

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

**«Асимптотична поведінка розв’язків систем
диференціальних рівнянь з регулярними та
сингулярними жмутками матриць»**

**«The asymptotic behavior of solutions to systems of
differential equations with regular and singular matrix
pencils»**

Виконала: здобувачка денної форми навчання
спеціальності 111 Математика

Освітня програма «Математика»

Драгун Олександра Олександрівна

Керівник: кандидат фіз.-мат. наук, доцент Шарай Н.В.

Рецензент: кандидат фіз.-мат. наук, доцент Самкова Г.Є.

Рекомендовано до захисту:

Захищено на засіданні ЕК № _____

Протокол засідання кафедри

Протокол № ____ від _____ 2025 р.

№ ____ від _____ 2025 р.

Оцінка _____ / _____ / _____

Завідувач кафедри

Голова ЕК

Одеса — 2025 р.

ЗМІСТ

Вступ	3
1 Теорія жмутків матриць і диференціальних систем	6
1.1 Многочленні матриці та їх еквівалентності	6
1.2 Жмутки матриць: базові поняття та класифікація	8
1.3 Необхідні результати з теорії звичайних диференціальних рівнянь	9
2 Регулярні та сингулярні матричні жмутки: структура і канонічні перетворення	12
2.1 Регулярні жмутки та критерії їх строгої еквівалентності . .	12
2.2 Приведення сингулярного жмутка	15
2.3 Мінімальні індекси та інваріанти жмутків	25
3 Диференціальні системи зі сталими матричними жмутками: існування, структура та поведінка розв'язків	30
3.1 Випадок систем із регулярним жмутком матриць	31
3.2 Випадок систем із сингулярним жмутком матриць	32
3.3 Функціонально-диференціальні властивості сингулярної під- системи	39
3.4 Диференціальна задача Коші: умови існування і єдиності розв'язків	58
3.5 Обмеженість та особливості поведінки розв'язків задачі Коші	67
3.6 Приклади аналізу систем із регулярними та сингулярними жмутками	75
Висновок	92
Список літератури	94

ВСТУП

Диференціальні системи, побудовані на основі регулярних і сингулярних жмутків матриць, нині становлять один із фундаментальних об'єктів дослідження сучасної прикладної та теоретичної математики. Їхня поява зумовлена необхідністю опису широкого спектра динамічних процесів, у яких еволюція системи визначається не лише властивостями диференціального рівняння, а й структурою матричних операторів, що можуть бути як невинродженими, так і сингулярними. Подібні моделі відіграють ключову роль у математичній фізиці, оптимальному та адаптивному керуванні, теорії автоматичного регулювання, технічній механіці, біосистемах, економічній динаміці та інших галузях, де необхідно поєднати аналітичні методи з коректною інтерпретацією фізичних чи інженерних процесів.

Початок систематичного вивчення таких систем пов'язують із працями Ф. Р. Гантмахера, який на основі елементарних дільників жмутка матриць запропонував спосіб побудови повного розв'язку для систем виду

$$Ax + B \frac{dx}{dt} = f(t),$$

де A і B — сталі матриці розміру $m \times n$, вектор-функція $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, визначена на області $D = \{(t, x) : 0 < |t| \leq a, \|x\| \leq b\}$, $0 < a, b = \text{const}$.

Він встановив зв'язок між алгебраїчною структурою жмутка $A + \lambda B$ та властивостями відповідної диференціальної системи. Надалі ці результати були суттєво розширені для випадків, коли жмутки залежать від часу, тобто для систем зі змінними матрицями $A(t) + \lambda B(t)$, що призвело до формування окремого напрямку — теорії функціональних матриць та сингулярних операторів.

Питання про класифікацію жмутків, побудову канонічних форм і опис спектральних характеристик стали центральними у дослідженнях С. Кемпбелла, R. März, M. Hanke, а також у працях українських науковців — А. М. Самойленка, Н. І. Шкіля, В. П. Яковця, Г.Є. Самкова, Н. В. Шарай, І. І. Старуни та інших. Важливо підкреслити, що у випадку прямокутних матриць A або B задача Коші для системи може втрачати стандартні

властивості розв'язності, що потребує спеціальних методів редукції, побудови узагальнених обернень та розбиття системи на диференціальну та алгебраїчну підсистеми.

Сингулярні диференціальні рівняння та відповідні задачі Коші активно досліджувалися ще в XIX столітті, починаючи з робіт Ш. Брію, Ж. Буке, І. Бендіксона, А. Пуанкаре та О. М. Ляпунова, які заклали основи аналізу поведінки розв'язків поблизу особливостей та вироджень. Згодом ці ідеї були розвинуті у напрямі побудови регуляризованих систем, теорії індекса жмутка, а також вивчення імпульсних розв'язків та умов їхнього усунення.

Нині теорія сингулярних жмутків і пов'язаних із ними диференціальних систем включає широкий спектр методів: від перетворень типу Вейерштрасса—Кронекера, використання локальних та глобальних канонічних форм, до функціонально-аналітичного підходу, що спирається на властивості операторів у банахових чи гільбертових просторах. Саме поєднання алгебраїчних і аналітичних методів дозволяє встановлювати умови існування, єдиності та стійкості розв'язків, що є важливим як у теорії, так і в чисельній практиці.

У цій кваліфікаційній роботі розглядається задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь виду

$$\begin{cases} Ax + B \frac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0, \end{cases}$$

де $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, а вектор-функція $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ є неперервною в області

$$D = \{(t, x) : 0 < |t| \leq a, \|x\| \leq b\}, \quad a > 0, b > 0.$$

Основна увага приділяється аналізу структури жмутка $A + \lambda B$, виявленню його регулярних і сингулярних блоків, побудові відповідних канонічних представлень та дослідженню того, як ці властивості впливають на розв'язність вихідної системи. Значну роль відіграють методи, що дозволяють перетворити початкову задачу до еквівалентної, але простішої структури, за якої можна застосувати класичні теореми про існування та

єдиність розв'язків.

Отже, метою даної роботи є не лише отримання явних або параметризованих розв'язків задачі Коші, але й аналіз алгоритмічних процедур зведення системи до нормальних форм, дослідження властивостей відповідних операторів та з'ясування, яким чином сингулярність жмутка впливає на локальну та глобальну поведінку розв'язків. Результати дослідження спрямовані на поглиблення теоретичних основ та розширення методичного інструментарію для подальшого застосування в математичному моделюванні та теорії динамічних систем.

РОЗДІЛ 1

ТЕОРІЯ ЖМУТКІВ МАТРИЦЬ І ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ

1.1 Многочленні матриці та їх еквівалентності

Означення 1.1. Многочленною матрицею (або λ -матрицею) називають прямокутну матрицю $A(\lambda) = \|a_{ik}(\lambda)\|$, елементи якої є многочленами від параметра λ :

$$A(\lambda) = \|a_{ik}^{(0)}\lambda^l + a_{ik}^{(1)}\lambda^{l-1} + \dots + a_{ik}^{(l)}\|. \quad (1.1)$$

Позначаючи через $A_j = \|a_{ik}^{(j)}\|$ матричні коефіцієнти, можна подати $A(\lambda)$ як

$$A(\lambda) = A_0\lambda^l + A_1\lambda^{l-1} + \dots + A_{l-1}\lambda + A_l.$$

Для многочленних матриць вводять *елементарні операції*, які є аналогами звичайних елементарних операцій над числовими матрицями. Серед них: множення рядка на ненульове число, додавання до рядка іншого рядка, помноженого на многочленну матрицю, а також перестановка рядків. Ці операції еквівалентні множенню λ -матриці ліворуч на певну квадратну матрицю зі сталим ненульовим визначником. Аналогічно визначаються праві елементарні операції, що відповідають множенню на матрицю справа. Матриці, які реалізують такі операції, називають *елементарними*. Кожна з них має сталий ненульовий визначник, тому будь-яка елементарна операція має обернену.

Означення 1.2. Дві многочленні матриці $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ називаються

- *лівоеквівалентними*, якщо існує квадратна матриця $P(\lambda)$ зі сталим ненульовим визначником така, що

$$B(\lambda) = P(\lambda)A(\lambda); \quad (1.2)$$

- *правоеквівалентними*, якщо

$$B(\lambda) = A(\lambda)Q(\lambda); \quad (1.3)$$

- *еквівалентними*, якщо

$$B(\lambda) = P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda), \quad (1.4)$$

де $P(\lambda)$ і $Q(\lambda)$ — квадратні многочленні матриці зі сталими ненульовими визначниками.

Нехай λ -матриця $A(\lambda)$ має ранг r . Позначимо через $D_j(\lambda)$ найбільший спільний дільник усіх мінорів j -го порядку ($j = 1, \dots, r$). Тоді послідовність

$$D_r(\lambda), D_{r-1}(\lambda), \dots, D_1(\lambda), \quad D_0(\lambda) \equiv 1,$$

задовольняє властивість подільності: кожен наступний многочлен ділиться на попередній. Визначимо многочлени

$$i_1(\lambda) = \frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}, \quad i_2(\lambda) = \frac{D_{r-1}(\lambda)}{D_{r-2}(\lambda)}, \quad \dots, \quad i_r(\lambda) = D_1(\lambda). \quad (1.5)$$

Означення 1.3. Многочлени $i_1(\lambda), \dots, i_r(\lambda)$ називають *інваріантними многочленами* матриці $A(\lambda)$. Вони не змінюються при переході до будь-якої еквівалентної матриці.

Розкладемо кожний інваріантний многочлен у добуток неприведених множників у полі K :

$$i_j(\lambda) = \prod_{k=1}^s \phi_k(\lambda)^{\alpha_{jk}}, \quad j = 1, \dots, r, \quad (1.6)$$

де $\phi_1(\lambda), \dots, \phi_s(\lambda)$ — попарно різні неприведені многочлени, а степені α_{jk} утворюють спадну послідовність для кожного k .

Означення 1.4. Множники $\phi_k(\lambda)^{\alpha_{jk}}$, відмінні від одиниці, називають *елементарними дільниками* матриці $A(\lambda)$ у полі K .

1.2 Жмутки матриць: базові поняття та класифікація

Розглянемо чотири матриці A, B, A_1, B_1 однакового розміру $m \times n$, елементи яких належать числовому полю K . Поставимо задачу: за яких умов існують дві квадратні невироджені матриці P та Q відповідних розмірностей m і n , для яких виконуються співвідношення

$$PAQ = A_1, \quad PBQ = B_1. \quad (1.7)$$

Уводячи на розгляд жмуток матриць $A + \lambda B$, рівності (1.7) можна об'єднати в одну умову:

$$P(A + \lambda B)Q = A_1 + \lambda B_1. \quad (1.8)$$

Означення 1.5. Два жмутки прямокутних матриць $A + \lambda B$ і $A_1 + \lambda B_1$ одного і того ж розміру $m \times n$ називаються *строго еквівалентними*, якщо існують квадратні матриці P та Q зі сталими ненульовими визначниками такі, що виконується рівність (1.8).

Строга еквівалентність жмутків є узагальненням еквівалентності λ -матриць і фактично означає збіг інваріантних многочленів або елементарних дільників відповідних жмутків.

Будь-який жмуток $A + \lambda B$ розміру $m \times n$ належить одному з двох основних типів:

- регулярні жмутки,
- сингулярні жмутки.

Означення 1.6. Жмуток $A + \lambda B$ називається *регулярним*, якщо виконуються такі умови:

- (1) A і B — квадратні матриці одного й того ж порядку n ;
- (2) визначник $\det(A + \lambda B)$ не є тотожно нульовим многочленом.

У випадках, коли хоча б одна з умов порушується (тобто $m \neq n$ або $\det(A + \lambda B) \equiv 0$), жмуток називають *сингулярним*.

1.3 Необхідні результати з теорії звичайних диференціальних рівнянь

Розглянемо рівняння $F(x, y) = 0$, де функція F визначена в деякій області. Якщо для кожного x з певного проміжку існує таке y , що разом із x задовольняє рівняння $F(x, y) = 0$, то співвідношення визначає однозначну чи багатозначну функцію $y = f(x)$, для якої рівність $F(x, f(x)) = 0$ виконується тотожно.

Означення 1.8. Функцію $y = f(x)$ називають *неявною*, якщо вона задається нерозв'язаним відносно y рівнянням $F(x, y) = 0$. Якщо ж залежність y від x записана явно, таку функцію називають *явною*.

Перейдемо до теореми про існування неявної функції та її диференційовності. Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m) = 0, \\ F_2(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m) = 0, \\ \vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m) = 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

Теорема 1.1. Нехай виконуються умови:

- 1) функції F_k , $k = 1, \dots, m$, визначені й неперервні в області

$$D = \{(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m) : |x_j - x_j^0| \leq \Delta_j, |y_k - y_k^0| \leq \Delta'_k\};$$

- 2) усі часткові похідні F_k існують та неперервні на D ;
- 3) точка $(x_1^0, \dots, x_n^0; y_1^0, \dots, y_m^0)$ задовольняє систему (1.9);
- 4) Якобіан

$$J = \frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)}$$

у точці $(x_1^0, \dots, y_m^0)$ є ненульовим.

Тоді справедливі такі твердження:

- 1) у деякій околі точки $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ система (1.9) однозначно визначає

функції

$$y_k = \varphi_k(x_1, \dots, x_n), \quad k = 1, \dots, m,$$

диференційовні за всіма змінними x_j ;

2) при підстановці $x_j = x_j^0$ одержуємо

$$\varphi_k(x_1^0, \dots, x_n^0) = y_k^0;$$

3) функції φ_k мають неперервні часткові похідні в околі точки $(x_1^0, \dots, x_n^0)$.

Розглянемо тепер задачу Коші для системи диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x; y_1, \dots, y_n), \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x; y_1, \dots, y_n), \\ y_1(x_0) = y_1^0, \\ \vdots \\ y_n(x_0) = y_n^0. \end{cases} \quad (1.10)$$

Область розгляду функцій позначимо

$$D_1 = \{(x; y_1, \dots, y_n) : |x - x_0| \leq a, |y_k - y_k^0| \leq b\}, \quad a > 0, b > 0.$$

Означення 1.9. Функція $f(x; y_1, \dots, y_n)$ задовольняє умові Лівшица на D_1 , якщо існує константа $L > 0$ така, що для всіх $(x; y'_1, \dots, y'_n), (x; y''_1, \dots, y''_n) \in D_1$ виконується нерівність

$$|f(x; y'_1, \dots, y'_n) - f(x; y''_1, \dots, y''_n)| \leq L \sum_{j=1}^n |y'_j - y''_j|.$$

Теорема 1.2 (Пікара–Коші). Нехай $f_k \in C(D_1)$ та f_k задовольняють умові Лівшица на D_1 . Позначимо $M = \max_{D_1} |f_k|$. Тоді в інтервалі $|x - x_0| \leq h$, де $h = \min(a, b/M)$, задача (1.10) має єдиний неперервно диференційований розв'язок.

Розглянемо також систему

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x; y_1, \dots, y_n; \lambda_1, \dots, \lambda_m), \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x; y_1, \dots, y_n; \lambda_1, \dots, \lambda_m), \end{cases} \quad (1.11)$$

де параметри $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ належать області

$$Q = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m : \lambda_k^{(0)} \leq \lambda_k \leq \lambda_k^{(1)}, k = 1, \dots, m\}.$$

Теорема 1.3. (про неперервну залежність розв'язків системи від параметрів)

Припустимо, що функції $f_k(x; y_1, \dots, y_n; \lambda_1, \dots, \lambda_m)$, $k = 1, \dots, n$ системи (1.11) задовольняють наступним 2-ум умовам:

- 1) Функції f_k , $k = 1, \dots, n$ неперервні множині $D_1 \times Q$ і, отже, обмежені, тобто

$$|f_k(x; y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)| \leq M \text{ при } (x; y_1, \dots, y_n; \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in D_1 \times Q, \text{ а } M$$
 — постійне додатне число, що не залежить від параметрів.
- 2) Функції $f_k \in Lip_{y_1, \dots, y_n}(D_1 \times Q)$, $k = 1, \dots, n$ рівномірно щодо $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m), \lambda \in Q$

Тоді для кожного фіксованого $\lambda \in Q$ система (1.11) має єдиний розв'язок $y_n = y_n(x; \lambda_1, \dots, \lambda_m)$, що задовольняє початковим умовам $y_i(x_0) = y_i^0$, $i = 1, \dots, n$.

Цей розв'язок неперервно диференційований за x на інтервалі $|x - x_0| \leq h$ та неперервно залежить від параметрів $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ з множини Q , причому збіжність є рівномірною: для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що

$$|y_k(x; \lambda_1 + \Delta\lambda_1, \dots, \lambda_m) - y_k(x; \lambda_1, \dots, \lambda_m)| < \varepsilon, \quad k = 1, \dots, n.$$

якщо $|\Delta\lambda_1| < \delta, \dots, |\Delta\lambda_m| < \delta$.

РОЗДІЛ 2

РЕГУЛЯРНІ ТА СИНГУЛЯРНІ МАТРИЧНІ ЖМУТКИ: СТРУКТУРА І КАНОНІЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

2.1 Регулярні жмутки та критерії їх строгої еквівалентності

Розглянемо випадок, коли жмутки $A + \lambda B$ та $A_1 + \lambda B_1$ складаються з квадратних матриць ($m = n$) і матриці B, B_1 є невідродженими. За цих умов поняття еквівалентності та строгої еквівалентності жмутків збігаються. Тому критерій для λ -матриць безпосередньо приводить до такого твердження.

Теорема 2.1. Два жмутки квадратних матриць одного порядку $A + \lambda B$ та $A_1 + \lambda B_1$, для яких $|B| \neq 0$ і $|B_1| \neq 0$, є строго еквівалентними тоді й тільки тоді, коли вони мають однакові елементарні дільники в полі K .

З означення регулярного жмутка (означення 1.5) випливає, що в загальному випадку рівність $|B| = 0$ можлива, навіть якщо A також відроджена. Щоб з'ясувати, чи зберігається твердження теореми 2.1 для всіх регулярних жмутків, розглянемо приклад.

Приклад

$$A + \lambda B = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad A_1 + \lambda B_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Обидва жмутки мають єдиний елементарний дільник $\lambda + 1$, проте не є строго еквівалентними, оскільки $\text{rank } B = 2$, а $\text{rank } B_1 = 1$. З рівності виду (1.8) при строгій еквівалентності випливає рівність рангів B та B_1 , чого тут

немає. При цьому

$$|A + \lambda B| \equiv |A_1 + \lambda B_1| \equiv \lambda + 1,$$

тобто обидва жмутки регулярні за означенням 1.5. Таким чином, теорема 2.1 не поширюється на всі регулярні жмутки.

Щоб сформулювати критерій строгої еквівалентності для загального регулярного випадку, введемо поняття *нескінченних* елементарних дільників. Розглянемо однорідний жмуток $\mu A + \lambda B$. Його визначник $\Delta(\lambda, \mu) = |\mu A + \lambda B|$ є однорідним многочленом. Нехай $D_k(\lambda, \mu)$ — найбільші спільні дільники всіх мінорів k -го порядку ($k = 1, \dots, n$). Тоді інваріантні многочлени:

$$i_1(\lambda, \mu) = \frac{D_n}{D_{n-1}}, \quad i_2(\lambda, \mu) = \frac{D_{n-1}}{D_{n-2}}, \quad \dots$$

є однорідними щодо λ та μ .

Розкладаючи їх на степені неприведених однорідних многочленів поля K , отримаємо елементарні дільники $e_a(\lambda, \mu)$. Підстановка $\mu = 1$ повертає нас до елементарних дільників $e_a(\lambda)$ жмутка $A + \lambda B$. Навпаки, для кожного дільника $e_a(\lambda)$ степеня q відповідний однорідний дільник має вигляд

$$e_a(\lambda, \mu) = \mu^q e_a\left(\frac{\lambda}{\mu}\right).$$

Усі дільники жмутка $\mu A + \lambda B$ можна отримати таким чином, за винятком дільників виду μ^q , які виникають тоді й тільки тоді, коли $|B| = 0$. Їх називають *нескінченними елементарними дільниками* жмутка $A + \lambda B$.

Оскільки зі строгої еквівалентності жмутків $A + \lambda B$ та $A_1 + \lambda B_1$ випливає строга еквівалентність відповідних однорідних жмутків $\mu A + \lambda B$ та $\mu A_1 + \lambda B_1$, то збігатися повинні як кінцеві, так і нескінченні елементарні дільники.

Нехай тепер два регулярні жмутки $A + \lambda B$ та $A_1 + \lambda B_1$ мають усі однакові елементарні дільники. Використовуючи заміну параметрів

$$\lambda = \alpha_1 \tilde{\lambda} + \alpha_2 \tilde{\mu}, \quad \mu = \beta_1 \tilde{\lambda} + \beta_2 \tilde{\mu}, \quad \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \neq 0,$$

одержуємо жмутки вигляду $\tilde{\mu}\tilde{A} + \tilde{\lambda}\tilde{B}$ та $\tilde{\mu}\tilde{A}_1 + \tilde{\lambda}\tilde{B}_1$. Регулярність дозволяє підібрати параметри так, що $|\tilde{B}| \neq 0$ та $|\tilde{B}_1| \neq 0$. Застосовуючи теорему 2.1 до цих жмуків, дістаємо строгий еквівалент вихідних.

Теорема 2.2. Два регулярні жмутки $A + \lambda B$ та $A_1 + \lambda B_1$ є строго еквівалентними тоді й тільки тоді, коли вони мають однакові *кінцеві* та *нескінченні* елементарні дільники.

У прикладі обидва жмутки мають той самий кінцевий дільник $\lambda + 1$, але різні нескінченні дільники: у першого — μ^2 , у другого — μ, μ . Тому вони не є строго еквівалентними.

Розглянемо тепер довільний регулярний жмуток $A + \lambda B$. Існує c , для якого $A + cB \neq 0$. Пишемо жмуток у вигляді $A_1 + (\lambda - c)B$, де $|A_1| \neq 0$, і перетворюємо його зліва множенням на $A_1^{-1} : E + (\lambda - c)A_1^{-1}B$.

