

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені І.І.МЕЧНИКОВА**

**ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФІЗИКИ ТА
ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ**

ЯКІМОВА Н.А.

ЛОГІЧНА АЛГЕБРА

Методичний посібник

Одеса
«Освіта України»
2019

УДК 512.64:519.7:164.034(076)
Я452

Автор:

Н.А.Якімова, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри комп'ютерної алгебри та дискретної математики

Рецензенти:

Є.В. Малахов, доктор технічних наук, професор, зав. кафедри математичного забезпечення комп'ютерних систем ФМФІТ ОНУ імені І.І.Мечнікова;
В.М. Євтухов, доктор фізико-математичних наук, професор, зав. кафедри диференціальних рівнянь, геометрії та топології ФМФІТ ОНУ імені І.І.Мечнікова.

*Рекомендовано до видання Вченою радою
факультету математики, фізики та інформаційних технологій
ОНУ імені І.І.Мечнікова
Протокол № 2 від 31 жовтня 2019*

Якімова Н.А.

Я452 Логічна алгебра: методичний посібник./ Н.А. Якімова. – Одеса: «Освіта України», 2019. – 40 стор.

У пропонованому методичному посібнику розглянуто логічні моделі, побудовані за аналогією з класичною лінійною алгеброю. Описаний апарат логічних матриць, логічних просторів та логічних операторів. Також запропоновано кілька можливих інтерпретацій побудованих моделей у вигляді деяких алгебраїчних систем дискретної природи.

Посібник складений для студентів другого (магістерського) рівня освіти спеціальностей 123 «Комп'ютерна інженерія» та 111 «Математика».

УДК 512.64:519.7:164.034(076)

© Якімова Н.А., 2019
© «Освіта України», 2019

___ ЗМІСТ ___

Передмова	4
1. Матричне подання елементів логічного поля	6
1.1. Логічне поле і його можлива графічна інтерпретація	6
1.2. Поняття логічної матриці	8
1.3. Операції над логічними матрицями	8
Контрольні запитання і завдання.....	13
2. Булева і предикатна моделі векторних логічних просторів	14
2.1. Поняття векторного логічного простору. Можлива його графічна інтерпретація	14
2.2. Базис логічного простору. Координатне подання векторів логічного простору	16
2.3. Заміна базису логічного простору. Матриця переходу до нового базису логічного простору.....	17
2.4. Розмірність досконалого логічного простору	20
2.5. Операції кон'юнкції, згортки й заперечення векторів досконалого логічного простору	21
Контрольні запитання і завдання.....	24
3. Логічні оператори	26
3.1. Поняття логічного оператора.....	26
3.2. Матриці лінійних логічних операторів.....	27
3.3. Деякі види лінійних логічних операторів.....	29
3.4. Деякі дії з лінійними логічними операторами	32
Контрольні запитання і завдання.....	33
4. Можливі алгебраїчні інтерпретації булевої і предикатної моделей векторних логічних просторів і їхнє практичне значення	34
Контрольні запитання і завдання.....	36
Список використаних джерел	38

__ ПЕРЕДМОВА __

Сучасна епоха характерна бурхливим розвитком і стрімким розширенням сфер застосування новітніх інформаційних технологій. Кінець XX століття по праву увійде в історію як час «інформаційного вибуху». Швидка змінюваність поколінь комп'ютерної техніки зажадала відповідних темпів розвитку програмного і математичного забезпечення. Однак, незважаючи на велику кількість мовних засобів програмування і принципово нових операційних систем і середовищ, що з'явилася в останні роки, усі вони спрямовані на автоматизацію й інтенсифікацію рутинних або обчислювальних процедур різного функціонального призначення і фізичної природи. Введення інформації в комп'ютер залишається незмінним і традиційним. Розшифровка і кодування природної мови як продукту мислення і подання знань недосконалі. Відсутній строго формалізований підходи до подання знань і точні методи моделювання знань [1]. Тому виникла і набула велику актуальність проблема створення інструментарію для формального опису і комп'ютерного подання різного роду інформації, поданої у вигляді текстів природної мови або логічних структур мислення.

Як відомо, для моделювання подібного роду явищ і процесів використовуються алгоритми систем штучного інтелекту. Проблема створення математичного апарата для моделювання інтелектуальних процесів виникла вже давно. Наукова думка просунулася досить далеко по шляху моделювання фізичних процесів, що протікають у навколишньому світі. Зафіксувавши деякі початкові умови, можна з досить великою імовірністю пророчити кінцевий стан процесу [2]. Іншими словами, протікання фізичних процесів досить добре формалізовано. У зв'язку з цим виникає питання, чи можлива настільки ж успішна реалізація інтелектуальної діяльності.

Найбільшим недоліком штучного інтелекту, істотно обмежуючим галузь його практичного застосування, є нездатність машини розуміти людську мову і, як наслідок, нездатність змістовної обробки нею текстів природної мови. Відшукування методів формалізації природно-мовних висловлень може відкрити шляхи для удосконалення діалогових людино-машинних систем. У зв'язку з цим виникла необхідність у нових методах опису мовної взаємодії в діалогових системах, відкіля випливає задача формалізації моделі спілкування як частини системи подання знань, тому що образність і виразність опису моделі предметної області увесь час зростає [3]. Для формального опису текстів природної мови в даний час відсутній прийнятний математичний апарат. Як основу для його розробки можна взяти алгебру скінченних предикатів, мовою якої можна виразити будь-який закон інтелекту і будь-яку інтелектуальну діяльність, реалізовані на ЕОМ [4]. Унаслідок цього найбільш перспективним є використання такого розділу математики як логічний аналіз. Термін «логічний аналіз» уживає ще Рассел [5, стор.842], позначаючи ним науку, що вивчає логічними засобами філософські проблеми. Однією з таких проблем і є вивчення природи інтелекту. Логічна алгебра є математичним апаратом, за допомогою якого можна вести подібне вивчення [6].

В даний час одним з напрямків науково-технічних досліджень є розробка засобів автоматизації процесів вироблення рішень у різних системах керування. Існуючі на сьогоднішній день алгоритми прийняття рішень у системах керування, як правило, базуються на процедурному способі подання знань, можливості якого обмежуються задачами прийняття і реалізації рішень при фіксованих структурах оперативних цілей системи. Застосування методів штучного інтелекту для подання знань у системах керування дає можливість автоматизувати процес прийняття рішень у відкритих задачах [7].

Аналізуючи проблему створення математичного апарата для моделювання процесів мислення, можна прийти до висновку про те, що спроби формалізації природної мови і комп'ютерного подання знань виявилися неспроможними в зв'язку з відсутністю прийнятного математичного апарата. Важливі результати можна одержати, якщо провести аналогію між лінійною алгеброю, засобами якої формалізуються різні системи у вигляді математичних моделей, і логічною алгеброю, що представляє собою основу людського мислення. Дослідження математичних засобів логічного аналізу відкриває нові можливості в галузі формалізації природної мови.

Узагальнюючи сказане, можна зробити висновок про те, що проблема, пов'язана з роботою математичного апарата моделювання продуктів мислення і комп'ютерного подання знань, є важливою й актуальною.

У пропонованому методичному посібнику представлений матеріал, що висвітлює математичну базу для моделювання систем штучного інтелекту. У посібнику описані кілька алгебраїчних систем, за допомогою яких можна моделювати інтелектуальні структури, а також показаний зв'язок між цими алгебрами і можливість переходу від однієї з них до іншої в залежності від практичних нестатків, що виникають у процесі моделювання.

Для успішного засвоєння матеріалу студенти повинні мати повний обсяг знань по дискретній математиці, математичній логіці, лінійній алгебрі, тобто по тим дисциплінам, що викладаються на математичних і технічних факультетах вищих учбових закладів.

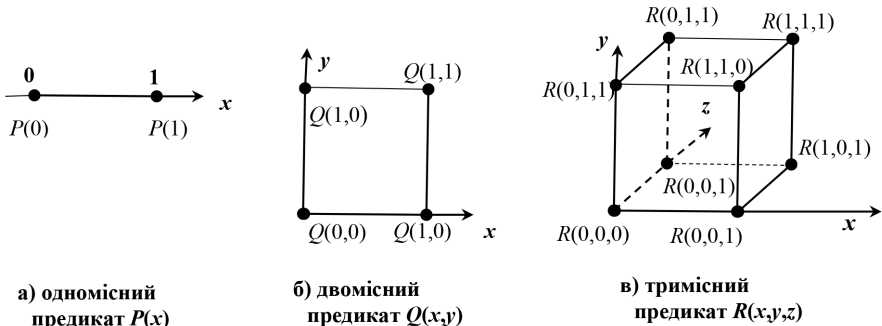
МАТРИЧНЕ ПОДАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ЛОГІЧНОГО ПОЛЯ

1.1. Логічне поле і його можлива графічна інтерпретація

Логічним полем [8] називається непуста множина елементів G (**логічних скалярів**), на якій визначені операції **диз'юнкції** $\alpha \vee \beta$, **кон'юнкції** $\alpha \wedge \beta = \alpha \beta$ і **заперечення** $\neg \alpha = \bar{\alpha}$. Ці операції підкоряються законам **ідемпотентності** $\alpha \vee \alpha = \alpha$, $\alpha \wedge \alpha = \alpha$; **комутативності** $\alpha \vee \beta = \beta \vee \alpha$, $\alpha \beta = \beta \alpha$; **асоціативності** $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma = \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$, $(\alpha \beta) \gamma = \alpha (\beta \gamma)$; **дистрибутивності** $(\alpha \vee \beta) \gamma = \alpha \gamma \vee \beta \gamma$, $\alpha \beta \vee \gamma = (\alpha \vee \gamma)(\beta \vee \gamma)$; **елімінації** $\alpha \vee \alpha \beta = \alpha$, $\alpha (\alpha \vee \beta) = \alpha$; **згортання** $\alpha \vee \beta \bar{\beta} = \alpha$, $\alpha (\beta \vee \bar{\beta}) = \alpha$; **де Морґана** $\alpha \vee \beta = \alpha \bar{\beta}$, $\alpha \beta = \alpha \vee \bar{\beta}$; **виключення третього** $\alpha \vee \bar{\alpha} = 1$. Також для цих операцій виконуються закони **нуля**: існує єдиний елемент 0 , для якого $\alpha \vee 0 = \alpha$, $\alpha \cdot 0 = 0$; **одиниці**: існує єдиний елемент 1 , для якого $\alpha \vee 1 = 1$, $\alpha \cdot 1 = \alpha$; **протиріччя** $\alpha \bar{\alpha} = 0$; **заперечення нуля** $\bar{0} = 1$; **заперечення одиниці** $\bar{1} = 0$. Елемент 0 називається **логічним нулем**, елемент 1 – **логічною одиницею**. Перераховані закони називаються **аксіомами логічного поля**, вони виконуються для будь-яких $\alpha, \beta \in G$. **Прикладами** логічних полів можуть служити:

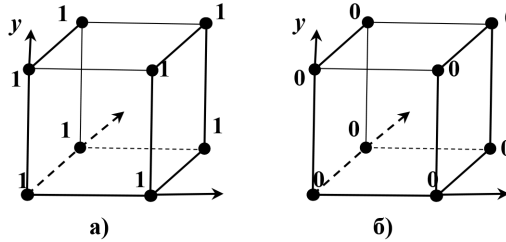
1. алгебра логіки: $G = \{0, 1\}$, $\vee$ – диз'юнкція, $\wedge$ – кон'юнкція, $\neg$ – заперечення на G ;
2. алгебра множин: G – система всіх підмножин деякого універсуму U , $\vee$ – об'єднання множин, $\wedge$ – перетинання множин, $\neg$ – доповнення множини, 0 – порожня множина, 1 – універсум U ;
3. алгебра предикатів [1];
4. алгебра предикатних операцій [7].

Розглянемо випадок алгебри предикатів. Любою скінченний n -місний предикат, заданий на декартовій множині $K = K_1 \times \dots \times K_n$, $|K_i| = k_i$ символів, можна подати як елемент якогось поля логічних скалярів. Кожен елемент такого поля подамо гіперкубом розмірності n . **Наприклад**, розглянемо тримісний предикат $R(x, y, z)$ над декартовим добутком $K^3 = \{0, 1\}^3$, тобто $k_1 = k_2 = k_3 = k = 2$. Графічно його можна зобразити, як це показано на малюнку 1в,



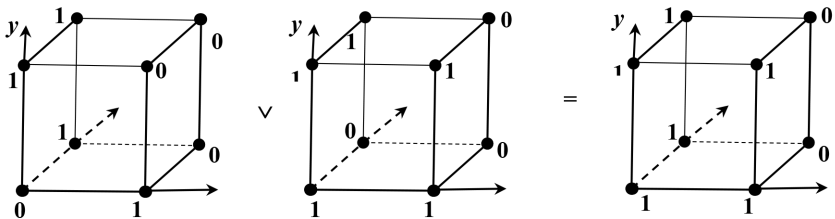
Мал.1. Графічне подання предикатних логічних скалярів

де кожній вершині відповідає значення предиката при утворюючих цю вершину значеннях аргументів x, y, z . Роль одиничного елемента поля скалярів грає предикат, що дорівнює одиниці при всіх значеннях наборів аргументів, а роль нульового елемента поля скалярів – предикат, що дорівнює нулю при всіх значеннях наборів аргументів. Графічно одиничний елемент поданий у вигляді гіперкуба, всім вершинам якого відповідають одиниці (мал. 2а), а нульовий – гіперкубом, всім вершинам якого відповідають нулі (мал. 2б).



