

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра математичного аналізу

Кваліфікаційна робота
на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»
«Середні коливання дискретних функцій»
«Mean oscillations of discrete functions»

Виконав: здобувач денної форми навчання
спеціальності 111 Математика
Освітня програма «Математика»
Добринін Костянтин Станіславович

Керівник: доктор фіз.-мат. наук, проф. Кореновський А.О.

(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали, підпис)

Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доц. Шанін Р.В.

(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ _____ від _____ 2025 р.

Завідувач кафедри

Захищено на засіданні ЕК № _____

Протокол № _____ від _____ 2025 р.

Оцінка _____ / _____ / _____

Голова ЕК

Одеса — 2025 р.

ЗМІСТ

ВСТУП	3
1 Основні терміни	5
1.1 Середнє значення та середнє коливання	5
1.2 Норми	6
1.3 Властивості норм	6
1.4 Подальші кроки у роботі	6
2 Загальний випадок	7
2.1 Рівновимірні переставлення функцій	7
2.2 Теорема Рісса (про “сонце, що сходить”)	8
2.3 Норма переставлення функції	10
2.4 Фінальна теорема для неперервного випадку	12
3 Двоступінчаста функція як приклад дискретної	16
4 Треступінчаста функція	19
4.1 Опис умов для треступінчастої функції	19
4.2 Аналіз середніх коливань за різними інтервалами	20
4.3 Середні коливання модуля функції	24
4.3.1 Середні коливання при $\alpha > \beta$	24
4.3.2 Середні коливання при $1 \geq \beta \geq \alpha$	26
4.3.3 Середні коливання при $\beta \geq 1$	28
4.4 Порівняння норм функції та її модуля	31
4.4.1 Зони 1 та 2	34
4.4.2 Зони 3-6	35
4.4.3 Зони 7-9	38
4.4.4 Зони 10 та 11	40
4.4.5 Зона 12	42
4.4.6 Об’єднання результатів	42
ВИСНОВОК	44
Список літератури	45

ВСТУП

Актуальність теми

Дослідження коливань функцій займає важливе місце в сучасному математичному аналізі, теорії наближень і прикладних задачах. Для функцій із значними локальними відхиленнями, таких як дискретні або немонотонні функції, класичні норми, наприклад L^p , часто виявляються недостатніми для точного опису їхньої поведінки. У таких випадках простір функцій із обмеженою середньою осциляцією (ВМО) стає потужним інструментом, який дозволяє глибше аналізувати властивості функцій, зокрема їхню стійкість до різких змін. Актуальність цієї теми підтверджується також моїми попередніми дослідженнями: у курсовій роботі 2024 року де я вже аналізував подібні задачі, і деякі результати тієї роботи стали основою для цього дослідження.

Мета роботи

Ця робота присвячена дослідженню поведінки дискретних ступінчастих функцій у просторі ВМО, з акцентом на аналіз нерівності між нормами функції та її модуля. Основні завдання дослідження включають:

- Доведення нерівності $\|f\|_d \geq \| |f| \|_d$, враховуючи особливості їхньої структури;
- Аналіз впливу параметрів ступінчастих функцій на величину їхніх ВМО-норм, зокрема для функцій із двома та трьома ступенями;
- Розробка підходів до оцінки середнього коливання для дискретних функцій із різними знаками висот, включаючи випадки з позитивними та негативними значеннями.
- Візуалізація залежностей між параметрами функцій і нормами за допомогою графічного аналізу для триступінчастих функцій.

Огляд змісту роботи

Робота поступово розкриває тему через теоретичні основи та практичні приклади, переходячи від загальних понять до конкретних випадків.

Спочатку ми вводимо основні терміни, такі як середнє коливання та ВМО-норма, адаптовані для дискретних функцій, і формулюємо проблему, яку будемо досліджувати. Далі переходимо до теоретичної бази, аналізуючи, як нерівність між нормами функції та її модуля працює для неперервного випадку, і пояснюємо, чому ці результати не можна безпосередньо перенести на дискретні функції. Потім ми зосереджуємося на простіших випадках — двоступінчастих функціях, розглядаючи різні комбінації висот, щоб зрозуміти, як поводить ся нерівність у цих умовах. Нарешті, у найбільш детальному розділі, ми досліджуємо тріступінчасті функції, використовуючи графічні методи, щоб показати, як параметри впливають на норми, і підтверджуємо нерівність для різних зон значень параметрів.

Практичне значення

Отримані результати можуть знайти застосування:

- Для оцінки якості алгоритмів стиснення даних;
- В оптимізації дискретних структур, наприклад, для аналізу графів або цифрових моделей із різкими змінами параметрів;
- У задачах обробки сигналів, де ВМО-норми дозволяють оцінити стійкість до шумів.

РОЗДІЛ 1

ОСНОВНІ ТЕРМІНИ

У цій роботі розглядаються функції, які набувають сталих значень на інтервалах виду $(n, n + 1)$, де $n \in \mathbb{Z}$. Такі функції ми називатимемо ступінчастими функціями. Кожен інтервал $(n, n + 1)$, на якому функція має стале значення, називатимемо сходинкою, а значення функції на цьому інтервалі — висотою сходинки.

Для ступінчастих функцій ми аналізуватимемо середні коливання на обмежених інтервалах із натуральними кінцями.

Для початку визначимо основні поняття: середнє значення та середнє коливання функції.

1.1 Середнє значення та середнє коливання

Для вимірної функції f , заданої на множині $E \subset \mathbb{R}$, *середнім значенням* на інтервалі $I \subset E$ називається величина:

$$f_I = \frac{1}{|I|} \int_I f(x) dx,$$

де $|I|$ — довжина інтервалу I .

Середнім коливанням функції f на інтервалі I називається:

$$\Omega(f, I) = \frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - f_I| dx.$$

Для ступінчастих функцій середнє значення та середнє коливання на інтервалі $I = [a, b]$, де $a, b \in \mathbb{Z}$, можна виразити через суми. Зокрема, якщо $I = [n, m]$ з $n, m \in \mathbb{Z}$, то:

$$f_I = \frac{1}{m - n} \sum_{k=n}^{m-1} f_k,$$

$$\Omega(f, I) = \frac{1}{m - n} \sum_{k=n}^{m-1} |f_k - f_I|.$$

1.2 Норми

Для вимірної функції f на \mathbb{R} вводимо норму $\|f\|_*$ як:

$$\|f\|_* = \sup_I \Omega(f, I),$$

де супремум береться по всіх скінченних інтервалах $I \subset [0, R]$.

Для ступінчастих функцій додатково вводимо норму $\|f\|_d$:

$$\|f\|_d = \sup_{I=[n,m], n,m \in \mathbb{Z}} \Omega(f, I),$$

де супремум обчислюється лише по інтервалах із цілими кінцями.

Поняття з підпунктів (1.1) та (1.2) базуються на визначеннях із [1] та [4].

1.3 Властивості норм

З визначень норм очевидно випливають такі властивості:

- 1) $\|f\|_* = 0$ тоді і тільки тоді, коли f є сталою функцією.
- 2) Для будь-якої сталої t , $\|f + t\|_* = \|f\|_*$.
- 3) Для дійсного числа λ , $\|\lambda f\|_* = |\lambda| \cdot \|f\|_*$.

Аналогічні властивості виконуються для норми $\|f\|_d$.

1.4 Подальші кроки у роботі

Для функцій на скінченних інтервалах $I \subset [0, \mathbb{R}]$ відомо, що виконується нерівність $\|f\|_* \geq \| \|f\|_* \|$. Ця властивість відіграє важливу роль у дослідженні поведінки функцій, і її детальний аналіз буде представлено далі.

Метою цієї роботи є перевірити, чи виконується аналогічна нерівність для ступінчастих функцій із нормою $\|f\|_d$, тобто чи справджується:

$$\|f\|_d \geq \| \|f\|_d \|.$$

РОЗДІЛ 2

ЗАГАЛЬНИЙ ВИПАДОК

У цьому розділі ми розглянемо загальний випадок функцій, визначених на скінченних інтервалах $[0, \mathbb{R}]$, і покажемо, що нерівність $\|f\|_* \geq \|f\|_*$ завжди виконується. Це дозволить нам зрозуміти властивості норм у неперервному контексті (далі “неперервний випадок”) та закладе основу для подальшого аналізу ступінчастих функцій із нормою $\|f\|_d$, що є ключовим кроком у дослідженні дискретних аналогів.

Перед доведенням основної теореми необхідно ввести низку допоміжних понять і результатів, які слугуватимуть основою для аналізу.

2.1 Рівновимірні перетавлення функцій

Означення 2.1.1 (Функція розподілу). *Нехай $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ — вимірна функція на множині $E \subset \mathbb{R}^d$. Функцією розподілу λ_f називається відображенням:*

$$\lambda_f: (0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty], \quad \lambda_f(y) = |\{x \in E : |f(x)| > y\}|,$$

де $|\cdot|$ — міра Лебега. При $|E| = \infty$ вимагається $\lambda_f(y) < \infty$ для всіх $y > 0$.

Визначимо, що таке рівновимірність:

Означення 2.1.2 (Рівновимірність). *Функції $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ та $g: E' \rightarrow \mathbb{R}$ називаються рівновимірними, якщо їх функції розподілу збігаються:*

$$\lambda_f(y) = \lambda_g(y) \quad \forall y > 0,$$

де $\lambda_f(y) = |\{x \in E : |f(x)| > y\}|$.

Означення 2.1.3 (Незростаюче рівновимірне перетавлення). *Для вимірної функції $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ перетавленням $f^{[d]}$ називається:*

$$f^{[d]}(t) = \sup_{e \subset E, |e|=t} \inf_{x \in e} f(x), \quad 0 < t \leq |E|.$$

Воно задовольняє властивості:

- 1) Рівновимірність з f : $\lambda_{f^{[d]}} = \lambda_f$.
- 2) $f^{[d]}$ незростає та неперервна на $(0, |E|]$.

Для ступінчастих функцій, які набувають сталих значень на інтервалах $(n, n + 1)$ незростаюче рівновимірне перетавлення $f^{[d]}$ еквівалентне перестановці їхніх сходинок таким чином, що висоти впорядковуються в порядку спадання за величиною. Ця операція зберігає довжину кожного інтервалу, але перебудовує порядок сходинок відповідно до їхніх абсолютних значень, що полегшує аналіз норм таких функцій у подальших розділах.