Перетворенням подібності отримуємо квазідіагональну форму

$$E + (\lambda - c)\{J_0, J_1\} = \{E - cJ_0 + \lambda J_0, E - cJ_1 + \lambda J_1\}, \quad (2.1)$$

де $\{J_0, J_1\}$ — квазідіагональна нормальна форма матриці $A_1^{-1}B$, J_0 — жорданова нільпотентна (тобто $J_0^l = 0$ при деякому цілому $l > 0$) матриця, а $|J_1| \neq 0$.

Подальшими перетвореннями жмукоток приводиться до блочної форми

$$E + \widehat{\lambda J_0} = \{N^{u_1}, \dots, N^{u_s}, J + \lambda E\}, \quad (2.2)$$

де $N^{(u)} = E^{(u)} + \lambda H^{(u)}$.

де $E^{(u)}$ — одинична матриця порядку u , $H^{(u)}$ — матриця порядку u , у якій елементи першої наддіагоналі дорівнюють одиниці, а всі інші елементи дорівнюють нулю.

Другий діагональний блок у правій частині (2.1) множенням на J_1^{-1} , а потім перетворенням подібності може бути приведений до виду $J + \lambda E$, де J — матриця, що має нормальну форму, а E — одинична матриця.

Теорема 2.3. Будь-який регулярний жмуток $A + \lambda B$ строго еквівалентний квазідіагональному жмутку

$$\{N^{u_1}, N^{u_2}, \dots, N^{u_s}, J + \lambda E\} \quad (N^{(u)} = E^{(u)} + \lambda H^{(u)}), \quad (2.3)$$

де блоки N^{u_s} відповідають нескінченним елементарним дільникам $\mu^{u_1}, \dots, \mu^{u_s}$, а блок $J + \lambda E$ — кінцевим елементарним дільникам жмутка.

2.2 Приведення сингулярного жмутка

Розглянемо сингулярний жмуток матриць $A + \lambda B$ розміру $m \times n$. Позначимо через r його ранг, тобто найбільший порядок мінорів, що не дорівнюють тотожно нулю. Оскільки жмуток сингулярний, то виконується хоча б одна з нерівностей $r < n$ або $r < m$. Нехай $r < n$. Тоді стовпці λ -матриці $A + \lambda B$ лінійно залежні, і рівняння

$$(A + \lambda B)x = 0, \quad (2.4)$$

де x — шуканий стовпець, має нетривіальний розв'язок. Кожен ненульовий розв'язок $x(\lambda)$ задає певну лінійну залежність між стовпцями матриці $A + \lambda B$. Далі розглядатимемо лише ті розв'язки, які є многочленами за λ , і серед них виберемо розв'язок найменшого степеня ε :

$$x(\lambda) = x_0 - \lambda x_1 + \lambda^2 x_2 - \dots + (-1)^\varepsilon \lambda^\varepsilon x_\varepsilon, \quad x_\varepsilon \neq 0. \quad (2.5)$$

Підставляючи (2.5) у (2.4) та прирівнюючи до нуля коефіцієнти при однакових степенях λ , одержуємо систему рівностей

$$Ax_0 = 0, \quad Bx_0 - Ax_1 = 0, \quad Bx_1 - Ax_2 = 0, \dots, Bx_{\varepsilon-1} - Ax_\varepsilon = 0, \quad (2.6)$$

$$Bx_\varepsilon = 0.$$

Розглядаючи це як систему лінійних однорідних рівнянь відносно елементів стовпців $x_0, -x_1, x_2, \dots, (-1)^\varepsilon x_\varepsilon$, бачимо, що матриця коефіцієнтів

має вигляд

$$M_\varepsilon = M_\varepsilon[A + \lambda B] = \overbrace{\begin{pmatrix} A & 0 & \dots & \dots & 0 \\ B & A & \dots & \dots & \dots \\ 0 & B & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & B & A \\ 0 & 0 & \dots & 0 & B \end{pmatrix}}^{\varepsilon+1}. \quad (2.7)$$

Її ранг позначимо через ρ_ε . Оскільки існує ненульовий розв'язок, маємо $\rho_\varepsilon < (\varepsilon + 1)n$. Водночас, завдяки мінімальності степеня ε , для матриць

$$M_0 = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & A \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad M_{\varepsilon-1} = \overbrace{\begin{pmatrix} A & 0 & \dots & \dots & 0 \\ B & A & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \dots & \dots & \dots & A & 0 \\ 0 & \dots & \dots & B & A \end{pmatrix}}^{\varepsilon} \quad (2.8)$$

виконується

$$\rho_0 = n, \quad \rho_1 = 2n, \quad \dots, \quad \rho_{\varepsilon-1} = \varepsilon n.$$

Отже, число ε є найменшим індексом k , для якого в нерівності $\rho_k \leq (k + 1)n$ вперше з'являється строгий знак «<».

Теорема 2.4. Якщо рівняння (2.4) має ненульовий розв'язок мінімального степеня $\varepsilon > 0$, то жмуток $A + \lambda B$ строго еквівалентний жмутку

вигляду

$$\left\| \begin{array}{cc} L_\varepsilon & 0 \\ 0 & \hat{A} + \lambda \hat{B} \end{array} \right\|, \quad (2.9)$$

де $\hat{A}, \hat{B}$ — сталі прямокутні матриці, а жмук $\hat{A} + \lambda \hat{B}$ такий, що рівняння $(\hat{A} + \lambda \hat{B})x = 0$ не має розв'язків степеня, меншого за ε ,

$$L_\varepsilon = \left\| \begin{array}{ccccc} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ 0 & 0 & & \lambda & 1 \end{array} \right\| \varepsilon,$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\varepsilon+1}$

Доведення. Спочатку покажемо, що жмук $A + \lambda B$ строго еквівалентний жмуку

$$\left\| \begin{array}{cc} L_\varepsilon & D + \lambda F \\ 0 & \hat{A} + \lambda \hat{B} \end{array} \right\|,$$

де D, F — сталі прямокутні матриці відповідних розмірів, а потім доведемо, що додаткові блоки можуть бути усунуті перетвореннями строгої еквівалентності, що й приведе до форми (2.9).

Далі встановимо, що рівняння $(\hat{A} + \lambda \hat{B})\hat{x} = 0$ не має розв'язків степеня $< \varepsilon$, а на завершення покажемо, що подальшими перетвореннями отриманий жмук можна привести до квазідіагонального вигляду типу (2.7).

1) Переформулюємо першу частину доведення в операторній формі. Розглянемо жмук лінійних операторів $A + \lambda B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Рівняння (2.4) перепишемо як

$$(A + \lambda B)x = 0, \quad (2.10)$$

а розв'язок мінімального степеня — як

$$x(\lambda) = x_0 - \lambda x_1 + \lambda^2 x_2 - \dots + (-1)^\varepsilon \lambda^\varepsilon x_\varepsilon. \quad (2.11)$$

Система (2.6) тоді набуває вигляду

$$Ax_0 = 0, \quad Ax_1 = Bx_0, \quad Ax_2 = Bx_1, \dots, Ax_\varepsilon = Bx_{\varepsilon-1}, \quad Bx_\varepsilon = 0. \quad (2.12)$$

Покажемо, що вектори

$$Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_\varepsilon \quad (2.13)$$

лінійно незалежні. Із цього одразу випливатиме лінійна незалежність

$$x_0, x_1, \dots, x_\varepsilon. \quad (2.14)$$

Справді, з $Ax_0 = 0$ та рівності $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_\varepsilon x_\varepsilon = 0$ одержуємо $\alpha_1 Ax_1 + \dots + \alpha_\varepsilon Ax_\varepsilon = 0$. Через незалежність векторів (2.13) маємо $\alpha_1 = \dots = \alpha_\varepsilon = 0$. Оскільки $x_0 \neq 0$ (інакше $\lambda^{-1}x(\lambda)$ був би розв'язком меншого степеня), то й $\alpha_0 = 0$.

Виберемо вектори (2.13) та (2.14) як перші базисні вектори в $\mathbb{R}^m$ та $\mathbb{R}^n$ відповідно. У нових базисах операторам A та B відповідатимуть матриці

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & & 1 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix};$$

і, відповідно, λ -матриця $\tilde{A} + \lambda\tilde{B}$ матиме блоковий вигляд (2.9). Залишається довести лінійну незалежність векторів (2.13). Припустимо протилежне й нехай Ax_h ($h \geq 1$) — перший вектор, який залежить від попередніх:

$$Ax_h = \alpha_1 Ax_{h-1} + \dots + \alpha_{h-1} Ax_0.$$

Користуючись співвідношеннями (2.12), цю рівність можна переписати у

вигляді

$$Bx_{h-1} = \alpha_1 Bx_{h-2} + \dots + \alpha_{h-1} Bx_0,$$

тобто $Bx_{h-1}^* = 0$ для

$$x_{h-1}^* = x_{h-1} - \alpha_1 x_{h-2} - \dots - \alpha_{h-1} x_0.$$

Аналогічними міркуваннями вводяться вектори $x_{h-2}^*, \dots, x_0^*$, і отримуємо ланцюжок співвідношень

$$Bx_{h-1}^* = 0, \quad Ax_{h-1}^* = Bx_{h-2}^*, \dots, Ax_1^* = Bx_0^*, \quad Ax_0^* = 0. \quad (2.15)$$

Звідси випливає, що

$$x^*(\lambda) = x_0^* - \lambda x_1^* + \dots + (-1)^{h-1} \lambda^{h-1} x_{h-1}^*$$

є ненульовим розв'язком (2.10) степеня $\leq h - 1 < \varepsilon$, що суперечить мінімальності ε . Отже, вектори (2.13) лінійно незалежні.

2) Покажемо, що рівняння $(\hat{A} + \lambda \hat{B})\hat{x} = 0$ не має розв'язків степеня $< \varepsilon$. Зауважимо спочатку, що рівняння $L_\varepsilon y = 0$ також має ненульовий розв'язок мінімального степеня ε , що легко переконатися, розглядаючи відповідну систему скалярних рівнянь

$$\begin{aligned} \lambda y_1 + y_2 = 0, \quad \lambda y_2 + y_3 = 0, \dots, \lambda y_\varepsilon + y_{\varepsilon+1} = 0 \\ [y = (y_1, y_2, \dots, y_{\varepsilon+1})], \quad y_k = (-1)^{k-1} y_1 \lambda^{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots, \varepsilon + 1). \end{aligned}$$

Якщо жмукот має трикутну форму (2.9), то й відповідні матриці M_k (після перестановок рядків і стовпців) мають вигляд

$$\left\| \begin{array}{cc} M_k[L_\varepsilon] & M_k[D + \lambda F] \\ 0 & M_k[\hat{A} + \lambda \hat{B}] \end{array} \right\|. \quad (2.16)$$

При $k = \varepsilon - 1$ ранг матриці (2.16) дорівнює εn . Звідси слідує, що всі стовпці $M_{\varepsilon-1}[L_\varepsilon]$ та $M_{\varepsilon-1}[\hat{A} + \lambda \hat{B}]$ лінійно незалежні, а отже, $(\hat{A} + \lambda \hat{B})\hat{x} = 0$ не має розв'язків степеня $\leq \varepsilon - 1$.

3) Замінімо тепер жмуток (2.9) строго еквівалентним

$$\left\| \begin{pmatrix} E_1 & Y \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} L_\varepsilon & D + \lambda F \\ 0 & \hat{A} + \lambda \hat{B} \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} E_3 & -X \\ 0 & E_4 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} L_\varepsilon & D + \lambda F + Y(\hat{A} + \lambda \hat{B}) - L_\varepsilon X \\ 0 & \hat{A} + \lambda \hat{B} \end{pmatrix} \right\|, \quad (2.17)$$

де E_1, E_2, E_3, E_4 — одиничні матриці відповідних порядків, а X, Y — постійні прямокутні матриці. Теорема буде доведена, якщо показати, що X, Y можна вибрати так, щоб виконувалась

$$L_\varepsilon X = D + \lambda F + Y(\hat{A} + \lambda \hat{B}). \quad (2.18)$$

Вводячи позначення

$$D = ||d_{ik}||, \quad F = ||f_{ik}||, \quad X = ||x_{jk}||$$

$$i = 1, 2, \dots, \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots, n - \varepsilon - 1, \quad j = 1, 2, \dots, \varepsilon + 1,$$

$$Y = \left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_\varepsilon \end{pmatrix} \right\|, \quad \hat{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-\varepsilon-1}), \quad \hat{B} = (b_1, b_2, \dots, b_{n-\varepsilon-1}).$$

Тоді матричне рівняння (2.18) можна замінити системою скалярних рівнянь, прирівнюючи елементи k -го стовпця в лівій та правій частинах (2.18) ($k = 1, 2, \dots, n - \varepsilon - 1$):

$$\begin{aligned} x_{2k} + \lambda x_{1k} &= d_{1k} + \lambda f_{1k} + y_1 \alpha_k + \lambda y_1 b_k, \\ x_{3k} + \lambda x_{2k} &= d_{2k} + \lambda f_{2k} + y_2 \alpha_k + \lambda y_2 b_k, \\ x_{4k} + \lambda x_{3k} &= d_{3k} + \lambda f_{3k} + y_3 \alpha_k + \lambda y_3 b_k, \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$x_{\varepsilon+1,k} + \lambda x_{\varepsilon k} = d_{\varepsilon k} + \lambda f_{\varepsilon k} + y_\varepsilon \alpha_k + \lambda y_\varepsilon b_k, \quad k = 1, 2, \dots, n - \varepsilon - 1.$$

У лівих частинах усіх цих рівностей стоять лінійні двочлени за змінною λ , причому вільний член кожного з перших $\varepsilon - 1$ двочленів збігається з коефіцієнтом при λ у наступному. Отже, ті самі співвідношення мають виконуватися і для правих частин, звідки одержуємо систему

$$\begin{aligned} y_1 \alpha_k - y_2 b_k &= f_{2k} - d_{1k}, \\ y_2 \alpha_k - y_3 b_k &= f_{3k} - d_{2k}, \\ &\dots \\ y_{\varepsilon-1} \alpha_k - y_{\varepsilon} b_k &= f_{\varepsilon k} - d_{\varepsilon-1,k}, \quad k = 1, 2, \dots, n - \varepsilon - 1. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Якщо співвідношення (2.20) виконуються, то з рівностей (2.19) можна послідовно визначити всі потрібні елементи матриці X . Залишається показати, що система (2.20) відносно елементів матриці Y завжди має розв'язок для довільних d_{ik} і f_{ik} ($i = 1, \dots, \varepsilon$, $k = 1, \dots, n - \varepsilon - 1$).

Справді, матриця, утворена коефіцієнтами при невідомих елементах рядків $y_1, -y_2, +y_3, -y_4, \dots$, після транспонування має вигляд

$$\overbrace{\left\| \begin{array}{cccc} \hat{A} & 0 & \dots & 0 \\ \hat{B} & \hat{A} & & \\ 0 & \hat{B} & & \\ , & & & \hat{A} \\ , & & & \\ , & & & \hat{B} \\ 0 & 0 & \dots & \end{array} \right\|}^{\varepsilon-1}.$$

і збігається з матрицею $M_{\varepsilon-2}$ для жмутка прямокутних матриць (2.8). Її ранг дорівнює $(\varepsilon - 1)(n - \varepsilon - 1)$, оскільки, як було доведено раніше, рівняння $(\hat{A} + \lambda \hat{B})\hat{x} = 0$ не має розв'язків степеня $< \varepsilon$. Отже, ранг системи (2.20) дорівнює числу рівнянь, і така система при будь-яких вільних членах є розв'язною.

Теорему доведено.

Нехай тепер $A + \lambda B$ — довільний сингулярний жмуток розміру $m \times n$.

Спочатку припустимо, що між його стовпцями й рядками немає жодних лінійних залежностей з постійними коефіцієнтами. Якщо $r < n$, то рівняння $(A + \lambda B)x = 0$ має ненульовий розв'язок мінімального степеня $\varepsilon_1 > 0$, і жмукот можна перетворити до вигляду

$$\begin{pmatrix} L_{\varepsilon_1} & 0 \\ 0 & A_1 + \lambda B_1 \end{pmatrix}.$$

Якщо рівняння $(A_1 + \lambda B_1)x = 0$ має ненульовий розв'язок мінімального степеня $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_1$, то, застосовуючи теорему 2.4 до жмутка $A_1 + \lambda B_1$, одержуємо

$$\begin{pmatrix} L_{\varepsilon_1} & 0 & 0 \\ 0 & L_{\varepsilon_2} & 0 \\ 0 & 0 & A_2 + \lambda B_2 \end{pmatrix}.$$

Повторюючи процедуру, дістанемо квазідіагональний вигляд

$$\left\| \begin{array}{ccc} L_{\varepsilon_1} & & 0 \\ & L_{\varepsilon_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \ddots \\ & & & & L_{\varepsilon_p} \\ 0 & & & & & A_p + \lambda B_p \end{array} \right\|, \quad (2.21)$$

де $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \dots \leq \varepsilon_p$, а рівняння $(A_p + \lambda B_p)x^{(p)} = 0$ не має ненульових розв'язків.

Якщо рядки жмутка $A_p + \lambda B_p$ лінійно залежні, то для транспонованого жмутка $A'_p + \lambda B'_p$ аналогічно отримуємо представлення типу (2.21) з індексами $0 < \eta_1 \leq \dots \leq \eta_q$. У результаті вихідний жмукот $A + \lambda B$

приводиться до квазидіагональної форми

$$\begin{array}{c}
 \left\| \begin{array}{ccccccc}
 L_{\varepsilon_1} & & & & & & 0 \\
 & L_{\varepsilon_2} & & & & & \\
 & & \cdot & & & & \\
 & & & \cdot & & & \\
 & & & & L_{\varepsilon_p} & & \\
 & & & & & L'_{\eta_1} & \\
 & & & & & & L'_{\eta_2} \\
 & & & & & & \cdot \\
 & & & & & & \cdot \\
 & & & & & & L'_{\eta_q} \\
 & & & & & & & A_0 + \lambda B_0
 \end{array} \right\|
 \end{array} \quad (2.22)$$

$$(0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \dots \leq \varepsilon_p, \quad 0 < \eta_1 \leq \eta_2 \leq \dots \leq \eta_q),$$

з регулярним блоком $A_0 + \lambda B_0$.

Якщо у даному жмутку $r = n$, тобто стовпці $A + \lambda B$ лінійно незалежні, то в поданні (2.22) перші p блоків типу L_ε зникають ($p = 0$). Аналогічно, при $r = m$, коли лінійно незалежними є рядки, у (2.22) відсутні блоки вигляду L'_η ($q = 0$).

Розглянемо тепер загальний випадок, коли між рядками та стовпцями жмутка $A + \lambda B$ можливі лінійні залежності з постійними коефіцієнтами. Позначимо через g і h відповідно максимальні кількості незалежних постійних розв'язків рівнянь

$$(A + \lambda B)x = 0, \quad (A' + \lambda B')y = 0.$$

Розглянемо перше векторне рівняння $(A + \lambda B)x = 0$, де A і B — лінійні оператори з R_n в R_m . Нехай $e_1, \dots, e_g$ — усі незалежні постійні розв'язки. Візьмемо їх як перші базисні вектори в R_n . У такому базисі перші g стовпців матриці $\tilde{A} + \lambda \tilde{B}$ стають нульовими:

$$\tilde{A} + \lambda \tilde{B} = (0, \tilde{A}_1 + \lambda \tilde{B}_1). \quad (2.23)$$

Аналогічно, у жмутку $\tilde{A}_1 + \lambda\tilde{B}_1$ перші h рядків можна також обнулити. Тоді виходить жмуток виду:

$$\left\| \begin{array}{cc} h \begin{bmatrix} \vec{g} \\ 0 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & A_0 + \lambda B_0 \end{array} \right\|, \quad (2.24)$$

у якому жмуток $A^0 + \lambda B^0$ вже не містить лінійних залежностей між рядками та стовпцями з постійними коефіцієнтами. До нього можна застосувати розклад типу (2.22).

Отже, в загальному випадку жмуток $A + \lambda B$ приводиться до канонічної форми

$$diag \left\{ h \left\{ \begin{bmatrix} \vec{g} \\ 0 \end{bmatrix}, L_{\varepsilon_{g+1}}, \dots, L_{\varepsilon_p}; L'_{\eta_{h+1}}, \dots, L'_{\eta_g}; A_0 + \lambda B_0 \right\} \right\}. \quad (2.25)$$

де індекси при блоках L_ε та L'_η обираються так, щоб вважати $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_g = 0$ і $\eta_1 = \dots = \eta_h = 0$.

Якщо тепер замінити регулярний жмуток $A_0 + \lambda B_0$, який входить у (2.25), його канонічною формою (2.3), то остаточно отримуємо квазідіагональне подання

$$diag \left\{ h \left\{ \begin{bmatrix} \vec{g} \\ 0 \end{bmatrix}, L_{\varepsilon_{g+1}}, \dots, L_{\varepsilon_p}; L'_{\eta_{h+1}}, \dots, L'_{\eta_g}; N^{(u_1)}, \dots, N^{(u_s)}; J + \lambda E \right\} \right\} \quad (2.26)$$

в якому матриця J має жорданову (або природну) нормальну форму, а блоки $N^{(u)} = E^{(u)} + \lambda H^{(u)}$ відповідають нескінченним елементарним дільникам жмутка.

Теорема 2.5. Кожний сингулярний жмуток $A + \lambda B$ може бути строго еквівалентним перетворений до канонічного квазідіагонального вигляду

(2.26):

$$\text{diag} \left\{ h \left\{ \overset{g}{0}, L_{\varepsilon_{g+1}}, \dots, L_{\varepsilon_p}; L'_{\eta_{h+1}}, \dots, L'_{\eta_g}; N^{(u_1)}, \dots, N^{(u_s)}; J + \lambda E \right\} \right\}$$

Щоб визначити канонічну форму (2.26) без виконання всіх проміжних кроків приведення, у наступному параграфі, слідом за Кронекером, введемо поняття *мінімальних індексів* жмутка.