Мал. 2 Графічне подання одиничного й нульового елементів поля логічних скалярів для випадку тримісних предикатів

Відповідно до визначень предикатних операцій [1, 6, 9], всі дії над такими елементами поля логічних скалярів виконуються порозрядно. Під **розрядом** розуміється значення розглянутого предиката при одному з можливих наборів аргументів. Таким чином, бінарні операції (диз'юнкція й кон'юнкція) припускають, що їхнім результатом буде елемент, кожному розряду якого відповідає значення виконаної бінарної операції над однойменними розрядами предикатів, що беруть участь в операції, де під **однойменними розрядами** розуміються значення цих предикатів від однакових наборів аргументів. Операція заперечення також проводиться порозрядно. Ці операції будуть обчислюватися за наступними правилами: $(P_i \vee P_j)(x_1, \dots, x_n) = P_i(x_1, \dots, x_n) \vee P_j(x_1, \dots, x_n)$, $(P_i \wedge P_j)(x_1, \dots, x_n) = P_i(x_1, \dots, x_n) \wedge P_j(x_1, \dots, x_n)$, $\overline{P_i}(x_1, \dots, x_n) = \overline{P_i(x_1, \dots, x_n)}$. Графічно операцію диз'юнкції подано на малюнку 3.



Мал. 3 Графічне подання диз'юнкції логічних скалярів у випадку тримісних предикатів

Операції кон'юнкції й заперечення подаються аналогічним чином.

1.2. Поняття логічної матриці

Позначимо через G множину логічних скалярів. Довільна система елементів множини G , подана у вигляді прямокутної таблиці, що містить r рядків й s стовпців, називається логічною (r, s) -матрицею над G або просто **логічною матрицею**. Щоб записати матрицю, випишемо позначення її елементів і таблицю, що вийшла, візьмемо в дужки або обмежимо подвійними рисами [10].

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rs} \end{pmatrix}, \quad A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rs} \end{matrix} \right\|.$$

Логічна матриця, у якій кількість рядків дорівнює кількості стовпців, називається **квадратною**. Для квадратної логічної матриці кількість її рядків (або стовпців) називається **порядком квадратної логічної матриці**. Квадратна логічна матриця, всі діагональні елементи якої дорівнюють одиниці, а інші елементи – нулю, називається **одиначною логічною матрицею** й позначається символом E . Матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю, називається **нульовою логічною матрицею** й позначається символом O . Логічні матриці називаються **рівними**, якщо кількості рядків і стовпців у них відповідно рівні і якщо логічні скаляри, що розташовані на відповідних місцях цих матриць, теж рівні. Таким чином, одна рівність між двома (r, s) -матрицями рівносильна системі rs рівностей між їхніми елементами. Логічна матриця, що складається тільки з одного рядка, називається **логічним рядком**, а кількість її елементів – **довжиною рядка**. Логічна матриця, що складається тільки з одного стовпця, називається **логічним стовпцем**, а кількість його елементів – **висотою стовпця**.

1.3 Операції над логічними матрицями

Основними операціями над логічними матрицями є логічне множення скаляра на матрицю або матриці на скаляр, диз'юнкція, кон'юнкція двох матриць, заперечення матриць, множення логічних матриць. Щоб помножити логічний скаляр α на логічну матрицю A , необхідно помножити на α всі елементи матриці A :

$$\alpha A = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1s} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{r1} & \alpha a_{r2} & \dots & \alpha a_{rs} \end{pmatrix},$$

$$A \alpha = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rs} \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} a_{11} \alpha & a_{12} \alpha & \dots & a_{1s} \alpha \\ a_{21} \alpha & a_{22} \alpha & \dots & a_{2s} \alpha \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} \alpha & a_{r2} \alpha & \dots & a_{rs} \alpha \end{pmatrix}.$$

Наприклад, як поле логічних скалярів візьмемо множину одномісних предикатів $P_i(x)$, $i=0, \dots, 3$, де $x \in \{0, 1\}$. Ця множина задана таблицею 1.

Таблиця 1

Множина одномісних предикатів, заданих на алфавіті $K=\{0, 1\}$

x	P_0	P_1	P_2	P_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Далі одномісні предикати подаються рядками $P=(P(0), P(1))$. Тоді $P_0=(0,0)$, $P_1=(0,1)$, $P_2=(1,0)$, $P_3=(1,1)$. Позначимо це скалярне поле через P . Тоді, наприклад,

$$P_1 \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ P_0 & P_3 & P_1 \\ P_2 & P_0 & P_3 \end{pmatrix} = (0, 1) \begin{pmatrix} (0,1) & (1,0) & (0,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,1) \\ (1,0) & (0,0) & (1,1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) & (0,1) \\ (0,0) & (0,1) & (0,1) \\ (0,0) & (0,0) & (0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_1 \\ P_0 & P_1 & P_1 \\ P_0 & P_0 & P_1 \end{pmatrix}.$$

У силу того, що для логічного поля справедлива аксіома комутативності [8], справедлива рівність $\alpha A = A\alpha$. Для будь-якої логічної матриці над G і для будь-яких логічних скалярів $\alpha, \beta \in G$ мають місце наступні співвідношення: $1 \cdot A = A$, $0 \cdot A = O$, $\alpha \cdot O = O$, $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

Диз'юнкцією двох логічних матриць A і B над скалярним полем G , що мають відповідно рівну кількість рядків і стовпців, називається матриця, що має ту ж кількість рядків і стовпців, і елементи якої дорівнюють диз'юнкціям відповідних елементів матриць A і B :

$$C = A \vee B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rs} \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \vee b_{11} & a_{12} \vee b_{12} & \dots & a_{1s} \vee b_{1s} \\ a_{21} \vee b_{21} & a_{22} \vee b_{22} & \dots & a_{2s} \vee b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} \vee b_{r1} & a_{r2} \vee b_{r2} & \dots & a_{rs} \vee b_{rs} \end{pmatrix}.$$

З визначення диз'юнкції логічних матриць випливають наступні співвідношення: диз'юнкція матриць комутативна $A \vee B = B \vee A$; диз'юнкція матриць асоціативна $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$; диз'юнкція матриць дистрибутивна щодо множення на скаляр $\alpha(A \vee B) = \alpha A \vee \alpha B$; множення матриці на скаляр дистрибутивне щодо диз'юнкції скалярів $(\alpha \vee \beta)A = \alpha A \vee \beta A$; закон нуля $A \vee O = O \vee A = A$; закон ідемпотентності $A \vee A = A$.

Кон'юнкцією двох логічних матриць A і B над скалярним полем G , що мають відповідно рівну кількість рядків і стовпців, називається така логічна матриця над G , що має таку ж кількість рядків і стовпців, і елементи якої дорівнюють кон'юнкціям відповідних елементів матриць A і B :

$$C = A \wedge B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rs} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \wedge b_{11} & a_{12} \wedge b_{12} & \dots & a_{1s} \wedge b_{1s} \\ a_{21} \wedge b_{21} & a_{22} \wedge b_{22} & \dots & a_{2s} \wedge b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} \wedge b_{r1} & a_{r2} \wedge b_{r2} & \dots & a_{rs} \wedge b_{rs} \end{pmatrix}.$$

Для кон'юнкції матриць виконуються наступні співвідношення: комутативності $A \wedge B = B \wedge A$; асоціативності $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$; асоціативності щодо множення на скаляр $\alpha(A \wedge B) = (\alpha A) \wedge B$; дистрибутивності $(A \vee B) \wedge C = A \wedge C \vee B \wedge C$, $A \wedge B \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$; елімінації $A \vee A \wedge B = A$; $A \wedge (A \vee B) = A$; ідемпотентності $A \wedge A = A$; закон нуля $A \wedge O = O$.

Запереченням матриці A називається матриця, елементи якої дорівнюють $\overline{a_{ij}}$, тобто

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{12}} & \dots & \overline{a_{1s}} \\ \overline{a_{21}} & \overline{a_{22}} & \dots & \overline{a_{2s}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{a_{r1}} & \overline{a_{r2}} & \dots & \overline{a_{rs}} \end{pmatrix}.$$

Для заперечення матриць виконуються наступні рівності: закон протиріччя $A \wedge \overline{A} = O$; закон подвійного заперечення $\overline{\overline{A}} = A$; закон виключення третього $A \vee \overline{A} = 1$; закони згортання $A \vee B \wedge \overline{B} = A$, $A \wedge (B \vee \overline{B}) = A$; закони де Моргана $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$, $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$.

На відміну від перерахованих вище операцій з матрицями, операція логічного множення однієї логічної матриці на іншу визначається трохи складніше. Нехай є дві логічні матриці A й B , причому кількість стовпців першої з них збігається з кількістю рядків другої. Тільки за цієї умови операція множення однієї логічної матриці на іншу має сенс. У протилежному випадку її виконати неможливо. **Правило множення матриць:** щоб одержати елемент, що розташований в i -тому рядку й j -тому стовпці матриці, отриманої в результаті множення, потрібно елементи i -того рядка першої матриці помножити на відповідні елементи j -го стовпця другої й отримані результати скласти. Тобто, якщо в нас матриця $A = \|a_{ij}\|_{r \times s}$, а $B = \|b_{ij}\|_{s \times t}$, то елементи матриці $C = AB$ будуть визначатися за формулою $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} \vee a_{i2}b_{2j} \vee \dots \vee a_{is}b_{sj}$ ($i=1, \dots, r$, $j=1, \dots, t$, $j=1, \dots, s$). **Наприклад**, для булевих матриць [11, 12],

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \wedge 1 \vee 0 \wedge 1 & 1 \wedge 0 \vee 0 \wedge 1 & 1 \wedge 0 \vee 0 \wedge 1 \\ 1 \wedge 1 \vee 1 \wedge 1 & 1 \wedge 0 \vee 1 \wedge 1 & 1 \wedge 0 \vee 1 \wedge 1 \\ 0 \wedge 1 \vee 1 \wedge 1 & 0 \wedge 0 \vee 1 \wedge 1 & 0 \wedge 0 \vee 1 \wedge 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Множення двох матриць, загалом кажучи, некомутативне. Воно залежить від порядку співмножників. Якщо в наведеному прикладі ми поміняємо порядок множених матриць, то результат буде іншим.

Якщо розглядати матриці не квадратні, то може вийти так, що в одному порядку операція їхнього множення має сенс, а у зворотному – ні. Розглянемо тепер основні властивості множення матриць:

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B, \quad (1)$$

$$A(\alpha B) = (A\alpha)B, \quad (2)$$

$$(AB)\alpha = A(B\alpha), \quad (3)$$

$$(A \vee B)C = AC \vee BC, \quad (4)$$

$$C(A \vee B) = CA \vee CB. \quad (5)$$

Із властивостей (4 – 5) безпосередньо випливає наступне правило: щоб помножити диз'юнкцію логічних матриць на диз'юнкцію, необхідно кожену матрицю першої диз'юнкції помножити на кожену матрицю другої й отримані результати скласти. Для множення логічних матриць виконується властивість асоціативності:

$$A(BC) = (AB)C. \quad (6)$$

У силу того, що операції диз'юнкції, кон'юнкції й множення можна застосовувати не до будь-яких матриць, а тільки до тих, кількість рядків і стовпців яких задовольняє зазначеним вище умовам, співвідношення (4 – 6) варто розуміти таким чином, що якщо дії, зазначені по одну сторону від знака рівності, мають сенс, то також мають сенс і дії, зазначені по іншу його сторону, а результати в обох випадках збігаються. Сукупність елементів a_{ir} , $i=1, \dots, n$ квадратної логічної матриці A називається її **головною діагоналлю** [13, 14]. Елементи, що належать головній діагоналі, називаються **діагональними**, а інші елементи матриці – **поза-діагональними**. Квадратна логічна матриця називається **діагональною**, якщо всі її позадіагональні елементи дорівнюють нулю. Розглянемо довільну логічну матрицю A . Якщо в ній зробити заміну рядків стовпцями, то отримана матриця буде називатися **транспонованою** стосовно A і позначатися символом A^T :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rs} \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{r1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{r2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1s} & a_{2s} & \dots & a_{rs} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

Для довільних логічних матриць A й B і логічних скалярів α і β мають місце наступні правила транспонування:

$$(\alpha A \vee \beta B)^T = \alpha A^T \vee \beta B^T, \quad (8)$$

$$\overline{A^T} = \overline{A}^T, \quad (9)$$

$$(AB)^T = B^T A^T, \quad (10)$$

$$(\alpha A \wedge \beta B)^T = \alpha A^T \wedge \beta B^T. \quad (11)$$

Нехай A довільна квадратна матриця над G . Тоді якщо виконується співвідношення $A^T = A$, то така матриця називається **симетричною** [15, стор. 28]. Із правил транспонування диз'юнкції, кон'юнкції й заперечення матриць безпосередньо випливає, що диз'юнкція, кон'юнкція й заперечення симетричних матриць є матриці симетричні. Результат множення симетричних матриць може й не бути симетричною матрицею. Довільна квадратна логічна матриця A над скалярним полем G називається **оборотною**, якщо існує квадратна матриця B над G , що задовольняє наступному співвідношенню:

$$AB = BA = E. \quad (12)$$

Якщо деяка матриця B задовольняє цьому співвідношенню, то вона називається **матрицею, зворотною до A** , або **обігом матриці A** . Якщо матриця A оборотна, то існує лише один її обіг. Якщо обіг матриці A існує, він позначається символом A^{-1} . Таким чином,

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E. \quad (13)$$

В умову (12) матриці A й B входять симетрично. У силу цього, якщо для A зворотною є матриця B , то для B зворотною є матриця A . Інакше кажучи, $(A^{-1})^{-1} = A$. Якщо для квадратних матриць D, F, H одного порядку існує обіг, то результат їхнього логічного множення також оборотний, причому: $(DFH)^{-1} = H^{-1}F^{-1}D^{-1}$. Логічні матриці над G , для яких виконується умова $AB = BA$, називаються **комутуючими** або **перестановочними**. Якщо матриці A й B оборотні й перестановочні, то $(AB)^T = A^T B^T$. Розглянемо зв'язок операцій транспонування й обертання. Застосовуючи правило транспонування результату множення логічних матриць (10) до співвідношень (13), одержуємо: $(A^{-1})^T A^T = A^T (A^{-1})^T = E$, тобто результат транспонування оборотної логічної матриці A є також оборотною логічною матрицею: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Квадратну логічну матрицю A назовемо **ортогональною**, якщо диз'юнкція всіх елементів кожного її рядка й диз'юнкція всіх елементів кожного її стовпця дорівнюють тотожній одиниці, а кон'юнкція будь-яких двох елементів у кожному її рядку й кон'юнкція будь-яких двох елементів у кожному її стовпці дорівнюють тотожному нулю. Наприклад, логічна матриця A над полем P одномісних предикатів

$$A = \begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_2 \\ P_2 & P_0 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) & (1,0) \\ (1,0) & (0,0) & (0,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,0) \end{pmatrix}$$

є ортогональною, а матриця

$$A = \begin{pmatrix} P_1 & P_3 & P_2 \\ P_0 & P_1 & P_0 \\ P_2 & P_0 & P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0,1) & (1,1) & (1,0) \\ (0,0) & (0,1) & (0,0) \\ (1,0) & (0,0) & (0,1) \end{pmatrix} -$$

ні, тому що, наприклад, $a_{12} \wedge a_{13} = P_3 \wedge P_2 = (1,1) \wedge (1,0) = (1,0) \neq 0$.

