Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра методів математичної фізики

Дипломна робота

бакалавра

на тему: **«Антиплоська задача теорії пружності для складеної смуги з міжфазною тріщиною»**

«Antiplane problem of the theory of elasticity for a compound strip with an interfacial crack»

Виконав: студент денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика
Козінія Миколи Олександровича

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доц. Процеров Ю. С.
Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доц. Фесенко Г.О.

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ ___ від «_____» ________ р.
Завідувач кафедри
_____________ __________________

Захищено на засіданні ЕК № _______
Протокол № _____ від «_____» _____ р.
Оцінка ________ / ________ / ________
Голова ЕК
_____________ ______________________

Одеса — 2022 р.

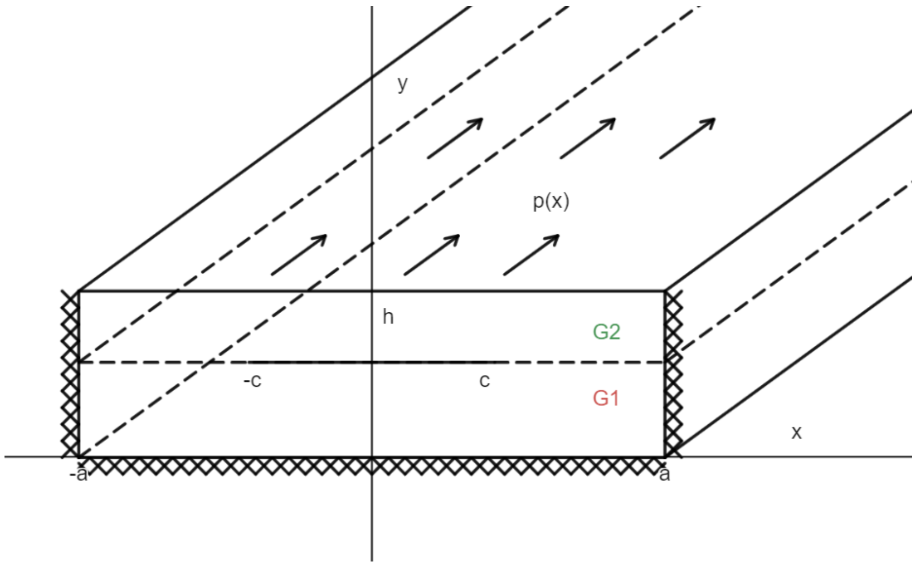
ЗМІСТ

ВСТУП

Дипломна робота присвячена розв'язанню антиплоскої задачі теорії пружності для складеної смуги, на верхню грань якої діє механічне навантаження, а між матеріалами розташована тріщина. Дана задача є типовою модельною задачею, оскільки смуга може використовуватися в багатьох конструкціях. Вихідна задача зводиться до одновимірної разривної крайової задачі за допомогою інтегрального перетворення. Для знаходження розв'язку побудовано функцію Гріна. Отримано вирази для функцій переміщення та напружень, що містять невідому функцію стрибка переміщень на тріщині. Сформульовано сингулярне інтегральне рівняння відносно цієї функції та виділена сингулярна частина рівняння.

РОЗДІЛ 1

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ



Розглянемо антиплоскьу задачу для складеного тіла з міжфазною тріщиною. Воно складається з двох материалів с модулями пружності G_1 та G_2.

$$\Delta w(x,y) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad -a < x < a, \quad 0 < y < h, \quad y \neq b$$

Нижня частина закріплена, а до верхньої прикладено дотичне напруження.

$$w\Big|_{y=0} = 0; \quad \tau_{yz}\Big|_{y=h} = G_2 \frac{\partial w}{\partial y}\Big|_{y=h} = p(x)$$

Бокові частини $x = \pm a$ закріплені

$$w(-a) = w(a) = 0$$

Умови сполучення шарів:

$$< w >= w(x,b-0) - w(x,b+0) = X(x)$$

$$< \tau_{yz} >= G_1 \frac{\partial w}{\partial y}\Big|_{y=b-0} - G_2 \frac{\partial w}{\partial y}\Big|_{y=b+0} = 0$$