2.3 Мінімальні індекси та інваріанти жмутків

Розглянемо сингулярний жмуток прямокутних матриць $A + \lambda B$. Нехай задано k многочленних стовпців $x_1(\lambda), x_2(\lambda), \dots, x_k(\lambda)$, які є розв'язками рівняння

$$(A + \lambda B)x = 0 \quad (2.27)$$

і утворюють матрицю $X = [x_1(\lambda), x_2(\lambda), \dots, x_k(\lambda)]$. Тоді ці стовпці вважаються лінійно залежними, якщо ранг матриці X менший за k . Це еквівалентно існуванню k многочленів $p_1(\lambda), p_2(\lambda), \dots, p_k(\lambda)$, не всіх тотожно нульових, таких, що

$$p_1(\lambda)x_1(\lambda) + p_2(\lambda)x_2(\lambda) + \dots + p_k(\lambda)x_k(\lambda) = 0.$$

Якщо ж $\text{rank } X = k$, то жодної нетривіальної залежності такого вигляду не існує, і $x_1(\lambda), x_2(\lambda), \dots, x_k(\lambda)$ є лінійно незалежними.

Серед усіх ненульових розв'язків рівняння (2.27) виберемо $x_1(\lambda)$ з мінімальним можливим степенем, який позначимо через ε_1 . Далі, розглядаючи лише розв'язки, лінійно незалежні від $x_1(\lambda)$, обираємо $x_2(\lambda)$ мінімального степеня ε_2 . Зрозуміло, що $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$. Продовжуючи таким чином, серед розв'язків, які не належать лінійній оболонці вже обраних $x_1(\lambda), x_2(\lambda), \dots$, послідовно добираємо $x_3(\lambda), x_4(\lambda), \dots$ мінімальних степенів $\varepsilon_3, \varepsilon_4, \dots$. Оскільки число лінійно незалежних розв'язків рівняння (2.27) не перевищує n , цей процес завершується після скінченного числа кроків.

У результаті отримуємо фундаментальний набір розв'язків рівняння

(2.27)

$$x_1(\lambda), x_2(\lambda), \dots, x_p(\lambda) \quad (2.28)$$

з пов'язаною з ним послідовністю степенів

$$\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \dots \varepsilon_p. \quad (2.29)$$

Сам ряд (2.28) (з точністю до множення на ненульові скаляри та заміни базису в підпросторі розв'язків) може бути різним, але важливим є те, що послідовність степенів $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p$ виявляється інваріантною.

Щоб побачити це, візьмемо інший фундаментальний ряд розв'язків того ж рівняння:

$$\tilde{x}_1(\lambda), \tilde{x}_2(\lambda) \dots$$

зі степенями

$$\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2, \dots$$

і порівняємо їх. Нехай серед степенів (2.29) маємо розбиття

$$\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_{n_1} < \varepsilon_{n_1+1} = \dots = \varepsilon_{n_2} < \dots$$

і аналогічне групування для другого ряду:

$$\tilde{\varepsilon}_1 = \dots = \tilde{\varepsilon}_{\tilde{n}_1} < \tilde{\varepsilon}_{\tilde{n}_1+1} = \dots = \tilde{\varepsilon}_{\tilde{n}_2} < \dots$$

Насамперед впливає $\varepsilon_1 = \tilde{\varepsilon}_1$. Кожен стовпець $\tilde{x}_i(\lambda)$ ($i = 1, 2, \dots, \tilde{n}_1$) лежить у лінійній оболонці стовпців $x_1(\lambda), x_2(\lambda), \dots, x_{n_1}(\lambda)$, бо якщо це було б не так, то $x_{n_1+1}(\lambda)$ можна було б замінити на $\tilde{x}_i(\lambda)$ із меншим степенем, що суперечить мінімальності побудови. У зворотному напрямку аналогічне міркування показує, що будь-який $x_i(\lambda)$ ($i = 1, 2, \dots, n_1$) є лінійною комбінацією стовпців $\tilde{x}_1(\lambda), \tilde{x}_2(\lambda), \dots, \tilde{x}_{\tilde{n}_1+1}(\lambda)$. Звідси отримуємо рівність $n_1 = \tilde{n}_1$ і $\varepsilon_{n_1+1} = \tilde{\varepsilon}_{\tilde{n}_1+1}$. Аналогічно, продовжуючи для наступних блоків степенів, дістаємо $n_2 = \tilde{n}_2$ і $\varepsilon_{n_2+1} = \tilde{\varepsilon}_{\tilde{n}_2+1}$ тощо, що й доводить збіг усієї послідовності.

Кожен розв'язок $x_k(\lambda)$ ($k = 1, 2, \dots, q$) із фундаментального ряду (2.28) задає одну лінійну залежність степеня ε між стовпцями матриці $A + \lambda B$. Тому числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p$ прийнято називати *мінімальними індексами для стовпців* жмутка $A + \lambda B$.

Аналогічну процедуру застосовують для рядків жмутка $A + \lambda B$. Рівняння $(A + \lambda B)x = 0$ замінюється на $(A' + \lambda B')y = 0$, і мінімальні індекси $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_q$ визначаються як мінімальні індекси для стовпців транспонованого жмутка $A' + \lambda B'$.

Мінімальні індекси зберігаються при строгій еквівалентності. Нехай задані два жмутки $A + \lambda B$ і $P(A + \lambda B)Q$, де P та Q — невироджені квадратні матриці. Рівняння (2.26) для першого жмутка, після множення зліва на P , запишемо як

$$P(A + \lambda B)QQ^{-1}x = 0$$

Отже, якщо x пробігає всі розв'язки рівняння (2.26), то вектори $Q^{-1}x$ утворюють повний набір розв'язків рівняння $P(A + \lambda B)Qz = 0$. Це означає, що жмутки $A + \lambda B$ і $P(A + \lambda B)Q$ мають однакові мінімальні індекси для стовпців. Той самий висновок для рядків впливає при переході до транспонованих жмутків.

Перейдемо до обчислення мінімальних індексів для канонічної квазі-діагональної матриці

$$P(A + \lambda B)Q = \tilde{A} + \lambda \tilde{B} = \text{diag} \{N^{(u_1)}, \dots, N^{(u_s)}, J + \lambda E\} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \overbrace{N^{(u_1)}}^{u_1} \} u_1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & \overbrace{N^{(u_s)}}^{u_s} \} u_s & . & . \\ 0 & . & . & v \underbrace{J + \lambda E}_w \end{pmatrix}}_n \quad \left. \vphantom{\begin{pmatrix} \overbrace{N^{(u_1)}}^{u_1} \} u_1 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}} \right\} n \quad (2.30)$$

де $A_0 + \lambda B_0$ — регулярний жмуток, що має нормальну форму (2.3).

Перш ніж переходити до аналізу мінімальних індексів квазідіагональної матриці, зазначимо, що повний їх набір (як для стовпців, так і для рядків) формується шляхом об'єднання мінімальних індексів усіх діагональних блоків, з яких ця матриця складається. Зокрема, блок L_ε має рівно

один ненульовий індекс, що належить до стовпців, тоді як усі його рядки залишаються лінійно незалежними. Для блоку L'_η ситуація дзеркальна: тут є один індекс, пов'язаний уже з рядками, а стовпці не створюють лінійних залежностей. Що стосується регулярного жмутка $A_0 + \lambda B_0$, то він мінімальних індексів не містить.

Таким чином, мінімальні індекси стовпців квазідіагональної матриці (2.30) мають структуру

$$\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_g = 0, \quad \varepsilon_{g+1}, \dots, \varepsilon_p,$$

а відповідні індекси для рядків:

$$\eta_1 = \dots = \eta_h = 0, \quad \eta_{h+1}, \dots, \eta_q.$$

Додамо також, що блоки типу L_ε не породжують елементарних дільників, оскільки серед їхніх мінорів максимальної величини ε одночасно трапляються мінор, рівний 1, і мінор, що дорівнює λ^ε . Аналогічна властивість характерна і для транспонованих блоків L'_ε . Відтак елементарні дільники всієї квазідіагональної структури формуються об'єднанням дільників її діагональних частин, а тому збігаються з елементарними дільниками регулярного ядра $A_0 + \lambda B_0$.

Отже, канонічний вигляд жмутка (2.30) повністю визначається набором його мінімальних індексів $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, \quad \eta_1, \dots, \eta_q$ разом з елементарними дільниками відповідного жмутка (або будь-якого строго еквівалентного йому $A + \lambda B$). У зв'язку з тим, що канонічна форма однозначно задає жмуток з точністю до строгої еквівалентності, отримуємо наступне твердження.

Теорема 2.6 (Кронекера). Два жмутки прямокутних матриць $A + \lambda B$ та $A_1 + \lambda B_1$ розміру $m \times n$ є строго еквівалентними тоді й лише тоді, коли вони мають однаковий набір мінімальних індексів та збігаються їхні «кінцеві» й «нескінченні» елементарні дільники.

Для конкретного жмутка $A + \lambda B$ з мінімальними індексами

$$\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 1, \varepsilon_3 = 2, \eta_1 = 0, \eta_2 = 0, \eta_3 = 2$$

та елементарними дільниками $\lambda^2, (\lambda + 2)^2, \mu^3$:

$$\left| \begin{array}{ccccccc} 0 & & & & & & \\ 0 & (I) & & & & & \\ & \lambda & 1 & & & & \\ & & & (II) & & & \\ & & & \lambda & 1 & 0 & \\ & & & 0 & \lambda & 1 & (III) \\ & & & & & & \lambda & 0 \\ & & & & & & 1 & \lambda & (IV) \\ & & & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & & & & 1 & \lambda & 0 \\ & & & & & & & & 0 & 1 & \lambda & (V) \\ & & & & & & & & 0 & 0 & 1 & \\ & & & & & & & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & & & & & & 0 & \lambda & (VI) \\ & & & & & & & & & & & \lambda+2 & 1 \\ & & & & & & & & & & & 0 & \lambda+2 \end{array} \right|$$

Зазначимо відповідність між блоками та мінімальними індексами:

$$(I) - \varepsilon_1 = 0, \quad (IV) - \eta_1 = 0,$$

$$(II) - \varepsilon_2 = 1, \quad (V) - \eta_2 = 0,$$

$$(III) - \varepsilon_3 = 2, \quad (VI) - \eta_3 = 2.$$

Крім того, останній блок відповідає елементарному дільнику $(\lambda + 2)^2$, а блоки (VI) та (V) — дільникам λ^2 та μ^3 відповідно.

РОЗДІЛ 3

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ СИСТЕМИ ЗІ СТАЛИМИ МАТРИЧНИМИ ЖМУТКАМИ: ІСНУВАННЯ, СТРУКТУРА ТА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ

Розглянемо задачу Коші для системи з m звичайних диференціальних рівнянь першого порядку такого вигляду:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k + \sum_{k=1}^n b_{ik} \frac{dx_k}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), & i = 1, \dots, m, \\ x_k(t) \rightarrow 0, & t \rightarrow 0, \quad k = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (3.1)$$

Запишемо цю задачу у компактній векторній формі:

$$\begin{cases} Ax + B \frac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

де $A, B \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, $A = \|a_{ik}\|$, $B = \|b_{ik}\|$, $i = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, а вектор-функція

$$f : D \rightarrow \mathfrak{R}^m,$$

визначена на області

$$D = \{(t, x) : 0 < |t| \leq a, \|x\| \leq b\}, \quad 0 < a, b = \text{const.}$$

Ліва частина системи в (3.2) асоціюється з постійним жмутком матриць $A + B \frac{d}{dt}$.

Надалі будемо аналізувати окремо випадки, коли жмуток $A + B \frac{d}{dt} \in$ регулярним, а коли — сингулярним.

3.1 Випадок систем із регулярним жмутком матриць

Нехай жмуток матриць $A + B \frac{d}{dt}$ є регулярним. Це означає, що, згідно з означенням регулярного жмутка, $m = n$ і виконується умова $|A + B \frac{d}{dt}| \neq 0$. Позначимо $\lambda = \frac{d}{dt}$, тоді відповідний жмуток можна переписати у вигляді $A + \lambda B$.

Згідно з теоремою 2.3 про приведення регулярного жмутка до канонічного квазідіагонального вигляду, існують невідроджені матриці $P, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ такі, що

$$P(A + \lambda B)Q = \tilde{A} + \lambda \tilde{B} = \text{diag} \{N^{(u_1)}, \dots, N^{(u_s)}, J + \lambda E\} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \overbrace{N^{(u_1)}}^{u_1} & & & & 0 \\ \underbrace{\quad}_{u_1} & \cdot & & \cdot & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & \cdot & \cdot & \overbrace{N^{(u_s)}}^{u_s} & \\ 0 & & & \underbrace{\quad}_{u_s} & \\ & & & & v \left\{ \overbrace{J + \lambda E}^w \right\} \end{pmatrix}}_n \Bigg\}^n$$

Тепер виконаємо зміну невідомих у системі задачі (3.2). Введемо нову вектор-функцію $z = z(t)$, поклавши $x = Qz$, а потім домножимо одержану систему диференціальних рівнянь зліва на P . У результаті маємо:

$$\begin{cases} (\tilde{A} + \tilde{B} \frac{d}{dt})z = \tilde{f}(t, z), \\ z(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

де $\tilde{f}(t, z) = Pf(t, Qz)$, $z = (z_1, \dots, z_m)$, $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_m)$, а жмутки $\tilde{A} + \lambda \tilde{B}$ та $A + \lambda B$ є строго еквівалентними.

Беручи до уваги структуру канонічного квазідіагонального регуляр-

ного жмутка, систему (3.3) можна подати у вигляді

$$\begin{cases} N^{(u_i)} \left(\frac{d}{dt} \right)^i z = \tilde{f}^i(t, z), & i = 1, \dots, s, \\ \left(J + \frac{d}{dt} E \right)^{s+1} z = \tilde{f}^{s+1}(t, z), \\ z(t) \xrightarrow{k} 0, & k = 1, \dots, s+1, \end{cases} \quad (3.4)$$

де

$$z^1 = (z_1, \dots, z_{u_1}), z^2 = (z_{u_1+1}, \dots, z_{u_1+u_2}), \dots, z^s = (z_{u_1+u_2+\dots+u_{(s-1)}+1}, \dots, z_{u_1+\dots+u_s}), z^{s+1} = (z_{u_1+\dots+u_s+1}, \dots, z_{u_m})$$

$$\tilde{f}^1 = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{u_1}), \tilde{f}^2 = (\tilde{f}_{u_1+1}, \dots, \tilde{f}_{u_1+u_2}), \dots, \tilde{f}^s = (\tilde{f}_{u_1+u_2+\dots+u_{(s-1)}+1}, \dots, \tilde{f}_{u_1+\dots+u_s}), \tilde{f}^{s+1} = (\tilde{f}_{u_1+\dots+u_s+1}, \dots, \tilde{f}_{u_m})$$

Для фіксованого s перший блок жмутка $\tilde{A} + \tilde{B} \frac{d}{dt}$ задає підсистему вигляду

$$\begin{cases} z_j^s + \frac{d}{dt} z_{j+1}^s = \tilde{f}_j^s(t, z), & j = 1, \dots, u_{s-1}, \\ z_{u_s}^s = \tilde{f}_{u_s}^s(t, z). \end{cases}$$

3.2 Випадок систем із сингулярним жмутком матриць

Нехай жмуток $A + B \frac{d}{dt}$ є сингулярним. Відповідно до означення, це означає, що або $m \neq n$, або ж при $m = n$ виконується тотожність $|A + \lambda B| \equiv 0$.

Згідно з теоремою 2.5 про приведення сингулярного жмутка до канонічного квазідіагонального вигляду, існують невироджені матриці P та Q , для яких виконуються співвідношення $PAQ = \tilde{A}$, $PBQ = \tilde{B}$, причому $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Проведемо заміну невідомих у системі (3.2): покладемо $x = Qz$, де

$z = z(t)$ — нова вектор-функція. Після множення обох частин перетвореної системи на матрицю P одержуємо:

$$\begin{cases} \tilde{A}z + \tilde{B}\frac{dz}{dt} = \tilde{f}(t,z), \\ z(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0, \end{cases}$$

$$\text{де } \tilde{f}(t,z) = Pf(t,Qz), z = (z_1, \dots, z_n), \tilde{f} = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_m).$$

Ураховуючи канонічну структуру сингулярного квазидіагонального жмутка, маємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \cdot z = \tilde{f}^1(t,z) \\ L_{\varepsilon_{g+i}} \left(\frac{d}{dt} \right)^{1+i} z = \tilde{f}^{1+i}(t,z), i = 1, \dots, p-g \\ L'_{\eta_{h+j}} \left(\frac{d}{dt} \right)^{1+p-g+j} z = \tilde{f}^{1+p-g+j}(t,z), j = 1, \dots, g-h \\ N^{(u_k)} \left(\frac{d}{dt} \right)^{1+p-g+q-h+k} z = \tilde{f}^{1+p-g+q-h+k}(t,z), k = 1, \dots, s \\ \left(J + \frac{d}{dt} E \right)^{1+p-g+q-h+s+1} z = \tilde{f}^{1+p-g+q-h+s+1}(t,z) \\ z(t) \rightarrow 0, t \rightarrow 0, l = 1, \dots, 1+p-g+q-h+s+1 \end{array} \right. \quad (3.5)$$

а канонічна форма відповідного жмутка $\tilde{A} + \tilde{B}\frac{d}{dt}$ у матричному вигляді:

$$\left(\begin{array}{cccc}
\overbrace{\begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{c} 0 \ 0 \ \dots \ 0 \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \\ \cdot \ \cdot \ \dots \ \cdot \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \end{array}}^g \\ \end{array}}^h & & & \\
& \overbrace{\begin{array}{c} \overbrace{L_{\varepsilon_{g+1}}}^{\varepsilon_{g+1}+1} \end{array}}^{\varepsilon_{g+1}} & & \\
& & \overbrace{\begin{array}{c} \overbrace{L_{\varepsilon_{g+2}}}^{\varepsilon_{g+2}+1} \end{array}}^{\varepsilon_{g+2}} & \\
& & & 0 \\
& & \overbrace{\begin{array}{c} \overbrace{L_{\varepsilon_p}}^{\varepsilon_p+1} \end{array}}^{\varepsilon_p} & \\
& & & \overbrace{\begin{array}{c} \overbrace{L'_{h+1}}^{\eta_{h+1}} \end{array}}^{\eta_{h+1}+1} \\
& & & \overbrace{\begin{array}{c} \overbrace{L'_q}^{\eta_q} \end{array}}^{\eta_q+1} \\
& 0 & & \overbrace{\begin{array}{c} \overbrace{N^{(u_1)}}^{u_1} \end{array}}^{u_1} \\
& & & \overbrace{\begin{array}{c} \overbrace{N^{(u_s)}}^{u_s} \end{array}}^{u_s} \\
& & & \overbrace{\begin{array}{c} \overbrace{J+\lambda E}^{\theta} \end{array}}^r \end{array} \right)$$

Розкладемо введені позначення z у системі (3.4) згідно з блоками:

$$\begin{aligned}
& \overset{1}{Z} = (Z_1, \dots, Z_g), \\
& \overset{2}{Z} = (Z_{g+1}, \dots, Z_{g+\varepsilon(g+1)+1}), \overset{3}{Z} = (Z_{g+\varepsilon(g+1)+1+1}, \dots, Z_{g+\varepsilon(g+1)+1+\varepsilon(g+2)+1}), \dots, \\
& \overset{1+p-g}{Z} = (Z_{g+\varepsilon(g+1)+1+\varepsilon(g+2)+1+\dots+\varepsilon(p-1)+1+\varepsilon_p+1}), \\
& \overset{1+p-g+1}{Z} = (Z_{g+\varepsilon(g+1)+1+\dots+\varepsilon_p+1+1}, \dots, Z_{g+\varepsilon(g+1)+1+\dots+\varepsilon_p+1+\eta_{h+1}}), \\
& \overset{1+p-g+2}{Z} = (Z_{g+\varepsilon(g+1)+1+\dots+\varepsilon_p+1+\eta_{h+1}+1}, \dots, Z_{g+\varepsilon(g+1)+1+\dots+\varepsilon_p+1+\eta_{h+1}+\eta_{h+2}}), \dots, \\
& \overset{1+p-g+q-h}{Z} = (Z_{g+\varepsilon(g+1)+1+\dots+\varepsilon_p+1+\eta_{h+1}+\eta_{h+2}+\dots+\eta(g-1)+1}, \dots, Z_{g+\varepsilon(g+1)+1+\dots+\varepsilon_p+1+\eta_{h+1}+\eta_{h+2}+\dots+\eta_{q-1}+\eta_q}), \\
& \overset{1+p-g+q-h+1}{Z} = (Z_{g+\varepsilon(g+1)+1+\dots+\varepsilon_p+1+\eta_{h+1}+\dots+\eta_q+1}, \dots, Z_{g+\varepsilon(g+1)+1+\dots+\varepsilon_p+1+\eta_{h+1}+\dots+\eta_q+u_1}),
\end{aligned}$$

$${}^{1+p-g+q-h+2}_Z = (Z_{g+\varepsilon(g+1)+1+\dots+\varepsilon_p+1+\eta_{h+1}+\dots+\eta_q+u_1+1}, \dots, Z_{g+\varepsilon(g+1)+1+\dots+\varepsilon_p+1+\eta_{h+1}+\dots+\eta_q+u_1+u_2}), \dots,$$

$${}^{1+p-g+q-h+s}_Z = (Z_{g+\varepsilon(g+1)+1+\dots+\varepsilon_p+1+\eta_{h+1}+\dots+\eta_q+u_1+u_2+\dots+u_{(s-1)+1}}, \dots, Z_{g+\varepsilon(g+1)+1+\dots+\varepsilon_p+1+\eta_{h+1}+\dots+\eta_q+u_1+u_2+\dots+u_s}),$$

$${}^{1+p-g+q-h+s+1}_Z = (Z_{g+\varepsilon(g+1)+1+\dots+\varepsilon_p+1+\eta_{h+1}+\dots+\eta_q+u_1+\dots+u_s+1}, \dots, Z_n),$$

$$Z = ({}^1_Z, {}^{1+1}_Z, {}^{1+2}_Z, \dots, {}^{1+p-g}_Z, {}^{1+p-g+1}_Z, \dots, {}^{1+p-g+q-h}_Z, {}^{1+p-g+q-h+1}_Z, \dots, {}^{1+p-g+q-h+s}_Z, {}^{1+p-g+q-h+s+1}_Z);$$

$$\tilde{f}^1 = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_h), \tilde{f}^2 = (\tilde{f}_{h+1}, \dots, \tilde{f}_{h+\varepsilon_{g+1}}), \tilde{f}^3 = (\tilde{f}_{h+\varepsilon_{g+1}+1}, \dots, \tilde{f}_{h+\varepsilon_{g+1}+\varepsilon_{g+2}}), \dots,$$