2.2 Теорема Рісса (про “сонце, що сходить”)

У цьому підпункті буде розглянуто теорему Рісса та властивість Клемеса. Ці результати будуть використані в подальших розділах для дослідження норм $\|f\|_*$.

Теорема 2.2.1 (Рісс, [2]). *Нехай функція f сумовна на відрізку $I_0 \equiv [a_0, b_0] \subset \mathbb{R}$ і число $\alpha \geq \frac{1}{|I_0|} \int_{I_0} f(x) dx$. Тоді знайдеться не більш, ніж зчислений набір інтервалів $I_j \subset I_0$, $j = 1, 2, \dots$, внутрішності яких попарно не перетинаються, таких, що*

$$\frac{1}{|I_j|} \int_{I_j} f(x) dx = \alpha, \quad j = 1, 2, \dots,$$

Доказ цієї теореми представлено в роботі Рісса [2]. Вона дозволяє розбивати інтервал на підінтервали з певними середніми значеннями, що є основою для багатьох подальших результатів, зокрема для властивості Клемеса. Ця властивість описує поведінку середніх коливань монотонних функцій на вкладених інтервалах.

Властивість 2.2.1 ([3]). *Нехай сумовна функція f монотонна на відрізку $I_1 \equiv [\alpha_1, \beta_1]$ і відрізок $I \equiv [\alpha, \beta] \subset I_1$ такий, що $f_I = f_{I_1}$. Тоді справедлива нерівність*

$$\Omega(f; I) \leq \Omega(f; I_1).$$

Доведення властивості

Доведення. Можемо вважати, що f не зростає на I_1 . Розглядаємо нетривіальний випадок $\Omega(f; I) > 0$. В силу монотонності f , знайдеться таке $\gamma \in (\alpha, \beta)$, що $f(x) \geq f_{I_1}$ при $x \in [\alpha_1, \gamma]$ і $f(x) \leq f_{I_1}$ при $x \in [\gamma, \beta_1]$. З монотонності функції $f(x) - f_{I_1}$ випливає

$$\frac{1}{\gamma - \alpha_1} \int_{\alpha_1}^{\gamma} (f(x) - f_{I_1}) dx \geq \frac{1}{\gamma - \alpha} \int_{\alpha}^{\gamma} (f(x) - f_I) dx,$$

$$\frac{1}{\beta_1 - \gamma} \int_{\gamma}^{\beta_1} (f_{I_1} - f(x)) dx \geq \frac{1}{\beta - \gamma} \int_{\gamma}^{\beta} (f_I - f(x)) dx,$$

або, що те ж саме,

$$\frac{\gamma - \alpha_1}{\int_{\alpha_1}^{\gamma} (f(x) - f_{I_1}) dx} \leq \frac{\gamma - \alpha}{\int_{\alpha}^{\gamma} (f(x) - f_I) dx}, \quad (1)$$

$$\frac{\beta_1 - \gamma}{\int_{\gamma}^{\beta_1} (f_{I_1} - f(x)) dx} \leq \frac{\beta - \gamma}{\int_{\gamma}^{\beta} (f_I - f(x)) dx}. \quad (2)$$

додаючи (1) і (2), знаходимо

$$\frac{\beta_1 - \alpha_1}{\int_{\alpha_1}^{\gamma} (f(x) - f_{I_1}) dx} \leq \frac{\beta - \alpha}{\int_{\alpha}^{\gamma} (f(x) - f_I) dx}. \quad (3)$$

Розглянемо окремо ліву та праву частини нерівності,

$$\Omega(f; I_1) = \frac{2}{\beta_1 - \alpha_1} \int_{\alpha_1}^{\gamma} (f(x) - f_{I_1}) dx,$$

$$\Omega(f; I) = \frac{2}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\gamma} (f(x) - f_I) dx.$$

Звідси та з (3) випливає нерівність,

$$\Omega(f; I) \leq \Omega(f; I_1).$$

□

2.3 Норма переставлення функції

У цьому підпункті ми досліджуємо теорему про норму $\|f\|_*$ рівномірного переставлення $f^{[d]}$ функції в просторі ВМО (функцій з обмеженим середнім коливанням). Це допоміжна теорема для наступних розділів, що дозволяє спростити обчислення норм.

Теорема 2.3.1 (Порівняння норм переставлення [3]). *Нехай $f \in L^1([a, b])$ та $f^{[d]}$ - її незростаюче рівновимірне переставлення. Тоді:*

$$\|f^{[d]}\|_* \leq \|f\|_*,$$

де $\|\cdot\|_*$ - норма у просторі ВМО (функцій з обмеженим середнім коливанням).

Доведення. Зафіксуємо відрізок $J \subset [0, b_0 - a_0]$ і позначимо $\alpha = \frac{1}{|J|} \int_J f^{[d]}(u) du$. Розглянемо спочатку такий випадок, коли $\alpha \geq \frac{1}{b_0 - a_0} \int_{a_0}^{b_0} f(x) dx$. Застосовуючи лему Рісса “про сонце, що сходить”, побудуємо інтервали $I_j \subset [a_0, b_0]$, $j = 1, 2, \dots$, які попарно не перетинаються, такі, що $f_{I_j} = \alpha$, $j = 1, 2, \dots$, і $f(x) \leq \alpha$ для майже всіх $x \in [a_0, b_0] \setminus E$, де $E = \bigcup_{j \geq 1} I_j$. Якщо ми доведемо нерівність

$$\frac{1}{|J|} \int_J |f^{[d]}(t) - \alpha| dt \leq \frac{1}{|E|} \int_E |f(x) - \alpha| dx, \quad (4)$$

то залишиться скористатися тим, що

$$f_E = \frac{1}{|E|} \int_E f(x) dx = \frac{1}{\sum_j |I_j|} \sum_j \int_{I_j} f(x) dx = \alpha, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|E|} \int_E |f(x) - \alpha| dx = \frac{1}{|E|} \sum_j \int_{I_j} |f(x) - \alpha| dx = \\ & = \frac{1}{|E|} \sum_j |I_j| \frac{1}{|I_j|} \int_{I_j} |f(x) - f_{I_j}| dx = \frac{1}{|E|} \sum_j |I_j| \Omega(f; I_j) \leq \|f\|_*. \end{aligned}$$

Для доведення (4) виберемо найбільше $t \in (0, b_0 - a_0]$, таке, що $J \subset [0, t]$ і $\frac{1}{t} \int_0^t f^{[d]}(u) du = \alpha$. Існування такого t впливає з умови

$$\frac{1}{b_0 - a_0} \int_0^{b_0 - a_0} f^{[d]}(u) du = \frac{1}{b_0 - a_0} \int_{a_0}^{b_0} f(x) dx \leq \alpha = \frac{1}{|J|} \int_J f^{[d]}(u) du.$$

Скориставшись монотонністю функції $f^{[d]}$ і застосовуючи властивість 3.1, знаходимо

$$\frac{1}{|J|} \int_J |f^{[d]}(u) - \alpha| du \leq \frac{1}{t} \int_0^t |f^{[d]}(u) - \alpha| du,$$

і тому для доведення (4) достатньо показати, що

$$\frac{1}{t} \int_0^t |f^{[d]}(u) - \alpha| du \leq \frac{1}{|E|} \int_E |f(x) - \alpha| dx. \quad (6)$$

В свою чергу, (6) є наслідком двох таких співвідношень:

$$t \geq |E| \quad (7)$$

і

$$\int_0^t |f^{[d]}(u) - \alpha| du = \int_E |f(x) - \alpha| dx. \quad (8)$$

Для доведення (7) відзначимо, що за означенням незростаючого перетавлення маємо нерівність

$$\int_0^{|E|} f^{[d]}(u) du \geq \int_E f(x) dx,$$

і тому, в силу (5),

$$\frac{1}{|E|} \int_E f(x) dx = \alpha = \frac{1}{t} \int_0^t f^{[d]}(u) du.$$

Звідси та з монотонності $f^{[d]}$ випливає (7). Для доведення (8) скористаємося тим, що $f(x) \leq \alpha$ майже скрізь на $[a_0, b_0] \setminus E$. Тоді, застосовуючи (5), знайдемо

$$\begin{aligned} \int_0^t |f^{[d]}(u) - \alpha| du &= 2 \int_{\{u \in [0, t]: f^{[d]}(u) > \alpha\}} (f^{[d]}(u) - \alpha) du = \\ &= 2 \int_{\{x \in [a_0, b_0]: f(x) > \alpha\}} (f(x) - \alpha) dx = 2 \int_{\{x \in E: f(x) > \alpha\}} (f(x) - \alpha) dx = \\ &= \int_E |f(x) - \alpha| dx. \end{aligned}$$

Цим завершується доведення нерівності (6).

У випадку $\alpha < \frac{1}{b_0 - a_0} \int_{a_0}^{b_0} f(x) dx$ достатньо застосувати попередні міркування до функції $-f$ і помітити, що рівність $(-f)^{[d]}(t) = -f^{[d]}(b_0 - a_0 - t)$ справедлива для всіх $t \in [0, b_0 - a_0]$, крім множини точок розриву функції $(-f)^{[d]}$, що має міру нуль. У цьому випадку також отримаємо нерівність

$$\frac{1}{|J|} \int_J |f^{[d]}(u) - \alpha| du \leq \|f\|_*,$$

і тим самим завершується доведення теореми. \square

Зауваження 2.3.1. У процесі наведеного доведення ми використовуємо величину t , таку, що $J \subset [0, t]$, де $t \in (0, b_0 - a_0]$. Важливо зауважити, що t не обов'язково є цілим числом, що створює проблему для норми $\|f\|_d$. Отже, наведене доведення не може бути безпосередньо застосоване до ступінчастих функцій.

2.4 Фінальна теорема для неперервного випадку

У цьому підпункті ми завершуємо аналіз неперервного випадку, використовуючи результати попередніх розділів, зокрема теорему Рісса, властивість Клемеса та норму переставлення функцій.