РОЗДІЛ 2

ОСНОВНА ЧАСТИНА

Інтегральне перетворення

Скористаємось скінченим sin - перетворенням за змінною x на $(-a,a)$.

$$w_n(y) = \int_{-a}^{a} w(x,y) \sin \alpha x dx, \; \alpha = \frac{\pi n}{a}$$

З формулою обернення:

$$w(x,y) = \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} w_n(y) \sin \alpha x$$

Розривна крайова задача

Отримаємо розривну крайову задачу

$$w_n''(y) - \alpha^2 w_n(y) = 0, \quad 0 < y < h, \quad y \neq b$$

З крайовими умовами:

$$w_n(0) = 0, \quad w_n'(h) = \frac{p_n}{G_2}$$

Та умовами сполучення:

$$< w_n >= X_n = \int_{-c}^{c} X(x) \sin \alpha x$$

$$< \tau_{yz,\alpha} >= G_1 w_n'(b-0) - G_2 w_n'(b+0) = 0$$

Побудова функції Гріна

Функцію Гріна будемо шукати в вигляді

$$G(y,\xi) = \Phi_n(y) - \sum_{k=0}^{1} \psi_k(y) U_k[\Phi]$$

Фундаментальна функція має вигляд:

$$\Phi_n(y,\xi) = -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|y-\xi|}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{1}{2} sign(y-\xi) e^{-\alpha|y-\xi|}$$

$$U_0[\Phi] = \Phi\Big|_{y=0} = -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha\xi}$$

$$U_1[\Phi] = \frac{\partial \Phi}{\partial y}\Big|_{y=h} = \frac{\alpha}{2} sign(h-\xi) e^{-\alpha|h-\xi|}$$

Знайдемо базисну систему рішень

$$\psi_0(y) = \frac{\operatorname{ch}(\alpha(h-y))}{\operatorname{ch}\alpha h}$$

$$\psi_1(y) = \frac{\operatorname{sh}(\alpha y)}{\alpha \operatorname{ch}(\alpha h)}$$

Тож функція Гріна задачі має вигляд

$$G_n(y,\xi) = \frac{1}{2\alpha}(-e^{-\alpha|y-\xi|} + e^{-\alpha\xi} \frac{ch\alpha(h-y)}{\operatorname{ch}\alpha h} - e^{-\alpha(h-\xi)} \frac{\operatorname{sh}\alpha y}{\alpha \operatorname{ch}\alpha h})$$

А її похідні:

$$\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial y} = \frac{sign(y-\xi) e^{-\alpha|y-\xi|}}{2} - \frac{e^{\alpha\xi}}{2} \frac{\operatorname{sh}\alpha(h-y)}{\operatorname{ch}\alpha h} - \frac{e^{-\alpha(h-\xi)}}{2} \frac{\operatorname{ch}\alpha y}{\operatorname{ch}\alpha h}$$

$$\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial \xi} = \frac{sign(\xi-y) e^{-\alpha|y-\xi|}}{2} - \frac{e^{-\alpha\xi}}{2} \frac{ch\alpha(h-y)}{\operatorname{ch}\alpha h} - \frac{e^{-\alpha(h-\xi)}}{2} \frac{\operatorname{sh}\alpha y}{\operatorname{ch}\alpha h}$$

$$\frac{\partial^2 G(y,\xi)}{\partial y \partial \xi} = \frac{\alpha e^{-\alpha|y-\xi|}}{2} + \frac{\alpha e^{-\alpha\xi}}{2}\frac{sh\alpha(h-y)}{\operatorname{ch}\alpha h} - \frac{\alpha e^{-\alpha(h-\xi)}}{2}\frac{\operatorname{ch}\alpha y}{ch\alpha h}$$