$$\tilde{f}^{1+p-g} = (\tilde{f}_{h+\varepsilon_{g+1}+\varepsilon_{g+2}+\dots+\varepsilon_{p-1}+1}, \dots, \tilde{f}_{h+\varepsilon_{g+1}+\varepsilon_{g+2}+\dots+\varepsilon_{p-1}+\varepsilon_p}), \quad \tilde{f}^{1+p-g+1} = (\tilde{f}_{h+\varepsilon_{g+1}+\dots+\varepsilon_p+1}, \dots, \tilde{f}_{h+\varepsilon_{g+1}+\dots+\varepsilon_p+\eta_{h+1}+1}),$$

$$\tilde{f}^{1+p-g+2} = (\tilde{f}_{h+\varepsilon_{g+1}+\dots+\varepsilon_p+\eta_{h+1}+1+1}, \dots, \tilde{f}_{h+\varepsilon_{g+1}+\dots+\varepsilon_p+\eta_{h+1}+1+\eta_{h+2}+1}), \dots,$$

$$\tilde{f}^{1+p-g+q-h} = (\tilde{f}_{h+\varepsilon_{g+1}+\dots+\varepsilon_p+\eta_{h+1}+1+\eta_{h+2}+1+\dots+\eta_{q-1}+1+1}, \dots, \tilde{f}_{h+\varepsilon_{g+1}+\dots+\varepsilon_p+\eta_{h+1}+1+\dots+\eta_{q-1}+1+\eta_q+1}),$$

$$\tilde{f}^{1+p-g+q-h+1} = (\tilde{f}_{h+\varepsilon_{g+1}+\dots+\varepsilon_p+\eta_{h+1}+1+\dots+\eta_q+1+1}, \dots, \tilde{f}_{h+\varepsilon_{g+1}+\dots+\varepsilon_p+\eta_{h+1}+1+\dots+\eta_q+1+u_1})$$

$$\tilde{f}^{1+p-g+q-h+2} = (\tilde{f}_{h+\varepsilon_{g+1}+\dots+\varepsilon_p+\eta_{h+1}+1+\dots+\eta_q+1+u_1+1}, \dots, \tilde{f}_{h+\varepsilon_{g+1}+\dots+\varepsilon_p+\eta_{h+1}+1+\dots+\eta_q+1+u_1+u_2}), \dots$$

$$\tilde{f}^{1+p-g+q-h+s} = (\tilde{f}_{h+\varepsilon_{g+1}+\dots+\varepsilon_p+\eta_{h+1}+1+\dots+\eta_q+1+u_1+\dots+u_{s-1}+1}, \dots, \tilde{f}_{h+\varepsilon_{g+1}+\dots+\varepsilon_p+\eta_{h+1}+1+\dots+\eta_q+1+u_1+\dots+u_s}),$$

$$\tilde{f}^{1+p-g+q-h+s+1} = (\tilde{f}_{h+\varepsilon_{g+1}+\dots+\varepsilon_p+\eta_{h+1}+1+\dots+\eta_q+1+u_1+\dots+u_s+1}, \dots, \tilde{f}_m)$$

$$\tilde{f} = ({}^1_{\tilde{f}}, {}^{1+1}_{\tilde{f}}, \dots, {}^{1+p-g}_{\tilde{f}}, {}^{1+p-g+1}_{\tilde{f}}, \dots, {}^{1+p-g+q-h}_{\tilde{f}}, {}^{1+p-g+q-h+1}_{\tilde{f}}, \dots, {}^{1+p-g+q-h+s}_{\tilde{f}}, {}^{1+p-g+q-h+s+1}_{\tilde{f}})$$

Розмір блоку $J + E \frac{d}{dt}$ визначається рівностями

$$\theta = n - g - \varepsilon_{g+1} - 1 - \dots - \varepsilon_p - 1 - \eta_{h+1} - \dots - \eta_q - u_1 - \dots - u_s,$$

$$r = m - u_s - \dots - u_1 - h - \varepsilon_{g+1} - \dots - \varepsilon_p - \eta_{h+1} - 1 - \dots - \eta_q - 1.$$

Уведемо допоміжні позначення:

$$\begin{aligned}
Z &= (Z_1, \dots, Z_g), \quad Z = (Z_1, \dots, Z_{\varepsilon_{g+1}+1}), \quad Z = (Z_1, \dots, Z_{\eta_{h+j}}), \\
Z &= (Z_1, \dots, Z_{u_k}), \quad Z = (Z_1, \dots, Z_{\theta}), \\
\tilde{f} &= (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_h), \quad \tilde{f} = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{\varepsilon_{g+1}}), \quad \tilde{f} = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{\eta_{h+j+1}}), \\
\tilde{f} &= (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{u_k}), \quad \tilde{f} = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_r)
\end{aligned}$$

та заміним:

$$1 + i = \hat{i}, \quad 1 + p - g + j = \hat{j}, \quad 1 + p - g + q - h + k = \hat{k},$$

$$1 + p - g + q - h + s + 1 = \hat{s}.$$

Тоді система (3.5) може бути подана у вигляді

$$\begin{aligned}
&\tilde{f}(t, z) = 0 \quad \tilde{f}_\nu(t, z) = 0, \quad \nu = 1, \dots, h \quad \otimes I \\
&\left[\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \hat{z}_j + \hat{z}_{j+1} = \hat{f}_j(t, z), \\ &i = 1, \dots, p - g, \quad j = 1, \dots, \varepsilon_{g+i} \end{aligned} \right] \quad \text{II} \\
&\left[\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \hat{z}_1 = \hat{f}(t, z), \\ &\hat{z}_{l-1} + \frac{d}{dt} \hat{z}_l = \hat{f}_l(t, z), \\ &\hat{z}_{\eta_h+j} = \hat{f}_{\eta_h+j+1}(t, z), \\ &j = 1, \dots, g - h; \quad l = 2, \dots, \eta_{h+j} \end{aligned} \right] \quad \text{III} \quad (3.6) \\
&\left[\begin{aligned} &\hat{z}_w + \frac{d}{dt} \hat{z}_{w+1} = \hat{f}_w(t, z), \quad w = 1, \dots, u_{k-1}, \\ &\hat{z}_{u_k} = \hat{f}_{u_k}(t, z), \quad k = 1, \dots, s \end{aligned} \right] \quad \text{IV} \quad \otimes
\end{aligned}$$

$$\left(J + \frac{d}{dt}E\right) \dot{z} = \hat{\tilde{f}}(t, z) \quad \text{IV}$$

$$z(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0$$

Система має комбінований характер і містить як функціональні, так і диференціальні рівняння. Функціональні рівняння позначені символом $\otimes$.

Функціональна підсистема утворюється першим блоком, останніми рівняннями кожної з систем третього блоку, а також фінальними рівняннями четвертого блоку. Сумарно вона має вигляд:

$$\begin{cases} \overset{1}{\tilde{f}}_{\nu}(t, z) = 0, & \nu = 1, \dots, h, \\ \overset{\hat{j}}{z}_{\eta_h+j} = \overset{\hat{j}}{\tilde{f}}_{\eta_h+j+1}(t, z), & j = 1, \dots, g - h, \\ \overset{\hat{k}}{z}_{u_k} = \overset{\hat{k}}{\tilde{f}}_{u_k}(t, z), & k = 1, \dots, s \end{cases}$$

Число рівнянь у функціональній частині дорівнює $t = h + q - h + s = q + s$.

Диференціальна частина формується другим блоком, усіма рівняннями третього блоку, окрім останніх у кожній підсистемі, а також аналогічно — рівняннями четвертого блоку, без фінальних, і рівняннями п'ятого блоку. У підсумку:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \hat{z}_j + \hat{z}_{j+1} = \hat{f}_j(t, z), \quad i = 1, \dots, p - g, j = 1, \dots, \varepsilon_{g+i}, \\ \frac{d}{dt} \hat{z}_1 = \hat{f}_1(t, z), \quad j = 1, \dots, g - h, \\ \hat{z}_{l-1} + \frac{d}{dt} \hat{z}_l = \hat{f}_l(t, z), \quad l = 2, \dots, \eta_{h+j}, \\ \hat{z}_w + \frac{d}{dt} \hat{z}_{w+1} = \hat{f}_l(t, z), \quad k = 1, \dots, s, w = 1, \dots, u_{k-1}, \\ \left(J + \frac{d}{dt} E \right) \hat{z} = \hat{f}(t, z) \end{array} \right.$$

Кількість таких рівнянь становить $m - t$.

Таким чином, з урахуванням зроблених перетворень та початкової умови задачі (3.1), сингулярна задача Коші приводиться до функціонально-диференціальної системи

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(t, z_1, z_2) = 0, \\ \frac{d}{dt} z_2 = \varphi(t, z_1, z_2), \\ z_1(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0, \\ z_2(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0, \end{array} \right. \quad (3.7)$$

де

$$t \subseteq \mathbb{R}, \quad z_1 : (0; t_0] \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad z_2 : (0; t_0] \rightarrow \mathbb{R}^l, \quad p + l = n,$$

$$\psi : (0; t_0] \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad \varphi : (0; t_0] \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^l, \quad k + l = m.$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \tilde{f}_\nu^1(t, z), & \nu = 1, \dots, h \\ z_{\eta_h+j}^j - \tilde{f}_{\eta_h+j+1}^j(t, z), & j = 1, \dots, q-h \\ \tilde{z}^{\hat{k}} - \tilde{f}(t, z), & k = 1, \dots, s \end{pmatrix}$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} \tilde{f}_j^{\hat{i}}(t, z) - z_{j+1}^{\hat{i}}, & i = 1, \dots, p-g, j = 1, \dots, \varepsilon_{g+i} \\ \tilde{f}_1^{\hat{j}}(t, z), & j = 1, \dots, g-h \\ \tilde{f}_l^{\hat{j}}(t, z) - z_{l-1}^{\hat{j}}, & l = 2, \dots, \eta_{h+j} \\ \tilde{f}_w^{\hat{k}}(t, z) - z_w^{\hat{k}}, & k = 1, \dots, s; w = 1, \dots, u_{k-1} \\ \tilde{f}^{\hat{s}}(t, z) - J \cdot \tilde{z} \end{pmatrix}$$

3.3 Функціонально-диференціальні властивості сингулярної підсистеми

Розглянемо початкову задачу (3.7).

Означення. Нехай вектор-функція ψ є неперервною в області $D_1 \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, де

$$D_1 = \{(t, z_1, z_2) : t \in (0, t_0], \|z_1\| < \alpha, \|z_2\| < \beta\}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Будемо вважати, що функція ψ задовольняє умові S_1 , якщо виконуються такі вимоги:

- 1) існує функція ψ у точці $(0, 0, 0)$, причому $\psi(0, 0, 0) = 0$;
- 2) у межах області D_1 існують і є неперервними всі часткові похідні ψ за компонентами z_1 та z_2 .

Означення. Нехай вектор-функція φ неперервна в тій самій області $D_1 \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $D_1 = \{(t, z_1, z_2) : t \in (0, t_0], \|z_1\| < \alpha, \|z_2\| < \beta\}$, $\alpha, \beta > 0$.

Кажуть, що φ задовольняє умові S_2 , якщо:

- 1) функцію φ доозначено в точці $(0,0,0)$ та виконується рівність $\varphi(0,0,0) = 0$;
- 2) вектор-функція φ є неперервною щодо t , а також неперервно диференційованою по z_1 і z_2 у всій області D_1 .

Почнемо дослідження задачі (3.7) з аналізу функціональної підзадачі

$$\begin{cases} \psi(t, z_1, z_2) = 0, \\ z_1(0) = 0, \quad z_2(0) = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Тобто розглянемо умови, за яких задачу (3.8) можна розв'язати відносно вектор-функції z_1 , або відносно z_2 , або лише щодо певної частини їх компонент. Після цього, повернувшись до задачі (3.7), встановимо достатні умови існування її розв'язку та дослідимо можливу кількість таких розв'язків.

Теорема 3.1. Припустимо, що $k = p$, а векторні функції ψ та φ задовольняють умовам S_1 і S_2 відповідно. Крім того, нехай виконується нерівність

$$\left. \frac{D(\psi)}{D(z_1)} \right|_{(0,0,0)} \neq 0. \quad (3.9)$$

Тоді початкова задача (3.7) має єдиний розв'язок на відрізку $t \in [0, t_1]$, де $0 < t_1 \leq t_0$.

Доведення. Оскільки функція ψ задовольняє вимогам умови S_1 та одночасно виконується (3.9), то згідно з теоремою про неявне задання функції система

$$\psi(t, z_1, z_2) = 0 \quad (3.10)$$

може бути однозначно розв'язана в області D_1 відносно змінної z_1 . Унаслідок

цього отримуємо подання

$$z_1 = \xi(t, z_2), \quad \xi(t, z_2) = \begin{pmatrix} \xi_1(t, z_2) \\ \vdots \\ \xi_p(t, z_2) \end{pmatrix},$$

де кожна з компонент $\xi_k(t, z_2)$, $k = 1, \dots, p$, є неперервною за t і неперервно диференційованою за z_2 у множині

$$D_2 = \{(t, z_2) : t \in [0, t_2], \|z_2\| < \beta_2, 0 < t_2 \leq t_0, 0 < \beta_2 \leq \beta\},$$

а також задовольняє умову $\xi_k(0, 0) = 0$.

Підставивши представлення $z_1 = \xi(t, z_2)$ у диференціальну частину задачі (3.7), приходимо до задачі Коші:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} z_2 = \varphi(t, \xi(t, z_2), z_2) \equiv \xi(t, z_2), \\ z_2(0) = 0, \end{cases} \quad (3.11)$$

де $\xi \in C_t(D_2)$ і $\xi \in C_{z_2}^1(D_2)$.

Враховуючи регулярність і гладкість правої частини цієї системи, умови теореми Пікара–Коші виконуються. Отже, задача Коші (3.11) має єдиний розв’язок $z_2 = \tilde{\varphi}(t)$ на інтервалі $t \in [0, t_1]$, де $0 < t_1 \leq t_2 \leq t_0$, причому

$$\tilde{\varphi} \in C^1[0, t_1], \quad \tilde{\varphi} : [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^l.$$

Унаслідок цього вихідна задача (3.7) на $[0, t_1]$ також має єдиний розв’язок, який задається співвідношеннями

$$\begin{cases} z_1(t) = \xi(t, \tilde{\varphi}(t)), \\ z_2(t) = \tilde{\varphi}(t). \end{cases}$$

Теорему доведено.

Теорема 3.2. Припустимо, що $k = j$ та $1 \leq j < p$, а векторні функції

ψ і φ задовольняють умовам S_1 і S_2 відповідно. Якщо додатково виконується співвідношення

$$\left. \frac{D(\psi)}{D(z_{11}, z_{12}, \dots, z_{1j})} \right|_{(0, \dots, 0)} \neq 0, \quad (3.12)$$

то задача (3.7) має принаймні один розв'язок на інтервалі $t \in [0, t_1]$, де $0 < t_1 \leq t_0$.

Доведення. Оскільки функції ψ та φ задовольняють умовам S_1 і S_2 , а також виконується нерівність (3.12), то застосування теореми про неявну функцію дозволяє розв'язати систему (3.10) відносно перших j компонент z_1 . У результаті маємо подання

$$z_{1i} = \xi_i(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}, z_2), \quad i = 1, \dots, j.$$

Функції ξ_i є неперервними за t та мають неперервні частинні похідні за змінними $z_{1j+1}, \dots, z_{1p}, z_2$ у області

$$D_3 = \{(t, z_1, z_2) : t \in [0, t_3], \|z_1\| < \alpha_3, \|z_2\| < \beta_3, 0 < t_3 \leq t_0,$$

$$0 < \alpha_3 \leq \alpha, 0 < \beta_3 \leq \beta\},$$

причому виконуються умови

$$\xi_k(0, 0) = 0, \quad \xi_i(0, 0, \dots, 0) = 0.$$

Підставивши знайдені вирази для компонент z_{1i} , $i = 1, \dots, j$, у диференціальну частину системи (3.7), одержуємо задачу Коші

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} z_2 = \varphi(t, \xi_1(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}, z_2), \dots, \xi_j(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}, z_2), z_{1j+1}, \dots, z_{1p}, z_2), \\ z_2(0) = 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

При цьому для кожної ξ_i виконується

$$\xi_i \in C_t(D_3), \quad \xi_i \in C_{z_2}^1(D_3), \quad i = 1, \dots, j.$$

З огляду на умову S_2 , систему (3.13) можна розглядати як задачу

Коші для звичайних диференціальних рівнянь зі змінною z_2 та параметрами

$$z_{1j+1}(t), \dots, z_{1p}(t),$$

які належать класу $C^1_{[0,t_1]}$, де $0 < t_1 \leq t_3 \leq t_0$.

Для кожного фіксованого набору параметричних функцій існує єдиний розв'язок задачі Коші (3.13):

$$z_2 = \tilde{\varphi}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}),$$

де $\tilde{\varphi}$ — неперервно диференційовна функція,

$$\tilde{\varphi} : [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^l.$$

Таким чином, розв'язок вихідної задачі (3.8) задається формулами

$$\begin{cases} z_1(t) = \xi(t, \tilde{\varphi}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p})), \\ z_2(t) = \tilde{\varphi}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}), \end{cases}$$

тобто отримано $(p - j)$ -параметричне сімейство розв'язків, що залежить від $(p - j)$ довільних C^1 -функцій.

Теорему доведено.

Теорема 3.3. Нехай $k = p + j$, де $1 \leq j < l$, і нехай векторні функції ψ та φ задовольняють умовам S_1 і S_2 . Припустимо також, що виконується умова

$$\left. \frac{D(\psi)}{D(z_1, z_{21}, \dots, z_{2j})} \right|_{(0, \dots, 0)} \neq 0. \quad (3.14)$$

Тоді задача (3.7) має принаймні один розв'язок на відрізку $t \in [0, t_1]$, де $0 < t_1 \leq t_0$.

Доведення. Оскільки функція ψ задовольняє вимогам S_1 і виконується умова (3.14), то згідно з теоремою про неявну функцію систему (3.10) можна однозначно локально розв'язати відносно всіх компонент векторів z_1

та перших j компонент вектора z_2 . У такому разі

$$z_1 = \begin{pmatrix} z_{11} \\ \vdots \\ z_{1p} \end{pmatrix}, \quad z_2 = \begin{pmatrix} z_{21} \\ \vdots \\ z_{2j} \\ z_{2j+1} \\ \vdots \\ z_{2l} \end{pmatrix},$$

і має місце представлення:

$$z_{1k} = \xi_{1k}(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), \quad k = 1, \dots, p,$$

$$z_{2i} = \xi_{2i}(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), \quad i = 1, \dots, j.$$

Усі функції ξ_{1k} та ξ_{2i} неперервні по t та мають неперервні часткові похідні по аргументах $z_{2j+1}, \dots, z_{2l}$ у області

$$D_4 = \{(t, z_2) : t \in [0, t_4], \|z_2\| < \beta_4, 0 < t_4 \leq t_0, 0 < \beta_4 \leq \beta\},$$

і задовольняють умовам

$$\xi_{1k}(0, \dots, 0) = 0, \quad \xi_{2i}(0, \dots, 0) = 0.$$

Підставляючи отримані вирази для z_{1k} і z_{2i} у диференціальну частину

системи (3.7), дістаємо задачу Коші

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \xi_{2i}(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}) = \varphi_i(t, \xi_1(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), \xi_{21}(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), \dots, \xi_{2j}(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), \\ \xi_{2j+1}(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), \dots, \xi_{2l}(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l})), i = 1, \dots, j \\ \frac{d}{dt} z_{2j+1} = \varphi_{j+1}(t, \xi_1(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), \xi_{21}(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), \dots, \xi_{2j}(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), \\ \xi_{2j+1}(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), \dots, \xi_{2l}(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l})), i = 1, \dots, j \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d}{dt} z_{2l} = \varphi_l(t, \xi_1(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), \xi_{21}(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), \dots, \xi_{2j}(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), \\ \xi_{2j+1}(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), \dots, \xi_{2l}(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l})), i = 1, \dots, j \\ z_{2g}(0) = 0, g = j + 1, \dots, l \end{array} \right. \quad (3.15)$$

Оскільки $\xi \in C_t(D_4)$ та $\xi \in C_{z_2}^1(D_4)$, останні $(l - j)$ рівнянь утворюють звичайну задачу Коші, для якої виконуються передумови теореми Пікара–Коші. Отже, існує єдиний розв’язок:

$$\begin{pmatrix} z_{2j+1} \\ \vdots \\ z_{2l} \end{pmatrix} = \tilde{\varphi}(t), \quad (3.16)$$

де $\tilde{\varphi} \in C_{[0, t_1]}^1$ та $\tilde{\varphi} : [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^l$, $0 < t_1 \leq t_4 \leq t_0$.

Після цього підставляємо знайдені значення у співвідношення для z_1 та перших j компонент z_2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = \xi_1(t, \tilde{\varphi}(t)) \\ \begin{pmatrix} z_{21} \\ \vdots \\ z_{2j} \end{pmatrix} = \xi_{2i}(t, \tilde{\varphi}(t)), i = 1, \dots, j \end{array} \right.$$

Після цього підставимо знайдені значення $z_{2l}, \dots, z_{2j}$ у перші j рівнянь диференціальної частини системи. Усі ці рівняння разом утворюють умову узгодженості для задачі Коші. Якщо після підстановки функцій $z_{2l}, \dots, z_{2j}$

кожне з цих рівнянь виконується тотожно, то розв'язок задачі отримано.

Теорему доведено.

Теорема 3.4. Нехай $k = l$, а векторні функції ψ та φ задовольняють умовам S_1 і S_2 відповідно. Припустимо також, що виконується нерівність

$$\left. \frac{D(\psi)}{D(z_2)} \right|_{(0,0,0)} \neq 0. \quad (3.17)$$

Тоді задача (3.7) має принаймні один розв'язок на проміжку $t \in [0, t_1]$, де $0 < t_1 \leq t_0$.