Теорема 2.4.1 ([1]). *Нехай функція $f \in BMO([a_0, b_0])$. Тоді справедлива нерівність*

$$\| |f| \|_* \leq \|f\|_*.$$

Доведення. Зафіксуємо відрізок $I \subset [a_0, b_0]$ і позначимо $g = f|_I$ — звуження функції f на I . Тоді, очевидно,

$$\Omega(|f|; I) = \Omega(|g|; I) = \Omega(|g^{[d]}|; [0, |I|]).$$

Але, за теоремою 2.2, для будь-якого відрізка $J \subset [0, |I|]$ маємо

$$\Omega(g^{[d]}; J) \leq \sup_{K \subset I} \Omega(g; K) = \sup_{K \subset I} \Omega(f; K) \leq \|f\|_*.$$

Таким чином, для доведення теореми достатньо довести нерівність

$$\Omega(|g^{[d]}|; [0, |I|]) \leq \sup_{J \subset [0, |I|]} \Omega(g^{[d]}; J). \quad (9)$$

Не обмежуючи загальності, можемо вважати, що $|I| = 1$. Позначимо $K = [0, 1]$, $h = g^{[d]}$, $\beta = |h|_K$, $\gamma = h_K$. Тоді (9) набуває такого вигляду

$$\int_K ||h(t)| - \beta| dt \leq \sup_{J \subset K} \frac{1}{|J|} \int_J |h(t) - h_J| dt. \quad (10)$$

Можливий один із трьох наступних випадків:

- 1) $\lim_{t \rightarrow 1-0} h(t) \geq -\beta$; при цьому, очевидно, $\lim_{t \rightarrow 0+} h(t) > \beta$;
- 2) $\lim_{t \rightarrow 0+} h(t) \leq \beta$; при цьому, очевидно, $\lim_{t \rightarrow 1-0} h(t) < -\beta$;
- 3) $\lim_{t \rightarrow 1-0} h(t) < -\beta$ і $\lim_{t \rightarrow 0+} h(t) > \beta$.

Випадок 1:

$$\begin{aligned} \int_K ||h(t)| - \beta| dt &= 2 \int_{\{t \in K: |h(t)| > \beta\}} (|h(t)| - \beta) dt = \\ &= 2 \int_{\{t \in K: h(t) > \beta\}} (h(t) - \beta) dt \leq 2 \int_{\{t \in K: h(t) > \gamma\}} (h(t) - \gamma) dt = \\ &= \int_K |h(t) - \gamma| dt = \int_K |h(t) - h_K| dt. \end{aligned}$$

Випадок 2:

$$\begin{aligned} \int_K ||h(t)| - \beta| dt &= 2 \int_{\{t \in K: |h(t)| > \beta\}} (|h(t)| - \beta) dt = \\ &= 2 \int_{\{t \in K: h(t) < -\beta\}} (-h(t) - \beta) dt \leq 2 \int_{\{t \in K: h(t) < -\gamma\}} (-h(t) - (-\gamma)) dt = \\ &= \int_K |h(t) - \gamma| dt = \int_K |h(t) - h_K| dt. \end{aligned}$$

Випадок 3: Розглянемо неперервну на $(0, 1]$ функцію $\varphi(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau |h(t)| dt$.

Маємо $\lim_{\tau \rightarrow 0+} \varphi(\tau) > \beta$, $\varphi(1) = \beta$, а при достатньо малих $\varepsilon > 0$

$$\varphi(1 - \varepsilon) = \frac{1}{1 - \varepsilon} \int_0^{1-\varepsilon} |h(t)| dt = \frac{1}{1 - \varepsilon} \left(\int_0^1 |h(t)| dt - \varepsilon \beta \right) < \beta.$$

З перелічених властивостей функції φ випливає, що знайдеться таке $\tau_0 \in (0, 1)$, що $\varphi(\tau_0) = \beta$. Позначимо $K_1 = [0, \tau_0]$, $K_2 = [\tau_0, 1]$. Тоді маємо

$$|h|_{K_1} = \varphi(\tau_0) = \beta,$$

$$|h|_{K_2} = \frac{1}{1 - \tau_0} \int_{\tau_0}^1 |h(t)| dt = \frac{1}{1 - \tau_0} (\beta - \tau_0 \beta) = \beta,$$

$$\int_K ||h(t)| - \beta| dt = \tau_0 \frac{1}{|K_1|} \int_{K_1} ||h(t)| - \beta| dt + (1 - \tau_0) \frac{1}{|K_2|} \int_{K_2} ||h(t)| - \beta| dt \leq$$

$$\leq \max_{i=1,2} \frac{1}{|K_i|} \int_{K_i} ||h(t)| - \beta| dt.$$

Якщо ми покажемо, що

$$\int_{K_i} ||h(t)| - \beta| dt \leq \int_{K_i} |h(t) - h_{K_i}| dt, \quad i = 1, 2, \quad (11)$$

то, враховуючи, що $|K| = 1$, отримаємо

$$\int_K ||h(t)| - \beta| dt \leq \max_{i=1,2} \frac{1}{|K_i|} \int_{K_i} ||h(t)| - \beta| dt \leq$$

$$\leq \max_{i=1,2} \frac{1}{|K_i|} \int_{K_i} |h(t) - h_{K_i}| dt \leq \sup_{J \subset K} \frac{1}{|J|} \int_J |h(t) - h_J| dt,$$

тобто (10). Отже, залишилося довести (11).

При $i = 1$ маємо

$$\int_{K_1} ||h(t)| - \beta| dt = 2 \int_{\{t \in K_1: |h(t)| > \beta\}} (|h(t)| - \beta) dt \leq$$

$$\leq 2 \int_{\{t \in K_1: h(t) > h_{K_1}\}} (h(t) - h_{K_1}) dt = \int_{K_1} |h(t) - h_{K_1}| dt.$$

Аналогічно, для $i = 2$

$$\int_{K_2} ||h(t)| - \beta| dt = 2 \int_{\{t \in K_2: |h(t)| > \beta\}} (|h(t)| - \beta) dt =$$

$$= 2 \int_{\{t \in K_2: h(t) < -\beta\}} (-h(t) - \beta) dt \leq$$

$$\leq 2 \int_{\{t \in K_2: h(t) < h_{K_2}\}} (-h(t) + h_{K_2}) dt = \int_{K_2} |h(t) - h_{K_2}| dt.$$

Цим доведена (11), а разом з нею і (10). □

Зауваження 2.4.1. Нагадуємо, що у попередньому підпункті ми відзна-

чали використання величини t , такої, що $J \subset [0, t]$, де t може не бути цілим числом через неперервний характер аналізу. Для ступінчастих функцій, де норма $\|f\|_d$ визначається лише на інтервалах із цілочисельними кінцями, таке значення t не відповідає їхній дискретній структурі, що робить це доведення непридатним для дискретного випадку.

Таким чином, хоча окремі частини доведення можуть бути адаптовані, загальний результат не переноситься на дискретний випадок без додаткових припущень або змін у формулюванні. Для отримання коректних аналогів потрібні альтернативні методи.

Хоча наведена теорема не переноситься на дискретні функції через зазначені обмеження, окремі важливі випадки можна дослідити безпосередньо. Зокрема, для триступінчастих функцій нерівність $\|f\|_d \leq \|f\|_d$ може бути перевірена.

РОЗДІЛ 3

ДВОСТУПІНЧАСТА ФУНКЦІЯ ЯК ПРИКЛАД ДИСКРЕТНОЇ

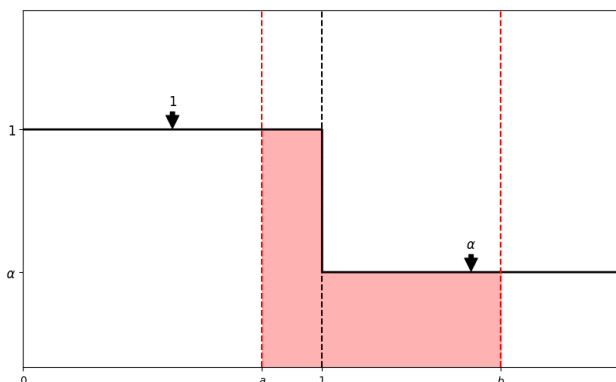
У попередньому розділі ми встановили, що нерівність $\| |f| \|_* \leq \|f\|_*$ виконується для неперервного випадку, але потребує адаптації для ступінчастих функцій. Щоб зрозуміти особливості поведінки норм у дискретному випадку, спочатку розглянемо найпростіший приклад — двоступінчасту функцію. Це дозволить нам проаналізувати основні принципи обчислення середнього коливання та норм, а також перевірити нерівність для функцій із мінімальною кількістю сходинок, перш ніж переходити до складніших випадків.

Розглянемо двоступінчасту функцію як приклад дискретної. Висота першої сходинки буде дорівнювати 1, а висота другої, α ($\alpha \in [0; 1]$). Якщо розглядати інші варіанти розташування цих сходинок, чи інші додатні висоти, то за властивостями, описаними у розділі (1), обов'язково повернемося саме до такого варіанту. Надалі буде розглядатися саме такий варіант функції.

Визначилися з тим, як будемо знаходити середнє значення та середнє коливання функції. Тепер необхідно обрати інтервал I , на якому проводитимемо аналіз коливань дискретної функції.

З'ясуємо, яким повинен бути інтервал I для максимізації середніх коливань.

Припустимо, що інтервал не є симетричним відносно точки 1, та довжина його частин: $1 - a$ та $b - 1$ відповідно, де $a \in [0; 1]$ та $b \in (1; 2]$ ($I \in [a; b]$).



Надалі вважатимемо, що $\frac{b-1}{1-a} = k$, а $1 - a = \lambda$.

За таким I , f_I набуде наступного вигляду: $f_I = \frac{1+\alpha k}{k+1}$. Зазначимо, що $\alpha \leq f_I \leq 1$.

Середнє коливання $\Omega(f, I)$:

$$\Omega(f, I) = \frac{1}{k+1} \left(\left(1 - \frac{1+\alpha k}{k+1} \right) + \left(\frac{1+\alpha k}{k+1} - \alpha \right) k \right).$$

Після спрощення отримаємо $\Omega(f, I) = \frac{2k(1-\alpha)}{(k+1)^2}$. Цей вираз приймає максимальне значення при $k = 1$.

Щоб підтвердити це математично, розглянемо похідну функції $\Omega(f, I)$ за k :

$$\frac{d}{dk} \left(\frac{2k(1-\alpha)}{(k+1)^2} \right) = 2(1-\alpha) \cdot \frac{(k+1)^2 \cdot 1 - k \cdot 2(k+1)}{(k+1)^4} = 2(1-\alpha) \cdot \frac{1-k}{(k+1)^3}.$$

Похідна дорівнює нулю при $k = 1$, що вказує на критичну точку. Оскільки $1 - \alpha \geq 0$ (бо $\alpha \in [0, 1]$), а знаменник $(k+1)^3 > 0$ для всіх $k > 0$, то при $k < 1$ похідна додатна, а при $k > 1$ — від'ємна, що підтверджує максимум при $k = 1$.