Розв'язок розривної крайової задачі запишемо як:

$$w_n(y) = \frac{p_n}{G_2}\psi_1(y) - A_1 G_n(y,b) + X_n \frac{\partial G}{\partial \xi}(y,\xi)\bigg|_{\xi=b} =$$

$$= \frac{p_n}{G2}\frac{\operatorname{sh}\alpha_n y}{\alpha ch\alpha h} - \frac{1}{2}X_n\left(sign(y-b)e^{-\alpha|y-b|} + \frac{ch\alpha(h-y)}{ch(\alpha h)}e^{-\alpha b}\right.$$

$$\left.+\frac{sh\alpha y}{ch\alpha h}e^{-\alpha(h-b)}\right) + \frac{1}{2}A_1\left(e^{-\alpha|y-b|} - \frac{ch\alpha(h-y)}{ch\alpha h}e^{-\alpha b} + \frac{sh\alpha y}{ch\alpha y}e^{-\alpha(h-b)}\right)$$

Тоді $w_n'(y)$:

$$w_n'(y) = \frac{p_n}{G_2}\frac{ch\alpha y}{ch\alpha h} + \frac{\alpha X_n}{2}\left(e^{-\alpha|y-b|} + \frac{sh\alpha(h-y)}{ch\alpha h}e^{-\alpha b} - \frac{ch\alpha y}{ch\alpha h}e^{-\alpha(h-b)}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}A_1\left(sign(y-b)e^{-\alpha|y-b|} + \frac{sh\alpha(h-y)}{ch\alpha h}e^{-\alpha b} - \frac{ch\alpha y}{ch\alpha h}e^{-\alpha(h-b)}\right)$$

A_1 знайдемо з умови

$$<\tau_{yz,n}>= (\frac{G_1}{G_2}-1)p_n\frac{ch\alpha b}{ch\alpha h} + \frac{\alpha X_n}{2}(G_2-G_1)\left(1+\frac{sh\alpha(h-b)}{ch\alpha h}e^{-\alpha b} - \frac{ch\alpha b}{ch\alpha h}e^{\alpha(h-b)}\right)+$$

$$+\frac{A_1}{2}\left((G_1+G_2) + (G_2-G_1)(\frac{sh\alpha(h-b)}{ch\alpha h}e^{-\alpha b} + \frac{ch\alpha b}{ch\alpha h}e^{-\alpha(h-b)}\right) = 0$$

Позначимо $\Delta = G_2 + G_1 + (G_2 - G_1)\left(\frac{sh\alpha(h-b)}{ch\alpha h}e^{-\alpha b} + \frac{ch\alpha b}{ch\alpha h}e^{-\alpha(h-b)}\right)$, тоді

$$A_1 = 2\left(1-\frac{G_1}{G_2}\right)p_n\frac{ch\alpha b}{\Delta_n ch\alpha_n h} - (G_2-G_1)\frac{\alpha X_n}{\Delta_n}\left(1+\frac{\operatorname{sh}\alpha(h-b)}{ch\alpha h}e^{-\alpha b} - \frac{ch\alpha b}{ch\alpha h}e^{-\alpha(h-b)}\right)$$

Підставимо в $w_n'(y)$ і отримаємо

$$w_n'(y) = M_n(y)p_n + K_n(y)X_n$$

$$M_n(y) = \frac{ch\alpha y}{G_2 ch\alpha h} - (1-\frac{G_1}{G_2})\frac{ch\alpha b}{\Delta_n ch\alpha h}\left(sign(y-b)e^{-\alpha|y-b|}+\right.$$

$$+\frac{sh\alpha(h-y)}{ch\alpha h}e^{-\alpha b}-\frac{ch\alpha y}{ch\alpha h}e^{-\alpha(h-b)}\Bigg)$$

$$K_n(y)=\frac{\alpha}{2}\Bigg(e^{-\alpha|y-b|}+\frac{sh\alpha(h-y)}{ch\alpha h}e^{-\alpha b}-\frac{ch\alpha y}{ch\alpha h}e^{-\alpha(h-b)}\Bigg)+$$

$$+(G_2-G_1)\frac{\alpha}{2\Delta_n}\Bigg(1+\frac{sh\alpha(h-b)}{ch\alpha h}e^{-\alpha b}-\frac{ch\alpha b}{ch\alpha h}e^{\alpha(h-b)}\Bigg)\cdot\Bigg(sign(y-b)e^{-\alpha|y-b|}-$$

$$-\frac{sh\alpha(h-y)}{ch\alpha h}e^{-\alpha b}-\frac{ch\alpha y}{ch\alpha h}e^{-\alpha(h-b)}\Bigg)$$