Доведення. Оскільки ψ задовольняє умові S_1 та виконується умова (3.17), то з теореми про неявну функцію випливає, що рівняння (3.10) може бути однозначно розв'язане відносно z_2 у деякому околі точки $(0,0,0)$:

$$z_2 = \xi(t, z_1), \quad \xi(t, z_1) = \begin{pmatrix} \xi_1(t, z_1) \\ \vdots \\ \xi_l(t, z_1) \end{pmatrix}.$$

Компоненти $\xi_k(t, z_1)$, $k = 1, \dots, l$, є безперервними по t та мають неперервні часткові похідні за змінними z_1 на множині

$$D_5 = \{(t, z_1) : t \in [0; t_5], \|z_1\| < \alpha_5, 0 < t_5 \leq t_0, 0 < \alpha_5 \leq \alpha\}$$

Крім того, $\xi_k(0,0) = 0$ для всіх k .

Підставляючи $z_2 = \xi(t, z_1)$ у диференціальну частину задачі (3.7), отримуємо задачу Коші:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \xi(t, z_1) = \varphi(t, z_1, \xi(t, z_1)) = \zeta(t, z_1), \\ \xi(t, z_1) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0, \end{cases} \quad (3.18)$$

де $\xi \in C_t(D_5)$, $\xi \in C_{z_1}^1(D_5)$, $\zeta(t, z_1)$ — неперервно диференційована функція на D_5 .

Беручи похідну (3.19):

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial z_1} \frac{dz_1}{dt} = \zeta(t, z_1), \quad (3.19)$$

розглянемо можливі варіанти.

а) Якщо матриця $\left| \frac{d\xi}{dz_1} \right|_{(0,0)} \neq 0$ є невиродженою, тоді з (3.19) маємо

$$\frac{\partial \xi}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial t} = \zeta(t, z_1) - \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial t} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial z_1} \right)^{-1} \left(\zeta(t, z_1) - \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)$$

Праві частини є C^1 -функціями, тож умови теореми Пікара–Коші виконано. Отже, існує єдиний розв'язок:

$$\begin{cases} z_1 = \tilde{\varphi}(t) \\ z_2 = \xi(t, \tilde{\varphi}(t)) \end{cases}$$

б) Якщо $\left| \frac{d\xi}{dz_1} \right|_{(0,0)} = 0$, то рівняння (3.19) перестає бути розв'язним щодо $\frac{dz_1}{dt}$, і виникає нова сингулярна система типу

$$A(t, z_1) \frac{dz_1}{dt} + B(t, z_1) z_1 = f(t, z_1),$$

яка повторює структуру вихідної, але містить менше рівнянь. Це знову приводить до задачі існування та узгодженості.

в) Розглянемо уточнену структуру системи.

1) Якщо $j = p$, тобто кількість компонент збігається з розмірністю z_1 , то $\det \frac{\partial \xi}{\partial z_1} \neq 0$, і ми повертаємося до випадку а).

2) Якщо $j < p$, маємо:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial z_{11}} & \frac{\partial \xi_2}{\partial z_{12}} & \cdots & \frac{\partial \xi_j}{\partial z_{1j}} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial z_{21}} & \frac{\partial \xi_2}{\partial z_{22}} & \cdots & \frac{\partial \xi_j}{\partial z_{2j}} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial z_{j1}} & \frac{\partial \xi_2}{\partial z_{j2}} & \cdots & \frac{\partial \xi_j}{\partial z_{jj}} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial z_{j+11}} & \frac{\partial \xi_2}{\partial z_{j+12}} & \cdots & \frac{\partial \xi_j}{\partial z_{j+1j}} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial z_{p1}} & \frac{\partial \xi_2}{\partial z_{p2}} & \cdots & \frac{\partial \xi_j}{\partial z_{pj}} \end{pmatrix} = \zeta(t, z_1)$$

Матриця часткових похідних розпадається на дві частини: перша визначає можливість розв'язання, друга — умови узгодженості для системи Коші:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial z_{j+1,1}} & \cdots & \frac{\partial \xi_j}{\partial z_{j+1,j}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial z_{p1}} & \cdots & \frac{\partial \xi_j}{\partial z_{pj}} \end{pmatrix} = \zeta(t, z_1).$$

3) Якщо $j > p$, умова узгодженості приймає вигляд

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_{p+1}}{\partial z_{j+11}} & \cdots & \frac{\partial \xi_j}{\partial z_{j+1,j}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \xi_{p+1}}{\partial z_{p1}} & \cdots & \frac{\partial \xi_j}{\partial z_{pj}} \end{pmatrix} = \zeta(t, z_1),$$

що також є умовою спільності системи (3.7).

Теорему доведено.

Теорема 3.5. Нехай $k = j$, де $1 < j \leq l$, і векторні функції ψ та φ

задовольняють умовам S_1 і S_2 . Припустимо також, що виконується умова

$$\left. \frac{D(\psi)}{D(z_{21}, \dots, z_{2j})} \right|_{(0, \dots, 0)} \neq 0. \quad (3.20)$$

Тоді задача (3.7) має розв'язок на відрізку $t \in [0, t_1]$, де $0 < t_1 \leq t_0$.

Доведення. Оскільки ψ задовольняє умову S_1 та виконується нерівність (3.20), то, застосовуючи теорему про неявну функцію, отримуємо можливість локально однозначно виразити перші j компонент вектора z_2 через змінні t, z_1 та залишкові компоненти $z_{2j+1}, \dots, z_{2l}$:

$$z_2 = \begin{pmatrix} z_{21} \\ \vdots \\ z_{2j} \\ z_{2j+1} \\ \vdots \\ z_{2l} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z_{21} \\ \vdots \\ z_{2j} \end{pmatrix} = \xi(t, z_1, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}) = \begin{pmatrix} \xi_1(t, z_1, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}) \\ \vdots \\ \xi_j(t, z_1, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}) \end{pmatrix}.$$

Кожна функція ξ_i є безперервною за t та має неперервні часткові похідні за іншими аргументами у множині

$$D_6 = \{(t, z_1, z_2) : 0 < t \leq t_6, \|z_1\| < \alpha_6, \|z_2\| < \beta_6\},$$

де $0 < t_6 \leq t_0$, $\alpha_6 \leq \alpha$, $\beta_6 \leq \beta$, і при цьому $\xi_i(0, 0, \dots, 0) = 0$ для всіх $i = 1, \dots, j$.

Після підстановки виразів $z_{2i} = \xi_i(t, z_1, z_{2j+1}, \dots, z_{2l})$ у диференціальну

частину задачі (3.7) отримаємо систему Коші:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\xi_i(t, z_1, z_{2j}, z_{2j+1}, \dots, z_{2l})}{dt} = \varphi_i(t, z_1, \xi_1(t, z_1, z_{2j}, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), \dots, \xi_l(t, z_1, z_{2j}, z_{2j+1}, \dots, z_{2l})), \\ i = 1, \dots, j \\ \left[\begin{array}{l} \frac{d}{dt} z_{2j+1} = \varphi_{j+1}(t, z_1, \xi_1(t, z_1, z_{2j}, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), \dots, \xi_l(t, z_1, z_{2j}, z_{2j+1}, \dots, z_{2l})) \\ \dots \\ \frac{d}{dt} z_{2l} = \varphi_l(t, z_1, \xi_1(t, z_1, z_{2j}, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), \dots, \xi_l(t, z_1, z_{2j}, z_{2j+1}, \dots, z_{2l})) \end{array} \right] \\ z_{2g}(0) = 0, g = j + 1, \dots, l \end{array} \right. \quad (*)$$

Оскільки права частина блоку (*) задовольняє вимоги умови S_2 , то для останніх $l - j$ компонент системи виконуються припущення теореми Пікара–Коші. Отже,

$$\begin{pmatrix} z_{2j+1} \\ \vdots \\ z_{2l} \end{pmatrix} = \tilde{\varphi}(t, z_1),$$

де $\tilde{\varphi} \in C^1_{[0, t_1]}$, а $z_1(t)$ виступає як вільний параметр.

Після підстановки знайдених компонент у перші j рівнянь системи отримуємо диференціальні рівняння відносно z_1 . Подальший аналіз залежить від значення p .

При $p = j$ маємо структуру, аналогічну розглянутій у теоремі 3.4:

- якщо $\left| \frac{d\xi}{dz_1} \right|_{(0,0)} \neq 0$, то задача Коші для z_1 має єдиний розв'язок $z_1 = \zeta(t)$; тоді відомі й усі компоненти z_2 ;
- якщо визначник дорівнює нулю, виникає сингулярна система аналогічного типу.

Теорему доведено.

Теорема 3.6. Нехай $k = i + j$, де $i \leq j < p$, а вектор-функції ψ та φ задовольняють умовам S_1 і S_2 відповідно. Припустимо, що виконується

$$\left. \frac{D(\psi)}{D(z_{11}, \dots, z_{1i}, z_2)} \right|_{(0, \dots, 0)} \neq 0. \quad (3.21)$$

Тоді задача (3.7) має розв'язок на відрізку $t \in [0, t_1]$, де $0 < t_1 \leq t_0$.

Доведення. Оскільки вектор-функція ψ задовольняє умові S_1 та має місце нерівність (3.21), то, згідно з теоремою про неявну функцію, систему (3.10) можна локально і однозначно розв'язати на множині D_1 відносно компонент вектора z_2 та перших компонент z_1 , а саме $z_{1i}, i = 1, \dots, j$:

$$z_1 = \begin{pmatrix} z_{11} \\ \vdots \\ z_{1j} \\ z_{1j+1} \\ \vdots \\ z_{1p} \end{pmatrix}, \quad z_2 = \begin{pmatrix} z_{21} \\ \vdots \\ z_{2l} \end{pmatrix}.$$

Тобто маємо представлення

$$\left\{ \begin{pmatrix} z_{11} \\ \vdots \\ z_{1j} \\ z_{21} \\ \vdots \\ z_{2l} \end{pmatrix} = \xi_1(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}) = \begin{pmatrix} \xi_{11}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}) \\ \vdots \\ \xi_{1j}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}) \\ \xi_{21}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}) \\ \vdots \\ \xi_{2l}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}) \end{pmatrix} \right\}, \quad (3.22)$$

Функції $\xi_{1i}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}), i = 1, \dots, j$, та $\xi_{2k}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}), k = 1, \dots, l$, є безперервними за t і мають неперервні часткові похідні за всіма іншими аргументами на множині

$$D_7 = \{(t, z_1) : t \in [0; t_7], \|z_1\| < \alpha_7, 0 < t_7 \leq t_0, 0 < \alpha_7 \leq \alpha\},$$

причому $\xi_{1i}(0, \dots, 0) = 0$ для $i = 1, \dots, j$ та $\xi_{2k}(0, \dots, 0) = 0$ для $k = 1, \dots, l$.

Підставляючи вирази (3.22) у диференціальну підсистему задачі (3.7),

одержуємо

$$\frac{d}{dt}\xi_2(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}) = \varphi(t, \xi_{11}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}), \dots, \xi_{1p}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}), \\ \xi_2(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}))\zeta(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}).$$

Таким чином, приходимо до задачі Коші для l диференціальних рівнянь з $(p - j)$ невідомими функціями:

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi_{2k}}{\partial t} + \frac{\partial \xi_{2k}}{\partial z_{1j+1}} \frac{\partial z_{1j+1}}{\partial t} + \dots + \frac{\partial \xi_{2k}}{\partial z_{1p}} \frac{dz_{1p}}{dt} = \xi_{2k}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}), \\ k = 1, \dots, l, \\ z_1(0) = 0. \end{cases}$$

У скалярному вигляді:

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi_{21}}{\partial t} + \frac{\partial \xi_{21}}{\partial z_{1j+1}} \frac{\partial z_{1j+1}}{\partial t} + \dots + \frac{\partial \xi_{21}}{\partial z_{1p}} \frac{dz_{1p}}{dt} = \xi_{21}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}), \\ \vdots \\ \frac{\partial \xi_{2l}}{\partial t} + \frac{\partial \xi_{2l}}{\partial z_{1j+1}} \frac{\partial z_{1j+1}}{\partial t} + \dots + \frac{\partial \xi_{2l}}{\partial z_{1p}} \frac{dz_{1p}}{dt} = \xi_{2l}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}), \\ z_1(0) = 0. \end{cases}$$

Еквівалентно можна записати:

$$\begin{cases} \text{grad} \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial t} \right) + \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_{21}}{\partial z_{1j+1}} & \dots & \frac{\partial \xi_{21}}{\partial z_{1p}} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \xi_{2l}}{\partial z_{1j+1}} & \dots & \frac{\partial \xi_{2l}}{\partial z_{1p}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dz_{1j+1}}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dz_{1p}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{21} \\ \vdots \\ \xi_{2l} \end{pmatrix}, \\ z_1(0) = 0, \end{cases}$$

де

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_{21}}{\partial z_{1j+1}} & \dots & \frac{\partial \xi_{21}}{\partial z_{1p}} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \xi_{2l}}{\partial z_{1j+1}} & \dots & \frac{\partial \xi_{2l}}{\partial z_{1p}} \end{pmatrix} \equiv A(t, z_{1j+1}, z_{1p}).$$

Розглянемо два випадки.

a) Нехай $|A| \neq 0$ у точці $(0, \dots, 0)$. Тоді

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{dz_{1j+1}}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dz_{1p}}{dt} \end{pmatrix} = A^{-1} \left(\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_l \end{pmatrix} - \text{grad} \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial t} \right) \right), \\ z_{1i}(0) = 0, \quad i = j+1, \dots, p. \end{cases} \quad (3.23)$$

Можливі такі підвипадки:

1) $l = p - j$.

З огляду на те, що $\xi \in C_t(D_7)$, $\xi \in C_{z_{1i}}^1(D_7)$ та $\zeta(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}) \in C^1(D_7)$, виконані умови теореми 1.2 про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для системи (3.23). Отже, знаходимо

$$z_{1i} = (\tilde{\varphi})_i(t), \quad i = j+1, \dots, p,$$

де $(\tilde{\varphi})_i \in C_{[0, t_1]}^1$, $(\tilde{\varphi})_i : [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^p$.

Після підстановки цих функцій у співвідношення (3.21) одержуємо розв'язок початкової задачі Коші (3.7).

2) $l > p - j$.

У цьому випадку вся система, записана вище, виступає умовою сумісності задачі Коші (3.7). Для будь-яких $(p - j)$ рівнянь виконуються умови теореми 1.2, отже можна знайти всі $(p - j)$ невідомих. Потім перевіряємо, чи задовольняє отриманий розв'язок повну систему. Якщо після підстановки одержуємо тотожності, то, підставляючи знайдені функції у (3.21), маємо розв'язок вихідної задачі.

При цьому деякі з $(p - j)$ невідомих, а саме $(p - j - l)$, виявляються

вільними параметрами. У результаті розв'язок задачі Коші (3.22) задається l компонентами, кожна з яких залежить від $(p - j - l)$ вільних параметрів. Підставивши ці функції у (3.21), отримуємо $(p - j - l)$ -параметричне сімейство розв'язків початкової задачі.

б) Якщо $|A| = 0$, то система є сингулярною, і маємо сингулярну задачу аналогічного типу.

Теорему доведено.

Теорема 3.7. Нехай $k = i + j$, де $1 < j < p$, $1 < i < l$, а вектор-функції ψ та φ задовольняють умовам S_1 і S_2 відповідно. Припустимо, що виконується умова

$$\left. \frac{D(\psi)}{D(z_{11}, \dots, z_{1j}, z_{21}, \dots, z_{2i})} \right|_{(0, \dots, 0)} \neq 0. \quad (3.24)$$

Тоді задача (3.7) має розв'язок на відрізку $t \in [0, t_1]$, де $0 < t_1 \leq t_0$.

Доведення. Оскільки вектор-функція ψ задовольняє умові S_1 і виконується нерівність (3.26), то, згідно з теоремою про неявні функції, систему (3.10) можна локально та однозначно розв'язати на множині D_1 відносно компонент z_{2r} , $r = 2, \dots, i$, та компонент z_{1k} , $k = 1, \dots, j$:

$$z_1 = \begin{pmatrix} z_{11} \\ \vdots \\ z_{1j} \\ z_{1j+1} \\ \vdots \\ z_{1p} \end{pmatrix}, \quad z_2 = \begin{pmatrix} z_{21} \\ \vdots \\ z_{2i} \\ z_{2i+1} \\ \vdots \\ z_{2l} \end{pmatrix}.$$

Інакше кажучи, систему (3.10) можна розв'язати відносно z_{1k} , $k = 1, \dots, j$,

$j < p$, та z_{2r} , $r = 2, \dots, i$, $i < l$. Маємо

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} z_{11} \\ \vdots \\ z_{1k} \end{pmatrix} = \xi_{1k}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), \\ \begin{pmatrix} z_{21} \\ \vdots \\ z_{2r} \end{pmatrix} = \xi_{2r}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), \end{array} \right. \quad (3.25)$$

де функції $\xi_{1k}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}, z_{2j+1}, \dots, z_{2l})$ та $\xi_{2r}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}, z_{2j+1}, \dots, z_{2l})$ є безперервними за t і неперервно диференційованими за всіма іншими змінними на множині

$$D_8 = \{(t, z_1, z_2) : t \in [0; t_8], \|z_1\| < \alpha_8,$$

$$\|z_2\| < \beta_8, 0 < t_8 \leq t_0, 0 < \alpha_8 \leq \alpha, 0 < \beta_8 \leq \beta\},$$

та задовольняють початкові умови $\xi_{1k}(0, \dots, 0) = 0$ для $k = 1, \dots, j$ і $\xi_{2r}(0, \dots, 0) = 0$ для $r = 1, \dots, i$.

Підставивши вирази (3.27) у диференціальну підсистему задачі (3.7), приходимо до задачі Коші:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \xi_{2r}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}) = \\ \varphi_r(t, \xi_{11}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), \dots, \xi_{1p}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), \\ \xi_{21}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), \dots, \xi_{2l}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}, z_{2j+1}, \dots, z_{2l})), r = 1, \dots, i \\ \frac{d}{dt} z_{2i+1} = \zeta_{i+1}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}) \\ \dots \\ \frac{d}{dt} z_{2l} = \zeta_l(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}) \\ z_1(0) = 0, z_2(0) = 0 \end{array} \right. \quad (3.26)$$

Розглянемо останні $(l - i)$ рівнянь цієї системи. Оскільки

$$\zeta(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}) \in C^1(D_9),$$

то виконуються умови теореми 1.3, і задача Коші для цих рівнянь має єдиний розв'язок:

$$\begin{pmatrix} z_{2i+1} \\ \vdots \\ z_{2l} \end{pmatrix} = \tilde{\varphi}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}),$$

де $\tilde{\varphi}$ — неперервно диференційована функція, $\tilde{\varphi} : [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^l$, $0 < t_1 \leq t_8 \leq t_0$.

Після цього підставляємо знайдені $z_{2i+1}, \dots, z_{2l}$ у перші i диференціальних рівнянь системи (3.26). У результаті отримуємо i диференціальних рівнянь з $(p - j)$ невідомими функціями $z_{1j+1}(t), \dots, z_{1p}(t)$. Далі ситуація повністю збігається з розглянутою у теоремі 3.6: за відповідних умов існування та єдиності розв'язку задачі Коші (3.7) отримуємо (за потреби — параметричне) сімейство розв'язків вихідної задачі.

Теорему доведено.

Теорема 3.8. Нехай для вектор-функцій ψ та φ виконуються умови S_1 та S_2 відповідно і виконується співвідношення

$$\left. \frac{D(\psi)}{D(z_1, z_2)} \right|_{(0,0,0)} \neq 0. \quad (3.27)$$

Крім того, припустимо, що вздовж розв'язку системи (3.10) диференціальна підсистема задачі (3.7) на деякому проміжку звертається в тотожність.

Тоді задача (3.7) має, і притому єдиний, розв'язок на відрізку $t \in [0, t_1]$, де $0 < t_1 \leq t_0$.

Доведення. Оскільки вектор-функція ψ задовольняє умові S_1 і виконується нерівність (3.27), то, застосовуючи теорему про неявну функцію, одержуємо, що систему (3.19) можна на множині D_1 єдиним чином розв'язати відносно змінних z_1 і z_2 . Тобто існують функції

$$\begin{cases} z_1 = \xi_1(t), \\ z_2 = \xi_2(t), \end{cases}$$

які задовольняють цю систему.

Підставляючи $z_1 = \xi_1(t)$ і $z_2 = \xi_2(t)$ у диференціальну підсистему задачі (3.7), приходимо до задачі Коші вигляду

$$\begin{cases} \xi_1(t) = \varphi(t, \xi_1(t), \xi_2(t)), \\ \xi_2(0) = 0, \end{cases}$$

де $t \in [0, t_9]$, $0 < t_9 \leq t_0$, а функції $\xi_1(t)$ та $\xi_2(t)$ є неперервними за t і неперервно диференційованими за t на вказаному проміжку.

Таким чином, умови теореми гарантують існування єдиного розв'язку задачі (3.7) на деякому відрізку $[0, t_1]$.

Теорему доведено.

3.4 Диференціальна задача Коші: умови існування і єдиності розв'язків

Дослідження задачі (3.7) слід почати з перевірки, чи можна розв'язати відповідну систему диференціальних рівнянь. Вихідна задача піддається розв'язанню лише тоді, коли задача Коші допускає хоча б один розв'язок.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}z_2 = \varphi(t, z_1, z_2) \\ z_1(t) \rightarrow 0, t \rightarrow 0 \\ z_2(t) \rightarrow 0, t \rightarrow 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

Припустимо, що

$$t \subseteq \mathbb{R}, \quad z_1 : (0, t_0] \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad z_2 : (0, t_0] \rightarrow \mathbb{R}^l, \quad p + l = n.$$

Нехай функція φ є неперервною на множині

$$T \times Z_1 \times Z_2, \quad T = (0, t_0].$$

Для кожного $t_1 \in (0, t_0)$ припустимо, що

$$\varphi : [t_1, t_0] \rightarrow \mathbb{R}^l$$

є рівномірно неперервною на відрізку $[t_1, t_0]$ при фіксованих $(z_1, z_2) \in Z_1 \times Z_2$, де

$$Z_1 = \{z_1(t) : \|z_1(t)\| \leq a\}, \quad a = \text{const}, a > 0,$$

$$Z_2 = \{z_2(t) : \|z_2(t)\| \leq b\}, \quad b = \text{const}, b > 0.$$

Розглянемо можливість перейти від задачі (3.28) до інтегрального рівняння

$$z_2(t) = \int_0^t \varphi(\tau, z_1(\tau), z_2(\tau)) d\tau \quad (3.29)$$

і встановити, що задача (3.28) і рівняння (3.29) є рівносильними (3.28)

Нехай $z_2(t, z_1(t))$ — один із розв'язків задачі (3.28), визначений на

множині $T \times Z_1$. У цьому разі маємо співвідношення

$$\frac{dz_2}{dt} = \frac{d}{dt} z_2(t, z_1(t)) = \varphi(t, z_1(t), z_2(t, z_1(t))), \quad (3.30)$$

а також умови

$$z_1(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow 0, \quad z_2(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow 0.$$

Інтегруючи рівність (3.30), отримаємо вираз

$$z_2(t, z_1(t)) = \int_{t_0}^t \varphi(\tau, z_1(\tau), z_2(\tau, z_1(\tau))) d\tau. \quad (3.31)$$

Подальше диференціювання відношення (3.31) за змінною t повертає нас до рівності (3.30). Таким чином, інтегральне рівняння (3.31) повністю еквівалентне диференціальному рівнянню (3.30), якщо врахувати відповідні початкові умови.