Теорема 1. Формулювання. Щоб для квадратних логічних матриць A і B над полем логічних скалярів $G = \{0, 1\}$ або полем скінченних предикатів довільної арності виконувалася рівність $AB = E$, необхідно й досить, щоб A і B були ортогональними матрицями й підкорялися умові $B = A^T$ [16].

Доказ. Привласнимо кожному розряду елементів скалярного поля, над яким задані матриці A і B , деякий індекс $v = 1, \dots, (k_1 \dots k_n)$, де n – арність предикатів, що є елементами поля скалярів, а $k_i, i = 1, \dots, n$, – кількість символів в алфавіті, над яким заданий аргумент x_i цих предикатів. Таким чином, матриці A й B розпадаються на $(k_1 \dots k_n)$ матриць над булевою множиною $G = \{0, 1\}$

$$A^v = \begin{pmatrix} a_{11}^v & \dots & a_{1s}^v \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{s1}^v & \dots & a_{ss}^v \end{pmatrix} \text{ й } B^v = \begin{pmatrix} b_{11}^v & \dots & b_{1s}^v \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{s1}^v & \dots & b_{ss}^v \end{pmatrix},$$

складених з v -тих розрядів елементів матриць A й B . Отже, якщо твердження справедливо для матриць над булевым полем скалярів $G = \{0, 1\}$, то воно вірно й для матриць, елементами яких є предикати довільної арності. У силу цього досить довести твердження для випадку скалярного поля $G = \{0, 1\}$ [16]. Нехай розмірність матриць A^v й B^v – $s \times s$. Виберемо довільно ціле $t, 1 \leq t \leq s$. Якщо t -тий рядок матриці A^v нульовий, то й t -тий рядок матриці $(AB)^v$ буде нульовим. Тому в кожному рядку матриці A^v є хоча б одна одиниця, і цій одиниці відповідає деяка одиниця в матриці B^v (нехай це буде елемент $a_{ij}^v = 1$, якому відповідає b_{ji}^v). При $f \neq t$ ($1 \leq f \leq s$) маємо $a_{ff}^v = 0$, тому що інакше $(AB)_{ff}^v = a_{ff}^v b_{ff}^v = 1$, тобто $(AB)^v \neq E$. Аналогічно, у матриці B^v всі елементи рядка j , за винятком b_{jt}^v дорівнюють нулю. Таким чином, у кожному рядку матриці A^v є хоча б одна одиниця, причому всі ці одиниці розташовані в різних стовпцях. Тому матриця A^v – ортогональна. Аналогічно, ортогональна й матриця B^v . Рівність $(B)^v = (A^v)^T$ тепер очевидно (кожному елементу $a_{ij}^v = 1$ відповідає $b_{ji}^v = 1$). Теорему доведено.

Теорема 2. Формулювання. Результат множення довільної логічної матриці на її транспоновану матрицю є матрицею симетричною [16].

Доказ. Нехай є логічна матриця A й її транспонована матриця A^T . Тоді $(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$, тому що $(A^T)^T = A$. Теорему доведено.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

1. Що таке логічне поле? Наведіть приклади логічних полів.
2. Як виконуються всі дії над елементами поля логічних скалярів, поданих графічно?
3. Дайте визначення логічної матриці і основних понять, з нею пов'язаних.
4. Перелічить основні операції над логічними матрицями.
5. Які властивості повинні мати логічні матриці для того, щоб над ними можна було проводити перелічені операції?
6. Наведіть правила транспонування логічних матриць.
7. Яка логічна матриця є ортогональною?
8. Сформулюйте необхідну і достатню умову існування зворотної логічної матриці. Чому дорівнює зворотна логічна матриця за умови її існування?
9. Якою матрицею є результат множення довільної логічної матриці на її транспоновану матрицю?

БУЛЕВА Й ПРЕДИКАТНА МОДЕЛІ ВЕКТОРНИХ ЛОГІЧНИХ ПРОСТОРІВ

2.1. Поняття векторного логічного простору. Можлива його графічна інтерпретація

Довільна непуста множина елементів L називається векторним логічним простором над деяким логічним полем скалярів G [8], якщо виконуються наступні умови:

- а) задане правило, відповідно до якого для будь-якої пари елементів (логічних векторів) $l, g \in L$ міститься в L новий елемент, що називається диз'юнкцією $l \vee g$ векторів l, g ;
- б) задане правило, відповідно до якого для будь-якого числа (логічного скаляра) $\alpha \in G$ і будь-якого елемента (логічного вектора) $l \in L$ міститься в L новий елемент, що називається добутком αl скаляра α на вектор l ;
- в) операції диз'юнкції й множення скаляра на вектор задовольняють наступним законам:

ідемпотентності диз'юнкції векторів $l \vee l = l$;

комутативності диз'юнкції векторів $l \vee g = g \vee l$;

асоціативності диз'юнкції векторів $(l \vee g) \vee h = l \vee (g \vee h)$;

асоціативності відносно кон'юнкції скалярів $\alpha(\beta l) = (\alpha\beta)l$;

дистрибутивності щодо диз'юнкції скалярів $(\alpha \vee \beta)l = \alpha l \vee \beta l$;

дистрибутивності щодо диз'юнкції векторів $\alpha(l \vee g) = \alpha l \vee \alpha g$;

нуль існує єдиний нульовий вектор $0 \in L$ такий, що для будь-якого $l \in L$ $0 \vee l = l$, $0l = 0$;

одиниці існує єдиний одиничний вектор $1 \in L$ такий, що для будь-якого $l \in L$, $1 \vee l = 1$, $1 \cdot l = l$.

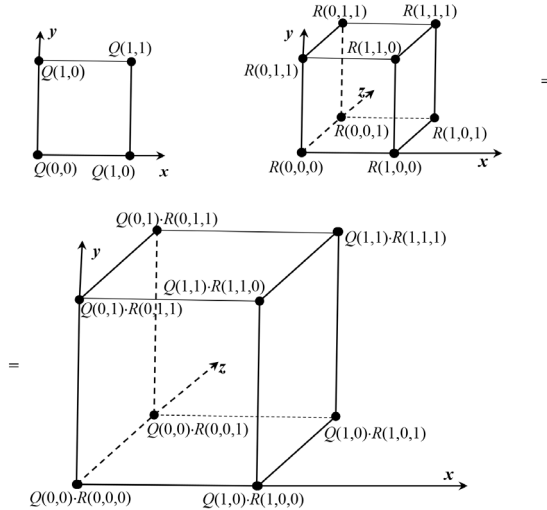
Перераховані закони називаються аксіомами логічного простору й виконуються для будь-яких $l, g, h \in L$, $\alpha, \beta \in G$. З аксіом витікає тотожність: для кожного $\alpha \in G$ $\alpha \cdot 0 = 0$.

Будемо розглядати два види векторних логічних просторів. Візьмемо в якості поля логічних скалярів множину $G = \{0, 1\}$. Як логічні вектори розглянемо множину конститuent одиниці по m змінним [17]. Такий логічний простір будемо називати булевым. У той же час систему всіх скінченних предикатів арності m , заданих на декартовому добутку $K = K_1 \times \dots \times K_p$, $K_j = k_p$, можна розглядати як логічний простір. Множина K_i є алфавітом, на якому заданий аргумент x_i розглянутих предикатів. Полем логічних скалярів для такого простору може бути будь-яка система всіх скінченних предикатів арності $n < m$. Однак алфавітами й для аргументів предикатів поля скалярів, і для аргументів предикатів множини векторів такого логічного простору повинні виступати ті самі множини. Побудований таким чином простір назовемо предикатним логічним простором або простором m -місних предикатів над скалярним полем n -місних предикатів [18]. Визначимо операції над елементами такого простору. Диз'юнкція векторів такого простору буде знаходитися за правилом, аналогічному тому, що було введено для предикатів – елементів поля логічних скалярів, тобто $(Q_i \vee Q_j)(x_1, \dots, x_m) = Q_i(x_1, \dots, x_m) \vee Q_j(x_1, \dots, x_m)$.

Розглянемо тепер поле логічних скалярів, що є множиною n -місних предикатів $P(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$, де $i_s \neq i_t$, $s, t = 1, \dots, n$. Причому множина індексів $\{i_1, \dots, i_n\}$ є підмножиною множини індексів $\{1, \dots, m\}$. У силу того, що всі простори m -місних предикатів, аргументами предикатів скалярного поля для яких є усілякі підмножини $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\}$ множини $\{x_1, \dots, x_m\}$, улаштовані

однаково з погляду операції множення вектора на скаляр, будемо вважати, що предикати-скаляри задані на множині перших n елементів множини $\{x_1, \dots, x_m\}$, тобто являють собою n -місні предикати $P(x_1, \dots, x_n)$. Операція множення вектора на скаляр у предикатних просторах буде виконуватися за наступним правилом: $(P \cdot Q)(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m) = P(x_1, \dots, x_n) \wedge Q(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m)$.

Випадок, коли полем логічних скалярів є множина двомісних предикатів $Q(x, y)$, поданий на малюнку 4.



Мал. 4. Множення логічного вектору, поданого тримісним предикатом $R(x, y, z)$, на логічний скаляр, поданий двомісним предикатом $Q(x, y)$

Виразення вигляду $\alpha_1 l_1 \vee \alpha_2 l_2 \vee \dots \vee \alpha_s l_s = \bigvee_{i=1}^s \alpha_i l_i$, де $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ – логічні скаляри, називаються **лінійними комбінаціями логічних векторів** $l_1, l_2, \dots, l_s \in L$. Якщо вектор $l \in L$ можна представити у вигляді лінійної комбінації $l = \alpha_1 l_1 \vee \alpha_2 l_2 \vee \dots \vee \alpha_s l_s = \bigvee_{i=1}^s \alpha_i l_i$, то говорять, що l **залежить** від $l_1, l_2, \dots, l_s$ або l **виражається** через $l_1, l_2, \dots, l_s$. Якщо вектор l неможливо виразити через $l_1, l_2, \dots, l_s$, то будемо говорити, що l **не залежить** від $l_1, l_2, \dots, l_s$. Система векторів $l_1, l_2, \dots, l_s$ називається **незалежною**, якщо кожний з векторів цієї системи не залежить від інших. У протилежному випадку скінченна система векторів називається **залежною**.

Розглянемо **приклад** логічного простору. Як поле логічних скалярів візьмемо множину P всіх одномісних предикатів $P_i(x)$, ($i=0, \dots, 3$), визначених на множині $K=\{0,1\}$. Множину таких предикатів задано таблицею 1. Як простір логічних векторів візьмемо множину двомісних предикатів $Q_j(x, y)$, $j=0, \dots, 15$, визначених на декартовому добутку $K^2=\{0,1\}^2$. Множину таких векторів, задану таблицею 2, будемо записувати у вигляді матриць

$$Q = \begin{pmatrix} Q_j(0,0) & Q_j(0,1) \\ Q_j(1,0) & Q_j(1,1) \end{pmatrix}.$$

Таблиця 2

Множина двомісних предикатів, заданих на декартовому добутку $K^2=\{0, 1\}^2$

x	y	Q_0	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7	Q_8	Q_9	Q_{10}	Q_{11}	Q_{12}	Q_{13}	Q_{14}	Q_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Відповідно до визначення операції диз'юнкції векторів й операції множення вектора на скаляр, для векторів такого простору

$$Q_i \vee Q_j = \begin{pmatrix} Q_i(0,0) \vee Q_j(0,0) & Q_i(1,0) \vee Q_j(1,0) \\ Q_i(0,1) \vee Q_j(0,1) & Q_i(1,1) \vee Q_j(1,1) \end{pmatrix},$$

$$P_i Q_j = \begin{pmatrix} P_i(0)Q_j(0,0) & P_i(1)Q_j(1,0) \\ P_i(0)Q_j(0,1) & P_i(1)Q_j(1,1) \end{pmatrix}.$$

Нульові й одиничні елементи в цьому випадку мають вигляд: $0=P_0$, $0=Q_0$, $1=P_3$, $1=Q_{15}$. Позначимо цей простір через $\mathcal{Q}$. Наведемо приклад комбінації векторів Q_1 й Q_5 :

$$P_0 Q_1 \vee P_2 Q_5 = (0,0) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vee (1,0) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = Q_4.$$

2.2. Базис логічного простору.

Координатне подання векторів логічного простору.