Якщо $k = 1$, то це означає, що довжина двох частин інтервалу I тепер дорівнює λ , тобто інтервал симетричний відносно точки 1.

Також бачимо, що ні середнє значення, ні середнє коливання функції не залежить від λ . Це позначає, що норма функції не залежить від довжини сходинок. Для зручності, довжина кожної сходинки дорівнює 1, це полегшує подальший аналіз.

$$\Omega(f, [0; 2]) = \frac{1-\alpha}{2}.$$

Тепер маємо просту формулу для знаходження середнього коливання дискретної функції у випадку з двома сходинками.

Знаходити та порівнювати $\|f\|_d$ та $\| |f| \|_d$ в цьому випадку немає сенсу. Висоти двох сходинок одного знаку, тому функції f та $|f|$ збігаються, як наслідок $\|f\|_d = \| |f| \|_d$.

Розглянемо інший випадок: висота першої сходинки буде додатною, а другої — від'ємною. Позначимо їх як α та $-\beta$, відповідно ($\alpha > 0$, $\beta > 0$).

Тепер середнє коливання для функції та її модуля обчислюватиметься

за такими формулами:

$$\begin{cases} \Omega(f, [0; 2]) = \frac{\alpha + \beta}{2}, \\ \Omega(|f|, [0; 2]) = \frac{|\alpha - \beta|}{2}. \end{cases}$$

Неважко помітити, що за таких α та $-\beta$, $\Omega(f, I) > \Omega(|f|, I)$ у будь-якому випадку. З цього випливає, що $\|f\|_d > \||f|\|_d$.

Отже, ми перевірили, що для двоступінчастої функції нерівність $\|f\|_d \geq \||f|\|_d$ виконується. У наступному розділі ми перейдемо до аналізу треступінчастої функції.

РОЗДІЛ 4

ТРИСТУПІНЧАСТА ФУНКЦІЯ

Розширимо дослідження, розглядаючи триступінчасту функцію як наступний крок у вивченні дискретного випадку. Цей аналіз дозволить нам зрозуміти, як збільшення кількості сходинок впливає на співвідношення норм.

4.1 Опис умов для триступінчастої функції

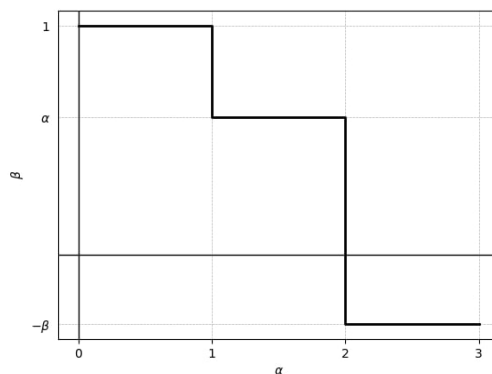
Для аналізу триступінчастої функції достатньо, щоб дві сходинки були додатними, а третя — від'ємною. Розглянемо спадну функцію з такими висотами сходинок H , h та n . У цьому випадку має виконуватися нерівність: $H \geq h \geq 0 \geq n$. Розглянемо, до чого приведуть інші випадки, коли ця нерівність не буде виконуватися:

- $H \geq 0 \geq h \geq n$: висоти двох сходинок менші за 0. За властивістю (3) норм відомо, що $\|f\|_d = \|-f\|_d$, тому норма не зміниться залежно від того, чи дві сходинки від'ємні, чи тільки одна.
- $H \geq h \geq n \geq 0$: у цьому випадку висоти всіх сходинок додатні, тому f та $|f|$ співпадуть, і цей випадок розглядати немає сенсу.

Таким чином, усі випадки зводяться до $H \geq h \geq 0 \geq n$.

Згідно з властивістю (3) норм функцій, можемо поділити висоти сходинок на H . Отримаємо такі співвідношення між висотами сходинок: $1 \geq \frac{h}{H} \geq \frac{n}{H}$. Запровадимо наступні позначення: $\frac{h}{H} = \alpha$, $\frac{n}{H} = \beta$. Отримаємо такі обмеження висот сходинок:

1. Висота першої сходинки дорівнює 1;
2. Висота другої сходинки дорівнює α ($\alpha \in [0; 1]$);
3. Висота третьої сходинки дорівнює $-\beta$ ($\beta \geq 0$).



Для аналізу середніх коливань триступінчастої функції будуть використані формули, які наведено нижче.

Формула середнього значення функції на інтервалі $[0;3]$:

$$f_{[0;3]} = \frac{1 + \alpha - \beta}{3}.$$

Формула середнього коливання функції на інтервалі $[0;3]$:

$$\Omega(f, [0; 3]) = \frac{1 + \beta + |2\alpha + \beta - 1|}{9}.$$

Основною задачею залишається порівняння норм функції та її модуля. В цьому випадку існують коливання за трьома інтервалами, а саме за інтервалами: $[0;2]$, $[1;3]$, $[0;3]$. Інтервали $[0;2]$, $[1;3]$, $[0;3]$ обрано, оскільки вони охоплюють усі можливі комбінації сходинок і дозволяють оцінити максимальне коливання функції. Тепер необхідно визначити, за яким саме інтервалом середнє коливання функції буде максимальним.

У наступних підпунктах ми обчислимо середні коливання для кожного інтервалу та визначимо, який із них максимізує норму.

4.2 Аналіз середніх коливань за різними інтервалами

Тепер зосередимося на детальному аналізі середніх коливань функції на різних інтервалах:

- Середні коливання функції на інтервалі $[0;2]$:

Цей інтервал охоплює першу та другу сходинки функції з висотами 1 і α . Середнє коливання обчислюється як:

$$\Omega(f, [0; 2]) = \frac{1 - \alpha}{2}.$$

- Середні коливання функції на інтервалі $[1;3]$:

Цей інтервал включає другу та третю сходинки з висотами α і β . Середнє коливання тут становить:

$$\Omega(f, [1; 3]) = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

- Середні коливання функції на інтервалі $[0;3]$:

Цей інтервал охоплює всю функцію, включаючи всі три сходинки. Середні коливання функції на цьому інтервалі мають 2 варіації: випадок, коли друга сходинка вища за f_I ($\alpha \leq f_I$), та коли друга сходинка нижча за f_I ($\alpha \geq f_I$). Розглянемо, які значення приймає $\Omega(f, [0; 3])$:

$$\Omega(f, [0; 3]) = \begin{cases} \frac{2}{9}(2 - \alpha + \beta), & 2\alpha + \beta \leq 1, \\ \frac{2}{9}(1 + \alpha + 2\beta), & 2\alpha + \beta \geq 1. \end{cases}$$

Ця залежність від умов відображає складну взаємодію між висотами сходинок і середнім значенням.

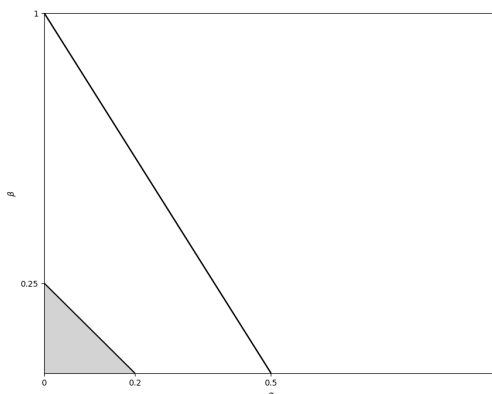
Щоб визначити, який із інтервалів забезпечує максимальне середнє коливання, порівняємо $\Omega(f, [0; 2])$, $\Omega(f, [1; 3])$ та $\Omega(f, [0; 3])$ за різними значеннями параметрів α та β . Розглянемо це покроково.

Умови максимальності для інтервалу $[0; 2]$:

Щоб $\Omega(f, [0; 2])$ було максимальним, воно має перевищувати середні коливання на інших інтервалах. Сформулюємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} \frac{1-\alpha}{2} \geq \frac{\alpha+\beta}{2}, \\ \frac{1-\alpha}{2} \geq \frac{2}{9}(2 - \alpha + \beta), & 2\alpha + \beta \leq 1, \\ \frac{1-\alpha}{2} \geq \frac{2}{9}(1 + \alpha + 2\beta), & 2\alpha + \beta \geq 1. \end{cases}$$

Ці нерівності визначають область у площині (α, β) , де норма функції співпадає з середнім коливанням на $[0; 2]$. Для наочності зобразимо цю область на графіку.



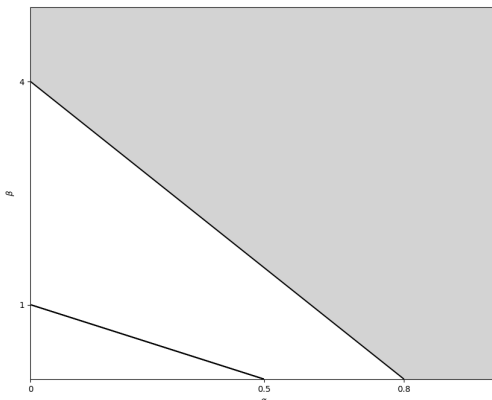
У заштрихованій зоні норма функції дорівнює $\|f\|_d = \Omega(f, [0; 2])$.

Умови максимальності для інтервалу $[1; 3]$:

Аналогічно, для максимальності $\Omega(f, [1; 3])$ сформулюємо:

$$\begin{cases} \frac{\alpha+\beta}{2} \geq \frac{1-\alpha}{2}, \\ \frac{\alpha+\beta}{2} \geq \frac{2}{9}(2-\alpha+\beta), 2\alpha+\beta \leq 1, \\ \frac{\alpha+\beta}{2} \geq \frac{2}{9}(1+\alpha+2\beta), 2\alpha+\beta \geq 1. \end{cases}$$

Ця система визначає іншу область, яку також зобразимо на графіку.