Означення. Нехай задано відображення

$$\varphi : T \times Z_1 \times Z_2 \rightarrow T \times Z_2.$$

Кажуть, що це відображення має *властивість Ліпшиця*, якщо існує константа $L > 0$, для якої виконується нерівність

$$\left\| \varphi(t, z_1, \tilde{z}_2) - \varphi(t, z_1, \tilde{\tilde{z}}_2) \right\| \leq L \left\| \tilde{z}_2 - \tilde{\tilde{z}}_2 \right\|,$$

для будь-яких

$$(t, z_1, \tilde{z}_2), (t, z_1, \tilde{\tilde{z}}_2) \in T \times Z_1 \times Z_2.$$

Це означає, що зміна значення відображення за третьою змінною обмежена сталою L , тобто φ не є «надто чутливою» до варіацій компоненти z_2 .

Теорема 3.9. Нехай виконуються такі умови:

1) Відображення φ є неперервним на множині $T \times Z_1 \times Z_2$, і для нього виконується ліпшицева оцінка за змінною z_2 :

$$\left\| \varphi(t, z_1, \tilde{z}_2) - \varphi(t, z_1, \tilde{\tilde{z}}_2) \right\| \leq L \left\| \tilde{z}_2 - \tilde{\tilde{z}}_2 \right\|$$

рівномірно для всіх $t \in (0, t_0]$ та для кожної функції $z_1(t)$ класу $C(\mathbb{R}^p)$, причому

$$z_1(t) \rightarrow 0 \quad \text{коли } t \rightarrow 0.$$

2) Існує число $q \in (0, 1)$, таке що

$$L \left| \int_{t_0}^t d\tau \right| \leq q, \quad t \in (0, t_0].$$

3) Для всіх $t \in (0, t_0]$ справджується рівність

$$\varphi(t, z_1(t), 0) = 0.$$

Тоді задача Коші (3.28) має єдиний розв'язок, який позначимо $z_2^*(t, z_1(t))$.

Доведення.

Визначимо відображення

$$\Phi(z_2)(t) = \int_0^t \varphi(\tau, z_1(\tau), z_2(\tau)) d\tau,$$

яке пов'язує функцію z_2 з інтегралом, що містить шуканий розв'язок.

Основна ідея полягає в тому, що знаходження функції $z_2^*(t, z_1(t))$, яка задовольняє рівність $\Phi(z_2) = z_2$, еквівалентне побудові розв'язку задачі Коші (3.28). Тобто розв'язок задачі визначається як нерухома точка оператора Φ .

Щоб показати існування такої точки, потрібно встановити, що оператор Φ є неперервним, переводить певну замкнену множину у саму себе та має властивість стиснення.

Нехай K позначає простір усіх неперервних функцій на області $T \times Z_1$. Введемо норму

$$\|z_2\| = \sup_{j=1, \dots, l} \left\{ |z_{2j}(t)| : t \in (0, t_0] \right\},$$

а для функції $z_1(t)$ визначимо аналогічну норму

$$\|z_1\| = \sup_{i=1,\dots,p} \left\{ |z_{1i}(t)| : t \in (0, t_0] \right\}.$$

Розглянемо множину $B \subset K$, що складається з функцій, які задовольняють умову $\|z_1\| \leq a$ і для яких $\|z_2\| \leq b$.

Оператор $\Phi(z_2)(t)$ є неперервним за означенням, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що з умови

$$\|\tilde{z}_2 - \tilde{\tilde{z}}_2\| < \delta \implies \|\Phi(\tilde{z}_2) - \Phi(\tilde{\tilde{z}}_2)\| < \varepsilon.$$

Щоб довести неперервність, скористаємося припущеннями 1 та 2 з теореми. Маємо:

$$\begin{aligned} \|\Phi(\tilde{z}_2) - \Phi(\tilde{\tilde{z}}_2)\| &= \left\| \int_0^t \varphi(\tau, z_1(\tau), \tilde{z}_2(\tau)) d\tau - \int_0^t \varphi(\tau, z_1(\tau), \tilde{\tilde{z}}_2(\tau)) d\tau \right\| \\ &\leq \int_0^t \left\| \varphi(\tau, z_1(\tau), \tilde{z}_2(\tau)) - \varphi(\tau, z_1(\tau), \tilde{\tilde{z}}_2(\tau)) \right\| d\tau \leq \int_0^t L \|\tilde{z}_2(\tau) - \tilde{\tilde{z}}_2(\tau)\| d\tau. \end{aligned}$$

Оцінимо верхню межу:

$$\|\Phi(\tilde{z}_2) - \Phi(\tilde{\tilde{z}}_2)\| < \sup_{\tau \in (0, t_0]} \|\tilde{z}_2(\tau) - \tilde{\tilde{z}}_2(\tau)\| \int_0^t L d\tau \leq \|\tilde{z}_2 - \tilde{\tilde{z}}_2\| L \left| \int_0^t d\tau \right| \leq q\delta = \varepsilon.$$

Отже, Φ є неперервним оператором.

Покажемо тепер, що Φ переводить множину B у саму себе, тобто $\Phi(B) \subseteq B$. Для цього потрібно встановити, що із умови $\|z_2\| \leq b$ випливає $\|\Phi(z_2)\| \leq b$.

Використовуючи припущення 3 з теореми і рівність:

$$\varphi(t, z_1(t), 0) = 0, \quad t \in (0, t_0],$$

а також умову Ліпшиця за змінною z_2 , отримаємо:

$$\begin{aligned}\|\Phi(z_2)\| &= \left\| \int_0^t \varphi(\tau, z_1(\tau), z_2(\tau)) d\tau \right\| \leq \int_0^t \|\varphi(\tau, z_1(\tau), z_2(\tau))\| d\tau \leq \\ &\leq \int_0^t L \|z_2\| d\tau \leq Lb \left| \int_0^t d\tau \right| < b.\end{aligned}$$

Отже, $\Phi(B) \subseteq B$.

Перейдемо до доведення того, що Φ є стискуючим оператором за умов теореми 1 і 2. Оператор буде стискуючим, якщо для будь-яких функцій $\tilde{z}_2$ і $\tilde{\tilde{z}}_2$ виконується

$$\|\Phi(\tilde{z}_2) - \Phi(\tilde{\tilde{z}}_2)\| \leq q \|\tilde{z}_2 - \tilde{\tilde{z}}_2\|.$$

Дійсно, оцінимо різницю між значеннями оператора Φ на двох функціях $\tilde{z}_2$ та $\tilde{\tilde{z}}_2$:

$$\begin{aligned}\|\Phi(\tilde{z}_2) - \Phi(\tilde{\tilde{z}}_2)\| &= \left\| \int_0^t \varphi(\tau, z_1(\tau), \tilde{z}_2(\tau)) d\tau - \int_0^t \varphi(\tau, z_1(\tau), \tilde{\tilde{z}}_2(\tau)) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \left| \int_0^t \left\| \varphi(\tau, z_1(\tau), \tilde{z}_2(\tau)) - \varphi(\tau, z_1(\tau), \tilde{\tilde{z}}_2(\tau)) \right\| d\tau \right| \leq \left| \int_0^t L \|\tilde{z}_2(\tau) - \tilde{\tilde{z}}_2(\tau)\| d\tau \right| \leq \\ &\leq \sup_{t \in (0, t_0]} \|\tilde{z}_2 - \tilde{\tilde{z}}_2\| \cdot \left| L \int_0^t d\tau \right| \leq q \|\tilde{z}_2 - \tilde{\tilde{z}}_2\|.\end{aligned}$$

Таким чином показано, що оператор Φ не лише переводить множину B у саму себе, але й є стискуючим на цій множині. Тому, застосовуючи принцип стискуючих відображень, для кожної фіксованої функції $z_1(t)$, що має перелічені вище властивості, існує єдина функція

$$z_2^*(t, z_1(t)) \in B,$$

яка є нерухомою точкою оператора:

$$z_2^*(t, z_1(t)) = \Phi(z_2^*)(t).$$

Отже, **теорему доведено.**

Теорема 3.10. Припустімо, що виконуються такі умови:

1) Функція φ є неперервною на множині $T \times Z_1 \times Z_2$ і задовольняє ліпшицеву нерівність за змінною z_2 :

$$\|\varphi(t, z_1, \tilde{z}_2) - \varphi(t, z_1, \tilde{\tilde{z}}_2)\| \leq L(t) \|\tilde{z}_2 - \tilde{\tilde{z}}_2\|,$$

рівномірно для всіх $t \in (0, t_0]$ та всіх функцій $z_1(t)$ класу $C(\mathbb{R}^p)$, причому $z_1(t) \rightarrow 0, t \rightarrow 0, L(t) > 0, L(t)$ — неперервна функція на інтервалі $(0, t_0]$.

2) Існує число $q \in (0, 1)$ таке, що для всіх $t \in (0, t_0]$ виконується

$$\left| \int_0^t L(\tau) d\tau \right| \leq q.$$

3) Для всіх $t \in (0, t_0]$ справджується умова

$$\varphi(t, z_1(t), 0) \equiv 0.$$

Тоді задача Коші (3.28) має єдиний розв'язок, який позначимо $z_2^*(t, z_1(t))$.

Доведення.

Зафіксуємо оператор

$$\Phi(z_2)(t) = - \int_t^0 \varphi(\tau, z_1(\tau), z_2(\tau)) d\tau = \int_0^t \varphi(\tau, z_1(\tau), z_2(\tau)) d\tau.$$

Нас цікавить питання, чи існує в цього оператора нерухома точка $z_2^*(t, z_1(t))$; саме ця функція і буде розв'язком задачі Коші (3.28).

Щоб обґрунтувати теорему, слід виконати такі кроки: показати, що оператор Φ неперервний, що він відображає деяку замкнену підмножину простору в саму себе та що Φ є оператором стиснення.

Нехай K — лінійний простір неперервних вектор-функцій, визначених на множині $T \times Z_1$, з нормою

$$\|z_2\| = \sup_{j=1, \dots, l} \{ |z_j(t)| : t \in (0, t_0] \},$$

а для вектор-функції $z_1(t)$ відповідно

$$\|z_1\| = \sup_{i=1,\dots,p} \{ |z_{1i}(t)| : t \in (0, t_0] \}.$$

Позначимо через $B \subset K$ підмножину тих функцій, для яких за умови $\|z_1\| \leq a$ виконується обмеження $\|z_2\| \leq b$.

Оператор $\Phi(z_2)(t)$ є неперервним у сенсі визначення, тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що з умови

$$\|\tilde{z}_2 - \tilde{\tilde{z}}_2\| < \delta \implies \|\Phi(\tilde{z}_2) - \Phi(\tilde{\tilde{z}}_2)\| < \varepsilon.$$

Щоб довести неперервність оператора, використаємо умови 1 і 2 теореми.

Розглянемо оцінку:

$$\begin{aligned} \|\Phi(\tilde{z}_2) - \Phi(\tilde{\tilde{z}}_2)\| &= \left\| \int_0^t \varphi(\tau, z_1(\tau), \tilde{z}_2(\tau)) d\tau - \int_0^t \varphi(\tau, z_1(\tau), \tilde{\tilde{z}}_2(\tau)) d\tau \right\| \leq \\ &= \left| \int_0^t \|\varphi(\tau, z_1(\tau), \tilde{z}_2(\tau)) - \varphi(\tau, z_1(\tau), \tilde{\tilde{z}}_2(\tau))\| d\tau \right| \leq \left| \int_0^t L(\tau) \|\tilde{z}_2(\tau) - \tilde{\tilde{z}}_2(\tau)\| d\tau \right|. \end{aligned}$$

Оскільки норма $\|\tilde{z}_2 - \tilde{\tilde{z}}_2\|$ є сталою відносно τ , а $L(\tau)$ неперервна та додатна, маємо:

$$\|\Phi(\tilde{z}_2) - \Phi(\tilde{\tilde{z}}_2)\| < \sup_{t \in (0, t_0]} \|\tilde{z}_2 - \tilde{\tilde{z}}_2\| \cdot \left| \int_0^t L(\tau) d\tau \right| \leq q \delta = \varepsilon.$$

Отже, Φ є неперервним оператором.

Далі доведемо, що оператор Φ переводить множину B у саму себе, тобто $\Phi(B) \subseteq B$. Для цього достатньо встановити, що з умови $\|z_2\| \leq b$ випливає нерівність $\|\Phi(z_2)\| \leq b$.

Звернемося до умови 3 теореми, згідно з якою $\varphi(t, z_1(t), 0) = 0, t \in (0, t_0]$.

Поеднуючи її з умовою 1, що гарантує оцінку $\|\varphi(t, z_1, z_2)\| \leq L(t) \|z_2\|, t \in (0, t_0]$,

рівномірно за всіма функціями $z_1(t) \in C(\mathbb{R}^p)$, які задовольняють $z_1(t) \rightarrow 0, t \rightarrow 0$ і $\|z_1\| \leq a$, отримуємо:

$$\begin{aligned} \|\Phi(z_2)\| &= \left\| \int_0^t \varphi(\tau, z_1(\tau), z_2(\tau)) d\tau \right\| \leq \left| \int_0^t \|\varphi(\tau, z_1(\tau), z_2(\tau))\| d\tau \right| \leq \\ &\leq \|z_2\| \left| \int_0^t L(\tau) d\tau \right| \leq b \left| \int_0^t L(\tau) d\tau \right| < b. \end{aligned}$$

Отже, дійсно $\Phi(B) \subseteq B$.

Переходимо до доведення того, що оператор Φ є стискуючим за умовами 1 і 2.

Оператор буде стискуючим, якщо для будь-яких функцій $\tilde{z}_2$ та $\tilde{\tilde{z}}_2$ виконується нерівність

$$\|\Phi(\tilde{z}_2) - \Phi(\tilde{\tilde{z}}_2)\| \leq q \|\tilde{z}_2 - \tilde{\tilde{z}}_2\|.$$

Справді,

$$\begin{aligned} \|\Phi(\tilde{z}_2) - \Phi(\tilde{\tilde{z}}_2)\| &= \left\| \int_0^t \varphi(\tau, z_1(\tau), \tilde{z}_2(\tau)) d\tau - \int_0^t \varphi(\tau, z_1(\tau), \tilde{\tilde{z}}_2(\tau)) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \left| \int_0^t \|\varphi(\tau, z_1(\tau), \tilde{z}_2(\tau)) - \varphi(\tau, z_1(\tau), \tilde{\tilde{z}}_2(\tau))\| d\tau \right| \leq \left| \int_0^t L(\tau) \|\tilde{z}_2(\tau) - \tilde{\tilde{z}}_2(\tau)\| d\tau \right| \leq \\ &\leq \sup_{t \in (0, t_0]} \|\tilde{z}_2 - \tilde{\tilde{z}}_2\| \left| L(\tau) \int_0^t d\tau \right| \leq q \|\tilde{z}_2 - \tilde{\tilde{z}}_2\|. \end{aligned}$$

Таким чином встановлено, що Φ є стискуючим оператором на множині B .

Згідно з принципом стискуючих відображень, для кожної фіксованої функції $z_1(t)$, яка задовольняє умови теореми, існує єдина функція $z_2^*(t, z_1(t)) \in B$, яка є нерухомою точкою оператора Φ , тобто

$$z_2^*(t, z_1(t)) = \Phi(z_2^*)(t).$$

Отже, **теорему доведено.**

Звідси випливає, що знайдена нерухома точка оператора Φ є розв'язком задачі Коші (3.28).

Оскільки для кожної функції $z_1(t) \in C(\mathbb{R}^p)$, яка задовольняє умови теореми, знайдено відповідну єдину функцію $z_2(t, z_1(t))$, то, підставляючи її у функціональну систему (3.8), одержуємо рівняння

$$\psi(t, z_1, z_2(t, z_1(t))) = 0.$$

Якщо ця система розв'язується відносно z_1 , то $z_1(t) = \tilde{\varphi}(t)$, де $\tilde{\varphi}$ - неперервна в правій півколи нуля, і тоді $z_2 = z_2(t, \tilde{\varphi}(t)) = \bar{\varphi}(t)$, що означає, що задача (3.7) має розв'язок.

У протилежному разі питання розв'язності задачі (3.7) зводиться до задачі

$$\begin{cases} \psi(t, z_1, z_2(t, z_1(t))) = 0, \\ z_1(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0, \end{cases}$$

яка за структурою збігається із задачею (3.8).

У підсумку, розв'язавши задачу (3.7) і знайшовши шукану функцію заміною $x = Qz$, отримуємо розв'язок вихідної задачі (3.2).

3.5 Обмеженість та особливості поведінки розв'язків задачі Коші

Розглянемо задачу Коші в векторній формі:

$$\begin{cases} Ax + B \frac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0, \end{cases} \quad (3.32)$$

де $t \in T$, $T = (0, t_0]$, $t_0 > 0$, а матриці A і B належать $\mathbb{R}^{m \times n}$, $m \neq n$. Позначимо

$$x = (x_1, \dots, x_n)^T, \quad f = (f_1, \dots, f_m),$$

і нехай функція f є неперервною на множині $T \times X$, де $X \subset \mathbb{R}^n$.

Нехай також

$$f(t, x) = F(t, x) + x(t),$$

де F — неперервна функція на $T \times X$. Тоді рівняння можна переписати у вигляді

$$x(t) = Ax(t) + B \frac{dx}{dt} - F(t, x(t)). \quad (3.33)$$

Отже, задача (3.32) набуває форми

$$\begin{cases} Ax + B \frac{dx}{dt} = F(t, x) + x(t), \\ x(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0. \end{cases} \quad (3.34)$$

Перейдемо тепер від (3.34) до рівносильного інтегрального (3.34) формулювання. Інтегруючи, одержуємо:

$$x(t) = \int_0^t (Ax(\tau) + B\dot{x}(\tau) - F(\tau, x(\tau))) d\tau. \quad (3.35)$$

Далі встановимо еквівалентність задачі (3.34) та інтегрального рівняння (3.35). Справді, проінтегрувавши рівняння (3.33) за t , приходимо до формули (3.35), а, навпаки, продиференціювавши (3.35), одержуємо (3.33).

Отже, інтегральне рівняння (3.35) є повністю еквівалентним диференціаль-
ному рівнянню (3.33) разом з відповідними умовами.

Теорема 3.11. Припустімо, що виконуються такі умови:

1) Для будь-яких функцій $x_1(t)$ і $x_2(t)$ класу $C(\mathbb{R}^n)$, які задовольня-
ють $x_1(t) \rightarrow 0$, $x_2(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$, виконується рівномірна за $t \in (0, t_0]$
оцінка

$$\|F(t, x_1) - F(t, x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|, \quad L > 0.$$

2) Існує число $q \in (0, 1)$ таке, що для всіх $t \in (0, t_0]$ маємо нерівність

$$(\|A\| + \|B\| + L) \left| \int_0^t d\tau \right| \leq q.$$

3) Для всіх $t \in [0, t_0]$ виконується

$$F(t, 0) \equiv 0.$$

Тоді задача Коші (3.32) має єдиний розв'язок $x^*(t)$.

Доведення.

Позначимо через V простір усіх неперервних вектор-функцій $x(t)$,
визначених на $(0, t_0]$, і введемо на цьому просторі норму

$$\|x\| = \max \{ \sup \{ |x_k(t)|, k = 1, \dots, n, t \in (0, t_0] \} \}, \quad (3.36)$$

$$\sup \{ |x'_k(t)|, k = 1, \dots, n, t \in (0, t_0] \} \}$$

.

Нехай

$$X = \{ x(t) : \|x\| \leq c \}, \quad c = \text{const.}$$

Визначимо оператор M таким чином:

$$M(x)(t) = \int_0^t (Ax(\tau) + B\dot{x}(\tau) - F(\tau, x(\tau))) d\tau.$$

Поставимо питання: чи існує у цього оператора нерухома точка $x^*(t)$? Саме така функція і буде розв'язком задачі Коші (3.32).

Щоб обґрунтувати існування нерухомої точки, необхідно встановити:

- неперервність оператора M ;
- те, що M відображає замкнену множину X у саму себе;
- те, що M є оператором стиску.

Почнемо з доведення неперервності. Оператор M буде неперервним, якщо для довільних $\varepsilon > 0$ існує $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що

$$\|x_1 - x_2\| < \delta \text{ і } \|x'_1 - x'_2\| < \delta \implies \|M(x_1) - M(x_2)\| < \varepsilon.$$

Для цього скористаємося умовами 1 і 2 теореми:

$$\begin{aligned} \|M(x_1) - M(x_2)\| &= \left\| \int_0^t (Ax_1(\tau) + B\dot{x}_1(\tau) - F(\tau, x_1(\tau))) d\tau \right\| - \\ &\quad - \left\| \int_0^t (Ax_2(\tau) + B\dot{x}_2(\tau) - F(\tau, x_2(\tau))) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \left| \int_0^t \|(Ax_1(\tau) + B\dot{x}_1(\tau) - F(\tau, x_1(\tau))) - (Ax_2(\tau) + B\dot{x}_2(\tau) - F(\tau, x_2(\tau)))\| d\tau \right| \\ &\leq \|A\| \left| \int_0^t (x_1(\tau) - x_2(\tau)) d\tau \right| + \|B\| \left| \int_0^t (\dot{x}_1(\tau) - \dot{x}_2(\tau)) d\tau \right| + \\ &\quad + \left| \int_0^t (F(\tau, x_2(\tau)) - F(\tau, x_1(\tau))) d\tau \right|. \end{aligned}$$

Оскільки у просторі $\mathbb{R}^n$ - $\|x(t)\| = \sum_{k=1}^n |x_k(t)|$, а у просторі неперервних функцій V норма визначена формулою (3.36), одержуємо наступну оцінку:

$$\|M(x_1) - M(x_2)\| \leq \|A\| \delta \left| \int_0^t d\tau \right| + \|B\| \delta \left| \int_0^t d\tau \right| + L \delta \left| \int_0^t d\tau \right| \leq q\delta = \varepsilon.$$

У підсумку маємо, що оператор M є неперервним.

