sum_{N(\delta)\le x}{}' \frac{\mu(\delta)}{N^2(\delta)} \cdot \left\{ \frac{\pi \log x - \pi \log N(\delta)}{4} + \frac{C_0}{4} + O\left(\left(\frac{N(\delta)}{x} \right)^{\frac{2}{3}} \right) \right\} =$$

$$= \frac{\pi \log x + C_0}{4Z(2)} + O\left(\frac{\log x}{x^2} \right) - \frac{\pi Z'(2)}{4Z^2(2)} + O\left(\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \cdot \sum_{N(\delta)\le x}{}' \frac{|\mu(\delta)|}{N^{\frac{4}{3}}(\delta)} \right) =$$

$$= \frac{\pi \log x + C_0}{4Z(2)} - \frac{\pi Z'(2)}{4Z^2(2)} + O\left(\frac{\log x}{x^2} \right) + O\left(\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \cdot \sum_{N(\delta)\le x}{}' \frac{1}{N^{\frac{4}{3}}(\delta)} \right) =$$

$$= \frac{\pi \log x + C_0}{4Z(2)} - \frac{\pi Z'(2)}{4Z^2(2)} + O\left(x^{-\frac{2}{3}} \right).$$

Теорема 2. *Для любого вещественного $x > 1$ имеет место формула*

$$G_0(x) \equiv \sum_{N(\alpha)\le x}{}' g(\alpha) = \frac{\pi^2 x^2 \cdot \log x}{32 \cdot Z(2)} + O\left(x^2\right).$$

Доказательство.

$$G_0(x) = \sum_{N(\alpha)\le x}{}' N(\alpha) \cdot \Phi_0 \left(\frac{x}{N(\alpha)} \right) = \sum_{N(\alpha)\le x}{}' N(\alpha) \cdot \sum_{N(\delta)\le \frac{x}{N(\alpha)}}{}' \bar{\varphi}(\delta).$$

Применим лемму 10: $a = b = \sqrt{x}$, $F(x) = \sum'_{N(\alpha)\le x} \bar{\varphi}(\alpha) = \frac{\pi x^2}{8\cdot Z(2)} + O(x^{\frac{4}{3}})$, $R(x) = \sum'_{N(\alpha)\le x} N(\alpha) = \frac{\pi x^2}{8} + O(x^{\frac{4}{3}})$. Имеем

$$G_0(x) = \sum_{N(\alpha)\le \sqrt{x}}{}' \bar{\varphi}(\alpha) \cdot R\left(\frac{x}{N(\alpha)} \right) + \sum_{N(\alpha)\le \sqrt{x}}{}' N(\alpha) \cdot F\left(\frac{x}{N(\alpha)} \right) -$$

$$-F\left(\sqrt{x}\right) \cdot R\left(\sqrt{x}\right) =$$

$$= \sum_{N(\alpha)\le \sqrt{x}}{}' \bar{\varphi}(\alpha) \cdot \left\{ \left(\frac{\sqrt{\pi} x}{\sqrt{8} \cdot N(\alpha)} \right)^2 + O\left(\left(\frac{x}{N(\alpha)} \right)^{\frac{4}{3}} \right) \right\} +$$

$$+\sum_{N(\alpha)\le\sqrt{x}}{}^{'} N(\alpha)\cdot\left\{\frac{\pi x^2}{8\cdot Z(2)\cdot N^2(\alpha)}+\right.$$

$$\left.+O\left(\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right)^{\frac{4}{3}}\right)\right\}-\left\{\frac{\pi x}{8\cdot Z(2)}+O\left(x^{\frac{2}{3}}\right)\right\}\cdot\left\{\frac{\pi x}{8}+O\left(x^{\frac{2}{3}}\right)\right\}=$$

$$=\frac{\pi x^2}{8}\cdot\sum_{N(\alpha)\le\sqrt{x}}{}^{'}\frac{\bar\varphi(\alpha)}{N^2(\alpha)}+O\left(x^{\frac{4}{3}}\cdot\sum_{N(\alpha)\le\sqrt{x}}{}^{'}\frac{\bar\varphi(\alpha)}{N^{\frac{4}{3}}(\alpha)}\right)+\frac{\pi x^2}{8\cdot Z(2)}\cdot\sum_{N(\alpha)\le\sqrt{x}}{}^{'}\frac{1}{N(\alpha)}+$$

$$+O\left(x^{\frac{4}{3}}\cdot\sum_{N(\alpha)\le\sqrt{x}}{}^{'}\frac{1}{N^{\frac{1}{3}}(\alpha)}\right)-\frac{\pi^2x^2}{64\cdot Z(2)}+O\left(x^{\frac{5}{3}}\right)+O\left(x^{\frac{4}{3}}\right)=$$