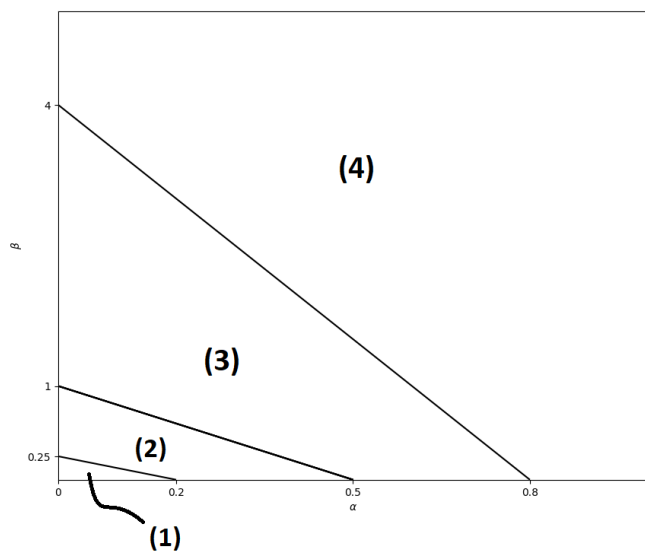


У заштрихованій зоні норма функції дорівнює $\|f\|_d = \Omega(f, [1; 3])$.

Умови максимальності для інтервалу $[0; 3]$:

Оскільки середнє коливання $\Omega(f, [0; 3])$ залежить від умови $2\alpha + \beta = 1$, додатковий аналіз систем нерівностей для цього інтервалу не є необхідним. Натомість розглянемо дві зони: під прямою $2\alpha + \beta = 1$ (де $2\alpha + \beta \leq 1$) та над нею (де $2\alpha + \beta \geq 1$). Саме ця пряма розмежовує області, де домінує $\Omega(f, [0; 3])$.

Для повного аналізу об'єднаємо два графіки в один, щоб виділити всі можливі зони впливу.



Маємо 4 зони, та в кожній з них відоме значення $\|f\|_d$.

(1): $\|f\|_d = \Omega(f, [0; 2]);$

(2): $\|f\|_d = \Omega(f, [0; 3])$ коли $2\alpha + \beta \leq 1;$

(3): $\|f\|_d = \Omega(f, [0; 3])$ коли $2\alpha + \beta \geq 1;$

(4): $\|f\|_d = \Omega(f, [1; 3]) ;$

Для зручності узагальнимо ці результати в таблиці:

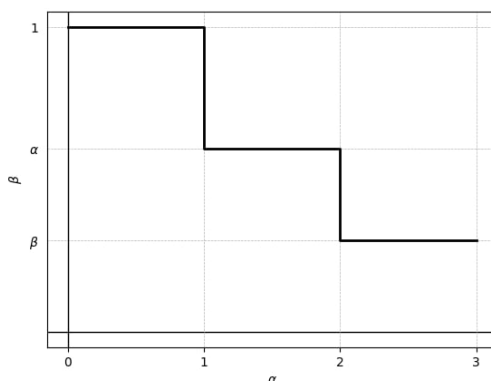
Номер зони	$\ f\ _d$	Формула
(1)	$\Omega(f, [0; 2])$	$\frac{1-\alpha}{2}$
(2)	$\Omega(f, [0; 3]),$ коли $2\alpha + \beta \leq 1$	$\frac{2}{9}(2 - \alpha + \beta)$
(3)	$\Omega(f, [0; 3]),$ коли $2\alpha + \beta \geq 1$	$\frac{2}{9}(1 + \alpha + 2\beta)$
(4)	$\Omega(f, [1; 3])$	$\frac{\alpha+\beta}{2}$

Ця таблиця дозволяє швидко визначити норму $\|f\|_d$ залежно від

значень α та β у відповідній зоні, що є важливим для подальшого порівняння з нормою модуля функції.

4.3 Середні коливання модуля функції

Тепер ми звернемо увагу на норму модуля функції $\|f\|_d$, що є необхідним кроком для перевірки нерівності $\|f\|_d \geq \|f\|_d$ у дискретному випадку.



Так само як і в минулому розділі, розглянемо середні коливання окремо на кожному з інтервалів, за певних умов щодо α та β .

4.3.1 Середні коливання при $\alpha > \beta$

Почнемо з умови, коли висота другої сходинки перевищує висоту третьої за модулем:

$$\alpha > \beta.$$

Ця умова визначає зону під прямою $\alpha = \beta$.

За такими умовами середні коливання на різних інтервалах будуть дорівнювати:

Середні коливання модуля функції на інтервалі $[0;2]$:

$$\Omega(|f|, [0; 2]) = \frac{1 - \alpha}{2}.$$

Середні коливання модуля функції на інтервалі $[1;3]$:

$$\Omega(|f|, [1; 3]) = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Середні коливання модуля функції на інтервалі [0;3]:

Середні коливання модуля функції на цьому інтервалі також мають 2 варіації: випадок, коли друга сходинка вища за f_I ($\alpha \leq f_I$), та коли друга сходинка нижча за f_I ($\alpha \geq f_I$). Отже:

$$\Omega(|f|, [0; 3]) = \begin{cases} \frac{2}{9}(2 - \alpha - \beta), & 2\alpha - \beta \leq 1, \\ \frac{2}{9}(1 + \alpha - 2\beta), & 2\alpha - \beta \geq 1. \end{cases}$$

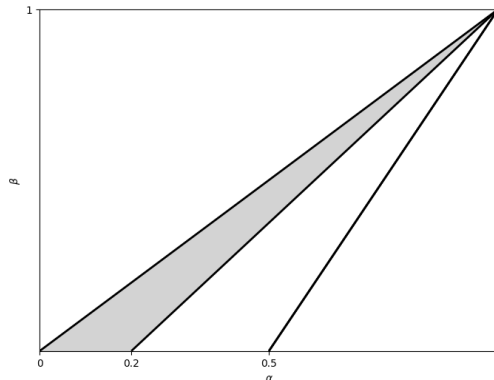
Щоб визначити максимальне середнє коливання, порівняємо ці значення.

Умови максимальності для інтервалу [0;2]:

Запишемо, за яких умов середнє коливання на інтервалі [0;2] модуля функції буде максимальним серед середніх коливань на інших інтервалах:

$$\begin{cases} \frac{1-\alpha}{2} \geq \frac{\alpha-\beta}{2}, \\ \frac{1-\alpha}{2} \geq \frac{2}{9}(2 - \alpha - \beta), & 2\alpha - \beta \leq 1, \\ \frac{1-\alpha}{2} \geq \frac{2}{9}(1 + \alpha - 2\beta), & 2\alpha - \beta \geq 1. \end{cases}$$

Зобразимо отриману область на графіку:



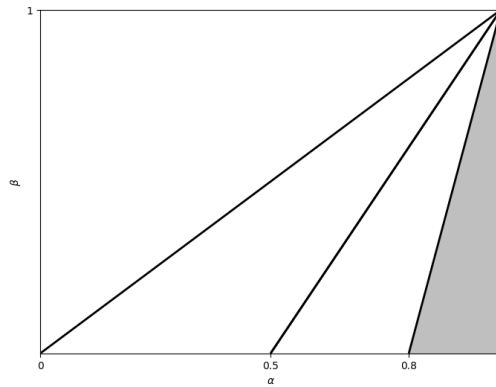
У заштрихованій зоні $\|f\|_d = \Omega(|f|, [0; 2])$.

Умови максимальності для інтервалу [1;3]:

Аналогічно, для максимальності $\Omega(|f|, [1; 3])$:

$$\begin{cases} \frac{\alpha-\beta}{2} \geq \frac{1-\alpha}{2}, \\ \frac{\alpha-\beta}{2} \geq \frac{2}{9}(2 - \alpha - \beta), & 2\alpha - \beta \leq 1, \\ \frac{\alpha-\beta}{2} \geq \frac{2}{9}(1 + \alpha - 2\beta), & 2\alpha - \beta \geq 1. \end{cases}$$

Графік:

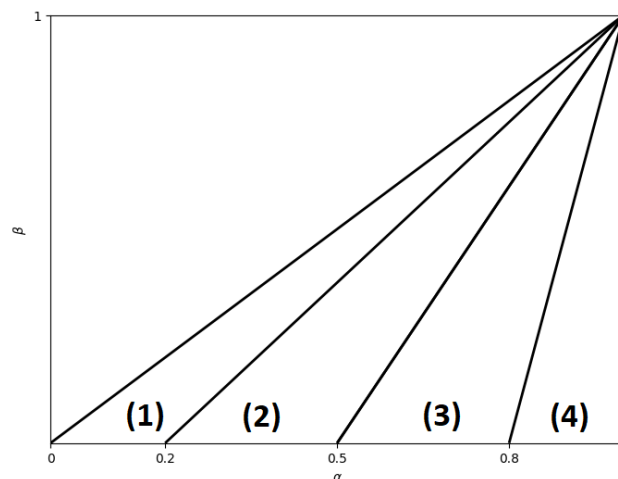


У заштрихованій зоні $\|f\|_d = \Omega(|f|, [1; 3])$.

Умови для інтервалу $[0; 3]$:

Залишається ще 2 зони: під прямою $2\alpha - \beta = 1$ та над нею, з умов для різних значень $\Omega(|f|, [0; 3])$ випливає, що в цих зонах норма модуля функції дорівнює $\frac{2}{9}(2 - \alpha - \beta)$ та $\frac{2}{9}(1 + \alpha - 2\beta)$ відповідно.

Об'єднаємо графіки для умови $\alpha > \beta$:



Отримали чотири зони, в кожній з них відоме значення $\|f\|_d$.

Розглянемо кожну зону окремо:

- (1): $\|f\|_d = \Omega(|f|, [0; 2])$;
- (2): $\|f\|_d = \Omega(|f|, [0; 3])$ коли $2\alpha - \beta \leq 1$;
- (3): $\|f\|_d = \Omega(|f|, [0; 3])$ коли $2\alpha - \beta \geq 1$;
- (4): $\|f\|_d = \Omega(|f|, [1; 3])$.

4.3.2 Середні коливання при $1 \geq \beta \geq \alpha$

Тепер розглянемо випадок, коли висота третьої сходинки за модулем перевищує висоту другої:

$$1 \geq \beta \geq \alpha.$$

Ця умова змінює поведінку модуля, оскільки третя сходинка стає більш значущою.

Середні коливання модуля функції на інтервалі [0;2]:

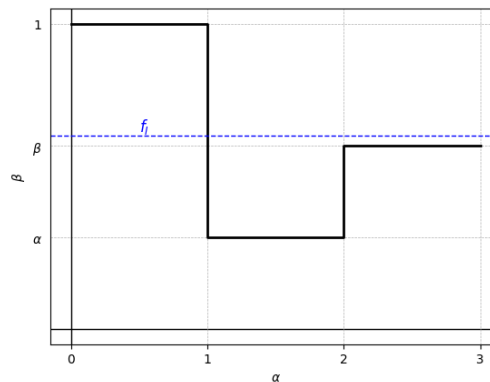
$$\Omega(|f|, [0; 2]) = \frac{1 - \alpha}{2}.$$

Середні коливання модуля функції на інтервалі [1;3]:

$$\Omega(|f|, [1; 3]) = \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

Середні коливання модуля функції на інтервалі [0;3]:

Оскільки $\alpha < |f|_{[0;3]}$ завжди за даною умовою, порівнюємо β зі середнім значенням.