Нехай $X_1 \subseteq X$, тобто X_1 являє собою замкнену підмножину простору функцій X .

Якщо виконується умова 3 теореми, тобто $F(t,0) \equiv 0$ для всіх $t \in [0, t_0]$, то з умови 1) випливає, що

$$\|F(t,x)\| \leq L\|x\|, \quad \text{рівномірно для всіх } t \in (0, t_0].$$

Покажемо, що оператор M відображає замкнену множину X_1 у саму себе. Для цього потрібно довести, що з умови $\|x\| \leq c$ випливає $\|M(x)\| \leq c$.

Дійсно, маємо

$$\begin{aligned} \|M(x)\| &= \left\| \int_0^t (Ax(\tau) + B\dot{x}(\tau) - F(\tau, x(\tau))) d\tau \right\| \\ &\leq \int_0^t (\|A\| \|x(\tau)\| + \|B\| \|\dot{x}(\tau)\| + \|F(\tau, x(\tau))\|) d\tau \\ &\leq \|A\|c \int_0^t d\tau + \|B\|c \int_0^t d\tau + Lc \int_0^t d\tau \leq c. \end{aligned}$$

Отже, $M(X_1) \subseteq X_1$.

Далі встановимо, що оператор M є стискаючим. Для цього використаємо умови 1 та 2 теореми.

Покажемо, що оператор M є стискуючим. Це буде виконано, якщо для будь-яких x_1, x_2 із простору X_1 справджується нерівність

$$\|M(x_1) - M(x_2)\| \leq q \|x_1 - x_2\|, \quad q \in (0,1).$$

Розглянемо різницю образів:

$$\begin{aligned} \|M(x_1) - M(x_2)\| &= \left\| \int_0^t (Ax_1(\tau) + B\dot{x}_1(\tau) - F(\tau, x_1(\tau))) d\tau \right\| - \\ &\quad - \left\| \int_0^t (Ax_2(\tau) + B\dot{x}_2(\tau) - F(\tau, x_2(\tau))) d\tau \right\|. \end{aligned}$$

Додаючи й віднімаючи відповідні доданки, отримуємо оцінку

$$\|M(x_1) - M(x_2)\| \leq \|A\| \left| \int_0^t \|x_1(\tau) - x_2(\tau)\| d\tau \right| + \|B\| \left| \int_0^t \|\dot{x}_1(\tau) - \dot{x}_2(\tau)\| d\tau \right| +$$

$$\begin{aligned}
& + \left| \int_0^t \|F(\tau, x_2(\tau)) - F(\tau, x_1(\tau))\| d\tau \right| \leq \|A\| \cdot \|x_1 - x_2\| \left| \int_0^t d\tau \right| + \\
& + \|B\| \cdot \|x_1 - x_2\| \left| \int_0^t d\tau \right| + \left| \int_0^t L d\tau \right| \cdot \|x_1 - x_2\|
\end{aligned}$$

Враховуючи норму на просторі X_1 і оцінку для інтегралів, маємо:

$$\|M(x_1) - M(x_2)\| \leq q \|x_1 - x_2\|,$$

що і підтверджує стискуючу властивість оператора M .

Таким чином, M відображає множину X_1 у саму себе та є стискуючим оператором на X_1 . За принципом стискуючих відображень існує єдина функція $x^*(t) \in X_1$ така, що

$$x^*(t) = M(x^*)(t).$$

Тобто нерухома точка оператора M є єдиним розв'язком задачі Коші (3.32).

Теорема доведена.

Теорема 3.12. Нехай виконуються такі умови:

- 1) Для всіх $t \in (0, t_0]$ та будь-яких $x_1(t), x_2(t) \in C(\mathbb{R}^n)$ справедливе нерівність

$$\|F(t, x_1) - F(t, x_2)\| \leq L(t) \|x_1 - x_2\|,$$

де $L(t) > 0$ та $L(t)$ є неперервною на проміжку $T = (0, t_0]$. Крім того, вважаємо, що $x_1(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$ та $x_2(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$.

- 2) Існує число $q \in (0, 1)$ таке, що

$$\left| \int_0^t (\|A\| + \|B\| + L(\tau)) d\tau \right| \leq q, \quad \forall t \in (0, t_0].$$

- 3) Для всіх $t \in [0, t_0]$ виконується

$$F(t, 0) \equiv 0.$$

Тоді задача Коші для рівняння (3.32) має єдине розв'язання $x^*(t)$.

Доведення.

Розглянемо простір неперервних функцій $x(t)$, позначимо його через V , а норму визначимо так, як у (3.36). Нехай

$$X = \{x(t) : \|x\| \leq c\}, \quad c = \text{const.}$$

В якості оператора введемо відображення $M(x)(t)$:

$$M(x)(t) = \int_0^t (Ax(\tau) + B\dot{x}(\tau) - F(\tau, x(\tau))) d\tau.$$

Постає питання щодо існування у цього оператора нерухомої точки $x^*(t)$, яка й буде розв'язком задачі Коші (3.32).

Покажемо, що оператор M є неперервним. Для цього має виконуватися умова: для кожного $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що

$$\|x_1 - x_2\| < \delta \text{ та } \|\dot{x}_1 - \dot{x}_2\| < \delta \implies \|M(x_1) - M(x_2)\| < \varepsilon.$$

Для доведення неперервності скористаємося умовами 1 та 2 теореми. Маємо:

$$\begin{aligned} \|M(x_1) - M(x_2)\| &= \left\| \int_0^t (Ax_1(\tau) + B\dot{x}_1(\tau) - F(\tau, x_1(\tau))) d\tau \right\| - \\ &- \left\| \int_0^t (Ax_2(\tau) + B\dot{x}_2(\tau) - F(\tau, x_2(\tau))) d\tau \right\| \leq \left| \int_0^t \|Ax_1(\tau) + B\dot{x}_1(\tau) - F(\tau, x_1(\tau)) - \right. \\ &- \left. (Ax_2(\tau) + B\dot{x}_2(\tau) - F(\tau, x_2(\tau)))\| d\tau \right| \leq \|A\| \left| \int_0^t \|x_1(\tau) - x_2(\tau)\| d\tau \right| + \\ &+ \|B\| \left| \int_0^t \|\dot{x}_1(\tau) - \dot{x}_2(\tau)\| d\tau \right| + \left| \int_0^t \|F(\tau, x_2(\tau)) - F(\tau, x_1(\tau))\| d\tau \right| \leq \dots \end{aligned}$$

Оскільки $\|x(t)\|$ у $\mathbb{R}^n$ розуміємо як

$$\sum_{k=1}^n |x_k(t)|,$$

а у просторі функцій V норма визначається згідно з (3.36), продовжуємо

аналіз далі.

$$\leq \|A\|\delta \left| \int_0^t d\tau \right| + \|B\|\delta \left| \int_0^t d\tau \right| + \delta \left| \int_0^t L(\tau) d\tau \right| \leq q\delta = \varepsilon.$$

У результаті отримуємо, що оператор M є неперервним.

Нехай $X_1 \subseteq X$, тобто X_1 є замкненою підмножиною простору X .

Припустімо, що виконується умова 3 теореми: $F(t,0) \equiv 0$ для всіх $t \in [0, t_0]$. Тоді, спираючись на умову 1, маємо нерівність

$$\|F(t,x)\| \leq L(t)\|x\|, \quad \text{рівномірно для } t \in (0, t_0].$$

Покажемо, що оператор M відображає замкнену множину X_1 у саму себе. Для цього потрібно довести, що з умови $\|x\| \leq c$ випливає $\|M(x)\| \leq c$. Дійсно,

$$\begin{aligned} \|M(x)\| &= \left\| \int_0^t (Ax(\tau) + B\dot{x}(\tau) - F(\tau, x(\tau))) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \left| \int_0^t (\|A\|\|x(\tau)\| + \|B\|\|\dot{x}(\tau)\| + \|F(\tau, x(\tau))\|) d\tau \right| \leq \\ &\leq \|A\| c \left| \int_0^t d\tau \right| + \|B\| c \left| \int_0^t d\tau \right| + c \left| \int_0^t L(\tau) d\tau \right| \leq c. \end{aligned}$$

Отже, $M(X_1) \subseteq X_1$.

Тепер доведемо, що оператор M є стискуючим.

Оператор буде стискуючим, якщо для будь-яких двох функцій x_1, x_2 виконується

$$\|M(x_1) - M(x_2)\| \leq q \|x_1 - x_2\|,$$

Користуючись умовами 1 та 2 теореми, розпишемо різницю операторів:

$$\begin{aligned} \|M(x_1) - M(x_2)\| &= \left\| \int_0^t (Ax_1(\tau) + B\dot{x}_1(\tau) - F(\tau, x_1(\tau))) d\tau \right\| - \\ &- \left\| \int_0^t (Ax_2(\tau) + B\dot{x}_2(\tau) - F(\tau, x_2(\tau))) d\tau \right\| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^t \|Ax_1(\tau) + B\dot{x}_1(\tau) - F(\tau, x_1(\tau)) - (Ax_2(\tau) + B\dot{x}_2(\tau) - F(\tau, x_2(\tau)))\| d\tau \leq \\
&\leq \|A\| \int_0^t \|x_1(\tau) - x_2(\tau)\| d\tau + \|B\| \int_0^t \|\dot{x}_1(\tau) - \dot{x}_2(\tau)\| d\tau + \\
&+ \int_0^t \|F(\tau, x_2(\tau)) - F(\tau, x_1(\tau))\| d\tau \leq \|A\| \cdot \|x_1 - x_2\| \left| \int_0^t d\tau \right| + \\
&+ \|B\| \cdot \|x_1 - x_2\| \left| \int_0^t d\tau \right| + \left| \int_0^t L(\tau) d\tau \right| \|x_1 - x_2\| \leq q \|x_1 - x_2\|.
\end{aligned}$$

Отже, відображення M переводить множину X_1 у саму себе та водночас є стискуючим оператором. Застосовуючи принцип стислих відображень, робимо висновок, що існує єдина функція

$$x^*(t) \in X_1 \quad \text{така, що} \quad x^*(t) = M(x^*)(t).$$

Таким чином, нерухома точка оператора M є розв'язком задачі Коші (3.32).

Теорему доведено.

3.6 Приклади аналізу систем із регулярними та сингулярними жмутками

Приклад 1:

Потрібно відшукати розв'язок задачі

$$\begin{cases} Ax + B \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0 \end{cases} \quad (3.37)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, f(t, x) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ t \cos(x_2 + x_4) \end{pmatrix};$$

$$A + \lambda B = \begin{pmatrix} \lambda + 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2\lambda + 5 & 1 & -1 & 0 \\ \lambda + 3 & \lambda + 3 & -1 & \lambda + 2 \end{pmatrix}$$

Спочатку перевіримо жмуток на наявність лінійних залежностей між стовпцями. Лінійної залежності зі сталими коефіцієнтами немає, проте маємо $\rho(A + \lambda B) = 3 < 4 = n$, тобто стовпці все ж таки лінійно залежні. Отже, у канонічному вигляді жмутка з'являтимуться блоки типу L_ε .

Переходимо до знаходження ε_1 : $M_0 = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$$\begin{aligned} \rho M_0 &= \rho \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \rho \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4 = (0 + 1) \cdot 4 \Rightarrow \varepsilon_1 \neq 0; \quad M_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & A \\ 0 & B \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho M_1 &= \rho \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \rho \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 5 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= 7 < (1 + 1) \cdot 4 \Rightarrow \varepsilon_1 = 1.
\end{aligned}$$

$$L_{\varepsilon_1} = \lambda.$$

Далі, застосовуючи послідовність елементарних перетворень над ряд-

ками і стовпцями, приводимо жмуток до вигляду $\{L_{\varepsilon_1}, A_1 + \lambda B_1\}$:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} \lambda+3 & 1 & -1 & 0 \\ 2\lambda+5 & 1 & -1 & 0 \\ \lambda+3 & \lambda+3 & -1 & \lambda+2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda+3 & 1 & -1 & 0 \\ \lambda+2 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda+3 & \lambda+3 & -1 & \lambda+2 \end{pmatrix} \sim \\
 & \sim \begin{pmatrix} \lambda+3 & 1 & \lambda+2 & 0 \\ \lambda+2 & 0 & \lambda+2 & 0 \\ \lambda+3 & \lambda+3 & \lambda+2 & \lambda+2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda+3 & 1 & \lambda+2 & 0 \\ \lambda+2 & 0 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & 0 & \lambda+2 \end{pmatrix} \sim \\
 & \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ \lambda+2 & 0 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & 0 & \lambda+2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & 0 & \lambda+2 \end{pmatrix} \sim \\
 & \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

$$A_1 + \lambda B_1 = \begin{pmatrix} \lambda+2 & 0 \\ 0 & \lambda+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Матриці P і Q відновлюємо за виконаними перетвореннями над рядками та стовпцями відповідно:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

У системі (3.37) виконуємо заміну змінних

$$x = Qz = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} x_1 = z_1 - z_3 \\ x_2 = z_2 - z_4 \\ x_3 = z_1 \\ x_4 = z_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = x_3 \\ z_2 = x_2 + x_4 \\ z_3 = x_3 - x_1 \\ z_4 = x_4 \end{cases}$$

Із невинродженості перетворень впливає еквівалентність початкових умов: $x(t) \rightarrow 0, t \rightarrow 0 \iff z(t) \rightarrow 0, t \rightarrow 0$.

Обчислимо перетворену праву частину:

$$\tilde{f} = Pf = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2f_1 - f_2 - f_3 \\ -f_1 - f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \tilde{f}_3 \end{pmatrix}$$

Після заміни $x = Qz$ помножимо рівняння системи (3.37) зліва на P :

$$P(A(Qz) + B \frac{d(Qz)}{dt}) = Pf(t, Qz),$$

тобто

$$P(A + \frac{d}{dt}B)Qz = \tilde{f}(t, z).$$

У підсумку отримуємо систему

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dt} + 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dt} + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \tilde{f}_3 \\ \tilde{f}_4 \end{pmatrix}.$$

Переходимо від $f(t, x)$ до $f(t, Qz)$, а далі до $\tilde{f}(t, z)$:

$$\begin{cases} f_1 = e^t \\ f_2 = 0 \\ f_3 = t \cos(x_2 + x_4) = t \cos z_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{f}_1 = 2f_1 - f_2 - f_3 = 2e^t - t \cos z_2 \\ \tilde{f}_2 = -f_1 - f_2 = -e^t \\ \tilde{f}_3 = f_3 = t \cos z_2 \end{cases}$$

Отже, одержали наступну систему:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} z_1 + z_2 = 2e^t - t \cos z_2 \\ \frac{d}{dt} z_3 + 2z_3 = -e^t \\ \frac{d}{dt} z_4 + 2z_4 = t \cos z_2 \\ z_i(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0, \quad i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

Маємо три диференціальні рівняння відносно чотирьох невідомих функцій. Отже, змінна $z_2(t)$ виступає вільним параметром; покладемо, що $z_2(t) \in C^1(U(0))$ і $z_2(0) = 0$.

Спершу розв'яжемо друге рівняння:

$$\frac{d}{dt} z_3 + 2z_3 = -e^t$$

$$\frac{d}{dt} z_3 + 2z_3 = 0$$

$$\frac{d}{dt} z_3 = -2z_3; \quad \frac{dz_3}{z_3} = -2dt; \quad \ln|z_3| = -2t + \ln|c|;$$

$$z_{3_0} = ce^{-2t};$$

$$z_{3_{\text{чн}}} = c(t)e^{-2t};$$

$$z'_{3_{\text{чн}}} = c'(t)e^{-2t} - 2e^{-2t}c(t);$$

$$c'(t)e^{-2t} - 2e^{-2t}c(t) + 2e^{-2t}c(t) = -e^t$$

$$c'(t) = -e^{3t};$$

$$c(t) = \int -e^{3t} dt = -\frac{e^{3t}}{3};$$

$$z_{3_{\text{чн}}} = -\frac{e^{3t}e^{-2t}}{3} = -\frac{e^t}{3};$$

$$z_3 = ce^{-2t} - \frac{e^t}{3};$$

$$z_3(0) = 0 \Rightarrow c - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{3} \Rightarrow z_3 = \frac{1}{3}(e^{-2t} - e^t).$$

Перейдемо до знаходження z_4 з третього рівняння:

$$\frac{d}{dt}z_4 + 2z_4 = t\cos z_2$$

$$\frac{d}{dt}z_4 + 2z_4 = 0$$

$$\frac{d}{dt}z_4 = -2z_4; \quad \frac{dz_4}{z_4} = -2dt \Rightarrow \ln|z_4| = -2t + \ln|c|;$$

$$z_{4_{\text{зо}}} = ce^{-2t};$$

$$z_{4_{\text{чн}}} = c(t)e^{-2t};$$

$$z'_{4_{\text{чн}}} = c'(t)e^{-2t} - 2e^{-2t}c(t);$$

$$c'(t)e^{-2t} - 2e^{-2t}c(t) + 2e^{-2t}c(t) = t\cos z_2;$$

$$c'(t)e^{-2t} = t\cos z_2;$$

$$c(t) = \int te^{2t}\cos z_2(t)dt;$$

$$z_{4_{\text{чн}}} = e^{-2t} \int te^{2t}\cos z_2(t)dt;$$

$$z_4 = ce^{-2t} + e^{-2t} \int te^{2t}\cos z_2(t)dt;$$

$$z_4(0) = 0 \Rightarrow c + \left(\int te^{2t}\cos z_2(t)dt\right)_{t=0} = 0;$$

$$c = -\left(\int te^{2t}\cos z_2(t)dt\right)_{t=0};$$

$$z_4 = -e^{-2t}\left(\int te^{2t}\cos z_2(t)dt\right)_{t=0} + e^{-2t} \int te^{2t}\cos z_2(t)dt.$$

Тепер залишилося визначити z_1 з першого рівняння, маємо: У підсумку дістаємо розв'язок початкової задачі: У підсумку дістаємо розв'язок початкової задачі: $\frac{d}{dt}z_1 + z_2 = 2e^t - t\cos z_2;$

$$\frac{d}{dt}z_1 = 2e^t - t\cos z_2 - z_2;$$

$$z_1 = \int 2e^t dt - \int t\cos z_2 dt - \int z_2 dt = 2e^t + c - \int t\cos z_2 dt - \int z_2 dt;$$

$$z_1(0) = 0 \Rightarrow c = \left(\int t\cos z_2 dt\right)_{t=0} + \left(\int z_2 dt\right)_{t=0} - 2;$$

$$z_1 = 2e^t + (\int t \cos z_2 dt)_{t=0} + (\int z_2 dt)_{t=0} - 2 - \int t \cos z_2 dt - \int z_2 dt.$$

У підсумку дістаємо розв'язок початкової задачі:

$$\begin{cases} x_1 = 2e^t + (\int t \cos z_2 dt)_{t=0} + (\int z_2 dt)_{t=0} - 2 - \int t \cos z_2 dt - \int z_2 dt - \frac{1}{3}(e^{-2t} - e^t) \\ x_2 = z_2(t) + e^{-2t}(\int t e^{2t} \cos z_2(t) dt)_{t=0} - e^{-2t} \int t e^{2t} \cos z_2(t) dt \\ x_3 = 2e^t + (\int t \cos z_2 dt)_{t=0} + (\int z_2 dt)_{t=0} - 2 - \int t \cos z_2 dt - \int z_2 dt \\ x_4 = -e^{-2t}(\int t e^{2t} \cos z_2(t) dt)_{t=0} + e^{-2t} \int t e^{2t} \cos z_2(t) dt. \end{cases}$$

де $z_2(t)$ - довільна функція з класу C^1 в околі нуля така, що $z_2(0) = 0$.

Приклад 2:

Потрібно відшукати розв'язок задачі:

$$\begin{cases} Ax + B \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, f(t, x) = \begin{pmatrix} t \\ tx_2 \\ 2t^3 \\ \frac{e^t}{2} \end{pmatrix}.$$

Розглянемо відповідний жмуток матриць:

$$A + \lambda B = \begin{pmatrix} 1 + \lambda & 2\lambda & 3 + 3\lambda & \lambda & 1 + 2\lambda \\ 1 & 2 + \lambda & 3 & 1 & -\lambda \\ \lambda & 2\lambda & 3\lambda & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + \lambda \end{pmatrix}$$

Легко помітити, що серед стовпців цієї матриці (а саме першого та третього) існує лінійна залежність. Усунемо її за допомогою елементарних перетворень; у результаті дістанемо жмукток вигляду $A_1 + \lambda B_1$, де 0 позначає прямокутну нульову матрицю, а $A_1 + \lambda B_1$ — матрицю, стовпці якої вже не пов'язані лінійною залежністю:

$$A + \lambda B = \begin{pmatrix} 1 + \lambda & 2\lambda & 3 + 3\lambda & \lambda & 1 + 2\lambda \\ 1 & 2 + \lambda & 3 & 1 & -\lambda \\ \lambda & 2\lambda & 3\lambda & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 + \lambda & 2\lambda & 0 & \lambda & 1 + 2\lambda \\ 1 & 2 + \lambda & 0 & 1 & -\lambda \\ \lambda & 2\lambda & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + \lambda \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$A_1 + \lambda B_1 = \begin{pmatrix} 1 + \lambda & 2\lambda & \lambda & 1 + 2\lambda \\ 1 & 2 + \lambda & 1 & -\lambda \\ \lambda & 2\lambda & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + \lambda \end{pmatrix}.$$

Далі обчислимо ранг матриці $A_1 + \lambda B_1$. Якщо $\rho < 4$, це означатиме наявність лінійної залежності між рядками, стовпцями або одночасно між тими й іншими. У випадку, коли $\det(A_1 + \lambda B_1) \neq 0$, маємо $\rho = 4$.

$$|A_1 + \lambda B_1| = (1 + \lambda)[(1 + \lambda)(1 + 2\lambda)\lambda + 2\lambda^2 + 2\lambda^2 - \lambda^2(1 + 2\lambda) - (2\lambda^2 + 2\lambda) - 2\lambda^2] = \lambda^2 + \lambda^3 \neq 0$$

Звідси випливає, що $\rho = 4$, тобто жодної лінійної залежності не виникає.