Нехай M – множина, складена з векторів логічного простору L . Система векторів $l_1, l_2, \dots$ цієї множини називається **системою утворюючих** для M , якщо будь-який вектор з M може бути виражений через яке-небудь скінченне число векторів цієї системи. Логічний простір L називається **скінченномірним**, якщо в ньому існує скінченна система утворюючих. Будь-який простір, що містить скінченну кількість векторів, є скінченномірним. Мінімальна (по кількості складових її векторів) система утворюючого логічного простору називається **базисом** цього простору. Нехай $a_1, a_2, \dots, a_p$ – базис логічного простору L . Тоді подання логічного вектора $l \in L$ у вигляді лінійної комбінації $l = \xi_1 a_1 \vee \xi_2 a_2 \vee \dots \vee \xi_p a_p$ називається **розкладанням вектора l по базису $a_1, a_2, \dots, a_p$** , а логічні скаляри $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$ називаються **координатами вектора l у цьому базисі**. Для простору $\mathcal{Q}$ базисом є системи векторів Q_6, Q_9 й Q_5, Q_{10} [20]. Розкладемо вектор Q_{14} по базису Q_6, Q_9 :

$$Q_{14} = P_3 Q_6 \vee P_2 Q_9 = (1,1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vee (1,0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

де P_3, P_2 – координати вектора Q_{14} у даному базисі. Координати кожного вектора l логічного простору L щодо заданого базису $a_1, a_2, \dots, a_p$ визначають цей вектор однозначно. Зворотнє,

загалом кажучи, невірно. Не в будь-якому логічному просторі розкладання вектора по базису єдино. Логічний простір, у якому немає єдиного розкладання кожного його вектора по базису, називається **недосконалим**. Якщо ж єдиничність розкладання має місце для кожного вектора, то простір називається **досконалим**. У досконалomu логічному просторі нульовий вектор (і тільки він) має всі координати, рівними нулю.

Теорема 3. Формулювання. При диз'юнкції двох будь-яких векторів будь-якого логічного простору їхні координати (щодо заданого базису простору L) складаються; при множенні довільного вектора на будь-який скаляр α всі координати цього вектора множаться на α .

У недосконалomu логічному просторі описаним вище способом виходить якийсь один з можливих наборів координат вектора $lv g$ (відповідно, αl).

2.3. Заміна базису логічного простору. Матриця переходу до нового базису.

Будь-який базис логічного простору L , вектори якого беруться в певній послідовності, називається **координатною системою** в L . Нехай $l = \xi_1 a_1 \vee \xi_2 a_2 \vee \dots \vee \xi_p a_p$. Логічні скаляри $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$ називаються **координатами вектора l у системі координат $a_1, a_2, \dots, a_p$** . Стовпець $(\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_p)^T$, складений з координат вектора l , узятих у певному порядку, називається **координатним стовпцем** і позначається $[l]$. Отже, якщо в просторі обрана певна координатна система, то кожному вектору відповідає координатний стовпець. Зворотно: для кожного стовпця довжини p формула $l = \xi_1 a_1 \vee \xi_2 a_2 \vee \dots \vee \xi_p a_p$ дає певний вектор l , що має цей стовпець своїм координатним стовпцем.

Розглянемо **приклад**. Нехай вектор l має координатний стовпець $(\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_p)^T$, а вектор g координатний стовпець $(\eta_1 \ \eta_2 \ \dots \ \eta_p)^T$ у системі координат $a_1, a_2, \dots, a_p$, тобто $l = \xi_1 a_1 \vee \xi_2 a_2 \vee \dots \vee \xi_p a_p$, $g = \eta_1 a_1 \vee \eta_2 a_2 \vee \dots \vee \eta_p a_p$. Тоді операції множення вектора на скаляр і диз'юнкції векторів можна описати, використовуючи дії зі стовпцями. Маємо:

$$\alpha l = (\alpha \xi_1) a_1 \vee (\alpha \xi_2) a_2 \vee \dots \vee (\alpha \xi_p) a_p = \bigvee_{i=1}^p (\alpha \xi_i) a_i, \quad (14)$$

$$lv g = (\xi_1 \vee \eta_1) a_1 \vee (\xi_2 \vee \eta_2) a_2 \vee \dots \vee (\xi_p \vee \eta_p) a_p = \bigvee_{i=1}^p (\alpha_i \vee \beta_i) a_i. \quad (15)$$

Скористаємося правилами дій зі стовпцями $\alpha(\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_p)^T = (\alpha \xi_1 \ \alpha \xi_2 \ \dots \ \alpha \xi_p)^T$, $(\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_p)^T \vee (\eta_1 \ \eta_2 \ \dots \ \eta_p)^T = (\xi_1 \vee \eta_1 \ \xi_2 \vee \eta_2 \ \dots \ \xi_p \vee \eta_p)^T$, запишемо рівності (14) і (15) у наступному вигляді: $[\alpha l] = \alpha[l]$, $[lv g] = [l] \vee [g]$. Отже, координатний стовпець диз'юнкції векторів дорівнює диз'юнкції координатних стовпців цих векторів, а координатний стовпець добутку скаляра на вектор дорівнює добутку цього скаляра на координатний стовпець вектора.

Нехай задано досконалий логічний простір L розмірності p над логічним скалярним полем G . Позначимо через L_p простір рядків довжини p з елементами з G . Виберемо в L певну систему й поставимо кожному вектору з L у відповідність його координатний стовпець. Ця відповідність є ізоморфізм між L і L_p . Отже, незалежні вектори мають незалежні координатні стовпці й кожна залежність між заданими векторами має місце й між їхніми координатними стовпцями.

Розглянемо **приклад**. Нехай L – предикатний логічний простір $\mathcal{Q}$, заданий над скалярним полем P , L_2 – простір рядків довжини 2 з елементами з G , а $\mathcal{Q}_6, \mathcal{Q}_9$ – координатна система в $\mathcal{Q}$. Кожному вектору $\mathcal{Q}_j(x, y)$, $(j=0, 1, \dots, 15)$ з $\mathcal{Q}$ поставимо у відповідність його координатний стовпець із L_2 . Наприклад, вектору $\mathcal{Q}_2$ відповідає координатний стовпець $(P_1 \ P_0)^T$, вектору $\mathcal{Q}_{13}$ координатний стовпець $(P_2 \ P_3)^T$. Ця відповідність є ізоморфізм між $\mathcal{Q}$ й L_2 .

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} \dots \beta_{1p} \\ \dots \dots \dots \\ \beta_{p1} \dots \beta_{pp} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

складена з коефіцієнтів β_{ij} , є матрицею зворотного переходу від системи $a'_1, a'_2, \dots, a'_p$ до системи $a_1, a_2, \dots, a_p$. Далі координатну систему будемо називати базисом, маючи на увазі, що його вектори взяті в певній послідовності.

Теорема 4. Формулювання. У будь-якому логічному просторі існує ортогональна матриця A переходу до нового базису й ортогональна матриця B зворотного переходу, причому $B=A^T$.

Доказ. Позначимо через $[I]$ й $[I]'$ координатні стовпці довільного вектора $I \in L$ у базисах $a_1, \dots, a_p$ й $a'_1, \dots, a'_p$ відповідно. Відповідно до рівності (18), $[I]=A[I]'$. Це співвідношення виконується для всіх векторів простору, у тому числі й для його базисних векторів. Отже, $[a_i]=A[a'_i]'$, $i=1, \dots, p$, де $[a_i]$ й $[a'_i]'$ – координатні стовпці векторів a_i у базисах $a_1, \dots, a_p$ й $a'_1, \dots, a'_p$ відповідно. Якщо простір недосконалий, то вектору a_i може відповідати кілька координатних стовпців. Однак серед них завжди існує такий, що $[a_i]=(0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0)^T$, де на i -тому місці розташована тотожна одиниця, а на інших – тотожні нулі. Нехай у базисі $a'_1, \dots, a'_p$ вектору a_i відповідає координатний стовпець $[a_i]'=(\lambda_1^i \dots \lambda_p^i)^T$. Завжди існує матриця A виду (17) така, що

$$\begin{cases} (1 \dots 0)^T = A(\lambda_1^1 \dots \lambda_p^1)^T \\ \dots \dots \dots \\ (0 \dots 1)^T = A(\lambda_1^p \dots \lambda_p^p)^T \end{cases}. \quad (20)$$

З іншого боку, завжди існує матриця B вигляду (5.19) зворотного переходу така, що

$$\begin{cases} (\lambda_1^1 \dots \lambda_p^1)^T = B(1 \dots 0)^T \\ \dots \dots \dots \\ (\lambda_1^p \dots \lambda_p^p)^T = B(0 \dots 1)^T \end{cases}. \quad (21)$$

Підставляючи (21) в (20), одержуємо, що

$$\begin{cases} (1 \dots 0)^T = AB(1 \dots 0)^T \\ \dots \dots \dots \\ (0 \dots 1)^T = AB(0 \dots 1)^T \end{cases}. \quad (22)$$

Відповідно до визначення, будь-який вектор логічного простору можна представити у вигляді лінійної комбінації базисних векторів, тобто у вигляді лінійної комбінації рівнянь системи (22). Отже, з визначення базису логічного простору й властивостей логічних матриць випливає, що існують такі матриця переходу A від базису $a_1, \dots, a_p$ до базису $a'_1, \dots, a'_p$ і матриця B зворотного переходу такі, що для будь-якого вектору I логічного простору $[I]=AB[I]$, тобто $AB=E$. Отже, у будь-якому логічному просторі завжди існують оборотні, а виходить, відповідно до теореми 4.1, і ортогональні матриця переходу A і матриця зворотного переходу B , причому $B=A^{-1}$, тобто $B=A^T$. Теорему доведено.

Наслідком з теореми 4 є той факт, що в досконалому логічному просторі існують єдині матриця переходу A і матриця зворотного переходу B , причому вони ортогональні й $B=A^T$.

2.4. Розмірність досконалого логічного простору

У силу ізоморфізму алгебри ідей й алгебри булевих функцій [19], в отриманому булево-му просторі існує єдине розкладання кожного його вектору по базису, тобто повний булевий простір є досконалим. Доведемо досконалість довільного предикатного простору.

Теорема 5. Формулювання. Повний [20] простір m -місних предикатів, заданий над скалярним полем n -місних предикатів, $n < m$, є досконалим.

Доказ. Позначимо множини m - і n -місних предикатів через L й G відповідно. Складемо множину X із усіляких наборів аргументів $x_{n+1}, \dots, x_m : X = \{(x_{n+1}, \dots, x_m), x_i \in K_p, n+1 \leq i \leq m\}$, де K_i алфавіт, над яким заданий аргумент x_i розглянутих предикатів. Для стислості запису елементи множини X будемо позначати через v . Тепер побудуємо базис простору L . Як базисні вектори візьмемо предикати виду

$$Q_v(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m) = \begin{cases} 1, & (x_{n+1}, \dots, x_m) = v \\ 0, & (x_{n+1}, \dots, x_m) \neq v \end{cases}, \quad v \in X,$$

тобто у базисному векторі всі розряди, у яких зафіксовані значення останніх $(m-n)$ змінних, дорівнюють одиниці, а інші розряди дорівнюють нулю. Індексом v базисного вектора при цьому є набір зафіксованих значень змінних $(x_{n+1}, \dots, x_m)$.

Розглянемо тепер довільний вектор $l(x_1, \dots, x_m) \in L$. Його можна представити у вигляді наступної лінійної комбінації базисних векторів:

$$l(x_1, \dots, x_m) = \bigvee_{v \in X} l(x_1, \dots, x_n, v) Q_v(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m), \quad (23)$$

де $l(x_1, \dots, x_n, v)$ являє собою n -місний предикат, тобто елемент $P_v(x_1, \dots, x_n)$ скалярного поля G . Таким чином, рівність (23) можна записати у вигляді $l(x_1, \dots, x_m) = \bigvee_{v \in X} P_v(x_1, \dots, x_n) Q_v(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m)$, що є розкладанням вектору l по побудованому вищеописаним способом базису. Очевидно, що розкладання будь-якого вектору по цьому базису єдино. Позначимо вектори цього базису через $a_1, \dots, a_p$.

Розглянемо будь-який інший базис $a'_1, \dots, a'_p$ простору L , розкладання векторів якого по базису $a_1, \dots, a_p$ запишеться у вигляді (16). Тоді матриця, що має вигляд (17), є матрицею переходу від базису $a_1, \dots, a_p$ до базису $a'_1, \dots, a'_p$. Ця матриця визначена однозначно в силу одиничності розкладання будь-якого вектора простору L по базису $a_1, \dots, a_p$. Відповідно до теореми 5.4, матриця A є ортогональною, а отже, і оборотною. У силу того, що в будь-якій оборотній логічній матриці існує тільки одна зворотна, то матриця B зворотного переходу від базису $a'_1, \dots, a'_p$ до базису $a_1, \dots, a_p$ також визначена однозначно, причому $B = A^T$, тобто

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \dots \alpha_{p1} \\ \dots \dots \dots \\ \alpha_{1p} \dots \alpha_{pp} \end{pmatrix}.$$

Візьмемо довільний вектор $l \in L$, що має в базисі $a_1, \dots, a_p$ координатний стовпець $[l] = (\xi_1 \dots \xi_p)^T$. Позначимо координатний стовпець вектора l у базисі $a'_1, \dots, a'_p$ через $[l]' = (\xi'_1 \dots \xi'_p)^T$. Тоді

$$\begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \vdots \\ \xi'_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \dots \alpha_{p1} \\ \dots \dots \dots \\ \alpha_{1p} \dots \alpha_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_p \end{pmatrix}.$$

Так як ξ_{ij} , α_{ij} , $i, j=1, \dots, p$, визначені однозначно, то ξ_i також будуть визначені однозначно. Отже, вектор l буде мати єдине розкладання по будь-якому базису простору L . Це означає, що простір L досконалий. Теорему доведено.