$$=\frac{\pi^2x^2\cdot\log x}{64\cdot Z(2)}+\frac{\pi\cdot C_0\cdot x^2}{32\cdot Z(2)}-\frac{\pi^2\cdot Z'(2)\cdot x^2}{32\cdot Z^2(2)}+O\left(x^2\right)+$$

$$+\frac{\pi^2x^2\cdot\log x}{64\cdot Z(2)}+\frac{\pi\cdot C_0\cdot x^2}{32\cdot Z(2)}-\frac{\pi^2\cdot x^2}{64\cdot Z(2)}=\frac{\pi^2x^2\cdot\log x}{32\cdot Z(2)}+O\left(x^2\right).$$

Теорема 3. *Для любого достаточно большого x имеет место оценка*

$$G_1(x)\equiv\sum_{N(\alpha)\le x}{}^{'}\frac{g(\alpha)}{N(\alpha)}=\frac{\pi^2x\log x}{16Z(2)}+\frac{\pi\cdot C_0\cdot x}{8Z(2)}-\frac{\pi^2\cdot Z'(2)\cdot x}{16Z^2(2)}-\frac{\pi^2\cdot x}{16Z(2)}+O\left(x^{\frac{2}{3}}\right).$$

Доказательство.

$$G_1(x)=\sum_{N(\alpha)\le x}{}^{'}\Phi_1\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right)=\sum_{N(\alpha)\le x}{}^{'}1\cdot\sum_{N(\delta)\le\frac{x}{N(\alpha)}}{}^{'}\frac{\bar\varphi(\delta)}{N(\delta)}.$$

Воспользуемся леммой 10:

$a=b=\sqrt{x},\ F(x)=\sum'_{N(\alpha)\le x}\frac{\bar\varphi(\alpha)}{N(\alpha)}=\frac{\pi\cdot x}{4Z(2)}+O\left(x^{\frac{1}{3}}\right)$,

$R(x)=\sum'_{N(\alpha)\le x}1=\frac{\pi\cdot x}{4}+O\left(x^{\frac{1}{3}}\right)$. Имеем

$$G_1(x)=\sum_{N(\alpha)\le\sqrt{x}}{}^{'}\frac{\bar\varphi(\alpha)}{N(\alpha)}\cdot R\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right)+\sum_{N(\alpha)\le\sqrt{x}}{}^{'}F\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right)-$$

$$-F\left(\sqrt{x}\right)\cdot R\left(\sqrt{x}\right)=$$

$$= \sum_{N(\alpha)\le\sqrt{x}}{}^{'} \frac{\bar\varphi(\alpha)}{N(\alpha)} \cdot \left\{ \frac{\pi \cdot x}{4N(\alpha)} + O\left(\left(\frac{x}{N(\alpha)} \right)^{\frac{1}{3}} \right) \right\} +$$

$$+ \sum_{N(\alpha)\le\sqrt{x}} \left\{ \frac{\pi \cdot x}{4Z(2) \cdot N(\alpha)} + O\left(\left(\frac{x}{N(\alpha)} \right)^{\frac{1}{3}} \right) \right\} -$$

$$- \left\{ \frac{\pi \cdot \sqrt{x}}{4} + O\left(x^{\frac{1}{6}}\right) \right\} \cdot \left\{ \frac{\pi \cdot \sqrt{x}}{4Z(2)} + O\left(x^{\frac{1}{6}}\right) \right\} = \frac{\pi \cdot x}{4} \cdot \sum_{N(\alpha)\le\sqrt{x}}{}^{'} \frac{\bar\varphi(\alpha)}{N^2(\alpha)} +$$

$$+ O\left(x^{\frac{1}{3}} \cdot \sum_{N(\alpha)\le\sqrt{x}}{}^{'} \frac{\bar\varphi(\alpha)}{(N(\alpha))^{\frac{4}{3}}} \right) +$$

$$+ \frac{\pi \cdot x}{4Z(2)} \cdot \sum_{N(\alpha)\le\sqrt{x}}{}^{'} \frac{1}{N(\alpha)} + O\left(x^{\frac{1}{3}} \cdot \sum_{N(\alpha)\le\sqrt{x}}{}^{'} \frac{1}{(N(\alpha))^{\frac{1}{3}}} \right) -$$

$$- \frac{\pi^2 \cdot x}{16Z(2)} + O\left(x^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{\pi x}{4} \cdot \left(\frac{\pi \log\sqrt{x}}{4Z(2)} + \frac{C_0}{4Z(2)} - \frac{\pi Z'(2)}{4Z^2(2)} \right) + O\left(x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \right) +$$