Формула:

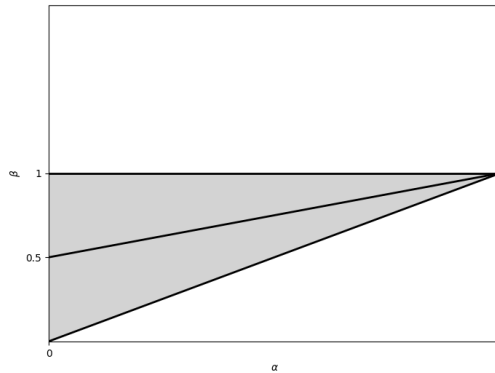
$$\Omega(|f|, [0; 3]) = \begin{cases} \frac{2}{9}(2 - \alpha - \beta), & \beta \leq \frac{1+\alpha}{2}, \\ \frac{2}{9}(1 + \beta - 2\alpha), & \beta \geq \frac{1+\alpha}{2}. \end{cases}$$

Щоб знайти максимальне коливання, розглянемо:

Умови максимальності для інтервалу [0; 2]:

$$\begin{cases} \frac{1-\alpha}{2} \geq \frac{\beta-\alpha}{2}, \\ \frac{1-\alpha}{2} \geq \frac{2}{9}(2 - \alpha - \beta), & 2\beta - \alpha \leq 1, \\ \frac{1-\alpha}{2} \geq \frac{2}{9}(1 + \beta - 2\alpha), & 2\beta - \alpha \geq 1. \end{cases}$$

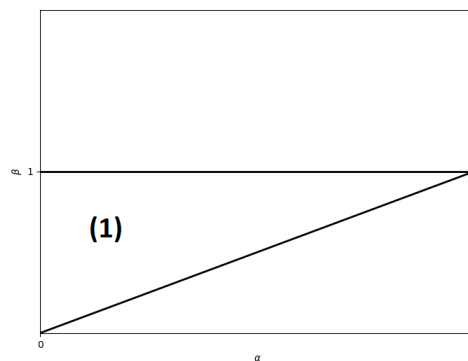
Графік:



У заштрихованих зонах норма модуля дорівнює $\| |f| \|_d = \Omega(|f|, [0; 2])$, а пряма $2\beta - \alpha = 1$ їх розмежовує.

Умови максимальності для інтервалу [1; 3]:

Перевірка $\frac{\beta - \alpha}{2} \geq \frac{1 - \alpha}{2}$ дає $\beta \geq 1$, що суперечить обмеженням висот сходинок. Отже, цей випадок неможливий. Оновлений графік:



Єдина зона:

(1): $\| |f| \|_d = \Omega(|f|, [0; 2])$.

4.3.3 Середні коливання при $\beta \geq 1$

Останній випадок:

$$\beta \geq 1.$$

Подивимось, як зміняться формули для знаходження середнього коливання модуля функції за такими α та β .

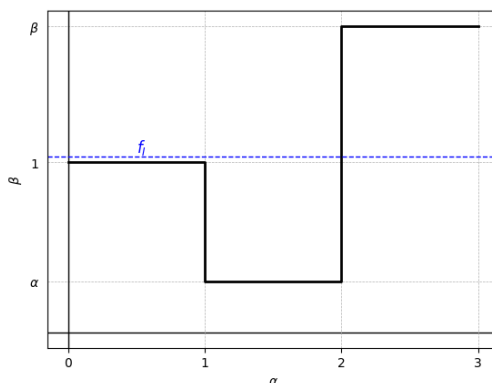
Середні коливання модуля функції на інтервалах [0;2] та [1;3]:

Середні коливання на цих інтервалах залишаються тими ж самими:

$$\begin{cases} \Omega(|f|, [0; 2]) = \frac{1-\alpha}{2}, \\ \Omega(|f|, [1; 3]) = \frac{\beta-\alpha}{2}. \end{cases}$$

Середні коливання на інтервалі $[0; 3]$:

В цьому випадку порівнюємо $|f|_{[0;3]}$ та 1.



Формула:

$$\Omega(|f|, [0; 3]) = \begin{cases} \frac{2}{9}(2\beta - \alpha - 1), & \text{якщо } 2 \leq \alpha + \beta, \\ \frac{2}{9}(1 + \beta - 2\alpha), & \text{якщо } 2 \geq \alpha + \beta. \end{cases}$$

Аналізувати, за яких умов середнє коливання модуля функції на інтервалі $[0; 2]$ буде максимальним серед середніх коливань на інших інтервалах, немає сенсу, так як отримуємо таку нерівність:

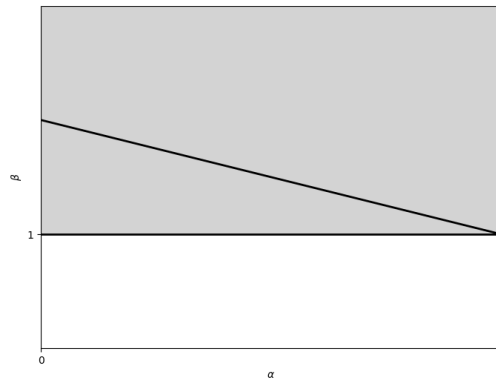
$$\frac{1-\alpha}{2} \geq \frac{\beta-\alpha}{2},$$

після спрощення отримуємо нерівність $\beta \leq 1$, що суперечить умовам обмеження β .

Умови максимальності для $[1; 3]$:

$$\begin{cases} \frac{\beta-\alpha}{2} \geq \frac{1-\alpha}{2}, \\ \frac{\beta-\alpha}{2} \geq \frac{2}{9}(2\beta - \alpha - 1), & \alpha + \beta > 2, \\ \frac{\beta-\alpha}{2} \geq \frac{2}{9}(1 + \beta - 2\alpha), & \alpha + \beta \leq 2. \end{cases}$$

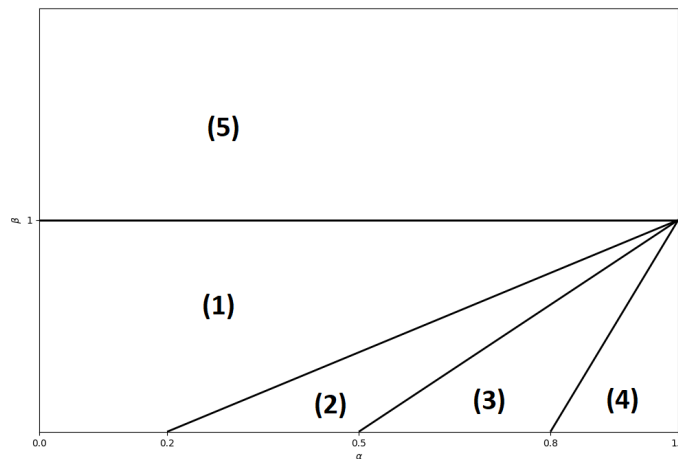
Графік за цими умовами:



Залишається одна зона:

(5): $\|f\|_d = \Omega(|f|, [1; 3])$ коли $\beta \geq 1$

Тепер можна об'єднати всі частини графіку в один:



(1): $\|f\|_d = \Omega(|f|, [0; 2]),$

(2): $\|f\|_d = \Omega(|f|, [0; 3])$ коли $2\alpha - \beta \leq 1,$

(3): $\|f\|_d = \Omega(|f|, [0; 3])$ коли $2\alpha - \beta \geq 1,$

(4): $\|f\|_d = \Omega(|f|, [1; 3])$ коли $\alpha \geq \beta,$

(5): $\|f\|_d = \Omega(|f|, [1; 3])$ коли $\beta \geq 1.$

Сформуємо таблицю значень $\|f\|_d$:

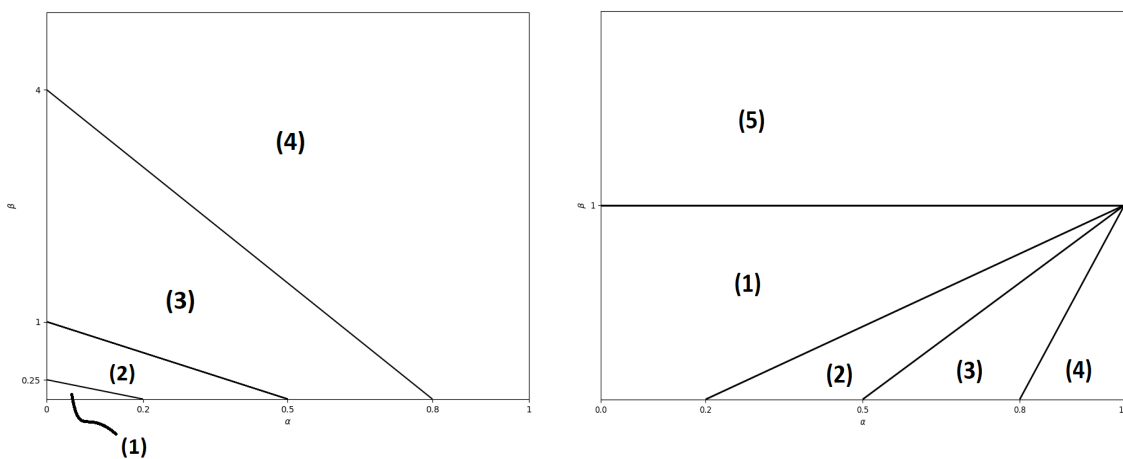
Номер зони	$\ f\ _d$	Формула
(1)	$\Omega(f, [0; 2])$	$\frac{1-\alpha}{2}$
(2)	$\Omega(f, [0; 3]),$ коли $2\alpha - \beta \leq 1$	$\frac{2}{9}(2 - \alpha - \beta)$
(3)	$\Omega(f, [0; 3]),$ коли $2\alpha - \beta \geq 1$	$\frac{2}{9}(1 + \alpha - 2\beta)$
(4)	$\Omega(f, [1; 3]),$ коли $\alpha \geq \beta$	$\frac{\alpha-\beta}{2}$
(5)	$\Omega(f, [1; 3]),$ коли $\beta \geq 1$	$\frac{\beta-\alpha}{2}$

4.4 Порівняння норм функції та її модуля

У попередніх підпунктах ми детально проаналізували середні коливання як для функції f , так і для її модуля $|f|$, визначивши відповідні норми $\|f\|_d$ та $\||f|\|_d$ для триступінчастої функції. Тепер ми переходимо до ключового етапу — порівняння цих норм, щоб перевірити, чи виконується нерівність $\|f\|_d \geq \||f|\|_d$ у дискретному випадку для всіх можливих значень параметрів α та β .