Кількість елементів базису називається **розмірністю** логічного простору. Обчислимо розмірність p описаного вище досконалого предикатного простору. Множина логічних скалярів для описаного предикатного простору буде мати потужність $2^{k_1 k_2 \dots k_n}$, а кількість векторів, що становлять розглянутий предикатний простір, буде дорівнювати $2^{k_1 k_2 \dots k_n}$ [19, 20]. Відповідно до визначення, будь-який вектор досконалого логічного простору можна єдиним чином подати у вигляді лінійної комбінації базисних векторів. Число таких комбінацій буде дорівнювати $(2^{k_1 k_2 \dots k_n})^p$. З іншого боку, як було сказано вище, це число дорівнює $2^{k_1 k_2 \dots k_n}$. Отже, має місце рівність $2^{k_1 k_2 \dots k_n} = (2^{k_1 k_2 \dots k_n})^p$, звідки, логарифмуючи обидві частини цієї рівності по підставі 2, і знаходимо число базисних векторів описаного вище досконалого предикатного простору:

$$p = k_{n+1} k_{n+2} \dots k_m. \quad (24)$$

Якщо ж $K_1 = \dots = K_m = k$, то

$$p = k^{m-n}. \quad (25)$$

Розглянемо предикатний простір Q . Алфавітом у зазначеному просторі є множина $K^3 = \{0, 1\}^3$. Очевидно, що $k=2$, $n=1$, $m=2$. Кількість логічних скалярів у цьому прикладі дорівнює чотирьом, а векторів – шістнадцяти. Розмірність цього простору дорівнює $2^{2-1}=2$.

У силу того, що вектори булевого простору можна розуміти як множину конститuent одиниці по m змінним [17], число векторів булевого простору дорівнює 2^m . Поле логічних скалярів для булевого простору містить два елементи: нуль й одиницю. Отже, справедливе співвідношення $2^n = 2^m$, де p – розмірність булевого простору, тобто число його базисних векторів. Очевидно, що

$$p = m. \quad (26)$$

Слід зазначити, що в булевому просторі існує єдиний з точністю до перестановки набір векторів, що може бути базисом обраного простору [21], тоді як у предикатному логічному просторі це не так.

2.5 Операції кон'юнкції, згортки й заперечення векторів досконалого логічного простору

Кон'юнкцією векторів l й g логічного простору L назвемо такий вектор цього простору, координатами якого є кон'юнкції відповідних координат векторів l й g [20]. Наприклад, для векторів Q_7 й Q_{10} предикатного простору Q їхнє розкладання по базису Q_6 , Q_9 буде наступним:

$$Q_7 = P_3 Q_6 \vee P_1 Q_9 = (1, 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vee (0, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q_{10} = P_1 Q_6 \vee P_2 Q_9 = (0, 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vee (1, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, координатними стовпцями векторів Q_7 й Q_{10} у базисі Q_6 , Q_9 будуть стовпці

$$Q_7 = \begin{pmatrix} P_3 \\ P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,1) \\ (0,1) \end{pmatrix}, \quad Q_{10} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0,1) \\ (1,0) \end{pmatrix},$$

Отже, $\xi_1 \eta_1 \vee \xi_2 \eta_2 \vee \dots \vee \xi_p \eta_p = \xi'_1 \eta'_1 (\alpha_{11} \vee \alpha_{12} \vee \dots \vee \alpha_{p1}) \vee \dots \vee \xi'_p \eta'_p (\alpha_{1p} \vee \alpha_{2p} \vee \dots \vee \alpha_{pp})$, де коефіцієнт при $\xi'_j \eta'_j$ є диз'юнкцією елементів j -го стовпця матриці переходу A . Матриця переходу A є оберотною, а виходить, і ортогональною. Отже, диз'юнкція елементів будь-якого її стовпця дорівнює одиниці, звідки випливає, що

$$\xi_1 \eta_1 \vee \xi_2 \eta_2 \vee \dots \vee \xi_p \eta_p = \xi'_1 \eta'_1 \vee \xi'_2 \eta'_2 \vee \dots \vee \xi'_p \eta'_p,$$

де ліва частина рівності являє собою згортку векторів l й g у базисі $a_1, \dots, a_p$, а права – в базисі $a'_1, \dots, a'_p$. Тому що базиси взяті довільно, то це й доводить інваріантність згортки векторів досконалого логічного простору щодо вибору базису. Теорему доведено.

Згортка векторів досконалого логічного простору має наступні властивості, аналогічні властивостям скалярного добутку векторів у лінійній алгебрі [13, 14]:

$$\langle l, g \rangle = \langle g, l \rangle, \quad (31)$$

$$\langle \alpha l \vee \beta g, h \rangle = \alpha \langle l, h \rangle \vee \beta \langle g, h \rangle, \quad (32)$$

$$\langle 0, 0 \rangle = 0, \quad (33)$$

$$\langle l, l \rangle \neq 0, \quad l \neq 0. \quad (34)$$

Вектори $l, g \in L$ назвемо **ортогональними**, якщо їхнього згортка дорівнює нулю [21, 22]. Систему векторів назвемо **ортогональною**, якщо вона містить або тільки один вектор, або входні в її склад вектори попарно ортогональні. З вираження (31) випливає властивість симетричності відносини ортогональності логічних векторів: якщо l ортогональний до g , то g ортогональний до l [10]. Єдиним вектором, ортогональним до всіх векторів логічного простору, є нульовий вектор. У предикатному просторі $\mathcal{Q}$ ортогональними є системи векторів $Q_3, Q_{12}, i Q_1, Q_{14}$.

Теорема 8. Формулювання. Система векторів, що складається з ненульових взаємно ортогональних векторів $l_1, \dots, l_p$ є незалежною [23].

З визначення операції згортки логічних векторів випливає, що вона дорівнює диз'юнкції координат кон'юнкції цих векторів, що може дорівнювати нулю тоді й тільки тоді, коли кожний з диз'юнктив є тотожним нулем, тобто якщо всі координати кон'юнкції дорівнюють нулю. Отже, можна дати друге визначення ортогональності логічних векторів: вектори $l, g \in L$ **ортогональні**, якщо їх кон'юнкція є нульовим вектором.

Заперечення вектору $l \in L, [l] = (\xi_1 \dots \xi_p)^T$, назвемо вектор $\bar{l} = (\bar{\xi}_1 \dots \bar{\xi}_p)^T$ [20, 22]. Операцію заперечення логічного вектору, як й операцію кон'юнкції логічних векторів, також можна ввести тільки в досконалому логічному просторі.

Теорема 9. Формулювання. Заперечення будь-якого вектору досконалого логічного простору інваріантне щодо вибору базису.

Доказ. Нехай матриця вигляду (17) є матрицею переходу від базису $a_1, \dots, a_p$ до базису $a'_1, \dots, a'_p$, а вектор l має координатні стовпці $[l] = (\xi_1 \dots \xi_p)^T$ і $[\bar{l}] = (\bar{\xi}_1 \dots \bar{\xi}_p)^T$ у базисах $a_1, \dots, a_p$ й $a'_1, \dots, a'_p$ відповідно. По визначенню заперечення вектору, $[\bar{l}] = (\bar{\xi}_1 \dots \bar{\xi}_p)^T$. З іншого боку, відповідно до визначення заперечення логічних матриць, $[\bar{l}] = (\xi_1 \dots \xi_p)^T$, звідки випливає, що

$$[\bar{l}] = [\bar{l}]. \quad (35)$$

Очевидно, що $[\bar{l}] = A[\bar{l}]^T, [\bar{l}] = \overline{A[l]^T}$, звідки, з обліком (35), випливає, що $A[\bar{l}]^T = \overline{A[l]^T}$. Іншими словами, переходячи до нового координатного подання вектору $\bar{l}$ або виконуючи операцію заперечення над вектором l уже в новому базисі, у результаті одержуємо той самий вектор, що й доводить інваріантність заперечення векторів логічного простору щодо вибору базису. Теорему доведено.

В силу теореми 9, заперечення векторів досконалого предикатного логічного простору обчислюється за правилом, аналогічним тому, що було введено для елементів поля скалярів такого простору, тобто $Q_i(x_1, \dots, x_m) = \overline{Q_i(x_1, \dots, x_m)}$.

Для будь-яких логічних векторів $l, g \in L$, виконуються властивості згортання $l \vee \bar{h} = l$, $l(h \vee \bar{h}) = l$, де Моргана $\overline{l \vee h} = \bar{l} \bar{h}$, $\overline{l h} = \bar{l} \vee \bar{h}$, подвійного заперечення $\overline{\bar{l}} = l$, виключення третього $l \vee l = l$, протиріччя $l \bar{l} = 0$, заперечення нуля $\bar{0} = 1$, заперечення одиниці $\bar{1} = 0$. Із цих властивостей, а також із властивостей ідемпотентності, комутативності й асоціативності диз'юнкції й кон'юнкції логічних векторів, властивостей дистрибутивності, елімінації, законів нуля й одиниці випливає, що множину логічних векторів так само, як і множину логічних скалярів, можна розглядати як логічне поле.

Якщо вектор належить якому-небудь базису простору L , то його заперечення можна представити як диз'юнкцію інших векторів, що входять у той же базис [24]:

$$\bar{a}_i = a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_{i-1} \vee a_{i+1} \vee \dots \vee a_p. \quad (36)$$

Наприклад, у предикатному просторі Q для базису Q_6, Q_9

$$\bar{Q}_6 = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Q_9.$$

Очевидно, що

$$\langle l, \bar{l} \rangle = 0, \quad (37)$$

отже, будь-який логічний вектор завжди ортогональний своєму запереченню. Наслідком з теореми 9 і властивості (37) є той факт, що система ненульових векторів, складена з довільного логічного вектора і його заперечення, є незалежною. **Наприклад**, система векторів Q_7, Q_8 є незалежною.

У силу рівностей (36) і (37) можна записати наступне:

$$\langle a_p, \bar{a}_i \rangle = \langle a_p, a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_{i-1} \vee a_{i+1} \vee \dots \vee a_p \rangle = 0. \quad (38)$$

З (38) і (32) випливає, що $\langle a_p, a_1 \rangle \vee \langle a_p, a_2 \rangle \vee \dots \vee \langle a_p, a_{i-1} \rangle \vee \langle a_p, a_{i+1} \rangle \vee \dots \vee \langle a_p, a_p \rangle = 0$, що справедливо тільки в тому випадку, коли кожний з диз'юнктив цього вираження дорівнює нулю. Отже, для будь-якого базису досконалого логічного простору $\langle a_p, a_j \rangle = 0, i \neq j$. Це означає, що будь-який базис досконалого логічного простору є ортогональною системою.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

1. За яких умов довільна непуста множина елементів L називається векторним логічним простором над деяким логічним полем скалярів G ?
2. Яким законам задовольняють операції диз'юнкції й множення скаляра на вектор?
3. Яким чином будується предикатний логічний простір або простір m -місних предикатів над скалярним полем n -місних предикатів?
4. Які операції було введено для елементів логічного простору?
5. Які вираження називаються лінійними комбінаціями логічних векторів?
6. Наведіть приклад предикатного логічного простору.
7. Що називається базисом логічного простору?
8. Що є визначальною особливістю досконалого і недосконалого логічних просторів?

9. Який вигляд мають матриця переходу до нового базису і матриця зворотного переходу?
10. Який зв'язок існує між матрицею переходу до нового базису і матрицею зворотного переходу?
11. Яким є повний простір m -місних предикатів, заданий над скалярним полем n -місних предикатів, $n < m$?
12. Побудуйте базис довільного предикатного логічного простору L .
13. Яку розмірність має досконалий булевий і предикатний логічний простір?
14. Для яких логічних просторів можна ввести операції кон'юнкції, заперечення і згортки логічних векторів і чому? Наведіть приклади цих операцій для предикатного логічного простору.
15. Що можна стверджувати відносно цих операцій щодо вибору базису?
16. Які властивості щодо цих операцій виконуються для будь-яких логічних векторів $l, g, h \in L$?
17. Як можна представити заперечення базисного вектора логічного простору за допомогою решти базисних векторів цього простору?

ЛОГІЧНІ ОПЕРАТОРИ

3.1. Поняття логічного оператора

Розглянемо логічні простори L й D над деяким полем логічних скалярів. **Логічним оператором** [25], що відображає простір L у простір D , називається такий закон, що кожному вектору із простору L ставить у відповідність вектор із простору D . Позначимо логічні оператори буквами A, B і т.д. і запишемо як $A: L \rightarrow D$. Якщо l – вектор з логічного простору L , то вектор із простору D , що виходить із l за допомогою впливу на нього логічним оператором A , позначимо через Al . Вектор Al назвемо **образом** вектору l при операторі A , а вектор l назвемо **прообразом** вектору Al [10]. Сукупність всіх векторів $l \in L$ таких, що $Al=d$, назвемо **повним прообразом** вектору d у просторі L щодо оператора A [26]. Сукупність всіх векторів $d \in D$ таких, що $Al=d$, назвемо **повним образом** вектору l у просторі D щодо оператора A [27]. Логічний оператор $A: L \rightarrow D$ назвемо **взаємно-однозначним**, якщо кожен вектор $d \in D$ має один і тільки один прообраз $l \in L$. Оператори A й B назвемо **рівними**, якщо для будь-якого вектору $l \in L$ справедлива рівність $Al=Bl$.