Обернення розв'язку

За формулою обеернення отримаємо рішення крайової задачі у просторі оригіналів.

$$w(x,y)=\frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}w_n(y)sin\alpha x$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}w_n'(y)\sin\alpha x$$

За умовою на тріщині

$$\tau_{yz}(x,b+0)=G_2\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{G_2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}w_n'(y)sin\alpha x=0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(M_n(y)p_n+K_n(b+0)X_n\Bigg)sin\alpha x=0$$

$$X_n=\int_{-c}^{c}X(\eta)\sin\alpha\eta d\eta$$

Змінюючи порядок сумування та інтегрування отримаємо

$$\int_{-c}^{c}X(\eta)\Bigg(K_n(b+0)\sin\alpha\eta\sin\alpha x\Bigg)d\eta=-\sum_{n=1}^{\infty}P_nM_n(b+0)sin\alpha x$$

Отримали інтегральне рівняння

$$\int_{-c}^{c} X(\eta)R(x,\eta)d\eta = T(x)$$

$$R(x,\eta) = K_n(b+0)\sin\alpha\eta\sin\alpha x$$

$$T(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} P_n M_n(b+0) sin\alpha x$$

Для відокремлення з ядра рівняння сингулярної частини запишемо $K_n(y)$ у вигляді:

$$K_n(y) = \frac{\alpha_n}{2}\left(1 + \frac{(G_2 - G_1)}{\Delta_n}\right) sign(y-b)e^{-\alpha|y-b|} + N_n(y)$$

$$N_n(y) = \frac{\alpha}{2}\left(\frac{sh\alpha(h-y)}{ch\alpha h}e^{-\alpha b} - \frac{ch\alpha y}{ch\alpha h}e^{-\alpha(h-b)}\right) +$$

$$+\frac{\alpha(G_2-G_1)}{2\Delta_n}\left(\frac{sh\alpha(h-b)}{ch\alpha h}e^{-\alpha b} - \frac{ch\alpha b}{ch\alpha h}e^{\alpha(h-b)}\right)\cdot\left(sign(y-b)e^{-\alpha|y-b|} -\right.$$

$$\left. -\frac{sh\alpha(h-y)}{ch\alpha h}e^{-\alpha b} - \frac{ch\alpha y}{ch\alpha h}e^{-\alpha(h-b)}\right) - \frac{\alpha(G_2-G_1)}{2\Delta_n}\left(\frac{\operatorname{sh}\alpha(h-y)}{ch\alpha h}e^{-\alpha b} + \frac{ch\alpha y}{ch\alpha h}e^{-\alpha|h-b|}\right)$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} N_n(y)\sin\alpha x\sin\alpha\eta$ сходиться рівномірно і можно перейти до $y \to b+0$.

$$N_n(b) = \frac{\alpha}{2}\left(\frac{sh\alpha(h-b)}{ch\alpha h}e^{-\alpha b} - \frac{ch\alpha b}{ch\alpha h}e^{\alpha(h-b)}\right)\left(1 + \frac{G_2-G_1}{\Delta_n}\left(1 -\right.\right.$$

$$\left.\left. -\frac{sh\alpha(h-b)}{ch\alpha h}e^{-\alpha b} - \frac{ch\alpha b}{ch\alpha h}e^{-\alpha(h-b)}\right)\right) - \frac{\alpha(G_2-G_1)}{2\Delta_n}\left(\frac{\operatorname{sh}\alpha(h-b)}{ch\alpha h}e^{-\alpha b} + \frac{ch\alpha b}{ch\alpha h}e^{-\alpha|h-b|}\right)$$