Маємо графіки для визначення норм функції та її модуля (пункти 4.2 та 4.3), об'єднаємо ці графіки та порівняємо значення цих норм.

Ось два графіки для норм функції та норм модуля функції відповідно:



Для зручності наведемо таблиці значень норм, отримані раніше:

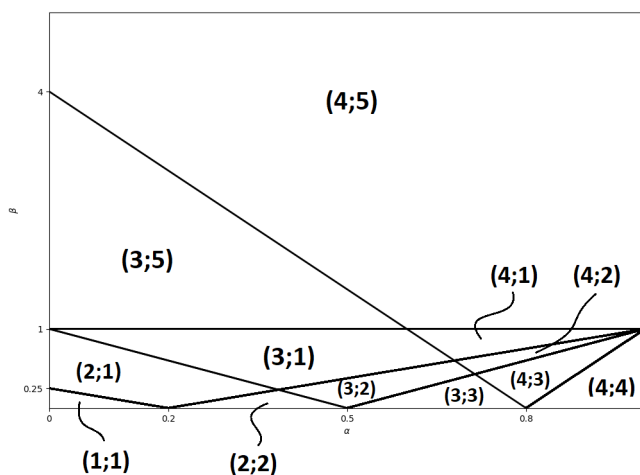
Таблиця значень $\|f\|_d$:

Номер зони	$\ f\ _d$	Формула
(1)	$\Omega(f, [0; 2])$	$\frac{1-\alpha}{2}$
(2)	$\Omega(f, [0; 3]),$ коли $2\alpha + \beta \leq 1$	$\frac{2}{9}(2 - \alpha + \beta)$
(3)	$\Omega(f, [0; 3]),$ коли $2\alpha + \beta \geq 1$	$\frac{2}{9}(1 + \alpha + 2\beta)$
(4)	$\Omega(f, [1; 3])$	$\frac{\alpha+\beta}{2}$

Таблиця значень $\| \|f\| \|_d$:

Номер зони	$\ f\ _d$	Формула
(1)	$\Omega(f , [0; 2])$	$\frac{1-\alpha}{2}$
(2)	$\Omega(f , [0; 3]),$ коли $2\alpha - \beta \leq 1$	$\frac{2}{9}(2 - \alpha - \beta)$
(3)	$\Omega(f , [0; 3]),$ коли $2\alpha - \beta \geq 1$	$\frac{2}{9}(1 + \alpha - 2\beta)$
(4)	$\Omega(f , [1; 3]),$ коли $\alpha \geq \beta$	$\frac{\alpha-\beta}{2}$
(5)	$\Omega(f , [1; 3]),$ коли $\beta \geq 1$	$\frac{\beta-\alpha}{2}$

Об'єднаємо ці два графіки, щоб отримати повну картину зон:



Отримали 12 зон, які позначили у форматі $(N; M)$, де N — номер зони з графіка для $\|f\|_d$, а M — номер зони з графіка для $\|f\|_d$. Розглянемо кожну зону окремо і порівняємо норми.

4.4.1 Зони 1 та 2

Спочатку розглянемо зони з назвами (4;5) та (3;5).

Назва зони	Обмеження	Графік
(4;5)	$\begin{cases} \beta \geq 1, \\ \beta + 5\alpha \geq 4. \end{cases}$	
(3;5)	$\begin{cases} \beta \geq 1, \\ \beta + 5\alpha \leq 4. \end{cases}$	

Норми:

$$\begin{cases} \|f\|_d = \frac{\alpha + \beta}{2}, \\ |||f|||_d = \frac{\beta - \alpha}{2}. \end{cases}$$

Порівняємо норми:

$$\frac{\alpha + \beta}{2} \geq \frac{\beta - \alpha}{2},$$

після спрощення отримаємо $2\alpha \geq 0$, знаємо, що $\alpha \geq 0$, звідси випливає, що за обмеженнями зони (4;5)

$$\|f\|_d \geq |||f|||_d.$$

Аналогічно для (3;5):

$$\begin{cases} \|f\|_d = \frac{2}{9}(1 + \alpha + 2\beta), \\ |||f|||_d = \frac{\beta - \alpha}{2}. \end{cases}$$

Порівнюємо норми:

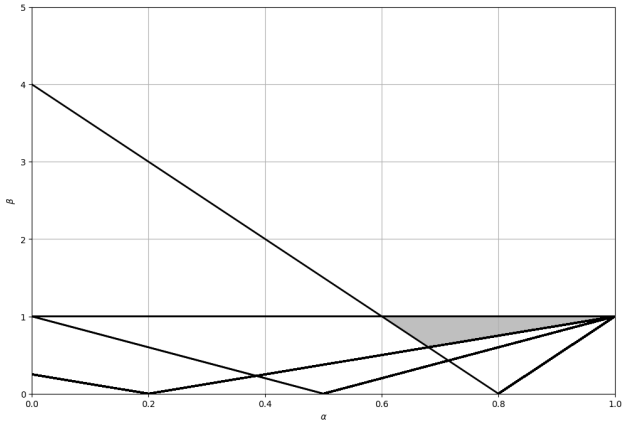
$$\frac{2}{9}(1 + \alpha + 2\beta) \vee \frac{\beta - \alpha}{2},$$

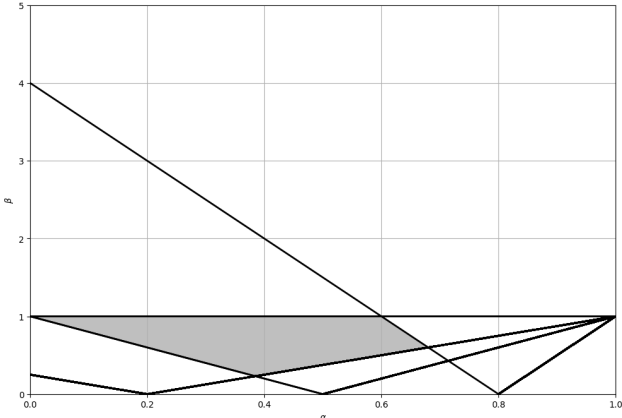
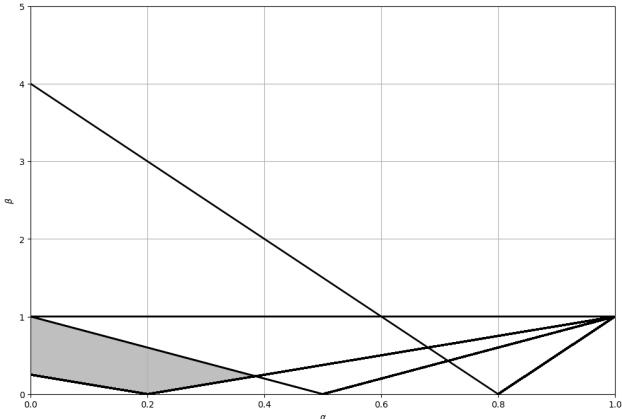
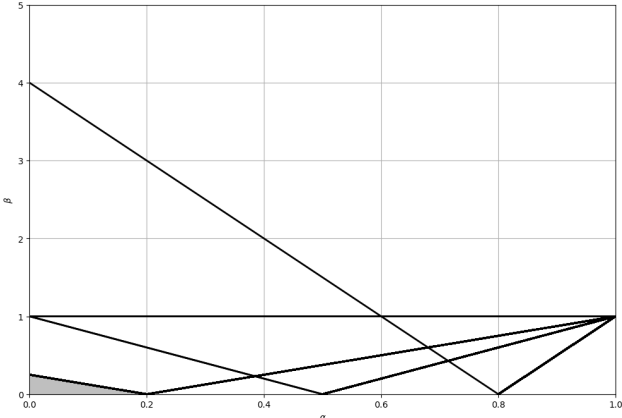
після спрощення отримаємо $4 \vee \beta - 13\alpha$, з обмежень зони відомо, що $\beta + 5\alpha \leq 4$. З цих обмежень випливає, що $4 \geq \beta - 13\alpha$, тобто за обмеженнями зони (3;5)

$$\|f\|_d \geq |||f|||_d.$$

4.4.2 Зони 3-6

Розглядаємо зони (4;1), (3;1), (2;1) та (1;1).

Назва зони	Обмеження	Графік
(4;1)	$\begin{cases} \beta \leq 1, \\ \beta + 5\alpha \geq 4, \\ \beta - \frac{5}{4}\alpha \geq -\frac{1}{4}. \end{cases}$	
Продовження на наступній сторінці		

Назва зони	Обмеження	Графік
(3;1)	$\begin{cases} \beta \leq 1, \\ \beta + 5\alpha \leq 4, \\ \beta - \frac{5}{4}\alpha \geq -\frac{1}{4}, \\ \beta + 2\alpha \geq 1. \end{cases}$	
(2;1)	$\begin{cases} \beta - \frac{5}{4}\alpha \geq -\frac{1}{4}, \\ \beta + 2\alpha \leq 1, \\ \frac{5}{4}\alpha + \beta \geq \frac{1}{4}. \end{cases}$	
(1;1)	$\frac{5}{4}\alpha + \beta \leq \frac{1}{4}$	

Норми (4;1):

$$\begin{cases} \|f\|_d = \frac{\alpha+\beta}{2}, \\ \|f\|_d = \frac{1-\alpha}{2}. \end{cases}$$

Порівняємо норми:

$$\frac{\alpha + \beta}{2} \vee \frac{1 - \alpha}{2},$$

після спрощення отримаємо $\beta + 2\alpha \vee 1$, з обмежень зони відомо, що $\beta + 5\alpha \geq 4$. З цих обмежень випливає, що $\beta + 2\alpha \geq 1$, тобто за обмеженнями зони (4;1)

$$\|f\|_d \geq |||f|||_d.$$

Норми (3;1):

$$\begin{cases} \|f\|_d = \frac{2}{9}(1 + \alpha + 2\beta), \\ |||f|||_d = \frac{1-\alpha}{2}. \end{cases}$$