Нехай є логічні оператори A й B такі, що $A: L \rightarrow D, B: D \rightarrow V$. Оператор A переводить довільний логічний вектор $l \in L$ у вектор Al . Якщо отриманий вектор перетворити за допомогою оператора B , то одержимо вектор $B(Al)$. Оператор, що переводить вектор l безпосередньо у вектор $B(Al)$, будемо називати **добутком** A й B і позначати BA [10, 28]. Таким чином, з визначення випливає, що $(BA)l=B(Al)$. Якщо $A, B: L \rightarrow L$ і до вектору l спочатку застосувати оператор B , а потім A , то отриманий вектор $A(Bl)$ може й не збігатися з вектором $B(Al)$. Інакше кажучи, добуток логічних операторів залежить від порядку співмножників. Нехай A, B, C – довільні логічні оператори $A: L \rightarrow D, B: D \rightarrow V, C: V \rightarrow W$, а l – вектор із простору L . Тоді, відповідно до визначення, маємо: $(C(BA))l=C((BA)l)=C(B(Al))$, $((CB)A)l=(CB)(Al)=C(B(Al))$, звідки випливає, що $C(BA)=(CB)A$, тобто виконується властивість асоціативності добутку операторів. Добуток r співмножників, рівних операторові $A: L \rightarrow L$, назвемо **r -тим ступенем оператора** A і позначимо через A^r . Дії зі ступенями підкоряються звичайним правилам. Якщо деякий логічний оператор кожному вектору ставить у відповідність той же самий вектор, то такий оператор будемо називати **одиничним** [22] і позначати через E . Отже, для будь-якого логічного вектора $l \in L$ має місце співвідношення $El=l$. Нехай $A: L \rightarrow D$ – деякий логічний оператор. З того, що $(AE)l=A(E)l=Al, (EA)l=E(Al)=Al$ випливає, що $EA=AE=A$. Якщо для логічного оператора $A: L \rightarrow L$ існує такий логічний оператор $B: L \rightarrow L$, що

$$AB=E, BA=E, \quad (39)$$

то B назвемо **зворотним стосовно** A , а сам оператор A назвемо **оборотним**. Будь-який оборотний логічний оператор логічного простору L має тільки один зворотний.

Логічний оператор, зворотний стосовно A , будемо позначати A^{-1} . У вираження (39) оператори A й B входять симетрично. Отже, якщо B є зворотним стосовно A , то A є зворотним стосовно B , тобто $(A^{-1})^{-1}=A$. Умовимся вважати по визначенню, що $A^0=E, A^{-s}=(A^{-1})^s, (s=1, 2, \dots)$.

Логічний оператор $A: L \rightarrow D$ назвемо **лінійним**, якщо він добуток логічного вектору $l \in L$ на логічний скаляр α переводить у добуток того ж скаляра на відповідний вектор $Al \in D$, а диз'юнкцію векторів із простору L переводить у диз'юнкцію відповідних їм векторів із простору D . Іншими словами, логічний оператор $A: L \rightarrow D$ є лінійним, якщо для будь-яких

векторів $l, g \in L$ і будь-якого логічного скаляра α виконуються властивість однорідності $A(\alpha l) = \alpha(A l)$ і властивість адитивності [29, 30] $A(l \vee g) = A l \vee A g$. Якщо для властивості однорідності покласти $\alpha = 0$, то одержимо: $A 0 = 0$. Іншими словами, будь-який лінійний логічний оператор переводить нульовий вектор у нульовий. Із властивостей однорідності й адитивності випливає наступна властивість лінійних логічних операторів: якщо A – лінійний логічний оператор, то $A(\alpha_1 l_1 \vee \alpha_2 l_2 \vee \dots \vee \alpha_i l_i) = \alpha_1(A l_1) \vee \alpha_2(A l_2) \vee \dots \vee \alpha_i(A l_i)$, де $l_1, l_2, \dots, l_i \in L$, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i$ – довільні елементи поля логічних скалярів. Для пари векторів l, g логічного простору L справедлива рівність $E(\alpha l \vee \beta g) = \alpha l \vee \beta g = \alpha(E l) \vee \beta(E g)$, звідки випливає, що одиничний оператор над логічним простором L є лінійним. Оператор, що переводить кожен вектор простору L у нульовий, назовемо нульовим і позначимо через O . Якщо лінійний оператор A взаємо-однозначний, то назовемо його ізоморфізмом, а простір образів D і простір прообразів L назовемо ізоморфними.

Теорема 10. Формулювання. Нехай $a_1, a_2, \dots, a_p$ – який-небудь базис досконалого логічного простору L . Візьмемо в просторі D довільні вектори $b_1, b_2, \dots, b_p$. Тоді існує один і тільки один лінійний логічний оператор $A: L \rightarrow D$, що переводить вектори $a_1, a_2, \dots, a_p$ у вектори $b_1, b_2, \dots, b_p$ відповідно.

3.2. Матриці лінійних логічних операторів

Побудуємо матрицю лінійного логічного оператора $A: L \rightarrow D$ [10, 13]. Для цього в просторі D візьмемо q базисних векторів $d_1, d_2, \dots, d_q$ і розкладемо образи векторів $a_1, a_2, \dots, a_p$ по базису простору D :

[illegible]

Матриця

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{q1} & \alpha_{q2} & \dots & \alpha_{qp} \end{pmatrix},$$

що складається з координатних стовпців векторів $Aa_1, \dots, Aa_p$, називається **матрицею оператора A** у базисах $a_1, a_2, \dots, a_p$ й $d_1, \dots, d_q$. Отже, у заданих базисах кожному лінійному логічному операторові відповідає певна матриця. Ця відповідність є взаємо-однозначною тільки в тому випадку, якщо розглянутий логічний простір образів досконалий. У недосконалому логічному просторі немає одиничності розкладання векторів по базису, а це веде до того, що операторові A може відповідати кілька матриць. Будемо розглядати саме досконалі логічні простори. У цьому випадку, знаючи матрицю A , можна знайти вектори $b_1, b_2, \dots, b_p$, а потім у силу того, що існує єдиний лінійний логічний оператор $A: L \rightarrow D$, що переводить базис простору L у базис простору D , побудувати лінійний логічний оператор A , що переводить вектори $a_1, a_2, \dots, a_p$ у вектори $b_1, b_2, \dots, b_p$ відповідно. Цей оператор єдиний, звідки впливає взаємо-однозначність відповідності лінійного логічного оператора A і матриці A , що відповідає йому. Отже, лінійний логічний оператор $A: L \rightarrow D$ однозначно визначається сукупністю образів якого-небудь базису досконалого простору L .

Як **приклад** розглянемо описаний вище предикатний простір $\mathcal{Q}$. Для обраного простору базисом є набір Q_6, Q_9 . Розглянемо оператор A , що перетворить базисні вектори за правилом:

$$\begin{aligned} A Q_6 &= P_2 Q_6 \vee P_1 Q_9 = (1, 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vee (0, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = Q_5, \\ A Q_9 &= P_1 Q_6 \vee P_2 Q_9 = (0, 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vee (1, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Q_{10}. \end{aligned}$$

Тоді матриця

$$A = \begin{pmatrix} P_2 & P_1 \\ P_1 & P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,0) & (0,1) \\ (0,1) & (1,0) \end{pmatrix} \quad (40)$$

є матрицею оператора A у базисі Q_6, Q_9 .

У силу рівності (26), для булевих просторів будь-якій матриці над полем $G = \{0, 1\}$ відповідає деякий лінійний логічний оператор. Для предикатних просторів це не так. У випадку таких просторів на розмірність матриць, що відповідають лінійним логічним операторам, накладається наступне обмеження. Припустимо, що деяка логічна матриця $A_{q \times p}$ над полем логічних скалярів, елементами якого є скінченні предикати арності n , є матрицею деякого логічного оператора A , що переводить вектори предикатного простору W розмірності p у вектори предикатного простору V розмірності q . У силу рівності (24), для p й q повинні виконуватися наступні співвідношення:

$$p = k_{m_p - n} \cdot \dots \cdot k_{m_p}, \quad (41)$$

$$q = k_{m_q - n} \cdot \dots \cdot k_{m_q}, \quad (42)$$

де m_p й m_q – арності предикатів, що є векторами просторів W й V відповідно. Отже, множина матриць лінійних логічних операторів у предикатному просторі є підмножиною множини всіх логічних матриць над предикатним скалярним полем. Потужність цієї підмножини для кожних конкретних простору прообразів W і простору образів V дорівнює $(2^{k_1 k_2 \dots k_n})^{pq}$, де p й q – розмірності просторів W й V відповідно. У випадку $k_1 = \dots = k_n = k$, як випливає з (25), співвідношення (41) і (42) набувають вигляду

$$p = k^{m_p - n}, \quad (43)$$

$$q = k^{m_q - n}, \quad (44)$$

тобто у випадку, коли потужності алфавітів, над якими задані аргументи предикатів, що є елементами розглянутого логічного простору, рівні, вищевказана логічна матриця $A_{q \times p}$ є матрицею описаного лінійного логічного оператора в тому і тільки в тому випадку, коли кількість її рядків і кількість її стовпців являють собою деяку цілу ступінь числа k . Потужність множини матриць лінійних логічних операторів у цьому випадку дорівнює $2^{k^{pq}}$. Нульовий оператор має нульову матрицю, одиничному операторові відповідає одинична матриця.

Нехай в обраному базисі $a_1, a_2, \dots, a_p$ довільний вектор $l \in L$ має координати $\xi_1, \dots, \xi_p$, а елементами матриці A , що відповідає лінійному логічному операторові A , є логічні скаляри α_{ji} ($i=1, \dots, p, j=1, \dots, q$). Тоді можна записати наступні рівності:

$$\begin{aligned} l &= \xi_1 a_1 \vee \dots \vee \xi_p a_p, \\ A l &= \xi_1 (A a_1) \vee \dots \vee \xi_p (A a_p). \end{aligned} \quad (45)$$

Нехай $b_1, \dots, b_q$ базис простору D . Тоді маємо:

$$A a_i = \alpha_{i1} b_1 \vee \dots \vee \alpha_{iq} b_q, \quad (i=1, \dots, p). \quad (46)$$

Підставляючи рівності (46) у вираження (45), одержуємо

$$Al = (\xi_1 \alpha_{11} \vee \dots \vee \xi_p \alpha_{1p}) b_1 \vee \dots \vee (\xi_1 \alpha_{q1} \vee \dots \vee \xi_p \alpha_{qp}) b_q,$$

звідки випливає, що координатний стовпець вектору Al буде мати вигляд $[Al] = (\xi_1 \alpha_{11} \vee \dots \vee \xi_p \alpha_{1p} \dots \xi_1 \alpha_{q1} \vee \dots \vee \xi_p \alpha_{qp})^T = A[l]$, де $A[l]$ є добуток логічної матриці A на координатний стовпець вектора l , тобто $[Al] = A[l]$. Для булевих просторів цей результат можна сформулювати як теорему про загальний вид лінійного логічного оператора [22, 31].

Теорема 11. Формулювання. Будь-який лінійний логічний оператор $A: L \rightarrow D$ можна представити у вигляді $[Al]_j = \exists i \in I \alpha_{ji} \xi_i$, $I = \{1, \dots, p\}$, $J = \{1, \dots, q\}$, $j \in J$, де $[l] = (\xi_1 \xi_2 \dots \xi_p)^T$ довільний вектор простору L , $[Al]_j$ j -я координата вектору Al у базисі простору D .

3.3. Деякі види лінійних логічних операторів.

Лінійний логічний оператор $A: L \rightarrow L$ назовемо **оператором множення вектору на скаляр**, якщо він кожен вектор $l \in L$ переводить у вектор $\lambda l \in L$, де λ – довільний елемент із поля логічних скалярів [23]. Для поля $G = \{0, 1\}$ операторами множення вектору на скаляр є тільки одиничний і нульовий оператори, які переводять вектор $l \in L$ у той же вектор $l \in L$ ($\lambda = 1$) і в нульовий вектор ($\lambda = 0$) відповідно. У випадку предикатного простору Q ситуація ускладнюється. Візьмемо $\lambda = P_1 = (0, 1)$. Образами базисних векторів Q_0 й Q_1 будуть вектори

$$AQ_0 = (0, 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Q_2,$$

$$AQ_1 = (0, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Q_1,$$

а матриця оператора A запишеться у вигляді

$$A = \begin{pmatrix} P_1 & P_0 \\ P_0 & P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) \\ (0,0) & (0,1) \end{pmatrix}.$$

Квадратну логічну матрицю A назовемо **скалярною** або **діагональною** [13, 14], якщо вона має такий вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix},$$

тобто її елементи підкоряються співвідношенню:

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \lambda, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Якщо лінійний логічний оператор $A: L \rightarrow L$ є оператором множення вектора на скаляр, то в булевих і предикатних логічних просторах йому відповідає скалярна логічна матриця.

Розглянемо логічний оператор $A: L \rightarrow D$. Якщо для нього виконується властивість адитивності, а також властивості

$$A(l \wedge g) = Al \wedge Ag, \quad (47)$$

$$A(i) = \overline{Ai}, \quad (48)$$

те такий оператор будемо називати **гомоморфним відображенням**, або **гомоморфізмом**, L в D [32, 33].