Представимо

$$1+\frac{G_2-G_1}{\Delta_n}sign(y-b)=1+\frac{G_2-G_1}{G_2+G_1}sign(y-b)-$$

$$-\frac{(G_2-G_1)^2}{G_2+G_1}\frac{\frac{sh\alpha(h-b)}{ch\alpha h}e^{-\alpha b}+\frac{ch\alpha b}{ch\alpha h}e^{-\alpha(h-b)}}{\Delta_n}sign(y-b)$$

Розглянемо $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha}{2}\Bigg(1+\frac{G_2-G_1}{G_2+G_1}sign(y-b)\Bigg)e^{-\alpha|y-b|}\sin\alpha x\sin\alpha\eta$, ряд розбігається при $y\to b+0$. При $y\neq b$ він збігається рівномірно, перепишемо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha}{2}\Bigg(1+\frac{G_2-G_1}{G_2+G_1}sign(y-b)\Bigg)e^{-\alpha|y-b|}\sin\alpha x\sin\alpha\eta=$$

$$=-\frac{d}{dx^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\alpha}\Bigg(1+\frac{G_2-G_1}{G_2+G_1}sign(y-b)\Bigg)e^{-\alpha|y-b|}\sin\alpha x\sin\alpha\eta$$

Переходячи до $y\to b+0$, отримаємо $-\frac{G_2}{G_2+G_1}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha}\sin\alpha x\sin\alpha\eta$

Перетворимо, скористуючись формулою 5.4.2.9 из А.П. Прудніков "Інтеграли та ряди"

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}=-ln(2sin(\frac{|x|}{2})),\quad x\neq 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha}\sin\alpha x\sin\alpha\eta=\frac{a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\cdot\frac{\pi x}{a})\sin(n\cdot\frac{\pi\eta}{n})}{n}=$$

$$=\frac{a}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(\frac{\cos n\frac{\pi}{a}(x-\eta)}{n}-\frac{\cos n\frac{\pi}{a}(x+\eta)}{\eta}\Bigg)=$$

$$=\frac{a}{2\pi}\Bigg(-ln(2\sin|\frac{\pi}{a}(x-\eta)|)+ln(2\sin|\frac{\pi}{a}(x+\eta)|)\Bigg)$$

Отже рівняння прийме вигляд

$$\frac{G_2}{2\pi(G_1+G_2)}\frac{d^2}{dx^2}\int_{-c}^{c}X(\eta)\left(ln(2\sin\frac{\pi}{a}|x-\eta|)-ln(2\sin\frac{\pi}{a}|x+\eta|)\right)d\eta+$$

$$+\int_{-c}^{c}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(N_n(b)-\frac{(G_2-G_1)^2}{G_2+G_1}\frac{\frac{sh\alpha(h-b)}{ch\alpha h}e^{-\alpha b}+\frac{ch\alpha b}{ch\alpha h}e^{-\alpha(h-b)}}{\Delta_n}\right)\sin\alpha x\sin\alpha\eta\right)d\eta=$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}P_nM_n(b+0)sin\alpha x,\quad -c<x<c$$

ВИСНОВКИ

В дипломній роботі була розглянута антиплоска задача теорії пружності для складеної смуги з міжфазною тріщиною, яка була зведена до розв'язку інтегрального рівняння відносно невідомого стрибка переміщення на тріщині. В інтегральному рівняння була відокремлена сингулярна частина. В подальших роботах, після розв'язання інтегрального рівняння зможемо побудувати графіки отриманого рішення

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. В 3 т. Т.1. Элементарные функции. —2-е изд., 2002. —580-584 с. [ур. 5.4.6.7].
2. Методичні вказівки до курсу «Математичне моделювання деяких задач механіки і техніки» / [упорядкув. канд. фіз.-мат. наук: Процеров Ю.С., Мойсєєнок О.П. – Одеса: 2015]
3. Попов Г. Я. Навчальний посібник з курсу "Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень": для студ. техн. спец. ВНЗ / Г. Я. Попов, В. В. Реут, Н. Д. Вайсфельд. – Одеса: Астропринт, 2005 . – 183 с.