$$+ \frac{\pi x}{4Z(2)} \cdot \left(\frac{\pi \log\sqrt{x} + C_0}{4} \right) - \frac{\pi^2 x}{16Z(2)} + O\left(x^{\frac{2}{3}}\right) =$$

$$= \frac{\pi^2 x \log\sqrt{x}}{16Z(2)} + \frac{\pi \cdot C_0 \cdot x}{16Z(2)} - \frac{\pi^2 \cdot Z'(2) \cdot x}{16Z^2(2)} +$$

$$+ \frac{\pi^2 x \log\sqrt{x}}{16Z(2)} + \frac{\pi \cdot C_0 \cdot x}{16Z(2)} - \frac{\pi^2 \cdot x}{16Z(2)} + O\left(x^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{\pi^2 x \log x}{16Z(2)} + \frac{2 \cdot \pi \cdot C_0 \cdot x}{16Z(2)} -$$

$$- \frac{\pi^2 \cdot Z'(2) \cdot x}{16Z^2(2)} - \frac{\pi^2 \cdot x}{16Z(2)} + O\left(x^{\frac{2}{3}}\right).$$

Теорема 4. $\sum'_{N(\alpha)\le x} \frac{g(\alpha)}{N^2(\alpha)} = \frac{\pi^2 \log^2 x}{16Z(2)} + \frac{\pi \cdot C_0 \cdot x}{8Z(2)} - \frac{\pi^2 \cdot Z'(2) \cdot \log x}{16Z^2(2)} + O(1).$

Доказательство. Рассмотрим

$$G_2(x) = \sum_{N(\gamma)\le x}{}^{'} N^{-1}(\gamma) \cdot \sum_{N(\delta)\le \frac{x}{N(\gamma)}}{}^{'} \frac{\bar\varphi(\delta)}{N^2(\delta)} =$$

$$= \sum_{N(\gamma)\le x}{}' N^{-1}(\gamma) \cdot \left\{ \frac{\pi \log \frac{x}{N(\gamma)} + C_0}{4Z(2)} - \frac{\pi Z'(2)}{4Z^2(2)} + O\left(\left(\frac{x}{N(\gamma)}\right)^{-\frac{2}{3}}\right)\right\} =$$

$$= \left(\frac{\pi \log x + C_0}{4Z(2)} - \frac{\pi Z'(2)}{4Z^2(2)}\right) \cdot \sum_{N(\gamma)\le x}{}' N^{-1}(\gamma) - \frac{\pi}{4Z(2)} \cdot \sum_{N(\gamma)\le x}{}' \frac{\log N(\gamma)}{N(\gamma)} +$$

$$+O\left(x^{-\frac{2}{3}} \cdot \sum_{N(\gamma)\le x}{}' \frac{1}{N^{\frac{1}{3}}(\gamma)}\right) = \left(\frac{\pi \log x + C_0}{4Z(2)} - \frac{\pi Z'(2)}{4Z^2(2)}\right) \cdot \left(\frac{\pi \log x + C_0}{4}\right) +$$

$$+O(1) = \frac{\pi^2 \log^2 x}{16Z(2)} + \frac{2 \cdot \pi \cdot C_0 \cdot x}{16Z(2)} - \frac{\pi^2 \cdot Z'(2) \cdot \log x}{16Z^2(2)} + O(1).$$

Заключение. Распределение значений функций $g(\alpha)$, исследованное в теоремах 1-4, может быть обобщено на случай, когда α принадлежит узкому сектору: $\varphi_1 \le \arg \alpha \le \varphi_2$, где $\varphi_2 - \varphi_1$ убывает к нулю вместе с ростом параметра x. Для этого надо использовать аппарат Z-функци Гекке в характерами величин $\lambda_m(\alpha)$.

1. **Bordelles O.** A Note on the Average Order Of the gcd-sum Function [text] / O. Bordelles // J. Integer Sequences. – 2007. – № 10. – Article 07.9.2. – P. 1–13.
2. **Broughan K. A.** The gcd-sum function [text] / K. A. Broughan // J. Integer Sequences. – 2001. – № 4. – Article 01.2.2. – P. 1–6.
3. **Huxley M. N.** Exponential sums and lattice points III [text] / M. N. Huxley // Proc. London Math. Soc. – 2003. – № 87. – P. 591–609.
4. **Лай Дык Тхинь.** О числе делителей в угле [текст] / Лай Дык Тхинь // ДАН СССР. – 1962. – Т. 143, № 1. – С. 28–30.