[illegible]

[illegible]

Привласнимо кожному розряду елементів скалярного поля логічних просторів L й D деякий індекс $v=1, \dots, k_1 \dots k_n$, де n – арність предикатів, що є елементами поля скалярів, а k_s кількість символів в алфавіті, над яким заданий аргумент x_s цих предикатів. Позначимо число $k_1 \dots k_n$ через f . Тоді кожна рівність систем (53) і (54) розпадається на f рівностей

[illegible]

а умови, яким підкоряється матриця оператора A , перепишуться у вигляді

$$\begin{cases} \alpha_{11}^v \vee \dots \vee \alpha_{1p}^v = 1 \\ \dots\dots\dots, \quad v=1, \dots, f, \\ \alpha_{q1}^v \vee \dots \vee \alpha_{qp}^v = 1 \end{cases} \quad (55)$$

$$\alpha_{ir}^v \wedge \alpha_{it}^v = 0, \quad i=1, \dots, q; \quad r, t=1, \dots, p, \quad (56)$$

де $\mu_i^{\nu_i} \delta_i^{\nu_i} \alpha_{ij}^{\nu_i}$ ($j=1, \dots, p$), $\xi_i^{\nu_i}$ приймають значення із двоелементної множини $G=\{0, 1\}$. Для того, щоб лінійний логічний оператор A зберігав операцію заперечення, необхідне виконання умови $\mu_i^{\nu_i}=\delta_i^{\nu_i}$, тобто $\alpha_{i1}^{\nu_i} \xi_1^{\nu_i} \vee \dots \vee \alpha_{ip}^{\nu_i} \xi_p^{\nu_i} = \alpha_{i1}^{\nu_i} \xi_1^{\nu_i} \vee \dots \vee \alpha_{ip}^{\nu_i} \xi_p^{\nu_i}$, що можна записати у вигляді наступної системи:

$$\begin{cases} (\exists j \alpha_{ij}^v \overline{\xi_j^v}) \supset (\forall t \alpha_{it}^v \overline{\xi_t^v}) \\ (\forall j \alpha_{ij}^v \overline{\xi_j^v}) \supset (\exists t \alpha_{it}^v \overline{\xi_t^v}) \end{cases}, j, t=1, \dots, p. \quad (57)$$

Виконання кожного з умов системи (57) впливає з (55) і (56), тобто для лінійного логічного оператора A виконується властивість (48). Отже, лінійний логічний оператор A , елементи матриці якого підкоряються умовам (50) і (52), є гомоморфізмом. Теорему доведено.

Для того, щоб лінійний логічний оператор був гомоморфізмом, вимоги до нього можна обмежити тільки властивістю (48), тому що властивість адитивності виконується автоматично в силу того, що оператор є лінійним, а із властивості адитивності, властивості (48) і законів де Моргана випливають співвідношення $A/\bar{A} \wedge g = \bar{A} \wedge \bar{A}g = \bar{A} \vee Ag$, $\bar{A} \vee Ag = A/(\bar{A} \vee g) = A/(\sqrt{g})$, $A/(\sqrt{g}) = A/(\bar{A} \wedge \bar{g})$, звідки і випливає властивість (47) [34].

3.4. Деякі дії з лінійними логічними операторами

Виберемо в логічному просторі L два лінійних логічних оператори A і B і довільний вектор l . Вище було введене поняття добутку логічних операторів A і B [35]. Відповідно до визначення, $(BA)l = B(A l)$. Виходячи із цієї рівності, маючи на увазі, що α і β – деякі логічні скаляри, а $l, g \in L$, можна записати наступне: $(BA)(\alpha l \vee \beta g) = B(A(\alpha l \vee \beta g))$. У силу лінійності операторів A і B мають місце рівності: $B(A(\alpha l \vee \beta g)) = B(\alpha(A l) \vee \beta(A g)) = B(\alpha A l) \vee B(\beta A g)$. Іншими словами, $(BA)(\alpha l \vee \beta g) = \alpha(BA)l \vee \beta(BA)g$, звідки випливає, що добуток лінійних логічних операторів також є лінійним оператором. Позначимо через C матрицю добутку лінійних логічних операторів A і B . Вона буде дорівнювати добутку матриць A і B , що відповідають операторам A і B відповідно, тобто $C = BA$.

Розглянемо тепер оборотний логічний оператор A і зворотний стосовно нього логічний оператор A^{-1} . У випадку лінійного логічного оператора $A: L \rightarrow L$ логічний оператор $A^{-1}: L \rightarrow L$ також є лінійним. Для доказу цього твердження покладемо $A^{-1}a = l$, $A^{-1}b = d$, де a й b – деякі довільні вектори. У силу того, що логічний оператор A є лінійним, справедлива рівність $A(\alpha l \vee \beta d) = \alpha A l \vee \beta A d = \alpha a \vee \beta b$, звідки випливає, що

$$A^{-1}(\alpha a \vee \beta b) = A^{-1}A(\alpha l \vee \beta d) = \alpha l \vee \beta d = \alpha A^{-1}a \vee \beta A^{-1}b,$$

тобто оператор A^{-1} є лінійним. Якщо операторові A відповідає матриця A , а зворотному йому операторові A^{-1} – деяка логічна матриця B , то зі співвідношення $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ безпосередньо випливає, що $AB = BA = E$, що означає, що $B = A^{-1}$. Іншими словами, матриця, що відповідає логічному операторові, зворотному до оператора A , є зворотною стосовно матриці A . У силу того, що оборотними є тільки ортогональні логічні матриці, логічний оператор буде мати зворотний у тім і тільки в тому випадку, коли йому відповідає ортогональна матриця. Візьмемо в логічному просторі L довільний вектор l і застосуємо до нього оператор A , а потім отриманий новий вектор помножимо на логічний скаляр α , одержавши в результаті деякий вектор d . Оператор, що переводить вектор l у вектор d , назовемо добутком логічного скаляра α на логічний оператор A і позначимо через αA . Матриця, що відповідає добутку логічного скаляра α на лінійний логічний оператор A , дорівнює добутку цього скаляра на матрицю, що відповідає цьому логічному операторові. Для добутку логічного скаляра на лінійний логічний оператор виконуються наступні співвідношення: $0 \cdot A = O$, $1 \cdot A = A$, $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$, $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

Візьмемо деякі оператори A і B логічного простору L і кожному вектору $l \in L$ поставимо у відповідність вектор $A l \vee B l$. Логічний оператор, що переводить вектор l у вектор $A l \vee B l$, назовемо диз'юнкцією логічних операторів A і B і позначимо через $A \vee B$. Отже, відповідно до визначення, $(A \vee B)l = A l \vee B l$. Диз'юнкція двох лінійних логічних операторів також є лінійним логічним оператором. Матриці диз'юнкції лінійних логічних операторів відповідає диз'юнкція матриць, що відповідають операторам, що диз'юнктуються. Для диз'юнкції лінійних логічних операторів справедливі наступні співвідношення: комутативності $A \vee B = B \vee A$, асоціативності $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$, дистрибутивності щодо множення на скаляр $\alpha(A \vee B) = \alpha A \vee \alpha B$, дистрибутивності щодо диз'юнкції скалярів $(\alpha \vee \beta)A = \alpha A \vee \beta A$, закон нуля $A \vee O = A$, закон ідемпотентності $A \vee A = A$, лівої й правої дистрибутивності $A(B \vee C) = AB \vee AC$, $(A \vee B)C = AC \vee BC$.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

1. Дайте визначення логічному оператору і поняттям, з ним пов'язаним.
2. За яких умов є взаємо-однозначна відповідність між лінійним логічним оператором і матрицею, що йому відповідає?
3. Яке обмеження накладається на розмірність матриць, що відповідають лінійним логічним операторам предикатного логічного простору?
4. Що таке гомоморфізм?
5. Сформулюйте необхідну і достатню умову того, щоб лінійний логічний оператор був гомоморфізмом.
6. Від якої вимоги до оператора можна відмовитися, не порушуючи його приналежності до гомоморфізмів і чому?
7. Перелічіть дії, які можна проводити над лінійними логічними операторами.
8. Які матриці відповідають результатам цих дій над лінійними логічними операторами?

МОЖЛИВІ АЛГЕБРАЇЧНІ ІНТЕРПРЕТАЦІЇ БУЛЕВОЇ І ПРЕДИКАТНОЇ МОДЕЛЕЙ ВЕКТОРНИХ ЛОГІЧНИХ ПРОСТОРІВ І ЇХНЄ ПРАКТИЧНЕ ЗНАЧЕННЯ

Одним з окремих випадків логічної алгебри є алгебра двійкових кодів. При такій інтерпретації логічної алгебри беремо p -компонентні набори $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ цифр із двоелементної множини $G = \{0, 1\}$. Їм відповідають вектори булевого простору розмірності p . При цьому нульовому векторові відповідає нульовий набір $(0, \dots, 0)$, а одиничному – одиничний набір $(1, \dots, 1)$. У ролі базисних векторів $a_1, \dots, a_p$ використовуються всілякі двійкові набори, до складу яких входить по одній одиниці: $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$ [19]. Під диз'юнкцією базисних векторів $a_{i_1} \vee a_{i_2} \vee \dots \vee a_{i_r}$ в алгебрі двійкових кодів розуміється набір, у якого на $i_1, i_2, \dots, i_r$ -их місцях розташовані одиниці, а на інших місцях – нулі. Таким чином, кожен двійковий код можна єдиним чином подати у вигляді лінійної комбінації базисних кодів. Диз'юнкція векторів булевого простору відповідає диз'юнкції відповідних двійкових кодів: $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \vee (\beta_1, \dots, \beta_p) = (\alpha_1 \vee \beta_1, \dots, \alpha_p \vee \beta_p)$. Кон'юнкції векторів при двійково-кодовій інтерпретації логічної алгебри відповідає кон'юнкція двійкових наборів: $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \wedge (\beta_1, \dots, \beta_p) = (\alpha_1 \wedge \beta_1, \dots, \alpha_p \wedge \beta_p)$, а запереченню вектору – заперечення відповідного набору: $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$. Роль скалярного поля, над яким задано розглянутий простір, грає двоелементна множина $G = \{0, 1\}$. Легко переконатися, що всі аксіоми логічної алгебри в алгебрі a -компонентних двійкових кодів виконуються.

До алгебри булевих функцій приходимо, розглядаючи простір m -місних предикатів на алфавіті $K^m = \{0, 1\}^m$, заданий над скалярним полем $G = \{0, 1\}$. Усього при цьому алгебра булевих функцій містить 2^{2^m} векторів. Нульовому векторові відповідає m -місна булева функція, тотожно рівна нулеві, а одиничному – m -місна булева функція, тотожно рівна одиниці. Очевидно, що розмірністю логічного простору при такій його інтерпретації є число 2^m . У ролі базисних векторів виступають різні булеві функції від m змінних, що звертаються в одиницю лише на одному наборі значень аргументів. Очевидно, що будь-яка булева функція може бути єдиним чином подана у вигляді лінійної комбінації базисних функцій. Усього в алгебрі m -місних булевих функцій утримується 2^m різних базисних векторів [19]. У ролі операцій диз'юнкції, кон'юнкції і заперечення векторів виступають операції диз'юнкції, кон'юнкції і заперечення булевих функцій [36].

Розглянемо тепер алгебру множин. У цьому випадку роль векторного простору грає множина усіх підмножин деякого універсуму U . Роль нульового вектору грає порожня множина $\emptyset$, а роль одиничного – універсум U . Як базисні вектори можна взяти систему всіх одноелементних підмножин U універсуму. Скалярним полем є двоелементна множина $G = \{0, 1\}$, причому $0 \cdot U = \emptyset$, $1 \cdot U = U$. Роль диз'юнкції векторів при теоретико-множинній інтерпретації логічної алгебри грає об'єднання множин, роль кон'юнкції – перетинання множин, роль заперечення – доповнення множини до універсуму U . Очевидно, що розмірність простору при цьому буде дорівнювати потужності універсуму U [37, 38, 39].

Алгеброю логічного типу є також алгебра ідей [40]. Як простір векторів можна взяти простір m -місних предикатів, заданих на декартовому добутку $K_1 \times \dots \times K_m$. Множина векторів такого простору служить носієм алгебри ідей L . Як скалярне поле, над яким заданий розгля-

нутий простір, виступає двоелементна множина $G=\{0, 1\}$. Нульова ідея відповідає предикатові, тотожно рівному нулеві, тобто нульовому векторові, а одинична ідея – предикатові, тотожно рівному одиниці, тобто одиничному векторові. Кількість базисних ідей, тобто розмірність логічного простору в цьому випадку буде дорівнює $p=k_1 \cdot \dots \cdot k_m$, де k_i – потужність множини K_i . Іншими словами, у ролі базисних ідей виступають предикати, що звертаються в одиницю тільки в одному розряді, тобто при єдиному наборі v значень аргументів [19]:

$$Q(x_1, \dots, x_m) = \begin{cases} 1, & (x_1, \dots, x_m) = v \\ 0, & (x_1, \dots, x_m) \neq v \end{cases}.$$

Диз'юнкції, кон'юнкції і запереченню векторів такого логічного простору відповідають операції диз'юнкції [19], кон'юнкції і заперечення ідей [24].

Алгеброю логічного типу є також реляційна алгебра. Як простір векторів можна розглядати безліч усіх m -арних відносин R_m , заданих на деякому декартовому добутку $K_1 \times \dots \times K_m$. Одиничний вектор при цьому відповідає універсальному відношенню U_m , а нульовий вектор – нульовому відношенню O_m [41]. Диз'юнкції, кон'юнкції і запереченню векторів відповідає об'єднання і перетинання сумісних відносин [40] і додаткове відношення відповідно. При побудові реляційної моделі даних відносини задаються таблично [42, 43]. Кортжами при цьому служать ті набори значень аргументів, при яких значення відповідного розглянутому відношенню m -місного предиката дорівнює одиниці. Як скалярне поле, над яким задане розглянутий простір m -арних відносин, можна взяти безліч усіх n -арних відносин, $n < m$.

Принцип побудови базису для такого простору той же, що і для побудови базису простору m -місних предикатів над скалярним полем n -місних предикатів. У випадку простору відносин фіксуються значення останніх $m-n$ атрибутів, і в таблиці відносин записуються відповідні кортежі і тільки вони. Побудовані таким чином відносини приймаються як базисні вектори простору. Аналогом операції множення вектору на скаляр у реляційній алгебрі служить операція вибору, що дозволяє будувати «горизонтальну» підмножину відносини, тобто підмножину кортежів усередині відношення, що володіють заданою властивістю, тобто задовольняючих визначеному предикатові [39, 42]. Очевидно, що при такому виборі базису будь-яке відношення R_m може бути єдиним образом подано у вигляді лінійної комбінації базисних відносин. Очевидно, що розмірністю такого логічного простору m -арних відносин є число $p=k_{n+1} \cdot \dots \cdot k_m$, де $k_i = K_i$, $i=1, \dots, m$.