Порівняємо норми:

$$\frac{2}{9}(1 + \alpha + 2\beta) \vee \frac{1 - \alpha}{2},$$

після спрощення отримаємо $13\alpha + 8\beta \vee 5$, з обмежень зони відомо, що $\beta + 2\alpha \geq 1$. З цих обмежень випливає, що $13\alpha + 8\beta \geq 5$, тобто за обмеженнями зони (3;1)

$$\|f\|_d \geq |||f|||_d.$$

Норми (2;1):

$$\begin{cases} \|f\|_d = \frac{2}{9}(2 - \alpha + \beta), \\ |||f|||_d = \frac{1-\alpha}{2}. \end{cases}$$

Порівняємо норми:

$$\frac{2}{9}(2 - \alpha + \beta) \vee \frac{1 - \alpha}{2},$$

після спрощення отримаємо $5\alpha + 4\beta \vee 1$, з обмежень зони відомо, що $\frac{5}{4}\alpha + \beta \geq \frac{1}{4}$, помножимо цю нерівність на 4, та отримаємо наше спрощене рівняння. З цих обмежень випливає, що $5\alpha + 4\beta \geq 1$, тобто за обмеженнями зони (2;1)

$$\|f\|_d \geq |||f|||_d.$$

Норми (1;1):

$$\begin{cases} \|f\|_d = \frac{1-\alpha}{2}, \\ \| \|f\| \|_d = \frac{1-\alpha}{2}. \end{cases}$$

Бачимо, що $\|f\|_d$ та $\| \|f\| \|_d$ співпадають, тому одразу можемо сказати, що за обмеженнями зони (1;1)

$$\|f\|_d = \| \|f\| \|_d$$

4.4.3 Зони 7-9

Розглядаємо зони (4;2), (3;2) та (2;2).

Назва зони	Обмеження	Графік
(4;2)	$\begin{cases} \beta + 5\alpha \geq 4, \\ \beta - \frac{5}{4}\alpha \leq -\frac{1}{4}, \\ \beta - 2\alpha \geq -1. \end{cases}$	
(3;2)	$\begin{cases} \beta - \frac{5}{4}\alpha \leq -\frac{1}{4}, \\ \beta + 2\alpha \geq 1, \\ \beta - 2\alpha \geq -1, \\ \beta + 5\alpha \leq 4. \end{cases}$	
Продовження на наступній сторінці		

Назва зони	Обмеження	Графік
(2;2)	$\begin{cases} \beta - \frac{5}{4}\alpha \leq -\frac{1}{4}, \\ \beta + 2\alpha \leq 1. \end{cases}$	

Норми (4;2):

$$\begin{cases} \|f\|_d = \frac{\alpha + \beta}{2}, \\ |||f|||_d = \frac{2}{9}(2 - \alpha - \beta). \end{cases}$$

Порівняємо норми:

$$\frac{\alpha + \beta}{2} \vee \frac{2}{9}(2 - \alpha - \beta),$$

після спрощення отримуємо $13\alpha + 5\beta \vee 8$, з обмежень зони відомо, що $\beta + 5\alpha \geq 4$. З цих обмежень випливає, що $13\alpha + 5\beta \geq 8$, тобто за обмеженнями зони (4;2)

$$\|f\|_d \geq |||f|||_d.$$

Норми (3;2):

$$\begin{cases} \|f\|_d = \frac{2}{9}(1 + \alpha + 2\beta), \\ |||f|||_d = \frac{2}{9}(2 - \alpha - \beta). \end{cases}$$

Порівняємо норми:

$$\frac{2}{9}(1 + \alpha + 2\beta) \vee \frac{2}{9}(2 - \alpha - \beta),$$

після спрощення отримуємо $2\alpha + 3\beta \vee 1$, з обмежень зони відомо, що $\beta + 2\alpha \geq 1$. З цих обмежень випливає, що $2\alpha + 3\beta \geq 1$, тобто за обмеженнями

зони (3;2)

$$\|f\|_d \geq \| \|f\| \|_d.$$

Норми (2;2):

$$\begin{cases} \|f\|_d = \frac{2}{9}(2 - \alpha + \beta), \\ \| \|f\| \|_d = \frac{2}{9}(2 - \alpha - \beta). \end{cases}$$

Порівняємо норми:

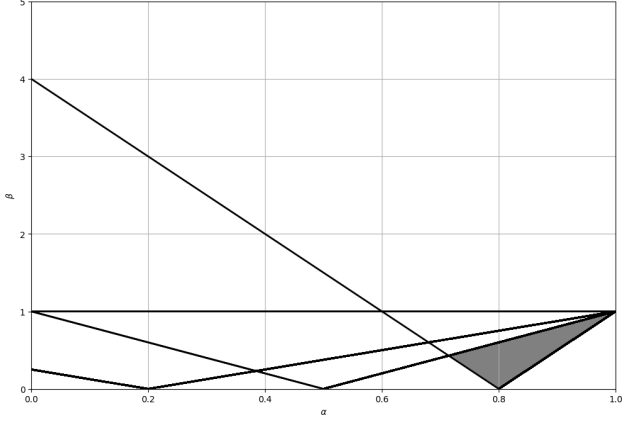
$$\frac{2}{9}(2 - \alpha + \beta) \vee \frac{2}{9}(2 - \alpha - \beta),$$

після спрощення отримаємо $2\beta \vee 0$. Відомо, що $\beta \geq 0$, звідси випливає, що за обмеженнями зони (2;2)

$$\|f\|_d \geq \| \|f\| \|_d.$$

4.4.4 Зони 10 та 11

Норми (4;3) та (3;3).

Назва зони	Обмеження	Графік
(4;3)	$\begin{cases} \beta + 5\alpha \geq 4, \\ \beta - 5\alpha \geq -4, \\ \beta - 2\alpha \leq -1. \end{cases}$	
Продовження на наступній сторінці		

Назва зони	Обмеження	Графік
(3;3)	$\begin{cases} \beta - 2\alpha \leq -1, \\ \beta + 5\alpha \leq 4. \end{cases}$	

$\|f\|_d$ та $\| \|f\| \|_d$ для зони (4;3):

$$\begin{cases} \|f\|_d = \frac{\alpha + \beta}{2}, \\ \| \|f\| \|_d = \frac{2}{9}(1 + \alpha - 2\beta). \end{cases}$$

Порівняємо норми:

$$\frac{\alpha + \beta}{2} \vee \frac{2}{9}(1 + \alpha - 2\beta),$$

після спрощення отримаємо $5\alpha + 17\beta \vee 4$, з обмежень зони відомо, що $\beta + 5\alpha \geq 4$. З цих обмежень випливає, що $5\alpha + 17\beta \geq 4$, тобто за обмеженнями зони (4;3)

$$\|f\|_d \geq \| \|f\| \|_d.$$

Норми (3;3):

$$\begin{cases} \|f\|_d = \frac{2}{9}(1 + \alpha + 2\beta), \\ \| \|f\| \|_d = \frac{2}{9}(1 + \alpha - 2\beta). \end{cases}$$

Порівняємо норми:

$$\frac{2}{9}(1 + \alpha + 2\beta) \vee \frac{2}{9}(1 + \alpha - 2\beta),$$

після спрощення отримаємо $4\beta \vee 0$. $\beta \geq 0$, тобто за обмеженнями зони (3;3)

$$\|f\|_d \geq |||f|||_d.$$

4.4.5 Зона 12

Норми (4;4).

Назва зони	Обмеження	Графік
(4;4)	$\beta - 5\alpha \leq -4$	

$\|f\|_d$ та $|||f|||_d$ для зони (4;4):

$$\begin{cases} \|f\|_d = \frac{\alpha + \beta}{2}, \\ |||f|||_d = \frac{\alpha - \beta}{2}. \end{cases}$$

Порівняємо норми:

$$\frac{\alpha + \beta}{2} \vee \frac{\alpha - \beta}{2},$$

після спрощення отримаємо $2\beta \vee 0$. Знаємо, що $\beta \geq 0$, тобто за обмеженнями зони (4;4)

$$\|f\|_d \geq |||f|||_d.$$

4.4.6 Об'єднання результатів

Провівши порівняння норм у всіх 12 зонах, бачимо, що в кожній зоні виконується

$$\|f\|_d \geq |||f|||_d.$$

У зоні $(1; 1)$ норми збігаються ($\|f\|_d = \|f\|_d$), а в решті зон $\|f\|_d > \|f\|_d$, за винятком граничних випадків, коли $\alpha = 0$ або $\beta = 0$.

Отже, для будь-яких $\alpha \in [0; 1]$ та $\beta \geq 0$ нерівність $\|f\|_d \geq \|f\|_d$ виконується. Це підтверджує, що досліджувана нерівність справедлива для триступінчастої функції.

ВИСНОВОК

Метою роботи було дослідити нерівність $\|f\|_d \geq \| \|f\| \|_d$ для дискретних ступінчастих функцій. В ході дослідження:

- Було розглянуто поняття середнього коливання для дискретних функцій та властивості ВМО-норм;
- Детально проаналізовано випадки двоступінчастих і триступінчастих функцій;
- Для триступінчастих функцій виду $(1, \alpha, -\beta)$ досліджено всі можливі співвідношення параметрів.

Обмеження:

- Повне доведення для довільного числа ступенів залишається відкритою проблемою.

Перспективи:

- Можливість узагальнення методів на функції з більшою кількістю ступенів.

Таким чином, хоча повного доведення для загального випадку отримати не вдалося, робота містить суттєві результати для важливих частинних випадків та створює основу для подальших досліджень.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Korenovskyi A. Mean Oscillations and Equimeasurable Rearrangements of Functions. — Heidelberg (Berlin) : Springer-Verlag, 2007. — 188 p.
- [2] Riesz F. Sur l'existence de la dérivée des fonctions monotones et sur quelques problèmes qui s'y rattachent // Acta Sci. Math. Szeged. — 1932. — Vol. 5. — P. 208–221.
- [3] Klemes I. A mean oscillation inequality // Proc. Amer. Math. Soc. — 1985. — Vol. 93, No 3. — P. 497–500.
- [4] Korenovskyi A., Shanin R. On one property of the mean-arithmetic oscillations of a monotone sequence // Ukrainian Mathematical Journal. — 2022. — Vol. 74, No 4. — pp. 516-524.