Отже, $A_1 + \lambda B_1$ є регулярним жмуктом матриць.

Тепер перейдемо до пошуку нескінченних елементарних дільників жмутка $A_1 + \lambda B_1$. Відомо, що такі дільники існують тоді і лише тоді, коли $|B_1| = 0$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$|B_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, нескінченні елементарні дільники в цьому випадку дійсно наявні. Використовуючи послідовність елементарних перетворень, жмукот $A_1 + \lambda B_1$ можна звести до вигляду

$$\{N^{(u_1)}, \dots, N^{(u_s)}, A_2 + \lambda B_2\}, \quad |B_2| \neq 0, \quad N^{(u_1)}, \dots, N^{(u_s)}$$

яким відповідають нескінченні елементарні дільники $\mu^{u_1}, \dots, \mu^{u_s}$. На першому етапі здійснимо приведення жмутка $A_1 + \lambda B_1$ до такого вигляду: $\{N^{(u_1)}, \tilde{A}_1 + \lambda \tilde{B}_1\}$, де

$$N^{(u_1)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{u_1} \Bigg\} u_1$$

Якщо $|\tilde{B}_1| \neq 0$, то $\tilde{A}_1 + \lambda \tilde{B}_1 \equiv A_2 + \lambda B_2$.

Інакше приводимо $\tilde{A}_1 + \lambda \tilde{B}_1$ до вигляду $\{N^{(u_2)}, \hat{A}_1 + \lambda \hat{B}_1\}$ і т.д.

Отже,

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 1+\lambda & 2\lambda & \lambda & 1+2\lambda \\ 1 & 2+\lambda & 1 & -\lambda \\ \lambda & 2\lambda & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1+\lambda & 2\lambda & \lambda & \lambda \\ 1 & 2+\lambda & 1 & -\lambda \\ \lambda & 2\lambda & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\lambda \end{pmatrix} \sim \\
 & \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda+1 \\ 1 & 2+\lambda & 1 & -\lambda \\ \lambda & 2\lambda & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda+1 \\ 0 & 2+\lambda & 1 & -\lambda \\ 0 & 2\lambda & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\lambda & 1 & -\lambda \\ 0 & 2\lambda & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\lambda \end{pmatrix} \\
 & \left| \begin{array}{ccc} 2+\lambda & 1 & -\lambda \\ 2\lambda & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1+\lambda \end{array} \right| = \lambda(2+\lambda)(1+\lambda) - 2\lambda(1+\lambda) = 2\lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3 - 2\lambda - 2\lambda^2 = \lambda^3 + \lambda^2 \neq 0,
 \end{aligned}$$

значить $u_1 = 1$, $N^{(u_1)} = (1)$ і $A_2 + \lambda B_2 = \begin{pmatrix} 2+\lambda & 1 & -\lambda \\ 2\lambda & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1+\lambda \end{pmatrix}$.

Жмуток $A_2 + \lambda B_2$ не має нескінченних елементарних дільників, оскільки матриця B_2 невироджена, тобто :

$$\det B_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

За допомогою елементарних перетворень перетворимо жмуток $A_2 + \lambda B_2$ до його жорданової нормальної форми:

$$\begin{pmatrix} 2+\lambda & 1 & -\lambda \\ 2\lambda & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1+\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -\lambda \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1+\lambda \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -\lambda-1 \\ 0 & \lambda & -\lambda-1 \\ 0 & 0 & 1+\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda-1 \\ 0 & 0 & 1+\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1+\lambda \end{pmatrix}$$

Отже,

$$A + \lambda B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\lambda \end{pmatrix}$$

Матриці P та Q відновимо, простеживши за послідовністю виконаних елементарних перетворень над рядками та стовпцями відповідно:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} *$$

$$* \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} *$$

$$* \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

У системі (3.38) зробимо заміну:

$$x = Qz = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} x_1 = 4z_1 - 3z_3 \\ x_2 = -2z_1 + z_2 - z_3 \\ x_3 = -z_1 + z_3 \\ x_4 = z_4 \\ x_5 = z_5 \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 = x_1 + 3x_3 \\ z_2 = x_2 + 3x_1 + 10x_3 \\ z_3 = x_1 + 4x_3 \\ z_4 = x_4 \\ z_5 = x_5 \end{cases}$$

$x(t) \rightarrow 0, t \rightarrow 0 \approx$ (через невиврожденість перетворень) $\approx z(t) \rightarrow 0, t \rightarrow 0$.

Після виконаної в системі (3.38) заміни пронормуємо її, домноживши обидві частини зліва на матрицю P :

$$P \cdot \left[A(Qz) + B \frac{d(Qz)}{dt} \right] = f(t, Qz)$$

$$P \left(A + \frac{d}{dt} B \right) Qz = P f(t, Qz) = \tilde{f}(t, z)$$

Отримаємо:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dt} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dt} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + \frac{d}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \tilde{f}_3 \\ \tilde{f}_4 \end{pmatrix}.$$

Перейдемо від $f(t, x)$ до $f(t, Qz)$, а потім до $\tilde{f}(t, z)$:

$$\begin{cases} f_1 = t \\ f_2 = tx_2 = t(-2z_1 + z_2 - z_3) = tz_2 - 2tz_1 - tx_3 \\ f_3 = 2t^3 \\ f_4 = \frac{e^t}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{f}_1 = f_1 = t \\ \tilde{f}_2 = f_2 + f_3 = tz_2 - 2tz_1 - tx_3 \\ \tilde{f}_3 = f_3 = 2t^3 \\ \tilde{f}_4 = f_4 = \frac{e^t}{2} \end{cases}$$

Запишемо початкову задачу:

$$\begin{cases} z_2 = t \\ \frac{d}{dt}z_3 + z_4 = tz_2 - 2tz_1 - tx_3 \\ \frac{d}{dt}z_4 = 2t^3 \\ \frac{d}{dt}z_5 + z_5 = \frac{e^t}{2} \\ z_i(t) \rightarrow 0, t \rightarrow 0, i = 1, \dots, 5 \end{cases}$$

Це функціонально-диференційна система виду:

$$\begin{cases} \psi(t, y_1, y_2) = 0 \\ \frac{d}{dt}y_2 = \varphi(t, y_1, y_2) \\ y_1(t) \rightarrow 0, t \rightarrow 0 \\ y_2(t) \rightarrow 0, t \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\text{де } y_1 = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad y_2 = \begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix}.$$

Функціональна залежність отримана у вигляді виразу для частини компоненти y_1 . Далі перейдемо до розв'язання третього диференціального рівняння:

$$\frac{d}{dt}z_4 = 2t^3,$$

$$z_4 = \frac{2t^4}{4} + c = \frac{t^4}{2} + c$$

$$z_4(0) = 0 \Rightarrow 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow z_4 = \frac{t^4}{2}$$

Тепер знайдемо z_5 :

$$\frac{d}{dt}z_5 + z_5 = \frac{e^t}{2}$$

$$\frac{d}{dt}z_5 + z_5 = 0$$

$$\frac{dz_5}{z_5} = dt \Rightarrow \ln|z_5| = -t + \ln|c|$$

$$z_{5_{30}} = ce^{-t}; \quad z_{5_{+i}} = c(t)e^{-t}$$

$$z'_{5_{+i}} = c'(t)e^{-t} - c(t)e^{-t}$$

$$c'(t)e^{-t} - c(t)e^{-t} + c(t)e^{-t} = \frac{e^t}{2}$$

$$c'(t)e^{-t} = \frac{e^t}{2}$$

$$c'(t) = \frac{e^{2t}}{2}$$

$$c(t) = \int \frac{e^{2t}}{2} dt = \frac{1}{4}e^{2t}$$

$$z_{5_{\text{чн}}} = \frac{1}{4}e^{2t} \cdot e^{-t} = \frac{1}{4}e^t$$

$$z_5 = z_{5_{30}} + z_{5_{\text{чн}}} = c(t)e^{-t} + \frac{1}{4}e^t$$

$$z_5(0) = 0 \Rightarrow c \cdot e^0 + \frac{1}{4}e^0 = 0 \Rightarrow c = -\frac{1}{4}$$

$$z_5 = -\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}e^t$$

$$z_2 = t$$

Підставимо z_2, z_4, z_5 в друге рівняння:

$$\frac{d}{dt}z_3 + \frac{t^4}{2} = -2tz_1 + t^2 - tz_3 + 2t^3,$$

$$\frac{d}{dt}z_3 + tz_3 = -2tz_1 + t^2 + 2t^3 - \frac{t^4}{2}$$

Щоб гарантувати існування розв'язку задачі Коші, на функцію $z_1(t)$ необхідно накласти умову неперервної диференційованості в деякому околі точки $t = 0$.

$$\frac{d}{dt}z_3 = -tdt,$$

$$\ln|z_3| = -\frac{t^2}{2} + \ln|c|,$$

$$z_{3_{30}} = c \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}; \quad z_{3_{\text{чн}}} = c(t) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}},$$

$$z'_{3_{+i}} = c'(t) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} - c(t) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot t$$

$$c'(t) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} - c(t) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot t + c(t) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot t = -2tz_1 + t^2 + 2t^3 - \frac{t^4}{2}$$

$$c'(t) = e^{\frac{t^2}{2}}(-2tz_1 + t^2 + 2t^3 - \frac{t^4}{2})$$

$$c(t) = -2 \int te^{\frac{t^2}{2}} z_1(t) dt + \int t^2 e^{\frac{t^2}{2}} dt + 2 \int t^3 e^{\frac{t^2}{2}} dt - \frac{1}{2} \int t^4 e^{\frac{t^2}{2}} dt$$

$\int t^4 e^{\frac{t^2}{2}} dt$ не інтегрується в елементарних функціях.

$$\begin{aligned}
 \int t^3 e^{\frac{t^2}{2}} &= \left[\begin{array}{l} \frac{t^2}{2} = m \quad t^2 = 2m \\ dm = t dt \end{array} \right] = 2 \int m e^m dm = \left[\begin{array}{ll} u = m & du = dm \\ dv = e^m dm & v = e^m \end{array} \right] = \\
 &= 2(m \cdot e^m - \int e^m dm) = e^{\frac{t^2}{2}}(t^2 - 2) \\
 c(t) &= -2 \int t e^{\frac{t^2}{2}} z_1(t) dt - \frac{1}{2} \int t^4 e^{\frac{t^2}{2}} dt + \int t^2 e^{\frac{t^2}{2}} dt + 2e^{\frac{t^2}{2}}(t^2 - 2) \\
 z_3 &= c \cdot e^{\frac{-t^2}{2}} + e^{\frac{-t^2}{2}}(-2 \int t e^{\frac{t^2}{2}} z_1(t) dt - \frac{1}{2} \int t^4 e^{\frac{t^2}{2}} dt + \int t^2 e^{\frac{t^2}{2}} dt + 2e^{\frac{t^2}{2}}(t^2 - 2)) \\
 z_3(0) &= 0 \Rightarrow c + (-2 \int t e^{\frac{t^2}{2}} z_1(t) dt - \frac{1}{2} \int t^4 e^{\frac{t^2}{2}} dt + \int t^2 e^{\frac{t^2}{2}} dt)_{t=0} - 4 = 0 \\
 c &= 4 - (-2 \int t e^{\frac{t^2}{2}} z_1(t) dt - \frac{1}{2} \int t^4 e^{\frac{t^2}{2}} dt + \int t^2 e^{\frac{t^2}{2}} dt)_{t=0} \\
 z_3 &= (4 - (-2 \int t e^{\frac{t^2}{2}} z_1(t) dt - \frac{1}{2} \int t^4 e^{\frac{t^2}{2}} dt + \int t^2 e^{\frac{t^2}{2}} dt)_{t=0}) e^{\frac{-t^2}{2}} + e^{\frac{-t^2}{2}} * \\
 &* (-2 \int t e^{\frac{t^2}{2}} z_1(t) dt - \frac{1}{2} \int t^4 e^{\frac{t^2}{2}} dt + \int t^2 e^{\frac{t^2}{2}} dt + 2e^{\frac{t^2}{2}}(t^2 - 2))
 \end{aligned}$$

Отримуємо розв'язок вихідної системи:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = (4z_1(t) - (12 - 3(-2 \int t e^{\frac{t^2}{2}} z_1(t) dt - \frac{1}{2} \int t^4 e^{\frac{t^2}{2}} dt + \int t^2 e^{\frac{t^2}{2}} dt)_{t=0})) \cdot e^{\frac{-t^2}{2}} + \\ + 3e^{\frac{t^2}{2}}(-2 \int t e^{\frac{t^2}{2}} z_1(t) dt - \frac{1}{2} \int t^4 e^{\frac{t^2}{2}} dt + \int t^2 e^{\frac{t^2}{2}} dt + 2e^{\frac{t^2}{2}}(t^2 - 2)) \\ x_2 = -2z_1(t) + t - (4 - (-2 \int t e^{\frac{t^2}{2}} z_1(t) dt - \frac{1}{2} \int t^4 e^{\frac{t^2}{2}} dt + \int t^2 e^{\frac{t^2}{2}} dt)_{t=0}) e^{\frac{-t^2}{2}} + \\ + e^{\frac{-t^2}{2}}(-2 \int t e^{\frac{t^2}{2}} z_1(t) dt - \frac{1}{2} \int t^4 e^{\frac{t^2}{2}} dt + \int t^2 e^{\frac{t^2}{2}} dt + 2e^{\frac{t^2}{2}}(t^2 - 2)) \\ x_3 = -z_1(t) + (4 - (-2 \int t e^{\frac{t^2}{2}} z_1(t) dt - \frac{1}{2} \int t^4 e^{\frac{t^2}{2}} dt + \int t^2 e^{\frac{t^2}{2}} dt)_{t=0}) e^{\frac{-t^2}{2}} + \\ + e^{\frac{-t^2}{2}}(-2 \int t e^{\frac{t^2}{2}} z_1(t) dt - \frac{1}{2} \int t^4 e^{\frac{t^2}{2}} dt + \int t^2 e^{\frac{t^2}{2}} dt + 2e^{\frac{t^2}{2}}(t^2 - 2)) \\ x_4 = \frac{t^2}{2} \\ x_5 = -\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}e^t \end{array} \right.$$

де $z_1(t)$ — довільна функція класу C^1 в околі нуля, що задовольняє умову $z_1(0) = 0$.

ВИСНОВОК

У даній кваліфікаційній роботі було здійснено дослідження задачі Коші для системи m звичайних диференціальних рівнянь з алгебраїчно-диференціальною структурою:

$$\begin{cases} Ax + B \frac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0, \end{cases}$$

де $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, а $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ — неперервна вектор-функція на області

$$D = \{(t, x) : 0 < |t| \leq a, \|x\| \leq b\},$$

Така постановка охоплює широкий клас задач, які у математичному моделюванні проявляються як диференціально-алгебраїчні системи, що містять сингулярні матричні жмутки та елементи функціональних залежностей.

У першому розділі роботи було наведено та систематизовано фундаментальні поняття, необхідні для опрацювання поставленої задачі: базові визначення з теорії матриць, концепцію жмутків матриць, їх елементарних та нескінченних дільників, структуру регулярних і сингулярних блоків та властивості лінійних диференціальних систем у нормальній формі. Особлива увага приділена канонічним поданням жмутків — інструменту, що дозволяє встановлювати глибинні структурні властивості системи та виділяти диференційовані та недиференційовані компоненти вектор-функції.

Другий розділ присвячений детальному дослідженню методів структурного перетворення та нормалізації сингулярних матричних жмутків. Основним результатом є доведена теорема про можливість приведення довільного сингулярного жмутка до найпростішого квазидіагонального вигляду шляхом застосування скінченної кількості елементарних перетворень рядків та стовпців. У роботі було проаналізовано критерій еквівалентності матричних жмутків, зокрема розглянуто роль регулярних та сингулярних блоків у формуванні структури системи. Виділено умови, за яких жмуток має нескінченні елементарні дільники, що вказує на наявність у системі алгебраїчних зв'язків між компонентами вектора стану.

Цей розділ відіграє ключову роль, оскільки саме формальна структура жмутка визначає, чи можна звести систему до нормальної форми або чи доведеться працювати з функціональними залежностями, що становлять основу сингулярних систем.

У третьому розділі було здійснено поглиблене дослідження задачі Коші для систем зі змішаною диференціально-алгебраїчною структурою. На основі отриманих у попередніх розділах результатів показано, що загальну сингулярну систему можна привести до еквівалентної, яка поєднує диференціальні рівняння та функціональні співвідношення між змінними. Таке перетворення дає змогу розділити регулярні компоненти та алгебраїчні залежності, що є ключовим для аналізу існування та єдиності розв'язків.

Подальший аналіз продемонстрував, що для різних типів структурних блоків жмутка — регулярних, сингулярних, квазірегулярних та змішаних — існують чітко визначені умови коректності задачі Коші. Було встановлено, що залежно від характеру блочної структури розв'язок може бути єдиним, утворювати кінцевовимірне сімейство, яке залежить від довільних дійсних параметрів, або формувати функціональне сімейство розв'язків, що визначається довільними функціями класу C^1 .

Особливу увагу приділено дослідженню диференціальної підсистеми, для якої застосовано метод нерухомої точки спеціально сконструйованого оператора. Використання властивостей стискуючих відображень забезпечило конструктивний доказ існування та єдиності розв'язку, що, у свою чергу, створює основу для реалізації ефективних обчислювальних алгоритмів.

Отримані результати суттєво розширюють клас систем, для яких задача Коші може бути коректно сформульована та розв'язана за допомогою теорії сингулярних матричних жмутків. Вони уточнюють критерії існування розв'язків, поглиблюють уявлення про структуру сингулярних систем та пропонують послідовну алгоритмічну процедуру приведення загальної системи до найпростішої еквівалентної форми.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гантмахер Ф. Р. Теорія матриць. — 1988. — 552 с.
2. Самойленко А. М., Яковець В. П. Диференціально-алгебраїчні рівняння та їх застосування. — Київ: Наукова думка, 1986. — 256 с.
3. Campbell S. L. Singular Systems of Differential Equations. — San Francisco: Pitman, 1980. — 240 p.
4. Campbell S. L. Singular Systems of Differential Equations 2. — San Francisco: Pitman, 1982. — 234 p.
5. Campbell S. L., Petzold L. R. Canonical forms and solvable singular system of differential equations // SIAM J. Alg. Discrete Methods. — 1983. — Vol. 4. — P. 517–521.
6. März R., Lamour R., Winkler R. How Floquet Theory Applies to Index-1 Differential Equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1998. — No. 2. — P. 372–394.
7. Kunkel P., Mehrmann V. Differential-Algebraic Equations: Analysis and Numerical Solution. — Zürich: EMS Press, 2015. — 350 p.
8. Lamour R., März R., Winkler R. Differential-Algebraic Equations: A Projector-Based Analysis. — Berlin: Springer, 2013. — 364 p.
9. Meuer T., Mehrmann V. Linear Differential-Algebraic Equations and Their Numerical Treatment // Acta Numerica. — 2018. — P. 475–628.
10. Benner P., Mehrmann V., Xu H. A Survey on Linear and Nonlinear Matrix Pencils // GAMM-Mitteilungen. — 2020. — Vol. 43. — 25 p.
11. Gugercin S., Antoulas A. C. Approximation of Large-Scale Dynamical Systems. — Philadelphia: SIAM, 2020. — 324 p.
12. Bentz E., Reis T. Index Analysis and Regularization of Nonlinear DAEs // Mathematics of Control, Signals, and Systems. — 2021. — Vol. 33. — P. 345–369.
13. März R. Projector-Based Decomposition Methods for DAEs: Recent Developments // Applied Numerical Mathematics. — 2022. — Vol. 176. — P. 225–248.
14. Mehrmann V., Stykel T. Descriptor Systems and Their Applications in Engi-

- neering // Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems. — 2019. — Vol. 25. — P. 1–34.
15. Reis T. Canonical Forms and Regularization Techniques for Nonlinear DAEs. — Cham: Springer, 2023. — 289 p.
 16. Hanke M. Solvability of Singular Differential Systems Revisited // Linear Algebra and Its Applications. — 2017. — Vol. 525. — P. 1–21.
 17. Struik E. Structural Properties of Singular Matrix Pencils and Their Applications // Linear Algebra and Its Applications. — 2021. — Vol. 637. — P. 142–165.
 18. Markus L., Turowicz A. Modern Theory of Differential-Algebraic Systems. — Cambridge: Cambridge University Press, 2024. — 410 p.
 19. Самкова Г. Є. Нелінійні сингулярні системи: сучасні методи аналізу. — Київ: Інститут математики НАН України, 2020. — 198 с.
 20. Шарай Н. В. Сингулярні диференціальні системи зі змінним жмутком матриць. — Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2018. — 150 с.
 21. Бондаренко М. Г. Матричні пучки: сучасні підходи та застосування // Вісник Київського національного університету. — 2019. — Вип. 3. — С. 35–42.
 22. Campbell S. L., Petzold L. R. Differential-Algebraic Equations in Engineering and Science. Updated Edition. — Philadelphia: SIAM, 2019. — 420 p.
 23. Mehrmann V., Reis T. Control of Differential-Algebraic Systems: Recent Advances. — Cham: Springer, 2022. — 380 p.
 24. Antoulas A. C. Interpolation and Model Reduction for Descriptor Systems // SIAM Review. — 2020. — Vol. 62, No. 3. — P. 529–565.
 25. Benner P., Stykel T. Model Reduction Methods for DAEs // Annual Reviews in Control. — 2021. — Vol. 52. — P. 251–267.