Алгеброю логічного типу є також алгебра скінченних предикатів довільного порядку [5]. Як логічні вектори розглянемо множину усіляких скінченних предикатів m -го порядку $Q(x_{01}, \dots, x_{0t_0}, x_{11}, \dots, x_{1t_1}, \dots, x_{m-1,1}, \dots, x_{m-1,t_{m-1}})$, заданих на декартовому добутку $K_0^{t_0} \times K_1^{t_1} \times \dots \times K_{m-1}^{t_{m-1}}$. Потужність множини K_i позначимо через k_i . Нульовому векторові відповідає предикат, що тотожно дорівнює нулю, а одиничному векторові – предикат, що тотожно дорівнює одиниці. Диз'юнкції, кон'юнкції і запереченню векторів відповідають операції диз'юнкції, кон'юнкції і заперечення відповідних предикатів m -го порядку. Скалярне поле, над яким заданий розглянутий простір, являє собою повний набір скінченних предикатів n -го порядку, причому $n < m$, заданих на декартовому добутку $K_0^{t_0} \times K_1^{t_1} \times \dots \times K_{n-1}^{t_{n-1}}$. Операція множення вектору на скаляр для заданого таким чином логічного простору проводиться по тому ж правилу, що і для логічних просторів m -місних предикатів першого порядку, заданих над скалярним полем n -місних предикатів першого порядку.

Кількість векторів розглянутого простору дорівнює $2^{k_0^{t_0} k_1^{t_1} \dots k_{m-1}^{t_{m-1}}}$, а число елементів скалярного поля – $2^{k_0^{t_0} k_1^{t_1} \dots k_{n-1}^{t_{n-1}}}$. Отже, з урахуванням формули (24), розмірність розглянутого

простору буде дорівнювати $p = k_n^{t_n} k_{n+1}^{t_{n+1}} \dots k_{m-1}^{t_{m-1}}$. У якості базисних беруться предикати, що підкоряються умові, аналогічній тій, що була введена для базисних векторів простору предикатів першого порядку з тією різницею, що у випадку простору предикатів m -го порядку при побудові базисних векторів фіксується не довільне число змінних, а всі змінні з деякої множини рівнів змінних $J = \{t_0, \dots, t_{m-1}\}$, тобто всі змінні деяких рівнів, кількість яких, тобто потужність множини J , дорівнює $(m-n)$. Очевидно, що при такому виборі базису будь-який предикат m -го порядку може бути єдиним образом представлений у вигляді лінійної комбінації базисних предикатів.

Розглянемо тепер алгебру предикатних операцій. Як простір векторів розглянемо простір предикатних операцій M^m розмірності m [7]. Предикатними змінними при цьому служать t -місні предикати $X_i(x_1, \dots, x_i)$, $i=1, \dots, m$, задані на декартовому добутку $K_1 \times \dots \times K_p$, де $-K_j = k_j$, $j=1, \dots, t$. Потужністю універсуму предикатів служить число $2^{k_1 \dots k_t}$. Однак, з іншого боку, універсум предикатів являє собою алфавіт, над яким задані вектори розглянутого простору. У ролі операцій диз'юнкції, кон'юнкції і заперечення векторів виступають операції диз'юнкції, кон'юнкції і заперечення відповідних предикатних операцій. Роль нульового вектору грає константна предикатна операція, значенням якої є предикат $P(x_1, \dots, x_t) = 0$, що тотожно дорівнює нулеві, а роль одиничного вектору – константна предикатна операція, значенням якої є предикат $P(x_1, \dots, x_t) = 1$, що тотожно дорівнює одиниці. Як скалярне поле можна взяти простір предикатних операцій M^n розмірності n , $n < m$.

Кількість векторів розглянутого логічного простору дорівнює $2^{(2^{k_1 k_2 \dots k_t})^n}$. Кількість елементів скалярного поля дорівнює $2^{(2^{k_1 k_2 \dots k_t})^n}$. Отже, розмірність побудованого таким чином логічного простору дорівнює $p = (2^{k_1 k_2 \dots k_t})^{m-n}$. Операція множення вектору на скаляр у такому просторі проводиться за правилом, аналогічним тому, що було введено для простору m -місних предикатів, заданого над скалярним полем n -місних предикатів. Умова, якій підкоряються базисні предикатні операції, у такому логічному просторі аналогічна тій, якій підкорялися базисні вектори в просторі m -місних предикатів, з тією різницею, що фіксуються конкретні значення не предметних змінних, а конкретні значення деяких $(m-n)$ предикатних змінних. Будь-яка предикатна операція при такому виборі базису може бути єдиним образом подана у вигляді лінійної комбінації базисних предикатних операцій.

З усього вищесказаного випливає, що логічна алгебра являє собою абстрактний еквівалент розглянутих алгебр. Отже, незалежно від того, у вигляді елементів якої саме з розглянутих алгебр подана інформація про ПО, що моделюється, її можна розглядати як подану елементами булевої або предикатної моделей векторних логічних просторів і, отже, обробляти засобами логічної алгебри [44].

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

1. Наведіть можливі алгебраїчні інтерпретації булевої і предикатної моделей векторних логічних просторів.
2. Які двійкові коди можна розглядати в якості базисних векторів?
3. Скільки векторів містить алгебра булевих функцій?
4. Чи є простір булевих функцій досконалим?
5. Яку роль відіграють конститuentи одиниці в алгебрі булевих функцій?

6. Що є розмірністю логічного простору, якщо за інтерпретацію взяти алгебру множин?
7. Чому дорівнює розмірність логічного простору в алгебрі ідей?
8. Що є логічними векторами в реляційній алгебрі?
9. Який принцип побудови базису логічного простору в реляційній алгебрі?
10. Чому дорівнює розмірність логічного простору в реляційній алгебрі?
11. Чому дорівнює кількість векторів повного логічного простору в алгебрі скінченних предикатів довільного порядку?
12. Чому дорівнює кількість елементів скалярного поля в алгебрі скінченних предикатів довільного порядку?
13. Чому дорівнює розмірність логічного простору в алгебрі предикатних операцій?

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Шабанов-Кушнаренко Ю.П. Теория интеллекта. Математические средства.- Харьков: Вища школа, 1984. – 144с.
2. Новиков П.С. Элементы математической логики. – М.: Наука, 1973.
3. Глушков В.М. Введение в кибернетику. – К.: изд.АН УССР, 1964.
4. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. – М.: Наука, 1979.
5. Шабанов-Кушнаренко Ю.П. Теория интеллекта. Проблемы и перспективы. – Харьков: Вища школа, 1987. – 160с.
6. Дударь З.В., Мельникова Р.В, Шабанов-Кушнаренко Ю.П. Отношения как объекты формульного описания // АСУ и приборы автоматики. 1998. Вып. 107. С. 68-77.
7. Дударь З.В., Кравец Н.С., Шабанов-Кушнаренко Ю.П. О фундаментальной алгебре предикатных операций // Проблемы бионики. – 1998. – Вып. 49. – С. 3 – 13.
8. Шабанов-Кушнаренко Ю.П. Логическая алгебра // Проблемы бионики. – 1991. – Вып.46. – С.310.
9. Клини С. Математическая логика.: Пер. с англ. – М.: Мир, 1973. – 480с.
10. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры.: Учебное пособие. – М.: Наука, 1975. – 400с.
11. Миркин Б.Г. Анализ качественных признаков и структур. – М.: Статистика, 1980. – 319с.
12. Миркин Б.Г. Анализ качественных признаков. – М.: Статистика, 1976. – 166с.
13. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 320с.
14. Ланкастер П. Теория матриц.: Перевод с англ. – М.: Наука, 1978. – 280с.
15. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 548с.
16. Гвоздинская Н.А., Дударь З.В., Пославский С.А., Шабанов-Кушнаренко Ю.П. О логических матрицах // Проблемы бионики. – 1998. – Вып. 48. – С. 12 – 22.
17. Поваров Г.Н. О групповой инвариантности булевых функций // Применение логики в науке и технике. – М.: АН СССР, 1960. – С. 263 – 340.
18. Гвоздинская Н.А., Дударь З.В., Пославский С.А., Шабанов-Кушнаренко Ю.П. О логических пространствах // АСУ и ПА. – 1997. – Вып. 106. – С. 21 – 30.
19. Кольцов В.П., Шабанов-Кушнаренко Ю.П. Об изоморфизме алгебр идей // АСУ и ПА. 1990. – Вып. 96. – С.71 – 77.
20. Шабанов-Кушнаренко Ю.П. Неполные и полные логические пространства // Проблемы бионики. – 1991. – Вып.46. – С.1017.
21. Ситников Д.Э. Методы решения уравнений алгебры конечных предикатов с параметрами и их применение в информационных системах. // Дис. ... канд. техн. наук: 05.25.05. Харьков, 1991. – 177с.
22. Ротин И.М. Линейные и билинейные логические операторы и их применение в автоматизированных информационных системах // Дис. ... канд. техн. наук: 05.25.05. – Харьков, 1994. – 163с.
23. Шилов Г.Е. Введение в теорию линейных пространств. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. – 304с.
24. Дюкарев М.Ю., Кольцов А.В., Шабанов-Кушнаренко Ю.П. Умножение и отрицание в алгебре идей. // АСУ и ПА. – 1992. – Вып.98. – С.10 – 17.

25. Гвоздинская Н.А. О логических операторах// Проблемы бионики. – 1998. – Вып.49. – С.90 – 94.
26. Мальцев А.И. Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970. – 392с.
27. Дударь З.В., Самуйлик И.Г., Шабанов-Кушнарченко Ю.П. Отображения как объекты формульного описания // Радиоэлектроника и информатика. – 1998. – Вып. 1(02). – С.56 – 61.
28. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.: Учебник. – М.: Наука, 1984. – 320с.
29. Пославский С.А., Походенко В.А., Шабанов-Кушнарченко С.Ю. Компараторная идентификация конечномерных линейных процессов // Проблемы бионики. – 1998. – Вып. 48. С.64 – 69.
30. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. – М.: Наука, 1971. – 271с.
31. Гвоздинская Н.А., Дударь З.В., Пославский С.А., Шабанов-Кушнарченко Ю.П. О матрицах линейных логических операторов // Проблемы бионики. – 1999. – Вып.50. – С.25 – 29.
32. Сикорский Р. Булевы алгебры.: Перевод с англ. – М.: Мир, 1969. – 376с.
33. Расева Е., Сикорский Р. Математика метаматематики.: Перевод с англ. – М.: Наука, 1972. – 592с.
34. Гвоздинская Н.А. Некоторые виды линейных логических операторов// АСУ и ПА. – 1999. – Вып.109. – С.12 – 19.
35. Гвоздинская Н.А., Дударь З.В., Пославский С.А., Шабанов-Кушнарченко Ю.П. О действиях с линейными логическими операторами // Радиоэлектроника и информатика. – 1998. – Вып.3(04). – С.128 130.
36. Шабанов-Кушнарченко Ю.П. Теория интеллекта. Технические средства. – Харьков: Вища школа, 1986. – 136с.
37. Колмогоров А.А., Драгалин А.Г. Введение в математическую логику.: Учебное пособие. – М.: Изд-во МГУ, 1982. – 120с.
38. Мендельсон Э. Введение в математическую логику.: Перевод с англ. – М. Наука, 1976. 320с.
39. Горбатов В.А. Основы дискретной математики.: Учебное пособие – М.: Высшая школа, 1986. – 311с.
40. Шабанов-Кушнарченко Ю.П. О понятии идеи // АСУ и ПА. – 1990. – Вып. 96. – С. 65 -71.
41. Оре О. Теория графов.: Пер. с англ. – М.: Наука, 1980. – 336с.
42. Кокорева Л.В., Перевозчикова О.Л., Ющенко Е.Л. Диалоговые системы и представление знаний. – Киев: Наукова думка, 1993. – 446с.
43. Атре Ш. Структурный подход к организации баз данных.: Пер. с англ./ Под ред. В.И. Будзко. – М.: Финансы и статистика, 1983. – 317с.
44. Гвоздинский А.Н., Якимова Н.А. Логико-алгебраические модели систем представления знаний // АСУ и ПА. – 2003. – Вып. 124. – С.43 – 47.

Навчальне видання

Якімова Наталія Анатоліївна

ЛОГІЧНА АЛГЕБРА

Методичний посібник

Підписано до друку 23.12.2019 р.
Електронне видання.
Ум. друк. арк. 2.33.

ФОП «Сухачов»

65039 м. Одеса, пр. Гагаріна, 25

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
суб'єктів видавничої справи ДК № 4362 від 13.07.2012 г.

Тел.: (098) 457-75-00, (048) 706-78-70, (067) 798-05-70, (094) 931-98-70

E-mail: osvita.odessa@gmail.com, www.svitknigi.com.ua

Видавництво «Освіта України»

04136, м. Київ, вул. Маршала Гречка, 13, оф. 218.

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів видавничої справи ДК №1957
від 23.04.2009 р.

Тел. +380 95 699-25-20 (МТС); +380 98 366-48-27 (Kyivstar)

E-mail: osvita2005@gmail.com, www.rambook.com.ua

Видавництво «Освіта України» запрошує авторів до співпраці з випуску
видань, що стосуються питань управління, модернізації, інноваційних
процесів, технологій, методичних і методологічних аспектів
освіти та навчального процесу у вищих навчальних закладах.

Надаємо всі види видавничих та поліграфічних послуг.